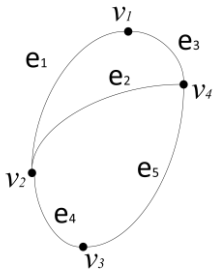
BAB II
KAJIAN PUSTAKA

A. Graf

1. Pengertian Graf

Definisi 2.1.1(Chartrand dan Lesniak, 1996:1)

Sebuah graf G adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang dinamakan simpul dengan sebuah himpunan pasangan tidak berurutan dari simpul-simpul yang berbeda di G yang disebut rusuk. Himpunan simpul dinotasikan $V(G)$ dan himpunan rusuk dinotasikan $E(G)$.



Gambar 2.1. Graf G_1

Contoh :

pada graf G_1, maka :

$V(G_1) = \ v_1, v_2, v_3, v_4$

$E(G_1) = \ \ v_1, v_2 \ , \ v_2, v_3 \ , \ v_3, v_4 \ , \ v_1, v_4 \ , (v_2, v_4) \ = \ e_1, e_4, e_5, e_3, e_2$

Definisi 2.1.2 (Wilson,1985:11)

Dua simpul v_1 dan v_2 dikatakan berikatan *(adjacent)* jika terdapat sebuah rusuk yang menghubungkannya, kemudian misalkan terdapat $e = \{v_1, v_2\}$, maka rusuk e hadir pada simpul v_1 dan v_2.

Contoh :

Pada Gambar 2.1 pada graf G_1 , simpul v_1 berikatan dengan simpul v_2 dan v_4, tetapi simpul v_4 tidak berikatan dengan simpul v_3. Sementara itu rusuk e_1 hadir pada simpul v_1 dan v_2, rusuk e_2 hadir pada simpul v_2 dan v_4, dll.

2. Jenis - Jenis Graf

a. Berdasarkan Ada atau Tidaknya Arah

Berdasarkan ada atau tidaknya arah, graf dapat dikolompokkan menjadi dua yaitu Graf Tidak Berarah /*undirected graph* dan Graf Berarah/*directed graph* atau biasa disebut digraf

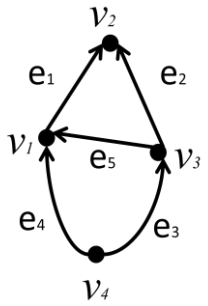
Definisi 2.1.3(Chartrand dan Lesniak,1996:25)

Sebuah digraf adalah sebuah himpunan berhingga yang terdiri dari objek-objek yang disebut dengan simpul bersama dengan himpunan pasangan berurutan dari simpul-simpul yang berbeda di H yaitu rusuk yang berarah. Simpul dari H dinotasikan $V(H)$ dan rusuk dari H dinotasikan $E(H)$.

Dari definisi di atas dapat dikatakan bahwa digraf adalah graf yang mempunyai rusuk yang berarah Sedangkan jika tidak punya arah maka disebut dengan graf tidak berarah atau *undirected graph* yaitu sesuai dengan Definisi 2.1.1

Contoh :

Contoh graf tidak berarah adalah pada Gambar 2.1, sedangkan graf berarah adalah sebagai berikut:



Gambar 2.2. Graf G_2: Graf Berarah

b. Berdasarkan Ada Atau Tidaknya *Loop* dan Rusuk Ganda

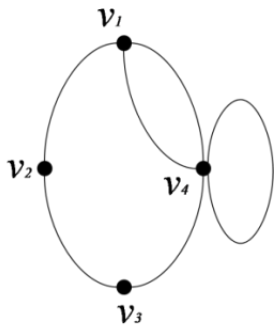
Berdasarkan ada atau tidaknya *loop* dan rusuk ganda dikelompokkan menjadi Graf Sederhana dan Graf Tidak Sederhana.

Definisi 2.1.4(Bondy dan Murty,1982:3)

Graf dikatakan sederhana jika tidak memuat gelang *(loop)* maupun rusuk ganda. Sedangkan graf yang memuat rusuk ganda atau gelang dinamakan graf tidak sederhana

Contoh :

Contoh graf sederhana adalah graf pada Gambar 2.1, sedangkan contoh graf tidak sederhana adalah pada Gambar 2.3.



Gambar 2.3. Graf G_3

3. Derajat Simpul *(Degree vertex)*

Definisi 2.1.5(Rosen, 2012:652)

Derajat *(degree)* dari suatu graf tidak berarah adalah banyaknya rusuk yang hadir pada simpul tersebut. Jika terdapat *loop* pada simpul tersebut maka derajat simpul tersebut dihitung dua kali. Derajat dari simpul v dinotasikan $\deg(v)$

Contoh :

Graf G_3 pada Gambar 2.3 derajat masing-masing simpulnya adalah $\deg\ v_1 = 2,\ \deg\ v_2 = 2,\ \deg\ v_3 = 3,\ \deg\ v_4 = 3,\ \deg\ v_5 = 2,$ $\deg\ v_6 = 1, \deg\ v_7 = 1, \deg\ v_8 = 2, \deg\ v_9 = 0,$ dan $\deg\ v_{10} = 0$

Teorema 2.1.6(Chartrand dan Lesniak, 1996:3)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sebuah graf tidak berarah dengan m rusuk, maka :

$$2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$$

Bukti :

Setiap menghitung derajat suatu simpul di G, maka suatu rusuk dihitung 1 kali. Karena setiap rusuk menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua simpul, rusuk akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat simpul graf G sama dengan 2 kali jumlah rusuk graf G.

Sehingga terbukti bahwa $2m = \sum_{i=1}^{n} \deg(v_i)$

■

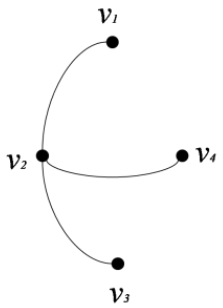
4. Subgraf

Definisi 2.1.7(Chatrand dan Lesniak, 1996: 4)

Sebuah graf H disebut subgraf (graf bagian) dari graf G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

Contoh :

Pada Gambar 2.1 pada graf G_1 maka salah satu subgrafnya adalah :



Gambar 2.4. Subgraf G_1

B. Keterhubungan

1. Jalan, Jejak, Lintasan, Sirkuit, dan Sikel.

Definisi 2.2.1(Grimaldi, 2004:515)

Misalkan v_0 dan v_n adalah simpul dari sebuah graf G. Maka jalan *(Walk)* pada graf G (graf tanpa loop) dari v_0 ke v_n adalah sebuah barisan berhingga:

$$W = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n)$$

Dari simpul-simpul dan rusuk-rusuk dari G, yang dimulai pada simpul v_0 dan berakhir pada simpul v_n dan melibatkan n rusuk $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, dengan $1 \leq i \leq n$. Panjang dari jalan adalah n, yaitu banyaknya rusuk pada jalan. (Ketika $n = 0$ dan $v_0 = v_n$, maka jalan ini disebut dengan jalan kosong. Sebuah jalan disebut tertutup jika simpul awal dan simpul akhirnya sama

yaitu $v_0 = v_n$ dengan $n > 1$. Maka jalan disebut terbuka jika simpul awal dan simpul akhirnya berbeda, yaitu $v_0 \neq v_n$.

Contoh :

Pada graf G_1, $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_3, v_1)$ adalah sebuah jalan dengan panjang 3, Sedangkan $W = (v_1, e_1, v_2, e_4, v_3, e_5, v_4)$ adalah sebuah jalan dengan panjang 4.

Definisi 2.2.2(Chartrand dan Lesniak, 1996:17)

Misalkan W adalah jalan pada graf G, maka jejak *(Trail)* adalah jalan yang tidak terdapat rusuk yang berulang.

Contoh :

Pada graf G_1, contoh jejak yaitu: $W = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_4, e_5, v_3, e_4, v_2)$

Definisi 2.2.3(Chatrand dan Lesniak, 1996:17)

Misalkan W adalah jalan pada graf G, maka lintasan *(Path)* adalah jalan yang tidak terdapat simpul yang berulang.

Contoh :

Pada graf G_1, contoh lintasan yaitu : $W = (v_3, e_5, v_4, e_2, v_2, e_1, v_1)$

Definisi 2.2.4(Chartrand dan Lesniak, 1996:18)

Sirkuit adalah jejak tertutup atau dapat dikatakan jalan tertutup yang tidak terdapat rusuk berulang.

Contoh :

Pada graf G_1, contoh sirkuit yaitu : $W = (v_4, e_2, v_2, e_4, v_3, e_5, v_4)$

Definisi 2.2.5(Grimaldi, 2004:516)

Sikel adalah lintasan tertutup atau dapat dikatakan jalan tertutup yang tidak terdapat simpul yang berulang

Contoh :

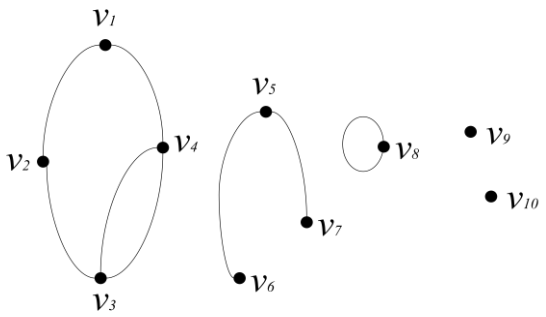
Pada graf G_1, contoh sikel yaitu : $W = (v_2, e_2, v_4, e_3, v_1, e_1, v_2)$

2. Graf Terhubung, Tak Terhubung, dan Komponen Terhubung

Definisi 2.2.6(Grimaldi, 2003:517)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tidak berarah. Graf G disebut terhubung jika terdapat lintasan pada setiap dua simpul di G, jika tidak terdapat lintasan maka graf tersebut tidak terhubung atau *disconnected*.

Contoh graf terhubung adalah pada Gambar 2.1 yaitu graf G_1 sedangkan graf tidak terhubung yaitu :



Gambar 2.5. Graf G_4: Graf Tidak Terhubung

Definisi 2.2.7(Chartrand dan Lesniak,1997:18)

Komponen terhubung dari graf G adalah subgraf terhubung dari graf G yang tidak memuat subgraf terhubung yang lain dari graf G. Misalkan F dan H adalah subgraf terhubung dari G dengan $F \subseteq H \subseteq G$ dengan $V(F) \subseteq V(H)$

dan $E(F) \subseteq E(H)$, maka $F = H$. Banyaknya komponen dari G dinotasikan dengan $k(G)$

Contoh:

Pada graf tak terhubung pada Gambar 2.5 yaitu graf G_4 memuat 5 komponen, dituliskan $k\ G\ = 5$, misalnya saja $G_{4\ 1}$, $G_{4\ 2}$, $G_{4\ 3}$, $G_{4\ 4}$, dan $G_{4\ 5}$. Graf $G_{4\ 1}$ memuat v_1, v_2, v_3, v_4, dan v_5. Graf $G_{3\ 2}$ memuat v_5, v_6, dan v_7. Graf $G_{4\ 3}$ memuat v_8. Graf $G_{4\ 4}$ memuat v_9. Graf $G_{4\ 5}$ memuat v_{10}.

C. Graf Khusus

Beberapa graf khusus yang akan dijabarkan adalah graf Kosong, graf lengkap, graf partisi, graf tripartisi, dan graf tripartisi lengkap.

1. Graf Kosong/ *Null Graph*

Definisi 2.3.1(Wilson, 1996:17)

Graf Kosong *(Null Graph)* adalah graf yang himpunan rusuknya kosong. Graf kosong dengan n simpul dinotasikan N_n.

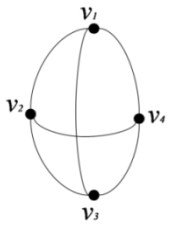


Gambar 2.6. Graf N_4

2. Graf Lengkap *(Complete Graph)*

Definisi 2.3.2(Chartrand dan Lesniak, 1996: 6)

Sebuah graf disebut graf lengkap jika setiap dua titik yang berbeda dari graf tersebut saling terhubung. Graf lengkap dengan n titik dinotasikan dengan K_n



Gambar 2.7. Graf lengkap K_4

3. Graf Tripartisi Lengkap *(Complete Tripartite Graph)*

Definisi 2.3.3(Chatrand dan Lesniak,1996:8)

Sebuah graf G dikatakan k-partisi dengan $k \geq 1$, jika himpunan simpul $V(G)$ dapat dipartisi menjadi k himpunan simpul yaitu V_1, V_2, …., V_k(yang disebut dengan himpunan partisi) sedemikian sehingga setiap anggota dari $E(G)$ menghubungkan sebuah simpul dari V_i ke sebuah simpul dari V_j, dengan $i \neq j$.

Definisi 2.3.4(Chatrand dan Lesniak,1996:8)

Graf k partisi lengkap G didefinisikan sebagai graf k partisi dengan himpunan partisinya $V_1, V_2, .., V_k$ itu mempunyai tambahan sifat yaitu jika $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $i \neq j$ maka $uv \in E(G)$. Jika $V_i = n_i$, maka graf tersebut dinotasikan $K(n_1, n_2, \dots, n_k)$ atau $K_{n_1,n_2,\dots,n_k}$.

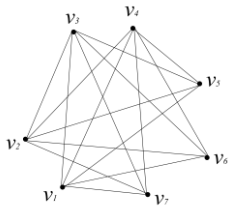
Definisi 2.3.5 (Bowles, 2004:2)

Graf tripartisi dilambangkan dengan $K_{p,q,r}$. Graf tripartisi adalah graf yang memuat tiga himpunan simpul, yaitu V_1, V_2, dan V_3, dengan $V_1 = p$, $V_2 = q$, dan $V_3 = r$, dengan p, q, dan r adalah banyaknya simpul pada masing-masing himpunan simpul. Simpul-simpul dalam suatu himpunan terhubung hanya ke simpul-simpul pada himpunan-himpunan yang lain.

Dalam hal ini simpul-simpul yang terdapat pada V_1 hanya terhubung ke simpul-simpul yang terdapat pada himpunan V_2 atau V_3.

Definisi 2.3.6 (Bowles, 2004:2)

Graf Tripartisi Lengkap adalah graf tripartisi yang semua simpul-simpul dari suatu himpunan terhubung ke semua simpul-simpul yang ada pada dua himpunan yang lain.



Gambar 2.8. Graf Tripartisi Lengkap $K_{2,2,3}$

Graf di atas adalah graf tripartisi lengkap $K_{2,2,3}$ maka menurut definisi:

$V_1 = \{v_1, v_2\}$, sehingga $V_1 = p = 2$,

$V_2 = v_3, v_4$, sehingga $V_2 = q = 2$

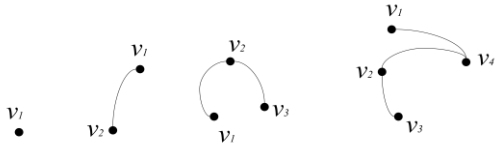
$V_3 = \{v_5, v_6, v_7\}$, sehingga $V_3 = r = 3$

D. Pohon *(Tree)*

1. Pengertian Pohon

Definisi 2.4.1 (Chartrand dan Lesniak, 1996:57)

Pohon adalah graf terhubung yang tidak memiliki sikel. Gambar 2.9 menunjukkan pohon dengan 1,2,3, dan 4 simpul.



Gambar 2.9. Pohon dengan 1,2,3, dan 4 simpul

Teorema 2.4.2 (Rosen, 2012:752)

Sebuah pohon dengan banyaknya simpul n mempunyai $n-1$ rusuk.

Bukti :

Misalkan banyaknya rusuk adalah m sehingga dapat dituliskan : $m = n-1$

Akan ditunjukkan bahwa $m = n-1$ dengan menggunakan induksi matematika.

a. Untuk $n = 1$ maka $m = n-1 = 1-1 = 0$ yaitu sebuah graf kosong, yaitu pohon dengan 1 simpul.
b. Asumsikan bahwa $m = n-1$ berlaku untuk semua pohon dengan banyaknya simpul n dan banyaknya rusuk m dengan $n \geq 1$
c. Akan ditunjukkan bahwa $m = n-1$ berlaku untuk dengan banyaknya simpul $n+1$

$$m = n-1$$
$$m+1 = n+1-1$$
$$m = n+1-1-1$$
$$m = n-1$$

Jadi terbukti bahwa sebuah pohon mempunyai $n-1$ rusuk

■

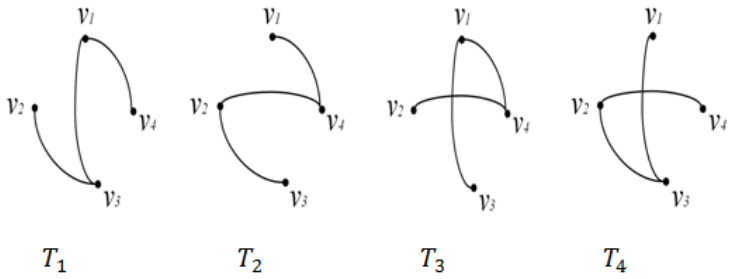
2. Pohon Perentang *(Spanning Tree)*

Definisi 2.4.3 (Rosen,2014:785)

Pohon perentang dari graf G adalah subgraf dari G yang merupakan pohon yang memuat setiap simpul pada graf G

Contoh :

Pohon perentang dari graf K_4 yaitu :



Gambar 2.10. Pohon Perentang pada Graf K_4

Selanjutnya suatu graf memiliki banyaknya pohon perentang yang berbeda-beda. Untuk mengetahui banyaknya pohon perentang suatu graf dapat dilakukan secara manual dengan mendaftarkan satu persatu pohon perentang graf tersebut. Selain dengan cara manual menghitung banyaknya pohon perentang suatu graf juga dapat dilakukan dengan metode *Deletion-Contraction.*

Dasar dalam perhitungan *Deletion-Contraction* adalah dengan membagi graf menjadi dua bagian. Bagian yang pertama yaitu pohon perentang dari graf yang akan dihitung pohon perentangnya tanpa rusuk e, sedangkan bagian yang lain yaitu pohon perentang dari graf yang akan dihitung pohon perentangnya dengan memampatkan rusuk e.

Operasi *Deletion-Contraction* (Penghapusan-Pemampatan) pada graf G menurut Sugeng Mardiyono (1996:53) yaitu :

1. Penghapusan yaitu menghapus rusuk e dari graf G, sehingga graf yang dihasilkan dari operasi ini disimbolkan dengan $(G - e)$.

2. Pemampatan, yaitu memampatan rusuk e pada graf G. Misalkan rusuk e dibentuk oleh dua simpul yaitu v_1 dan v_2, kemudian rusuk e dihapus dari graf G, setelah itu v_1 dan v_2 dihimpitkan. Sehingga graf yang dihasilkan dari operasi ini disimbolkan $(G.e)$

Contoh :



Gambar 2.11. Graf $G.e$ dan graf $(G - e)$ dari graf G

Kemudian metode *Deletion-Contraction* akan digunakan untuk menghitung banyaknya pohon perentang pada suatu graf.

Teorema 2.4.4 (Mardiyono, 1996:54)

Misalkan terdapat sebuah graf G, dan $\tau(G)$ adalah banyaknya pohon perentang dari graf G. Jika $e \in E(G)$, dengan e bukan berupa *loop*. maka:

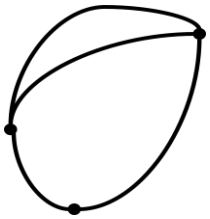
$$\tau\ G\ = \tau\ G - e\ + \tau(G.e)$$

Bukti :

Pohon perentang dari graf G terdiri dari pohon perentang yang tidak memuat rusuk e dan pohon perentang yang memuat rusuk e. Pohon perentang dari graf graf G yang tidak memuat rusuk e yaitu $G - e$ adalah $\tau\ G - e$.

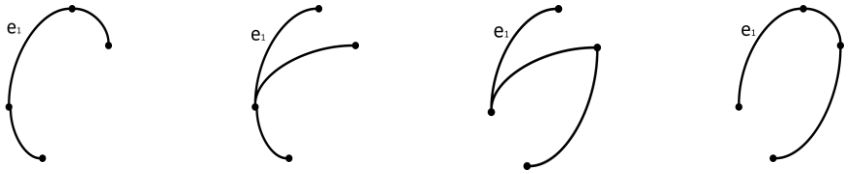
Kemudian untuk setiap pohon perentang T di G yang memuat rusuk e, terdapat korespondensi 1-1 dengan pohon perentang $T.e$ di $G.e$, sehingga $\tau(G.e)$ sama dengan banyaknya pohon perentang pada graf G yang memuat rusuk e.

Misalkan pada graf G_1 pada Gambar 2.1 dipilih rusuk e_1, sehingga banyaknya pohon perentang pada graf G_1 yang memuat rusuk e_1 sama dengan banyaknya pohon perentang pada graf $G_1.e_1$. Dengan :



Gambar 2.12. Graf $G_1.e_1$

Pohon perentang di G_1 yang memuat rusuk e_1 yaitu :



$T_1(G_1)$ $T_2(G_1)$ $T_3(G_1)$ $T_4(G_1)$

Gambar 2.13. Pohon perentang di G_1 yang memuat rusuk e_1

Pohon perentang di $G_1.e_1$, yaitu:



$T_1(G_1.e_1)$ $T_2(G_1.e_1)$ $T_3(G_1.e_1)$ $T_4(G_1.e_1)$

Gambar 2.14. Pohon perentang di graf $G_1.e_1$

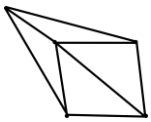
■

Langkah-langkah perhitungan banyaknya pohon perentang dengan metode *Deletion-Contraction* menurut Sugeng Mardiyono (1996:53-55) yaitu :

1. Menentukan suatu rusuk e dari graf tersebut.
2. Membentuk graf $(G - e)$ dengan cara menghapus rusuk e pada graf G.
3. Membentuk graf $G.e$ dengan cara memampatan rusuk e pada graf G.
4. Menghitung banyaknya pohon perentang pada graf G sesuai dengan rumus pada Teorema 2.4.4
5. Mengulangi langkah 1 sampai dengan 4 untuk masing-masing graf yang telah dihasilkan.
6. Mengulangi langkah 5 sampai diperoleh graf yang paling sederhana.

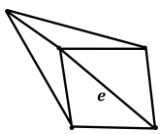
Contoh :

Misalkan terdapat graf G_5 sebagai berikut :



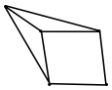
Gambar 2.15. Graf G_5

Kemudian akan dihitung banyaknya pohon perentang dari graf tersebut. Sebelumnya akan ditentukan rusuk e pada graf tersebut.

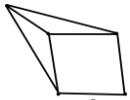


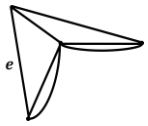
Maka :

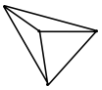
$\tau\ G\ = \tau\ G - e\ + \tau(G.e)$

$\tau\ G\ = \tau$  $+ \tau$ 

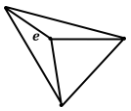
Kemudian tentukan e yaitu rusuk yang dihapus dan dipampatkan dari graf baru yang didapatkan sehingga menjadi :

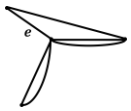
$\tau\ G\ = \tau$ 

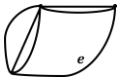
$+ \tau$ 

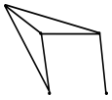
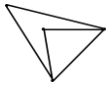
$\tau\ G\ = \tau$  $+ \tau$  $+ \tau$  $+ \tau$ 

Kemudian tentukan e yaitu rusuk yang dihapus dan dipampatkan dari graf baru yang didapatkan sehingga menjadi :

$\tau\ G\ = \tau$  $+ \tau$ 

$+ \tau$ 

$+ \tau$ 

$\tau\ G\ = \tau$  $+ \tau$  $+ \tau$  $+ \tau$ 

$+ \tau$  $+ \tau$  $+ \tau$ 

$\tau\ G\ = 8 + 8 + 8 + 4 + 6 + 6 + 5$

$\tau\ G\ = 45$

E. Matriks

1. Matriks dan Operasi Matriks

Sebelum membahas lebih jauh tentang matriks terlebih dahulu akan di kemukakan definisi dari matriks.

Definisi 2.5.1(Anton,1991:22)

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks.

Ukuran matriks dijelaskan dengan menyatakan banyaknya baris (garis horisontal) dan banyaknya kolom (garis vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Contoh :

$$A_{3x2} = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{matrix}$$

Matriks pada contoh di atas mempunyai 3 baris dan 2 kolom sehingga ukurannya adalah 3 kali 2(ditulis 3 x 2). Angka pertama selalu menunjukkan banyaknya baris dan angka kedua menunjukkan banyaknya kolom.

2. Operasi Baris Elementer (OBE) dan Operasi Kolom Elementer (OKE)

Setelah membahas tentang definisi matriks dan operasi matriks selanjutnya akan diperkenalkan sebuah metode eliminasi yang dikenal dengan nama operasi baris elementer (OBE).

Definisi 2.5.2 (Anton, 1991:5)

Operasi baris elementer merupakan operasi aritmatika (penjumlahan dan perkalian) yang dikenakan pada setiap unsur dalam suatu baris pada sebuah matriks. Operasi baris elementer meliputi :

1) Pertukaran baris
2) Perkalian suatu baris dengan konstanta bukan nol
3) Penjumlahan suatu baris dengan baris lainnya

Definisi 2.5.3 (Lipschutz dan Lipson, 2001:76)

Operasi kolom elementer adalah operasi yang sama dengan operasi baris elementer namun dikenakan pada setiap unsur dalam suatu kolom pada sebuah matriks. Operasi kolom elementer meliputi :

1) Pertukaran kolom

2) Perkalian suatu kolm dengan konstantan bukan nol

3) Penjumlahan suatu kolom dengan kolom lainnya

3. Matriks Diagonal

Definisi 2.5.4 (Budhi, 1997:36)

Matriks berukuran nxn yang entri bukan nolnya hanya ada pada diagonal, yaitu entri pada (i, i) disebut matriks diagonal.

Contoh :

$$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{matrix}$$

F. Determinan

1. Pengertian Determinan

Definisi 2.6.1 (Anton dan Rorres, 2010:93)

Misalkan terdapat matriks : $A = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$

Determinan sebuah matriks A dilambangkan dengan $\det(A)$, yang dituliskan:

$$\det(A) = ad - bc$$

2. Perhitungan Determinan Matriks

a. Menggunakan ekspansi kofaktor

Sebelum membahas tentang cara menghitung determinan dengan menggunakan ekspansi kofaktor terlebih dahulu akan dikemukakan definisi dari kofaktor. Berikut adalah definisi dari kofaktor.

Definisi 2.6.2 (Anton,1991:77)

Jika A adalah suatu matriks *n* x *n*, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang didapatkan dengan menghapus baris ke i dan kolom ke j dari matriks A. Bilangan $-1^{\ i+j} M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij} .Atau dapat dituliskan :

$$C_{ij} = \ -1^{\ i+j} M_{ij}$$

Definisi 2.6.3(Hadley,1997:90)

Misalkan A adalah matriks nxn, maka menurut definisi dari determinan maka determinan dari matriks A dapat dituliskan :

$$\det A \ = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Dengan i adalah sembarang baris dari matriks A.

Dalam menggunakan ekspansi kofaktor ini hanya satu elemen dari setiap baris dan kolom dari A yang dapat digunakan. Misalkan ekspansi baris pertama, maka entri-entri yang akan digunakan hanyalah entri-entri pada baris pertama pada matriks A. Hal ini juga berlaku untuk ekspansi kolom. Sehingga dapat dituliskan :

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \ldots + a_{in}C_{in}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang baris ke-i)

Dan

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \ldots + a_{nj}C_{nj}$$

(ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke-j)

Contoh :

Hitunglah determinan matriks berikut :

$$B = \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -1 \end{matrix}$$

$$\det B = \det \begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{matrix}$$

$$= 3 \det \begin{matrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{matrix} + -1 \det \begin{matrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{matrix} + 0 \det \begin{matrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{matrix}$$

$$= 3\ -4\ +\ -1\ \ -11$$

$$= (-1)$$

b. Menggunakan reduksi baris

Metode ini penting untuk menghindari perhitungan panjang yang terlibat dalam penerapan definisi determinan secara langsung. Gagasan utama metode ini adalah untuk menerapkan operasi baris elementer.

Contoh :

Hitunglah $\det A$ dengan :

$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}$$

Maka dengan mereduksi didapatkan

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{matrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix} \quad \text{maka } \det A = -\det \begin{matrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{R_1}{3}} \begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix} \quad \text{maka } \det A = -3 \det \begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{matrix}$$

$$\overset{-2\,R_1+R_3}{\begin{matrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&5\end{matrix}} \text{ maka det } A = -3\det\begin{matrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&5\end{matrix}$$

$$\overset{-10\,R_2+R_3}{\begin{matrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&-55\end{matrix}} \text{ maka det } A = -3\det\begin{matrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&-55\end{matrix}$$

$$\overset{\frac{R_3}{-55}}{\begin{matrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&1\end{matrix}} \text{ maka det } A = -3\ -55\det\begin{matrix}1&-2&3\\0&1&5\\0&0&1\end{matrix}$$

$$= -3\ -55\ (1)$$

$$= 165$$

3. Sifat Determinan

Sifat determinan yang akan dibahas adalah determinan matriks yang dua barisnya ditukar.

Teorema 2.6.4 (Anton, 1991: 67)

Jika matriks B adalah matriks yang didapatkan dari A dengan menukarkan dua baris (kolom) dari A maka $\det B = -\det A$

Bukti :

Misalkan terdapat matriks : $A = \begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix}$ dengan $\det(A) = ad - bc$

kemudian dengan melakukan pertukaran baris : $\begin{matrix}a&b\\c&d\end{matrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\begin{matrix}c&d\\a&b\end{matrix}}$,

misalkan $B = \begin{matrix}c&d\\a&b\end{matrix}$, maka :

$$\det(B) = bc - ad$$
$$= -(ad - bc)$$
$$= -\det(A)$$

Kemudian jika pertukaran itu terjadi sebanyak n kali maka dapat dituliskan :

$A \overset{R_i \leftrightarrow R_j}{\underset{n\ kali}{\qquad}} B$, maka $\det(B) = (-1)^n \det(A)$

■

4. Matriks *Equi-Cofactor*

Definisi 2.6.5 (Chen, 1976:225)

Sebuah matriks berukuran nxn disebut sebagai matriks *Equi-Cofactor* jika hasil penjumlahan entri-entri setiap baris dan setiap kolom dari matriks tersebut adalah 0 (nol).

Lemma 2.6.6 (Chen, 1976:226)

Misalkan A adalah matriks berukuran nxn, jika hasil penjumlahan entri-entri dari setiap baris dan setiap kolom dari matriks A adalah 0, maka kofaktor dari entri-entri setiap baris dari matriks A adalah sama.

Bukti :

Misalkan $A = \ a_{ij}$ dengan ukuran nxn,

Kemudian pilih kofaktor pada baris ke-w, dan pilih kolom ke-r dan kolom ke-s, serta asumsikan bahwa $s > r$

Akan dibuktikan bahwa : $C_{ir} = C_{is}$, dengan $i = 1,2,3, \dots, n$

Kemudian pilih $i = w$

Sehingga akan dibuktikan bahwa :

Kofaktor ke-wr dari matriks $A =$ kofaktor ke-ws dari matriks A

Atau dapat dituliskan : $C_{wr} = C_{ws}$

Dengan :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & u & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1u} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2u} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{rr} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(u-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)u} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks A di atas dapat dituliskan bahwa :

$C_{wr} = -1^{\,w+r} M_{wr} = -1^{\,w+r} \det A_{wr}$ .....(1)

$C_{ws} = -1^{\,w+s} M_{ws} = -1^{\,w+s} \det A_{ws}$ .....(2)

Dengan :

$$A_{wr} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{rr} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(u-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Dan

$$A_{ws} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{rr} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

Lalu pada matriks A_{ur} jumlahkan semua entri-entrinya pada setiap baris, maka hasilnya yaitu :

$-[a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{\,r-1\;r}, a_{rr}, \dots, a_{\,s-1\;r}, a_{sr}, \dots, a_{\,w-1\;r}, a_{wr}, \dots, a_{nr}]$ ..... (3)

Sehingga matriks A_{ws} dapat dituliskan :

$$A_{ws} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{1k} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{2k} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{(r-1)k} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{rk} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{(s-1)k} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{sk} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{(w-1)k} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{wk} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{nk} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

Selanjutnya adalah menghitung determinan dari matriks A_{ws}. Perhitungan determinan matriks A_{ws} akan dilakukan dengan menerapkan operasi kolom elementer.

Iterasi 1 :

$c_r + c_1, c_r + c_2, \ldots, c_r + c_{(r-1)}, c_r + c_{(r+1)}, \ldots, c_r + c_{(s-1)}, c_r + c_s, \ldots, c_r + c_{(w-1)}, c_r + c_w, \ldots, c_r + c_n$

Diperoleh :

$$A_{ws}{}^{\#} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & (r-1) & r & \ldots & (s-1) & s & \ldots & (w-1) & w & \ldots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(r-1)} & -a_{1s} & \ldots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \ldots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(r-1)} & -a_{2s} & \ldots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \ldots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \ldots & a_{(r-1)(r-1)} & -a_{(r-1)s} & \ldots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \ldots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \ldots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{r(r-1)} & -a_{rs} & \ldots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \ldots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \ldots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \ldots & a_{(s-1)(r-1)} & -a_{(s-1)r} & \ldots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \ldots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \ldots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s(r-1)} & -a_{sr} & \ldots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \ldots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \ldots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \ldots & a_{(w-1)(r-1)} & -a_{(w-1)r} & \ldots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \ldots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \ldots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \ldots & a_{w(r-1)} & -a_{wr} & \ldots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \ldots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \ldots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(r-1)} & -a_{nr} & \ldots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \ldots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

Iterasi 2 :

$c_r \leftrightarrows c_{(r+1)}, c_r \leftrightarrows c_{(r+2)}, \ldots, c_r \leftrightarrows c_{(s-1)}$

Diperoleh :

$$A_{ws}{}^{*} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & \ldots & (r-1) & r & \ldots & (s-1) & s & \ldots & (w-1) & w & \ldots & n \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1(r-1)} & a_{1(s-1)} & \ldots & -a_{1s} & a_{1s} & \ldots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2(r-1)} & a_{1(s-1)} & \ldots & -a_{2s} & a_{2s} & \ldots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \ldots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)(s-1)} & \ldots & -a_{(r-1)s} & a_{(r-1)s} & \ldots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \ldots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{r(r-1)} & a_{r(s-1)} & \ldots & -a_{rs} & a_{rs} & \ldots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \ldots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \ldots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)(s-1)} & \ldots & -a_{(s-1)s} & a_{(s-1)s} & \ldots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \ldots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s(r-1)} & a_{s(s-1)} & \ldots & -a_{ss} & a_{ss} & \ldots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \ldots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \ldots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)(s-1)} & \ldots & -a_{(w-1)s} & a_{(w-1)s} & \ldots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \ldots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \ldots & a_{w(r-1)} & a_{w(s-1)} & \ldots & -a_{ws} & a_{ws} & \ldots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \ldots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n(r-1)} & a_{n(s-1)} & \ldots & -a_{ns} & a_{ns} & \ldots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

Dari iterasi kedua ini pertukaran baris terjadi sebanyak $(s-1-r)$, terlihat bahwa pada kolom ke-$(s-1)$ semua entri-entrinya bernilai negatif, sehingga menurut Teorema 2.6.4, determinan dari matriks A_{us} yaitu:

$$\det A_{ws} = -1^{\,s-1-r}\,-1\,\det A_{ws}{}^{**}$$

$= -1^{\ -1\ -s+1+r}\ (-1)\det {A_{ws}}^{**}$

$= -1^{\ -1\ (-s+1+r)}(-1)\det {A_{ws}}^{**}$

$= -1^{\ -s+1+r}(-1)\det {A_{ws}}^{**}$ ..... (4)

Dengan :

$$
{A_{ws}}^{**} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccccc}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1(s-1)} & \dots & a_{1s} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{1(s-1)} & \dots & a_{2s} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)(s-1)} & \dots & a_{(r-1)s} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\
a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{r(s-1)} & \dots & a_{rs} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)(s-1)} & \dots & a_{(s-1)s} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\
a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{s(s-1)} & \dots & a_{ss} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)(s-1)} & \dots & a_{(w-1)s} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\
a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{w(s-1)} & \dots & a_{ws} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{n(s-1)} & \dots & a_{ns} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Terlihat bahwa entri-entri pada matriks ${A_{ws}}^{**}$ sama dengan entri-entri pada matriks A_{wr}, sehingga ${A_{ws}}^{**} = A_{wr}$, sehingga :

$\det A_{ws} = -1^{\ -s+1+r}(-1)\det A_{wr}$ ..... (5)

Lalu masukkan (5) ke (2), sehingga diperoleh :

$C_{ws} = -1^{\ w+s}\det A_{ws}$

$= -1^{\ w+s}\ -1^{\ -s+1+r}(-1)\det A_{wr}$

$= -1^{\ w+r}\ -1^{\ 2}\det A_{wr}$

$= -1^{\ w+r}\det A_{wr}$

$= C_{wr}$

Karena $C_{ws} = C_{wr}$, maka terbukti bahwa $C_{is} = C_{ir}$

■

Teorema 2.6.7 (Chen, 1976 :226)

Jika A adalah matriks *Equi-Cofactor* maka semua kofaktor dari matriks A bernilai sama.

Bukti :

Dari Lemma 2.6.6 telah terbukti bahwa $C_{is} = C_{ir}$,

Dengan langkah yang sama pada pembuktian Lemma 2.6.6, kemudian pilih kofaktor pada kolom ke-w, dan pilih baris ke-r dan baris ke-s, serta asumsikan bahwa $s > r$

Akan dibuktikan bahwa : $C_{sj} = C_{rj}$, dengan $j = 1,2,3, \dots, n$

Kemudian pilih $j = w$. Sehingga akan dibuktikan bahwa :

Kofaktor ke-rw dari matriks $A =$ kofaktor ke-sw dari matriks A

$\Leftrightarrow C_{sw} = C_{rw}$

Dengan :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{rr} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks A dapat dituliskan bahwa :

$C_{rw} = -1^{\,r+w} M_{rw} = -1^{\,r+w} \det A_{rw}$ .....(1)

$C_{sw} = -1^{\,s+w} M_{sw} = -1^{\,s+w} \det A_{sw}$.....(2)

Dengan :

$$A_{rw} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{rr} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

Dan

$$A_{sw} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{r(r-1)} & a_{rr} & \dots & a_{r(s-1)} & a_{rs} & \dots & a_{r(w-1)} & a_{rw} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{w(u-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

Lalu pada matriks A_{rw}, jumlahkan semua entri-entrinya pada setiap kolom sehingga hasilnya yaitu :

$$-\ a_{r1}\quad a_{r2}\quad \dots\quad a_{r(r-1)}\quad a_{rr}\quad \dots\quad a_{r(s-1)}\quad a_{rs}\quad \dots\quad a_{r(w-1)}\quad a_{r(w+1)}\quad \dots\quad a_{n} \qquad \text{.....(3)}$$

Sehingga matriks A_{sw}, dapat dituliskan :

$$A_{sw} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{k1} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{k2} & \dots & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{k(r-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{kr} & \dots & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{k(s-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{ks} & \dots & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{k(w-1)} & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{kw} & \dots & -\sum_{k=1,k\neq r}^{n} a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

Selanjutnya adalah menghitung determinan dari matriks A_{sw}. Perhitungan determinan matriks A_{sw} akan dilakukan dengan menerapkan operasi baris elementer.

Iterasi 1 :

$b_r + b_1, b_r + b_2, \ldots, b_r + b_{(r-1)}, b_r + b_{(r+1)}, \ldots, b_r + b_{(s-1)}, b_r + b_s, \ldots, b_r + b_{(w-1)}, b_r + b_w, \ldots, b_r + b_n$

Sehingga menghasilkan :

$$A_{sw}^{\#} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccccccccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \dots & -a_{s(r-1)} & -a_{sr} & \dots & -a_{s(s-1)} & -a_{ss} & \dots & -a_{s(w-1)} & -a_{sw} & \dots & -a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(s-1)1} & a_{(s-1)2} & \dots & a_{(s-1)(r-1)} & a_{(s-1)r} & \dots & a_{(s-1)(s-1)} & a_{(s-1)s} & \dots & a_{(s-1)(w-1)} & a_{(s-1)w} & \dots & a_{(s-1)n} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{array}\right] \end{array}$$

Iterasi 2 :

$b_r \leftrightarrows b_{(r+1)}, b_r \leftrightarrows b_{(r+2)}, \ldots, b_r \leftrightarrows b_{(s-1)}$

Diperoleh :

$$A_{sw}{}^{*} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \dots & a_{(r+1)(r-1)} & a_{(r+1)r} & \dots & a_{(r+1)(s-1)} & a_{(r+1)s} & \dots & a_{(r+1)(w-1)} & a_{(r+1)w} & \dots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{s1} & -a_{s2} & \dots & -a_{s(r-1)} & -a_{sr} & \dots & -a_{s(s-1)} & -a_{ss} & \dots & -a_{s(w-1)} & -a_{sw} & \dots & -a_{sn} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Pada iterasi 2 ini pertukaran baris terjadi sebanyak $(s-1-r)$ dan pada baris $(s-1)$ semua entrinya bernilai negatif, sehingga menurut Teorema 2.6.4 maka determinan matriks $A_{sw}{}^{*}$ yaitu :

$$\det A_{sw}{}^{*} = -1^{\,s-1-r}\,-1\,\det A_{sw}{}^{**} \text{ ..... (4)}$$

Dengan :

$$A_{sw}{}^{**} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (r-1) \\ r \\ \vdots \\ (s-1) \\ s \\ \vdots \\ (w-1) \\ w \\ \vdots \\ n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccccc} 1 & 2 & \dots & (r-1) & r & \dots & (s-1) & s & \dots & (w-1) & w & \dots & n \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(r-1)} & a_{1r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{1s} & \dots & a_{1(w-1)} & a_{1w} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(r-1)} & a_{2r} & \dots & a_{1(s-1)} & a_{2s} & \dots & a_{2(w-1)} & a_{2w} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(r-1)1} & a_{(r-1)2} & \dots & a_{(r-1)(r-1)} & a_{(r-1)r} & \dots & a_{(r-1)(s-1)} & a_{(r-1)s} & \dots & a_{(r-1)(w-1)} & a_{(r-1)w} & \dots & a_{(r-1)n} \\ a_{(r+1)1} & a_{(r+1)2} & \dots & a_{(r+1)(r-1)} & a_{(r+1)r} & \dots & a_{(r+1)(s-1)} & a_{(r+1)s} & \dots & a_{(r+1)(w-1)} & a_{(r+1)w} & \dots & a_{(r+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s(r-1)} & a_{sr} & \dots & a_{s(s-1)} & a_{ss} & \dots & a_{s(w-1)} & a_{sw} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(w-1)1} & a_{(w-1)2} & \dots & a_{(w-1)(r-1)} & a_{(w-1)r} & \dots & a_{(w-1)(s-1)} & a_{(w-1)s} & \dots & a_{(w-1)(w-1)} & a_{(w-1)w} & \dots & a_{(w-1)n} \\ a_{w1} & a_{w2} & \dots & a_{w(r-1)} & a_{wr} & \dots & a_{w(s-1)} & a_{ws} & \dots & a_{w(w-1)} & a_{ww} & \dots & a_{wn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(r-1)} & a_{nr} & \dots & a_{n(s-1)} & a_{ns} & \dots & a_{n(w-1)} & a_{nw} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Dapat dilihat bahwa entri-entri pada matrik $A_{sw}{}^{**}$ sama dengan entri-entri pada matriks A_{rw}, sehingga $A_{sw}{}^{**} = A_{rw}$, sehingga :

$$\begin{aligned} \det A_{sw} &= -1^{\,s-1-r}\,-1\,\det A_{rw} \\ &= -1^{\;-1\;-s+1+r}\,(-1)\det A_{rw} \\ &= -1^{\,-s+1+r}(-1)\det A_{rw} \text{ .....(5)} \end{aligned}$$

Kemudian (5) dimasukkan di (2), sehingga diperoleh :

$$C_{sw} = -1^{\,s+w} \det A_{sw}$$
$$= -1^{\,s+w}\ -1^{\,-s+1+r}(-1) \det A_{rw}$$
$$= -1^{\,r+w}\ -1^{\,2} \det A_{rw}$$
$$= -1^{\,r+w} \det A_{rw}$$
$$= C_{rw}$$

Karena $C_{sw} = C_{rw}$, maka terbukti bahwa $C_{sj} = C_{rj}$ dengan $j = 1,2,3, \dots, n$

Dari pembuktian di atas dan menurut Lemma 2.6.6 maka terbukti bahwa jika A adalah matriks *Equi-Cofactor* maka semua kofaktor dari matriks A bernilai sama.

■

G. Representasi Graf dalam Matriks

Suatu graf dapat dituliskan dalam bentuk matriks, terdapat beberapa matriks yang mewakilkan suatu graf. Matriks yang akan dibahas adalah matriks ikatan, matriks derajat, dan matriks *Laplacian*.

a. Matriks Ikatan (*Adjacency Matrix)*

Definisi 2.7.1(Chartrand dan Lesniak,1997:1)

Misalkan graf G dengan himpunan simpul $V\ G = v_1, v_2, \dots, v_n$ dan himpunan rusuk $E\ G = e_1, e_2, \dots, e_m$. Matriks ikatan adalah matriks nxn yang dapat dituliskan $A\ G = a_{ij}$, dengan:

$$a_{ij} \begin{cases} 1, jika\ v_i v_j \in E\ G \\ 0, jika\ v_i v_j \notin E(G) \end{cases}$$

Pada matriks ikatan dari graf G memiliki nilai 0 pada diagonal utamanya.

Contoh :

Pada Gambar 2.1 pada graf G_1, maka matriks ikatan dari graf G_1 adalah

$$A(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b. Matriks Derajat *(Degree Matrix)*

Definisi 2.7.4(Chartrand dan Lesniak, 1997:65)

Misalkan G adalah graf dengan $V\ G\ = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, matriks derajat adalah $D\ G\ =\ d_{ij}$ yaitu matriks nxn dengan :

$$d_{ij} = \begin{cases} \deg\ v_i & \text{, jika } i = j \\ 0, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

Contoh :

Sebagai contoh, matriks derajat dari graf pada Gambar 2.1 yaitu :

$$D(G) = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

c. Matriks *Laplacian (Laplacian Matrix)*

Definisi 2.7.5 (Bronson, Costa, & Saccoman, 2014: 317)

Pada sebuah graf misalkan A adalah matriks ikatan dan D adalah matriks derajat, maka matriks *Laplacian* dinotasikan L dengan $L = D - A$.

Dituliskan : $L\ G\ =\ \ell_{ij}$, dengan :

$$\ell_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{jika } v_i \text{ terhubung } v_j \text{ dan } i \neq j \\ \deg\ v_i\ , & \text{jika } i = j \\ 0, & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Contoh :

Matriks *Laplacian* pada Gambar 2.1 adalah :

$$L = D - A = \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{matrix}$$

Dari definisi matriks *Laplacian* diketahui bahwa matriks *Laplacian* diperoleh dari matriks derajat dikurangi matriks ikatan. Entri-entrinya bernilai (-1) saat $i \neq j$ dan bernilai $\deg(v_i)$ saat $i = j$, sehingga hasil penjumlahan semua entrinya pada tiap-tiap baris dan kolom adalah 0. Oleh karena itu menurut Teorema 2.6.7 matriks *Laplacian* adalah matriks *Equi-Cofactor*.