BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Berikut diberikan landasan teori mengenai Teori Portofolio, Turunan Parsial, Supremum dan Infimum, Himpunan Konveks, Program Nonlinear, Matriks Definit Positif dan Definit Negatif, Persyaratan *Karush Kuhn Tucker*, Metode Kuadratik, Permasalahan Komplementaritas Linear, Langkah-langkah Metode Kuadratik dan Program Linear.

A. Teori Portofolio

1. Pengertian Portofolio

Menurut Sunariyah (2004:194), portofolio adalah serangkaian kombinasi beberapa sekuritas yang diinvestasi dan dipegang oleh investor, baik perorangan maupun lembaga. Sekuritas dapat berupa saham, surat berharga, obligasi, sertifikat dan lain-lain. Portofolio dapat didefinisikan sebagai suatu kombinasi atau gabungan sekumpulan aset dengan mengalokasikan dana pada aset-aset tersebut dengan tujuan memperoleh keuntungan di masa yang akan datang. Portofolio efisien adalah memaksimalkan *expected return* dengan tingkat resiko tertentu, atau portofolio yang menawarkan risiko rendah dengan *expected return* tertentu. Investor cenderung menghindari risiko dalam pembentukan portofolio efisien yang artinya apabila portofolio tersebut dibandingkan dengan portofolio lain mempunyai *expected return* terbesar dengan risiko terkecil.

2. Return

Return merupakan hasil yang diperoleh dari investasi. Adanya hubungan positif antara *return* dan risiko dalam berinvestasi yang dikenal dengan *high risk- high return*, yang artinya semakin besar risiko yang ditanggung, semakin besar pula *return* yang diperoleh. Hal ini dimaksudkan sebagai harus ada pertambahan *return* sebagai kompensasi dari pertambahan risiko yang akan ditanggung oleh investor. (Jogiyanto, 2014:19).

Return realisasi (*realized return*) merupakan *return* yang telah terjadi. *Return* realisasi banyak digunakan sebagai data untuk investasi, termasuk digunakan sebagai data analisis portofolio. *Return* realisasi (*realized return*) dihitung dengan menggunakan data historis. Menurut Jogiyanto (2003:109) *return* historis juga berguna sebagai dasar penentuan *return* ekspektasi (*expected return*) dan risiko di masa mendatang. *Return* ekspektasi (*expected return*) adalah *return* yang diharapkan akan diperoleh oleh investor di masa mendatang. Berbeda dengan *return* realisasi yang sifatnya sudah terjadi, *return* ekspektasi sifatnya belum terjadi.

a) *Return* realisasi portofolio adalah rata-rata tertimbang dari *return* realisasi setiap aset tunggal di dalam portofolio (Jogiyanto, 2014:94). Secara matematis untuk *n* aset, *return* realisasi portofolio dapat ditulis:

$$R_p = \ {}_{i=1}^{N}(x_i . R_i) \qquad (2.1)$$

Keterangan:

R_p : *return* realisasian portofolio

x_i : proporsi dana yang diinvestasikan pada saham *i*

R_i : *return* realisasian dari aset ke-i

N : jumlah dari aset tunggal

b) Jika seseorang menginvestasikan dananya pada saham ke-*i* periode t_1 dengan harga $P_{i(t-1)}$ dan harga pada periode selanjutnya t_2 adalah $P_{i(t-2)}$, maka *return* total pada periode t_1 sampai t_2 adalah $(P_{i(t-1)} - P_{i\ t-2})/P_{i(t-1)}$. *Return* total dapat digambarkan sebagai pendapatan relatif atau tingkat keuntungan (*profit rate*).

Dengan demikian, *return* total dapat dinyatakan sebagai berikut (Jogiyanto, 2003:206)

$$R_{it} = \frac{P_{it} - P_{i(t-1)}}{P_{i(t-1)}} \qquad (2.2)$$

Keterangan:

R_{it} : *return* total realisasi portofolio

P_{it} : Harga penutupan saham ke-*i* pada periode ke-t

$P_{i(t-1)}$: Harga penutupan saham ke-*i* pada periode ke-$(t-1)$

3. Expected Return

Menurut Jogiyanto (2014:24) *return* ekspekatasi (*expected return*) merupakan *return* yang diharapkan dari investasi yang akan dilakukan. *Return* ekpektasi merupakan *return* yang penting karena dapat digunakan sebagai pengambilan keputusan investasi. *Return* ekspektasi yang menggunakan data historis dapat dihitung berdasarkan beberapa cara sebagai berikut:

1) Metode rata-rata (*mean method*)
2) Metode tren (*trend method*)
3) Metode jalan acak (*random walk method*)

Diantara ketiga metode yang paling banyak digunakan adalah metode rata-rata (*mean method*) dibandingkan dengan metode rata-rata aritmatika (*arithmetic mean*) dan rata-rata geometrik (*geometric mean*).

a. *Expected return* saham individual

$$E(R_i) = \frac{\sum_{t=1}^{N} R_{it}}{N} \tag{2.3}$$

Keterangan:

$E(R_i)$: nilai ekspektasi

R_{it} : return aset ke-i pada periode ke-t

N : banyaknya *return* yang terjadi pada periode observasi

b. *Expected return* Portofolio

Menurut Jogiyanto (2014:19) *return* ekspektasian portofolio dapat dihitung dari rata-rata *return* ekspektasian masing-masing aset tunggal di dalam portofolio. Untuk n aset, *return* ekspektasian portofolio dapat dinyatakan secara matematis sebagai berikut:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} (x_i E(R_i)) \tag{2.4}$$

Keterangan:

$E(R_p)$: nilai harapan *return* portofolio

x_i : proporsi dari aset ke-*i* terhadap seluruh aset di portofolio

$E(R_i)$: nilai harapan *return* aktiva ke-*i*

N : banyaknya *return* yang terjadi pada periode observasi

4. Risiko

Menurut Abdul Halim (2003:42) risiko didefinisikan sebagai besarnya penyimpangan antara tingkat pengembalian yang diharapkan (*expected return*) dengan tingkat pengembalian yang dicapai secara nyata (*realized return*). Semakin besar penyimpangannya maka semakin besar pula tingkat risikonya. Apabila risiko dinyatakan sebagai seberapa jauh hasil yang diperoleh dapat menyimpang dari hasil yang diharapkan, maka digunakan ukuran penyebaran adalah varians atau deviasi standar.

Risiko dalam investasi dibedakan menjadi dua, yaitu:

a. Risiko saham individual

Risiko saham invidual dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut:

$$\sigma_i^2 = \frac{{}_{j=1}^{N}(R_{it}-(E(R_i))^2}{N} \qquad (2.5)$$

Keterangan:

σ_i^2 : varians dari investasi pada saham *i*

$E(R_i)$: nilai harapan *return* aktiva ke-*i*

R_{it} : *return* aset ke-*i* pada periode ke-*t*

N : banyaknya *return* yang terjadi pada periode observasi

b. Risiko Portofolio

Menurut Jogiyanto (2014:59) salah satu pengukur risiko adalah standar deviasi atau varian (*variance*) yang merupakan kuadrat dari standar deviasi. Risiko portofolio dapat diukur dengan ukuran besarnya standar deviasi atau varian dari nilai-nilai *return* aktiva tunggal. Dengan demikian, varian *return* portofolio yang merupakan risiko portofolio dapat ditulis sebagai berikut:

$$Var(R_p) = \sigma_P^2 = E[R_p - E(R_p)]^2 \qquad (2.6)$$

Dimana $R_p = \sum_{i=1}^{N} x_i R_i + \sum_{j=1}^{N} x_j R_j$, sehingga persamaan (2.6) menjadi:

$$Var(R_p) = \mathrm{E}[\ \sum_{i=1}^{N} x_i R_i + \sum_{j=1}^{N} x_j R_j\ - E(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i + \sum_{j=1}^{N} x_j R_j)]^2$$

$$= \mathrm{E}[(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i + \sum_{j=1}^{N} x_j R_j - E\ \sum_{i=1}^{N} x_i R_i\ - E(\sum_{j=1}^{N} x_j R_j)]^2$$

$$= \mathrm{E}[(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i + \sum_{j=1}^{N} x_j R_j - \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i) - \sum_{j=1}^{N} x_j E(R_j)]^2$$

$$= \mathrm{E}[(\sum_{i=1}^{N} x_i R_i - \sum_{i=1}^{N} x_i E(R_i)) + (\sum_{j=1}^{N} x_j R_j - \sum_{j=1}^{N} x_j E(R_j))]^2$$

$$= \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N} x_i (R_i - E(R_i)) + \sum_{j=1}^{N} x_j (R_j - E(R_j))]^2$$

$$= \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 (R_i - E(R_i))^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 (R_j - E(R_j))^2 +$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j\ (R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j))]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \mathrm{E}(R_i - E(R_i))^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \mathrm{E}(R_j - E(R_j))^2 +$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j\ \mathrm{E}[(R_i - E(R_i))(R_j - E(R_j)]$$

$$Var(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i^2\, Var(R_i) + \sum_{j=1}^{N} x_j^2\, Var(R_j) +$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j\ Cov(R_i, R_j) \qquad (2.7)$$

Jika persamaan (2.7) ditulis dalam simbol-simbol diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{N} x_j^2 \sigma_j^2 + 2 \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \qquad (2.8)$$

$$cov\ (R_i R_j) = \frac{\sum_{i,j=1}^{n} (R_{it} - E(R_i))(R_{jt} - E(R_j))}{N} \qquad (2.9)$$

Keterangan:

σ_i^2 : varians dari investasi pada saham *i*

σ_P^2 : Risiko portofolio

$E(R_i)$: nilai harapan *return* aktiva ke-*i*

R_{it} : *return* aktiva ke-*i* pada periode ke-*t*

N : banyaknya *return* yang terjadi pada periode observasi

5. Model *Mean Variance* Markowitz

Model *mean variance* markowitz pertama kali diperkenalkan tahun 1952 oleh Harry Markowitz dala paper berjudul portofolio *selection* tentang pemilihan portofolio optimal secara kuantitatif. Dalam paper tersebut, Harry Markowitz mengidentifikasi *expected return* dan risiko menggunakan varians *return*, dimana varians tersebut diminimalkan untuk tingkat ekspektasi tertentu.

Teori portofolio optimal menggunakan model Markowitz didasarkan pada empat asumsi sebagai berikut (Jogiyanto, 2003:204):

1) Waktu yang digunakan hanya satu periode
2) Tidak ada biaya transaksi

3) Prefensi investor hanya didasarkan pada *expected return* dan risiko dari portofolio

4) Tidak adanya pinjaman dan simpanan bebas risiko

Menurut Moehring (2013) portofolio optimal menggunakan model *mean-variance* Markowitz berdasarkan prefensi investor adalah sebagai berikut:

a. Meminimumkan risiko untuk tingkat *return* tertentu

Fungsi tujuan:

Meminimumkan $\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$ (2.10)

dengan kendala:

$\sum_{i=1}^{n} x_i R_i = E(R_p)$ (2.11)

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ artinya jumlah proporsi dana sama dengan satu (2.12)

$x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$ (2.13)

b. Memaksimumkan *return* dengan tingkat risiko tertentu

Fungsi tujuan:

Memaksimumkan $E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} E(R_i) x_i$ (2.14)

dengan kendala:

$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij} = \sigma_P^2$ (2.15)

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ artinya jumlah proporsi dana sama dengan satu

$x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n$

B. Turunan Parsial

Definisi 2.1 (Purcell dan Varberg, 2001:141)

Jika $z = f(x, y)$ terdefinisi dalam domain D dibidang XY, sedangkan turunan pertama f terhadap x dan y disetiap titik (x, y) ada maka:

Turunan pertama f di x (selain x dianggap konstan) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\nabla x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Turunan pertama f di y (selain y dianggap konstan) adalah

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\nabla x \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Dapat dinotasikan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

1. Turunan parsial fungsi *n* variabel

Diberikan fungsi *n* variabel dari $x_1, x_2, \ldots., x_n$ dengan persamaan $w = f(x_1, x_2, \ldots., x_n)$, maka turunan-turunan parsialnya yaitu:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = f_{x_1}, \frac{\partial w}{\partial x_2} = f_{x_2}, \ldots., \frac{\partial w}{\partial x_n} = f_{x_n}$$

Khusus untuk fungsi tiga variabel dari x, y, z dengan persamaan $w = f(x, y, z)$, maka turunan-turunan parsialnya yaitu:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z), \frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z), \frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z)$$

2. Turunan Parsial Derajat Dua

Pengertian dan notasi turunan parsial derajat dua fungsi $z = f(x, y)$ dinyatakan dalam simbol-simbol berikut:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = z_{xx} = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = z_{yy} = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = z_{yx} = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} = z_{xy} = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$

C. Supremum dan Infimum

Berikut ini diperkenalkan konsep tentang batas atas dan batas bawah dari suatu himpunan bilangan real.

Definisi 2.2 (Robert G. Bartle, 1927:35)

Diberikan S subset tak kosong ℝ

(a) Himpunan *S* dikatakan **terbatas ke atas** (*bounded above*) jika terdapat suatu bilangan $u \epsilon \mathbb{R}$ sedemikian hingga $s \leq u$ untuk semua $s \epsilon S$. Setiap bilangan *u* seperti ini disebut dengan **batas atas** (*upper bound*) dari *S*.

(b) Himpunan *S* dikatakan **terbatas ke bawah** (*bounded below*) jika terdapat suatu bilangan $w \epsilon \mathbb{R}$ sedemikian hingga $w \leq s$ untuk semua $s \epsilon S$. Setiap bilangan *w* seperti ini disebut dengan **batas bawah** (*lower bound*) dari *S*.

(c) Suatu himpunan dikatakan **terbatas** (*bounded*) jika terbatas ke atas dan terbatas ke bawah. Jika tidak, maka dikatakan **tidak terbatas** (*unbounded*).

Definisi 2.3 (Robert G. Bartle, 1927:35)

Diberikan *S* subset tak kosong $\mathbb{R}$.

(a) Jika *S* terbatas ke atas, maka suatu bilangan *u* disebut **supremum** (batas atas terkecil) dari *S* jika memenuhi kondisi berikut:

(1) *u* merupakan batas atas *S*, dan

(2) jika *v* adalah sebarang batas atas *S*, maka $u \leq v$.

Ditulis *u* = sup *S* .

(b) Jika *S* terbatas ke bawah, maka suatu bilangan *w* disebut **infimum** (batas bawah terbesar) dari S jika memenuhi kondisi berikut:

(1) *w* merupakan batas bawah *S*, dan

(2) jika *t* adalah sebarang batas bawah *S*, maka $t \leq w$.

Ditulis *w* = inf *S*

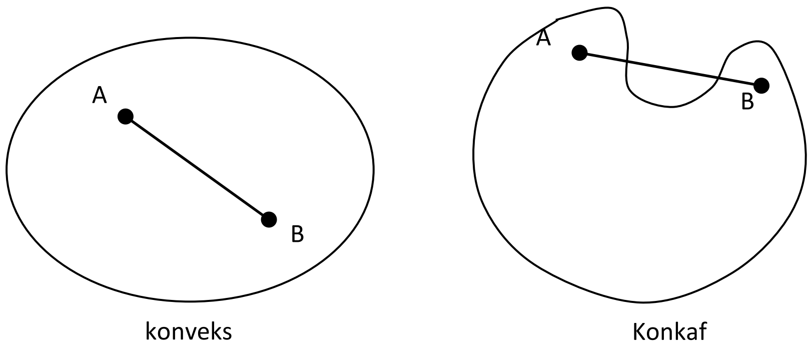
D. Himpunan Konveks

Menurut Mokhtar S Bazaraa (1979:34) konsep konveks sangat penting dalam permasalahan optimasi. Konsep fungsi konveks berhubungan langsung dengan himpunan konveks. Jika $f\ \ x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah fungsi konveks maka kumpulan titik-titik yang terletak pada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ membentuk himpunan konveks.

Definisi 2.4 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:34)

Himpunan S yang tidak kosong di E_n merupakan konveks jika *segment* garis menghubungkan dua titik yang berada dalam himpunan. Dengan kata lain, jika $x_1, x_2 \in$ S maka λx_1 +(1-λ) x_2 juga anggota S untuk $\lambda \in (0,1)$.

Perbedaan fungsi konveks dan konkaf tampak pada gambar di bawah ini:



Gambar 1. Fungsi Konveks dan Fungsi Konkaf

1. Fungsi Konveks

Definisi 2.5 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:80)

Diketahui $f: S \rightarrow E_1$ dimana S adalah himpunan konveks yang tidak kosong di E_n. Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi konveks di S ketika $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)\, f x_2$ untuk setiap $x_1, x_2 \epsilon S$ dan untuk $\lambda \in (0,1)$.

Fungsi f dikatakan fungsi konveks ketat ketika tanda $\geq$ dapat diganti dengan $>$ dan merupakan fungsi konkaf (fungsi konkaf ketat) jika $\leq$ dapat diganti dengan $<$. Untuk fungsi dengan satu variabel ketika fungsi f memiliki turunan kedua, maka $f(x)$ bersifat konveks jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$, untuk setiap nilai x.

Dapat disimpulkan bahwa:

a. Fungsi f konveks jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \geq 0$, untuk setiap nilai x .... (2.16)

b. Fungsi f konveks ketat jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0$, untuk setiap nilai x.

c. Fungsi f konkaf jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \leq 0$, untuk setiap nilai x.

d. Fungsi f konkaf ketat jika dan hanya jika $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0$, untuk setiap nilai x.

2. Fungsi konveks dan fungsi konkaf dengan banyak variabel

Turunan parsial kedua dapat digunakan untuk menguji konveks atau konkafnya suatu fungsi f dengan banyak variabel. Sebagai contoh terdapat dua variabel (x_1, x_2) maka untuk mengetahui fungsi konveks atau konkaf seperti pada tabel dibawah ini:

Tabel 1 Fungsi Konveks dan Konkaf Dengan Variabel Banyak

Kuantitas	Konveks	Konveks Ketat	Konkaf	Konkaf Ketat
$\frac{d^2 f(x_1,x_2)}{d{x_1}^2} \frac{d^2 f(x_1,x_2)}{d{x_2}^2} - \left[\frac{d^2 f\ x_1,x_2}{d{x_1}^2 d{x_2}^2}\right]$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{d^2 f(x_1,x_2)}{d{x_1}^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0
$\frac{d^2 f(x_1,x_2)}{d{x_2}^2}$	≥ 0	> 0	≤ 0	< 0

3. ***Pseudoconvex***

Definisi 2.6 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:106)

S bukan himpunan kosong di E_n dan $f: S \rightarrow E_1$ terdiferensial di S. Fungsi f dikatakan *pseudoconvex* ketika untuk setiap $x_1, x_2 \epsilon\, S$ dengan $\frac{\partial f(x_1)^t}{\partial x_j}\ (x_2 - x_1) \geq 0$, maka $f(x_2) \geq f(x_1)$. Ekuivalen dengan ketika $f\ \ x_2\ \ < f(x_1)$, maka $\frac{\partial f(x_1)^t}{\partial x_j}\ \ x_2 - x_1\ \ < 0$. Fungsi f dikatakan *pseduconcave* jika $-f$ adalah *pseudoconvex.*

Perbedaan *pseudoconvex* dan bukan *pseudoconvex* tampak pada Gambar 2 di bawah ini:

(i) *Pseudoconvex* (ii) bukan *pseudoconvex*

Gambar 2. Perbedaan Pseudoconvex

4. ***Quasiconvex***

Definisi 2.7 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:100)

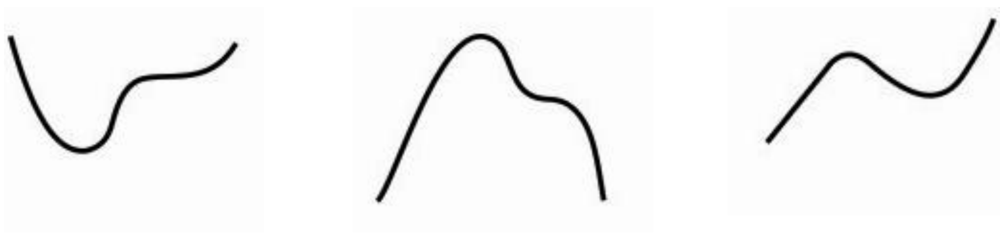
Terdapat $f: S \rightarrow E_1$ dimana S himpunan konveks yang tidak kosong di $E_{n.}$ Fungsi f dikatakan *quasiconvex* ketika untuk setiap $x_1, x_2 \epsilon\, S$ memenuhi pertidaksamaan sebagai berikut:

$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq maksimum\ \{f\ \ x_1, x_2\ \}, \lambda \epsilon\ (0,1).$

Fungsi f dikatakan *quasiconcave* jika $-f$ adalah *quasiconvex.*

Dari definisi di atas, fungsi f *quasiconvex* jika $f\ \ x_2\ \ \geq f\ \ x_1$ dimana $f\ \ x_2$ lebih besar atau sama dengan fungsi f dari semua kombinasi konveks x_1 dan x_2 . Fungsi f dikatakan *quasiconcave* jika $f\ \ x_2\ \ \geq f\ \ x_1$ dimana fungsi f dari semua kombinasi konveks x_1 dan x_2 lebih besar atau sama dengan $f\ \ x_1$.

Perbedaan *quasiconvex, quasiconcave* dan bukan keduanya tampak pada Gambar 3 di bawah ini:



(i) Quasiconvex *(ii) Quasiconcave* *(iii) Bukan keduanya*

Gambar 3. Perbedaan *Quasiconvex*

5. *Closure And Interior Of A Convex Set*

Definisi 2.8 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:38)

Diketahui S himpunan di E_n, titik $\boldsymbol{x}$ dikatakan *closure* dari S dinotasikan dengan $cl\ S$ ketika $S \cap N_\varepsilon \neq \emptyset$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Ketika $S = cl\ S$, S dinamakan *closed*. $\boldsymbol{x}$ dikatakan *interior* dari S dinotasikan dengan $int\ S$ yaitu ketika $N_\varepsilon(x) \subset$ S untuk $\varepsilon > 0$. Ketika $S = int\ S$, S dikatakan *open*.

Adapun teorema-teorema yang berkaitan dengan fungsi Konveks dan akan berkaitan dengan syarat *Karush Kuhn Tucker* antara lain yaitu:

(i) **Teorema 2.1** (Mokhtar S Bazaraa, 1979:45)

Jika S himpunan konveks tertutup tak kosong di E_n dan $\boldsymbol{y} \notin$ S, maka ada vektor taknol **p** dan skalar α sedemikian sehingga $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{y} > \alpha$ dan $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} \leq \alpha$ untuk $x \in S$.

Bukti:

Karena S himpunan konveks tertutup tak kosong di E_n dan $\boldsymbol{y} \notin$ S, maka ada titik minimum khusus $\boldsymbol{x} \in int\ S$ sedemikian sehingga $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x})^t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \leq 0$ untuk $x \in S$. Perhatikan bahwa $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})^t\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\ =$ $\boldsymbol{y}^t\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\ -\boldsymbol{x}^t\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ (a)

Karena $-\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\ \leq -\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{t}}\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}$ untuk $\boldsymbol{x} \in S$, maka persamaan (a) menjadi $\boldsymbol{p}^t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2$ untuk $\boldsymbol{x} \in S$ yang lain, dimana $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \neq 0$. Terlihat bahwa $\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x} + \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2$ untuk $\boldsymbol{x} \in S$. Diperoleh α=sup$\{\boldsymbol{p}^t\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in S\}$.

(ii) **Teorema 2.2 (**Mokhtar S Bazaraa, 1979:48)

Diketahui S himpunan konveks tak kosong di $E_{n.}$ Jika $\boldsymbol{x}\epsilon\partial S$, maka ada sebuah *hyperplane* yang mendukung S pada $\boldsymbol{x}$ yaitu ada sebuah vektor taknol **p** sedemikian sehingga $\boldsymbol{p}^{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}) \leq 0$ untuk $\boldsymbol{x}\epsilon cl\ S$ yang lain.

Bukti:

Karena $\boldsymbol{x}\epsilon\partial S$, ada sebuah barisan $\{\boldsymbol{y_k}\}$ yang bukan pada $cl\ S$ sedemikian sehingga $y_k \to x$. Berdasarkan pada Teorema 2.1, berkorespondensi untuk $\boldsymbol{y_k}$ yang lain ada $\boldsymbol{p}_k$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}} > \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}$ untuk

$\boldsymbol{x} \epsilon cl\ S$ yang lain. Karena $\{\boldsymbol{p_k}\}$ adalah terbatas, sehingga memiliki sebuah subbarisan yang konvergen $\{\boldsymbol{p_k}\}_\kappa$ dengan limit *p* dengan panjang adalah sama dengan satu. Mempertimbangkan subbarisan ini memiliki $\boldsymbol{p_k^t y^k} > \boldsymbol{p_k^t x}$ untuk $\boldsymbol{x} \epsilon cl\ S$ yang lain. Menentukan $\boldsymbol{x} \epsilon cl\ S$ dan memilih limit seperti $k \epsilon \kappa$ mendekati ∞. Sehingga $\boldsymbol{p^t}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}) \leq 0$. Jadi ada *hyperplane* yang mendukung S untuk x.

(iii) Teorema 2.3 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:49)

Jika S_1 dan S_2 adalah himpunan konveks tak kosong sehingga $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, maka ada *hyperplane* pemisah S_1 dan S_2 , dan juga ada vektor bukan nol **p** di E_n sedemikian sehingga $\inf\{\boldsymbol{p^t x}: \boldsymbol{x} \epsilon S_1\} \geq \sup\{\boldsymbol{p^t x}: \boldsymbol{x} \epsilon S_2\}$.

Bukti:

Ada $\boldsymbol{x_1} \epsilon S_1$ dan $\boldsymbol{x_2} \epsilon S_2$.

S= $S_1 - S_2 = \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{x_2}$. Perhatikan bahwa S adalah konveks dan $0 \notin S$ karena akan mengakibatkan $S_1 \cap S_2$ menjadi tidak kosong. Karena S adalah himpunan konveks maka ada vektor **p** bukan nol dimana $\mathbf{p} \epsilon E_n$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{p^t x} \geq 0$ untuk setiap $\boldsymbol{x} \epsilon S$. Ini berarti $\boldsymbol{p^t x_1} \geq \boldsymbol{p^t x_2}$ untuk setiap $\boldsymbol{x_1} \epsilon S_1$ dan $\boldsymbol{x_2} \epsilon S_2$.

(iv) *Epigraph (Epi)*

Definisi 2.9 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:84)

Diketahui S himpunan tak kosong di E_n dan $f: S \to E_1$. *Epigraph* dari *f* dinotasikan dengan *epi* f, yang merupakan subset dari E_{n+1} dan didefinisikan oleh $\{\ x, y\ : x \epsilon S, y \epsilon\ E_1, y \geq f(x)\}$.

(v) Teorema 2.4 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:85)

Diketahui S himpunan konveks tak kosong di E_n, dan jika $f: S \to E_1$ maka f fungsi konveks jika dan hanya jika *epi* f adalah himpunan konveks.

Bukti:

Dengan mengasumsikan bahwa f adalah konveks, dan jika (x_1, y_1) dan $(x_2, y_2) \in$ epi f, maka $x_1, x_2 \in S$, $y_1 \geq f(x_1)$ dan $y_2 \geq f(x_2)$. Untuk λ∈ (0,1) berlaku

$\lambda y_1 + \; 1 - \lambda \; y_2 \geq \lambda f \; x_1 \; + \; 1 - \lambda \; f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + \; 1 - \lambda \; x_2)$

Dimana pertidaksamaan di atas mengikuti konvektivitas f dan $\lambda x_1 + \; 1 - \lambda \; x_2 \in S$. Demikian juga karena *epi* f adalah konveks maka $[\lambda x_1 + \; 1 - \lambda \; x_2, \; \lambda y_1 + \; 1 - \lambda \; y_2] \in$ *epi* f. Bertentangan dengan asumsi bahwa *epi* f adalah konveks, dan jika $x_1, x_2 \in S$ maka $[x_1, f \; x_1 \;]$ dan $[x_2, f \; x_2 \;]$ termasuk dalam *epi* f. Dengan mengikuti konvektivitas *epi* f maka $\lambda x_1 + \; 1 - \lambda \; x_2, \lambda f \; x_1 \; + \; 1 - \lambda \; f(x_2) \in$ *epi* f untuk λ∈ 0,1 .

Dengan kata lain, karena $\lambda f \; x_1 \; + \; 1 - \lambda \; f(x_2) \geq f[\lambda x_1 + \; 1 - \lambda \; x_2]$ untuk λ∈ 0,1 sehingga f adalah konveks.

(vi) Teorema 2.5 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:87)

Diketahui S himpunan konveks tak kosong di E_n, dan jika $f: S \to E_1$ maka untuk $x \in int\, S$ ada sebuah vektor Ɛ sehingga *hyperplane* H $= \{ \; x, y \; : y = f \; x \; + \text{Ɛ}^t \; x - x \; \}$ didukung *epi* f pada $[x, f(x)]$. Pada bagian khusus $f(x) \geq f(\bar{x}) + \mathcal{E}^t(x - \bar{x})$ untuk $x \in S$ yang lainnya,sehingga $\mathcal{E}$ adalah sebuah *subgradient* dari f untuk $\bar{x}$.

Bukti:

Berdasarkan pada Teorema 2.4, *epi* f adalah konveks. Dilain sisi $[\bar{x}, f(\bar{x})]$ menjadi batas dari *epi* f. Dan berdasarkan Teorema 2.2 ada vektor taknol $(\mathcal{E}_0, \mu) \in E_n x E_1$ sedemikian sehingga $\mathcal{E}_0^t(x - \bar{x}) + \mu[y - f(\bar{x})] \leq 0$ untuk semua $(x, y) \in epi\, f$ (a)

Perhatikan bahwa μ adalah tidak positif karena pertidaksamaan di atas akan terjadi kontradiksi dengan memilih y yang cukup besar. Akan diperlihatkan bahwa $\mu < 0$, dengan cara kontradiksi, dan didukung oleh $\mu = 0$, maka $\mathcal{E}_0^t(x - \bar{x}) \leq 0$ untuk semua $x \in S$. Karena $\bar{x} \in int\, S$, ada $\lambda > 0$ sedemikian sehingga $\bar{x} + \lambda\mathcal{E}_0 \in S$, dan karena $\lambda\mathcal{E}_0^t\mathcal{E}_0 \leq 0$ berimplikasi bahwa $\mathcal{E}_0 = 0$ dan $(\mathcal{E}_0, \mu) = (0,0)$. Terjadi kontradiksi dengan $(\mathcal{E}_0, \mu)$ adalah sebuah vektor taknol. Walaupun begitu, $\mu < 0$. Menunjukkan $\mathcal{E}_0 / |\mu|$ oleh $\mathcal{E}$ dan dengan membagi pertidaksamaan (a) dengan $|\mu|$, diperoleh $\mathcal{E}^t(x - \bar{x}) - y + f(\bar{x}) \leq 0$ untuk semua $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in$ *epi f* (b)

Secara khusus, *hyperplane* $\mathrm{H} = \{(x, y) : y = f(\bar{x}) + \mathcal{E}^t(x - \bar{x})\}$ didukung *epi* f pada $[\bar{x}, f(\bar{x})]$. Dengan $y = f(x)$ pada persamaan (b), diperoleh $f(x) \geq f(\bar{x}) + \mathcal{E}^t(x - \bar{x})$ untuk semua $x \in S$.

(vii) Lemma 2.1 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:90)

Diketahui S himpunan konveks tak kosong di E_n, dan $f: S \rightarrow E_1$ fungsi konveks. Jika f terdiferensial di $x \in int\ S$ maka ada *subgradient* f untuk x adalah himpunan tunggal $\{\nabla f(x)\}$.

Bukti:

Karena f terdiferensial di $x \in int\ S$ dan S himpunan konveks yang tak kosong, maka *subgradient* f untuk x juga tidak kosong. Dimisalkan Ɛ adalah subgradient f untuk x. Untuk beberapa vektor **d** dan λ diperoleh

$$f\ \ x+\lambda\boldsymbol{d}\ \ \geq f\ \ x\ \ +\lambda\mathrm{Ɛ}^t\boldsymbol{d} \qquad \text{(a)}$$

$$f\ \ x+\lambda\boldsymbol{d}\ \ = f\ \ x\ \ +\lambda\nabla f(x)^t\boldsymbol{d}+\boldsymbol{\lambda}\ \ \boldsymbol{d}\ \ \alpha(x;\lambda\boldsymbol{d}) \qquad \text{(b)}$$

Dengan mengurangi persamaan (a) dan (b) dari pertidaksamaan, diperoleh $0 \geq \lambda[\mathrm{Ɛ}-\nabla f(x)]^t\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\lambda}\ \ \boldsymbol{d}\ \ \alpha(x;\lambda\boldsymbol{d})$

Jika membagi persamaan (c) dengan λ> 0 diperoleh

$$0 \geq [\mathrm{Ɛ}-\nabla f(x)]^t\boldsymbol{d}-\ \ \boldsymbol{d}\ \ \alpha(x;\lambda\boldsymbol{d})$$

jika λ→ 0 atau berdasarkan pada Definisi 2.2 nilai $\lim_{x\rightarrow\lambda} \alpha\ \ x;\lambda\ \ = 0$ maka $[\mathrm{Ɛ}-\nabla f(x)]^t\boldsymbol{d} \leq \mathbf{0}.$ Untuk **d**$= \mathrm{Ɛ}-\nabla f(x)$, sehingga $[\mathrm{Ɛ}-\nabla f(x)]^t[\mathrm{Ɛ}-\nabla f\ \ x\ \ ] \leq \mathbf{0}.$ Misal $\mathrm{A} = \mathrm{Ɛ}-\nabla f(x)$ sehingga $A^t\mathrm{A} \leq \mathbf{0}$ jelas bahwa $\mathrm{A} = 0$. Jadi $\mathrm{Ɛ}-\nabla f\ \ x\ \ = 0$ sehingga $\mathrm{Ɛ} = \nabla f\ \ x\ \ $.

E. Matriks Hessian

Matriks Hessian adalah matriks yang setiap elemennya dibentuk dari turunan parsial kedua dari suatu fungsi. Misalkan $f(x)$ suatu fungsi dengan *n* variabel, matriks Hessian dari $f(x)$ yaitu:

$$
H = \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{matrix} \qquad (2.17)
$$

F. Vektor Gradien

Definisi 2.10 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:89)

Terdapat S bukan himpunan kosong di E_n dan $f: S \to E_1$. f dikatakan terdiferensial di $x \in int\ S$ jika ada vektor gradien $\nabla f(\underline{x})$ yaitu:

$$
\nabla f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \frac{df}{d\underline{x}} \qquad (2.18)
$$

Suatu fungsi $\alpha: E_n \to E_1$ sedemikian sehingga

$$
f\ x\ = f\ x\ + \nabla f(x)^t\ x - x\ +\ x - x\ \alpha(x; x - x)
$$

dengan $\lim_{x \to x} \alpha\ x; x - x\ = 0$.

Contoh 2.1

$$
f(\underline{x}) = 3x_1^{\,2} + 2x_2^{\,2} + 4x_1 x_2 - 6x_1 - 8x_2 + 6
$$

maka,

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_1 + 4x_2 - 6 \\ 4x_1 + 4x_2 - 8 \end{bmatrix}$$

Dengan memenuhi syarat perlu keoptimalan, yaitu

$$\nabla f(x) = 0 \longrightarrow \quad 6x_1 + 4x_2 - 6 = 0.$$

$$4x_1 + 4x_2 - 8 = 0 \quad -$$

$$2x_1 + 2 = 0$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = 3$$

Jadi $x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah titik optimal dari $f(x)$.

G. Titik Kritis

Teorema 2.6 (Edwin J Purcell, 2010:248)

(**Teorema Titik Kritis**) andaikan fungsi f didefinisikan pada selang I yang memuat titik c. Jika $f(c)$ adalah nilai ekstrem, maka c haruslah berupa suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu dari:

(i) Titik ujung dari I

(ii) Titik stasioner dari $f(f'(c) = 0)$ atau

(iii) Titik singular dari $f\ (f'(c)\ tidak\ ada)$.

Bukti:

Dengan $f(c)$ berupa nilai maksimum f pada I , maka $f(x) \leq f(c)$ untuk semua x dalam I, yaitu $f(x) - f(c) \leq 0$.

Jadi, jika $x < c$ sehingga $x - c < 0$, maka

(1) $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

Sedangkan jika $x > c$, maka

(2) $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$

Akan tetapi, $f'(c)$ ada karena c bukan titik singular. Akibatnya, apabila $x \to c^-$ dalam persamaan (1) dan $x \to c^+$ dalam persamaan (2), maka diperoleh $f'(c) \geq 0$ dan $f'(c) \leq 0$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $f'(c) = 0$.

Titik kritis untuk penyelesaian program *nonlinear* dapat digolongkan sebagai maksimum atau minimum lokal. Maksimum atau minimum global akan diperoleh dengan membandingkan minimum lokal dan maksimum lokal dan kemudian menguji nilai dari fungsi tersebut.

Teorema 2.7 (Hillier, 2001:664)

Jika fungsi diketahui konveks maupun konkaf, maka titik kritis pasti merupakan minimum global maupun maksimum global.

Bukti:

Perhatikan masalah optimisasi berikut

Min $f(x)$

dengan kendala $x \epsilon S$

Jika S adalah himpunan konveks, $f: S \rightarrow R$ adalah fungsi konveks dan x adalah titik minimum lokal untuk masalah optimasi maka x adalah titik minimum global dari $f(x)$ pada himpunan S.

Misalkan x bukan titik minimum global atau x titik minimum lokal, maka terdapat $y \epsilon S$ yang memenuhi $f(y) < f(x)$. Sebut saja $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ yang merupakan kombinasi konveks dari x dan y, untuk $\lambda \in [0,1]$. Hal ini mengakibatkan $y(\lambda) \in S$, untuk $\lambda \in [0,1]$.

Karena $f(x)$ adalah fungsi konveks maka berlaku

$$f(z) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) < f(x) + (1 - \lambda) f(x)$$

$$f(z) < f(x)$$

untuk setiap $\lambda \in [0,1]$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi bahwa x adalah minimum lokal. Dengan demikian haruslah x merupakan titik minimum global.

H. Program Nonlinear

Untuk permasalahan-permasalahan optimasi tertentu, fungsi kendala dan fungsi tujuan tidak dapat dinyatakan dalam bentuk linear. Menurut Mokhtar S.Bazaraa (1979:1) program *nonlinear* merupakan salah satu teknik dari riset operasi untuk menyelesaikan permasalahan optimasi dengan fungsi tujuan berbentuk *nonlinear* dan fungsi kendala dapat berbentuk *nonlinear* atau linear. Pada umumnya permasalahan program *nonlinear* untuk menentukan nilai $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ yang merupakan variabel-variabel keputusan dengan fungsi tujuan:

Maksimum / minimum $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (2.19)

Fungsi kendala: $g_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b_i$ (2.20)

untuk i = 1, 2, ..., m dengan b_i merupakan konstanta tak negatif. Menurut Hillier (2001:664) terdapat 3 bentuk permasalahan program *nonlinear*, yaitu:

1. Program *Nonlinear* Tanpa Kendala

Program *nonlinear* tanpa kendala merupakan optimasi yang tidak memiliki kendala dengan fungsi tujuan berbentuk *nonlinear*. Bentuk model program *nonlinear* tanpa kendala untuk menentukan nilai $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dengan

Fungsi tujuan: maksimum / minimum $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (2.21)

Untuk menyelesaikan permasalahan program *nonlinear* tanpa kendala terdapat dua syarat keoptimalan, yaitu:

a. Syarat Perlu Keoptimalan

Syarat perlu keoptimalan digunakan untuk mencari titik-titik optimal x^* pada pendekatan analitis. Syarat perlu keoptimalan mengatakan bahwa :

Bila x^* adalah titik optimal dari $f(x)$ maka :

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad (2.22)$$

Dengan $\nabla f(\underline{x})$ merupakan vektor gradien. x^* yang memenuhi persamaan di atas merupakan titik optimal.

b. Syarat Cukup Keoptimalan

Syarat cukup keoptimalan digunakan untuk menentukan apakah titik optimal yang didapatkan dari syarat perlu keoptimalan merupakan titik minimum atau titik maksimum.

Syarat cukup keoptimalan yaitu :

Bila $\nabla f(x^*) = 0$ dan $H(x^*)$ definit positif maka x^* titik minimum

.............(2.23)

Bila $\nabla f(x^*) = 0$ dan $H(x^*)$ definit negatif maka x^* titik maksimum

.............(2.24)

Contoh 2.2

Suatu fungsi :

$$f(\underline{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1 - 8x_2 + 6 :$$

Pada contoh 2.1 telah didapatkan titik optimal $x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ dan didapatkan matrik Hessiannya adalah :

$$H(x^*) = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$ adalah *definit positif*

Jadi, $x^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah *titik minimum* dengan

$f(x^*) = 3 + 18 - 12 + 6 - 24 + 6 = -3$

2. Program *Nonlinear* Dengan Kendala Linear

Program *nonlinear* dengan kendala linear merupakan optimasi dengan kendala berbentuk fungsi linear dan fungsi tujuan berupa fungsi *nonlinear*. Untuk menentukan nilai $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ dengan bentuk umum adalah:

Maksimum / minimum : $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (2.25)

dengan kendala : $g_m(x) \leq, =, \geq 0$ (2.26)

untuk *m*=1,2,..., *n*.

3. Program *Nonlinear* Berkendala

Menurut Taha (2007:699) program *nonlinear* berkendala merupakan masalah optimasi dengan fungsi tujuan *nonlinear* dan fungsi kendala *nonlinear*. Program *nonlinear* berkendala dibedakan menjadi dua yaitu:

a. Untuk $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ bentuk umum program *nonlinear* dengan kendala kesamaan (*equality*) adalah

   Fungsi tujuan : Maksimum / minimum : $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (2.27)

   Fungsi kendala : $g_m(x) = 0$ (2.28)

   dimana m menunjukkan jumlah kendala dan n menunjukkan jumlah variabel dengan $m \leq n$.

b. Bentuk umum program *nonlinear* dengan kendala pertidaksamaan adalah

Maksimum / minimum : $f\,(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (2.29)

dengan kendala : $g_i\;x\;(\leq, \geq)\;0$ untuk i = 1, 2, ..., n (2.30)

$$x \geq 0$$

I. Matriks Definit Positif dan Definit Negatif

Ada dua pendekatan/cara untuk menentukan apakah suatu matriks persegi merupakan matriks definit positif atau matriks definit negatif atau tidak definit. Pendekatan pertama lebih bersifat teoritis, seperti dijelaskan berikut ini.

Definisi 2.11 (Howard Anton, 1995:320)

A matriks persegii (nxn), maka secara teoritis berlaku :

a. A disebut Definit Positif $\Leftrightarrow$ $x^t A x > 0$ $\forall x \in R^n$

b. A disebut Definit Negatif $\Leftrightarrow$ $x^t A x < 0$ $\forall x \in R^n$

c. A disebut Semi Definit Positif $\Leftrightarrow$ $x^t A x \geq 0$ $\forall x \in R^n$

d. A disebut Semi Definit Negatif $\Leftrightarrow$ $x^t A x \leq 0$ $\forall x \in R^n$

Pembuktian $x^t A x$ yang harus berlaku untuk semua x bilangan *real* tidak mudah, maka para ahli matematika telah membuktikan cara/pendekatan yang kedua.

Didefinisikan suatu matriks persegi A

$$A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

Didefinisikan minor – minor utama dari matriks A adalah sebagai berikut :

$$A_1 = [a_{11}]$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

$$A_n = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

Sehingga cara/pendekatan kedua untuk menentukan kedefinitan suatu matriks adalah sebagai berikut :

a. A disebut Definit Positif $\Leftrightarrow$ det $(A_i) > 0$, i= 1, 2, ..., n (2.31)

b. A disebut Definit Negatif $\Leftrightarrow (-1)^i$ det $(A_i) < 0$, i= 1, 2, ..., n (2.32)

c. A disebut Semi Definit Positif $\Leftrightarrow$ det $(A_i) \geq 0$, i= 1, 2, ..., n (2.33)

d. A disebut Semi Definit Negatif $\Leftrightarrow (-1)^i$ det $(A_i) \leq 0$, i= 1, ..., n (2.34)

Contoh 2.3

Diketahui matriks $H = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ dan H_1 dan H_2 adalah minor-minor matriks H. Determinan minor – minor matriks H adalah

det $(H_1) = |6| = 6 \quad > 0$

det $(H_2) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 16 = 8 \quad > 0$. Jadi, matriks H adalah *Definit Positif*

J. Pengali Lagrange (*Lagrange Multiplier*)

Menurut Purcell dan Varberg (1987:303) fungsi lagrange digunakan untuk menyelesaikan permasalahan optimasi (penentuan harga ekstrim), dimana terdapat batasan-batasan (constrains) tertentu.

1. Satu Pengali Lagrange

Prinsip dari metode ini adalah mencari harga ekstrim (optimasi) suatu fungsi objektif $f(x, y)$ dengan batasan-batasan tertentu yang harus dipenuhi, yaitu $g(x, y) = 0$.

Cara: dibentuk Fungsi Lagrange $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Dengan syarat ekstrim:

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ dan $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$

Parameter λ inilah yang disebut pengali Lagrange.

2. Lebih dari satu pengali Lagrange

Jika pengali Lagrange melibatkan lebih dari satu kendala, maka penggunaan parameter yang dipilih dapat ditambahkan menjadi λ, μ atau parameter yang lain.

Misalnya untuk memperoleh nilai ekstrim $f(x, y, z)$ dengan kendala $g(x, y, z) = 0$ dan $h(x, y, z)$ maka fungsi Lagrangenya adalah:

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$$

Cara penyelesaiannya adalah

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \text{ dan } \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$$

Metode ini dapat diperluas untuk *n* variabel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan *k* kendala

$$\phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Sebagai Fungsi Lagrangenya adalah:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_k \phi_k$$

Dengan cara penyelesaiannya adalah:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0$$

Dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ adalah pengali Lagrange.

K. Persyaratan *Karush Kuhn Tucker* (KKT)

Pada tahun 1951 *Kuhn Tucker* mengemukakan suatu teknik optimasi yang dapat digunakan untuk mencari titik optimum dari permasalahan berkendala baik itu permasalahan linear ataupun *nonlinear*. Menurut Mokhtar S Bazaraa (1979:123) untuk fungsi konveks, syarat perlu dan syarat cukup untuk mencari titik optimum dapat menggunakan syarat *Karush Kuhn Tucker*. Tetapi untuk fungsi nonkonveks, syarat *Karush Kuhn Tucker* merupakan syarat perlu saja, akan tetapi belum cukup untuk mencapai nilai optimal. Jadi untuk fungsi konveks, syarat *Karush Kuhn Tucker* menjadi syarat perlu dan syarat cukup untuk mencapai nilai minimum \ maksimum global.

Adapun teorema-teorema dan definisi yang berkaitan dengan syarat *Karush Kuhn Tucker* antara lain yaitu:

1) **Definisi 2.12** (Mokhtar S Bazaraa, 1979:124)

   d adalah *descent direction* f untuk x apabila ada **d** yang memenuhi $\nabla f(x)^t\boldsymbol{d} < 0$ dan ada $\delta > 0$ dan $\lambda \epsilon (0,\delta)$ sedemikian sehingga $f\ x + \lambda\boldsymbol{d}\ < f(x)$.

2) **Definisi 2.13 (**Mokhtar S Bazaraa, 1979:127)

   Jika S bukan himpunan kosong di E_n, dan $x \epsilon$cl S. *Cone of feasible direction* dari S untuk x, dinotasikan dengan D, diberikan oleh

   $D = \ \boldsymbol{d}:\boldsymbol{d} \neq 0, dan\ x + \lambda\boldsymbol{d}\epsilon S$ untuk setiap $\lambda\epsilon\ 0,\delta$ dan $\delta > 0$

   Vektor bukan nol yang lainnya $\boldsymbol{d}\epsilon D$ disebut *feasible direction*.

3) **Teorema 2.8 (**Mokhtar S Bazaraa, 1979:128)

   meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $x\epsilon S$.

   Diketahui $f: E_n \to E_1$ dan S himpunan tak kosong di E_n dan f terdiferensial di titik $x\epsilon S$. Jika x adalah solusi optimal lokal, maka

$F_0 \cap D = \emptyset$, dimana $F_0 = \{\boldsymbol{d}: \nabla f(x)^t d < 0\}$ dan D adalah *cone feasible direction* S untuk x.

Bukti:

Dengan cara kontradiksi, andai $F_0 \cap D \neq \emptyset$, ada **d**$\epsilon F_0 \cap D$, berarti **d**ϵF_0 dan **d**ϵD.

Berdasarkan pada Definisi 2.12, maka ada $\delta_1 > 0$, sehingga $f(x + \lambda\boldsymbol{d}) < f(x)$ untuk λϵ(0,δ_1) (a)

Dan juga berdasarkan pada Definisi 2.13, maka ada $\delta_2 > 0$ sehingga $x + \lambda\boldsymbol{d}\epsilon S$ untuk λϵ(0,δ_2). (b)

Dari persamaan (a) dan (b) jelas ada $x = x + \lambda\boldsymbol{d}\epsilon S$ dan $f(x + \lambda\boldsymbol{d}) < f(x)$. Hal ini bertentangan dengan asumsi awal bahwa x adalah solusi optimum lokal. Jadi $F_0 \cap D = \emptyset$.

4) **Teorema 2.9 (**Mokhtar S Bazaraa, 1979:129)

Diketahui:

$g_i: E_n \rightarrow E_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$, dan X himpunan terbuka yang tidak kosong di E_n. Mempertimbangkan permasalahan meminimumkan $f(x)$ dengan kendala $g_i(x) \leq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, m$, dan $x\epsilon X$. x adalah titik yang mungkin, dan diketahui $I = \{i: g_i(x) = 0\}$. Dengan f dan g_i untuk $i\epsilon I$ terdiferensial di x dan g_i untuk $i \notin I$ adalah kontinu di x.

Jika x adalah solusi optimum lokal, maka $F_0 \cap G_0 = \emptyset$,

dimana $F_0 = \{\boldsymbol{d}: \nabla f(x)^t \boldsymbol{d} < 0\}$

$G_0 = \{\boldsymbol{d}: \nabla g_i(x)^t \boldsymbol{d} < 0\}$ untuk $i\epsilon I$

Bukti:

Dengan $\mathbf{d}\epsilon G_0$ dan $x\epsilon X$ dimana X adalah himpunan terbuka, berdasarakan pada Definisi 2.13 maka ada $\delta_1 > 0$ sehingga $x + \lambda \boldsymbol{d}\epsilon X$ untuk $\lambda\epsilon(0,\delta_1)$ (a)

Karena $g_i\ x\ < 0$ dan g_i adalah kontinu di x untuk $i \notin I$ ada $\delta_2 > 0$ sehingga

$g_i\ x + \lambda \boldsymbol{d}\ < 0$ karena $g_i\ x + \lambda \boldsymbol{d}\ < g_i\ x$ dan $g_i\ x\ < 0$ untuk $\lambda\epsilon(0,\delta_2)$ dan $i \notin I$ (b)

Karena $\mathbf{d}\epsilon G_0$, $\nabla g_i(x)^t \boldsymbol{d}$<0 untuk $i\epsilon I$ dan dengan Definisi 2.2, ada $\delta_3 > 0$ sehingga

$g_i\ x + \lambda \boldsymbol{d}\ < g_i\ x\ < 0$ untuk $\lambda\epsilon(0,\delta_3)$ dan $i\epsilon I$ (c)

Dari persamaan (a), (b), dan (c) diperoleh bahwa $x + \lambda \boldsymbol{d}\ \epsilon\ X$ adalah solusi yang mungkin dari permasalahan P untuk $\lambda\epsilon(0,\delta)$, dimana δ= minimum $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Jelas bahwa $\mathbf{d}\epsilon D$ untuk sembarang $\mathbf{d}\epsilon G_0$ berimplikasi dengan $\mathbf{d}\epsilon D$, sehingga $G_0 \subset$ D. Berdasarkan pada Teorema 2.8, karena x adalah solusi lokal untuk permasalahan P, dan $F_0 \cap D = \emptyset$. Karena diketahui $\mathbf{d}\epsilon G_0$ sehingga $G_0 \subset$ D. Karena $G_0 \subset$ D jelas bahwa $F_0 \cap G_0 = \emptyset$.

5) Teorema 2.10 (Mokhtar S Bazaraa, 1979:140)

Diketahui X himpunan tak kosong di E_n, $f: E_n \to E_1$, $g_i: E_n \to E_1$ untuk $i = (1, 2, .. m)$, dan $h_i: E_n \to E_1$ untuk $i = (1, 2, .. l)$. Masalah P dinyatakan dalam bentuk

Minimum : $f\ x$

Dengan kendala : $g_i\ x\ \leq 0$, dengan $i = 1, 2, \ldots, m$

$h_i\ x\ = 0$, dengan $i = 1, 2, \ldots l$

$x \epsilon X$

$\boldsymbol{x}$ solusi optimum lokal dari masalah P, $I = \ i: g_i\ x\ = 0\ $. Diketahui g_i untuk $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{I}$ kontinu di x, dan f_i , g_i untuk $i \epsilon I$ terdiferensial di $\boldsymbol{x}$, dan h_i untuk $i = 1, 2, \ldots, l$ terdiferensial kontinu di x. Jika $\nabla h_i(x)$ untuk $i = 1, \ldots, l$ adalah bebas linear, maka

$F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \emptyset$,

dimana $F_0 = \ \boldsymbol{d}: \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{d} < 0$

$G_0 = \ \boldsymbol{d}: \boldsymbol{\nabla g_i}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{d} < 0$ untuk $i \epsilon I$

$H_0 = \ \boldsymbol{d}: \boldsymbol{\nabla h_i}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{d} = 0$ untuk $i = 1, \ldots, l$

Bukti:

Dengan cara kontradiksi, andai $F_0 \cap G_0 \cap H_0 \neq \emptyset$, ada $y \epsilon F_0 \cap G_0 \cap H_0$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{y} < 0$, $\boldsymbol{\nabla g_i}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{y} < 0$ untuk $i \epsilon I$ dan $\boldsymbol{\nabla h}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{y} = 0$ dimana $\boldsymbol{\nabla h}(\boldsymbol{x})$ adalah sebuah matriks yang berukuran nxl yang mana kolom ith tersebut adalah $\boldsymbol{\nabla h_i}(\boldsymbol{x})$. Untuk $\lambda \geq 0$, didefinisikan $\boldsymbol{\alpha}: E_1 \to E_n$ dengan mengikuti persamaan diferensial dan syarat batas:

$$\frac{d\alpha(\lambda)}{d\lambda} = \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{\alpha}\ 0\ = \boldsymbol{x} \qquad \text{(a)}$$

$$d\boldsymbol{\alpha}(\lambda) = \ \boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{y}\, d\lambda \qquad \text{(b)}$$

Dimana $\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\lambda}$ adalah matriks yang dibangun untuk beberapa vektor di ruang null dari $\boldsymbol{\nabla h}(\boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ )$. Untuk $\boldsymbol{\lambda}$ yang cukup kecil persamaan (a) adalah terdifinisi dengan baik dan dapat dipecahkan karena $\boldsymbol{\nabla h}(\boldsymbol{x})$

mempunyai rank yang sempurna dan $\mathbf{h}$ adalah terdiferensial secara kontinu di $\boldsymbol{x}$, sehingga $\boldsymbol{P}$ adalah kontinu di $\boldsymbol{\lambda}$. Karena $\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\lambda}$ kontinu maka integralnya juga kontinu seperti pada persamaan (b) sehingga $\boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ \rightarrow \boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{\lambda} \rightarrow 0^+$.

Untuk $\boldsymbol{\lambda} > 0$ dan cukup kecil, $\boldsymbol{\alpha}\ \lambda$ adalah kemungkinan dan $f\ \boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ < f(\boldsymbol{x})$ dan dari persamaan (a), diperoleh:

$$\frac{dg_i[\alpha\ \lambda\ ]}{d\lambda} = \nabla \boldsymbol{g_i}[\boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ ]\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{\lambda}\ \boldsymbol{y} \qquad \text{(b)}$$

Untuk $i\epsilon I$ yang lain. Pada khususnya, $\boldsymbol{y}$ adalah ruang null di $\nabla \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, sehingga untuk $\boldsymbol{\lambda} = 0$ diperoleh $\boldsymbol{P}\ \mathbf{0}\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$. Oleh sebab itu dari persamaan (b) dan diketahui bahwa $\nabla \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y} < 0$, diperoleh:

$$\frac{dg_i[\boldsymbol{\alpha}(0)]}{d\lambda} = \nabla \boldsymbol{g_i}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y} < 0 \qquad \text{(c)}$$

Untuk $i\epsilon I$ yang lain. Hal ini berimplikasi dengan $g_i\ \boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ < 0$ untuk $\boldsymbol{\lambda} > 0$ dan cukup kecil. Untuk $i \notin I$, $\boldsymbol{g_i}\ \boldsymbol{x}\ < 0$, dan $\boldsymbol{g_i}$ adalah kontinu di $\boldsymbol{x}$, dan $g_i\ \boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ < 0$ untuk $\boldsymbol{\lambda}$ yang cukup kecil. X adalah terbuka, $\boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ \epsilon X$ untuk $\boldsymbol{\lambda}$ yang cukup kecil. Karena $g_i\ \boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ < 0$ sudah terpenuhi, maka hanya perlu membuktikan bahwa $h_i\ \boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ = 0$. Dengan teorema nilai rata-rata, diperoleh:

$$h_i\ \boldsymbol{\alpha}\ \lambda\ = h_i\ \boldsymbol{\alpha}\ 0\ + \lambda \frac{dh_i[\boldsymbol{\alpha}\ \mu\ ]}{d\lambda}$$

$$= \frac{dh_i[\boldsymbol{\alpha}\ \mu\ ]}{d\lambda} \qquad \text{(d)}$$

Untuk $\mu\epsilon(0, \lambda)$. Akan tetapi dengan rangkaian barisan yang terdiferensial dan berdasarkan persamaan (b), diperoleh:

$$\frac{dh_i[\boldsymbol{\alpha}\ \ \mu\ \ ]}{d\lambda} = \boldsymbol{\nabla h_i}[\boldsymbol{\alpha}\ \ \mu\ \ ]^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{P}\ \ \mu\ \ \boldsymbol{y}$$

Dengan petunjuk, $\boldsymbol{P}\ \ \mu\ \ \boldsymbol{y}$ adal di ruang null dari $\boldsymbol{\nabla h_i}[\boldsymbol{\alpha}\ \ \mu\ \ ]$ dan dari persamaan di atas, diperoleh $\frac{dh_i[\boldsymbol{\alpha}\ \ \mu\ \ ]}{d\lambda} = 0$. Subtitusikan ke persamaan (d), dan mengikuti $h_i\ \ \boldsymbol{\alpha}\ \ \lambda\ \ \ = 0$. Karena benar untuk i yang lain, hal ini mengikuti $\boldsymbol{\alpha}\ \ \lambda$ adalah solusi yang mungkin dari permasalahan P untuk $\boldsymbol{\lambda}$ yang cukup kecil. Sehingga persamaan (c) diperoleh:

$$\frac{df[\boldsymbol{\alpha}\ \ 0\ \ ]}{d\lambda} = \boldsymbol{\nabla f}(\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y} < \boldsymbol{0}$$

Dan karena $f\ \ \boldsymbol{\alpha}\ \ \lambda\ \ \ < f(\boldsymbol{x})$ untuk $\boldsymbol{\lambda} > 0$ dan cukup kecil. Hal ini bertentangan dengan $\boldsymbol{x}$ adalah solusi optimum lokal. Jadi $F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \emptyset$

6) **Teorema 2.11 (**Mokhtar S Bazaraa, 1979:142)

(**The Fritz John Conditions**) Diketahui X himpunan tak kosong di E_n, $f: E_n \to E_1,$ $g_i: E_n \to E_1$ untuk $i = 1, 2, .., m$, dan $h_i: E_n \to E_1$ untuk $i = 1, 2, \dots, l$. Masalah P dinyatakan dalam bentuk

Minimum : $f\ \ x$

Dengan kendala : $g_i\ \ x\ \ \leq 0$, dengan $i = 1, 2, .., m$

$h_i\ \ x\ \ = 0$, dengan $i = 1, 2, .., l$

x solusi yang mungkin dari masalah P, $I =\ \ i: g_i\ \ x\ \ = 0$. Diketahui pula g_i untuk $i \notin I$ kontinu di x, dan f_i , g_i untuk $i\epsilon I$ terdiferensial di x, dan h_i untuk $i = 1, \dots, l$ terdiferensial kontinu di x.

Jika x solusi lokal permasalahan P, maka ada λ_0, λ_i untuk $i\epsilon I$ dan μ_i untuk i=1, ..., l sehingga

$$\lambda_0 \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(x) = 0$$

$\lambda_0, \lambda_i \geq 0$ untuk $i \epsilon I$

$(\lambda_0, \lambda_I, \mu) \neq \; 0,0,0$

Dengan $\boldsymbol{\lambda_I}$ adalah vektor yang komponennya ada λ_i untuk $i\epsilon I$ dan $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_l)^t$. Selanjutnya, jika g_i untuk $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{I}$ yang terdiferensial di x, maka *Fritz John Condition* dengan bentuk $\boldsymbol{\lambda_I} = (\boldsymbol{\lambda}_1, \dots, \boldsymbol{\lambda}_m)^t$ dan $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_l)^t$ dapat ditulis menjadi:

$$\lambda_0 \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(x) = 0$$

$\lambda_i g_i \; x \; = 0$ untuk $i = 1, \dots, m$

$\lambda_0, \lambda_i \geq 0$ untuk $i = 1, \dots, m$

$(\lambda_0, \lambda_I, \mu) \neq \; 0,0,0$

Bukti:

Ketika $\nabla h_i(x)$ untuk $i = 1, \dots, l$ adalah bergantung linear, maka ada $\mu_1, \dots, \mu_l$ yang tidak nol, sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{l} \mu_i \nabla h_i(x) = 0$. Dimana λ_0, λ_i untuk $i\epsilon I$ sama dengan nol, kondisi pada bagian pertama trivial.

Ketika $\nabla h_i(x)$ untuk $i = 1, \dots, l$ adalah bebas linear. Jika $\boldsymbol{A_1}$ adalah sebuah matriks dimana baris matriksnya berupa $\nabla f_i(x)^t$ dan $\nabla g_i(x)^t$ untuk $i\epsilon I$. Dan $\boldsymbol{A_2}$ adalah sebuah matriks dimana baris matriksnya berupa $\nabla h_i(x)^t$ untuk $i = 1, \dots, l$.Sehingga dari Teorema 2.10, solusi lokal dari x berimplikasi dengan

$\boldsymbol{A_1 d < 0, A_2 d = 0}$

sehingga menjadi tidak konsisten karena $\boldsymbol{d}$ tidak didefinisikan secara jelas seperti pada Teorema 2.10.

Diberikan dua himpunan sebagai berikut:

$S_1 = \{\ \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}\ : \boldsymbol{z_1} = \boldsymbol{A_1 d}, \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{A_2 d}\}$

$S_2 = \{\ \boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}\ : \boldsymbol{z_1} < \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{0}\}$

Dimana S_1 dan S_2 adalah himpunan konveks tak kosong sehingga $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, berdasarkan pada Teorema 2.3 maka ada vektor tak nol $\boldsymbol{p^t} = (\boldsymbol{p_1^t}, \boldsymbol{p_2^t})$ dan $S_1 \geq S_2$ sehingga

$\boldsymbol{p^t} S_1 \geq \boldsymbol{p^t} S_2$

$\boldsymbol{p_1^t z_1} + \boldsymbol{p_2^t z_2} \geq \boldsymbol{p_1^t z_1} + \boldsymbol{p_2^t z_2}$

$\boldsymbol{p_1^t A_1 d} + \boldsymbol{p_2^t A_2 d} \geq \boldsymbol{p_1^t z_1} + \boldsymbol{p_2^t z_2}$ untuk **d**ϵE$_n$ dan $(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) \epsilon cl\ S_2$.

Diketahui untuk $(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) \boldsymbol{\epsilon} S_2$. dimana $\boldsymbol{z_2} = \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{z_1} < 0$ maka dapat dipilih angka negatif besar. Dan juga $(\boldsymbol{z_1}, \boldsymbol{z_2}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$**.** Sehingga diperoleh $\boldsymbol{p_1^t A_1 d} + \boldsymbol{p_2^t A_2 d} \geq \boldsymbol{0}$**.** Jika $\mathbf{d} = -(\boldsymbol{A_1^t p_1} + \boldsymbol{A_2^t p_2})$**,** hal ini mengikuti $-\ \ (\boldsymbol{A_1^t p_1} + \boldsymbol{A_2^t p_2})\ \ ^{\mathbf{2}} \geq \boldsymbol{0}$**,** dan $(\boldsymbol{A_1^t p_1} + \boldsymbol{A_2^t p_2}) = \boldsymbol{0}$**.**

Ada vektor tak nol $\boldsymbol{p^t} = (\boldsymbol{p_1^t}, \boldsymbol{p_2^t})$ dengan $\boldsymbol{p_1} \geq \boldsymbol{0}$ sehingga $(\boldsymbol{A_1^t p_1} + \boldsymbol{A_2^t p_2}) = \boldsymbol{0}$**.** Hal ini menunjukkan $\boldsymbol{p_1}$ oleh λ_0 dan λ_i, dan $\boldsymbol{p_2}$=μ. Bukti selesai.

7) **Teorema 2.12** (Mokhtar S Bazaraa, 1979:146)

(**Teorema Syarat Perlu Kuhn Tucker**) Menurut Mokhtar S Bazaraa (1979:146) jika *x* bukan himpunan kosong di E_n dan $f: E_n \to E_1$,

$g_i: E_n \to E_1$ untuk *i*=1, ..., *m* dan $h_i: E_n \to E_1$ dengan bentuk umum

minimum $\qquad : f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ (2.35) dengan kendala : $g_i(x) \leq 0$, dengan i=1,2,..., m (2.36)

$h_j(x) = 0$, dengan i=1,2,..., l (2.37)

Dimana $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah variabel keputusan, f adalah fungsi tujuan dan g_i , h_j adalah fungsi kendala. Misalkan fungsi $f(x)$, $g_i(x)$, $h_j(x)$ adalah fungsi kontinu dan terdiferensial. Diasumsikan x merupakan solusi yang mungkin, dimana $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i}$ dan $\sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_j}$ saling bebas linear. Maka terdapat skalar λ_i, μ_j sedemikian sehingga

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_j} = 0 \qquad (2.38)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \qquad \text{untuk } i = 1, \ldots, m \qquad (2.39)$$

Dengan kendala

$$g_i(x) \leq 0 \text{ untuk } i=1,\ldots, m \qquad (2.40)$$

$$h_j(x) = 0 \text{ untuk } j=1, \ldots, p \qquad (2.41)$$

Dengan kata lain syarat perlu *Kuhn Tucker* yaitu nilai turunan pertama dari fungsi objektif maupun fungsi kendala akan sama dengan nol.

Dari persamaan di atas dapat didefinisikan persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$L(x, \lambda, \mu) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_j} = 0 \qquad (2.42)$$

Bukti:

Dengan Teorema 2.3 terdapat skalar λ_ι, μ_J sedemikian sehingga

$$\lambda_o \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_\iota \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \mu_J \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_j} = 0$$

Perhatikan bahwa $\lambda_o > 0$, karena jika $\lambda_o = 0$ maka akan terjadi kontradiksi dengan asumsi bebas linear $\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i}$ dan $\frac{\partial h_j(x)}{\partial x_j}$. Hasil pertama lalu diikuti dengan nilai $\lambda_i = \frac{\lambda_\iota}{\lambda_o}$ dan $\mu_j = \frac{\mu_J}{\lambda_o}$. Bentuknya sama dengan kondisi perlu dengan nilai $\lambda_i = 0$. Sehingga kondisi *Kuhn Tucker* dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x_j} = 0$$

8) Teorema 2.13 (Mokhtar S Bazaraa,1979:147)

(**Teorema Syarat Cukup Kuhn Tucker**) Menurut Mokhtar S Bazaraa (1979:146) jika x bukan himpunan kosong di E_n dan $f: E_n \to E_1$, $g_i: E_n \to E_1$ untuk *i*=1, ..., *m* dengan permasalahan bentuk umum P adalah

minimum : $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ (2.43)

dengan kendala : $g_i(x) \leq 0$, dengan *i*=1,2,..., *m* (2.44)

$h_i(x) = 0$, dengan *i*=1,2,..., *l* (2.45)

Dimana $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah variabel keputusan, f adalah fungsi tujuan dan g_i , h_j adalah fungsi kendala.

Misalkan fungsi $f(x)$ *pseudoconvex*, $g_i(x)$ adalah *quasiconvex* terdiferensial. Diasumsikan x merupakan solusi yang mungkin dan merupakan solusi optimum global, dimana ada λ_i yang merupakan skalar *nonnegative* sedemikian sehingga

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_\iota \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{l} \mu_\iota \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.46)$$

Dengan kata lain, jika $f(x)$, $g_i\ x$ adalah konveks dan karena keduanya *pseudoconvex* dan *quasiconvex,* maka kondisi *Kuhn Tucker* menjadi cukup.

Bukti:

Misal x adalah solusi yang mungkin dari permasalahan P. Untuk $i\epsilon$I, $g_i(x) \leq g_i(x)$ karena $g_i(x) \leq 0$ dan $g_i\ x\ = 0$. Dengan *quasiconvexity* dari g_i untuk x dan mengikuti

$$g_i\ x\ + \lambda(x - x)) = g_i(\lambda x + (1-\lambda)x) \leq maximum\ (g_i\ x\ , g_i(x))$$
$$= g_i(x)$$

Untuk setiap $\lambda\epsilon(0,1)$. Hal ini berimplikasi bahwa g_i bukan penambahan dengan mengganti dari x sepanjang arah $x - x$, sehingga

$$\frac{\partial g_i(x)^t}{\partial x_i}(x - x) \leq 0 \text{ , untuk } i\epsilon I \qquad \text{(a)}$$

Dengan cara yang sama, karena h_i adalah *quasiconvex* untuk x dimana $i\epsilon J$ dan h_i adalah *quasiconcave* untuk x dimana $i\epsilon$K, sehingga

$$\frac{\partial h_i(x)^t}{\partial x_i}(x - x) \leq 0 \text{ , untuk } i\epsilon\text{J} \qquad \text{(b)}$$

$$\frac{\partial h_i(x)^t}{\partial x_i}\ x - x\ \geq 0 \text{ , untuk } i\epsilon\text{K} \qquad \text{(c)}$$

Dengan mengalikan persamaan (a), (b) dan (c), dan nilai $\lambda_\iota \geq 0$, $\mu_\iota > 0$, $\mu_\iota < 0$ dan penambahan, diperoleh

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_\iota \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_i} + \sum_{i=JUK}^{l} \mu_\iota \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_i} = 0^{\ t}\ (x - x) \leq 0$$

Dengan mengalikan persamaan (2.40) dengan $(x - x)$ dan tanpa $\mu_\iota = 0$, berimplikasi dengan $\frac{\partial f(x)^t}{\partial x_j}\ x - x\ \geq 0$

Dengan *pseudoconvexity* dari f untuk x, sehingga $f(x) \geq f(x)$, dan terbukti.

Definisi 2.14 Hillier (2001:680)

Diasumsikan $f(x)$ merupakan fungsi tujuan dan $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ merupakan fungsi kendala yang dapat diturunkan maka $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ merupakan nilai optimal untuk permasalahan program nonlinear hanya jika terdapat sejumlah *m* bilangan $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ sehingga semua syarat kondisi KKT (*Karush Kuhn Tucker*) terpenuhi:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j} \leq 0$ pada $x = x^*$ untuk *j*=1, 2, ..., *n* (2.47)

(ii) $x_j(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g}{\partial x_j}) = 0$ pada $x = x^*$ untuk *j*=1, 2, ..., *n* (2.48)

(iii) $g_i(\mathrm{x})^* - b_i \leq 0$ untuk *i*= 1, 2, .., *m* (2.49)

(iv) $\lambda_i \, g_i \, \mathrm{x}^* - b_i = 0$ untuk *i*=1, 2, ..., *m* (2.50)

(v) $x_j^* \geq 0$ untuk *j*=1, 2, ..., *m* (2.51)

(vi) $\lambda_j \geq 0$ untuk *j*=1, 2, ..., *m* (2.52)

Dari kondisi (ii) dan (iv) memerlukan hasil kali dua kuantitas sama dengan nol. Oleh karena itu, setiap kondisi ini menyatakan bahwa setidaknya salah satu dari kuantitas harus sama dengan nol. Hal ini berakibat kondisi (iv) dapat dikombinasi dengan kondisi (iii), sehingga dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut:

$g_i(\mathrm{x})^* - b_i = 0$ atau (2.53)

$g_i(\mathrm{x})^* - b_i \leq 0$ jika λ_i=0 untuk *i*=1, 2, ..., *m* (2.54)

Demikian pula kondisi (ii) dapat digabung dengan kondisi (i) menjadi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g}{\partial x_j} = 0 \text{ atau} \qquad (2.55)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \leq 0 \text{ jika } x_j^* = 0 \text{ untuk } j = 1, 2, ..., m \qquad (2.56)$$

Contoh 2.4:

Maksimum $f(x) = ln\ (x_1 + 1) + x_2$

dengan kendala $2x_1 + x_2 \leq 3,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Kondisi KKT untuk contoh di atas yaitu:

1. Untuk j=1, $\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda_1 \leq 0$

   Untuk j=2, $1 - \lambda_1 \leq 0$

2. Untuk j=1, $\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda_1 = 0$

   Untuk j=2, $x_2\ \ 1 - \lambda_1\ \ = 0$

3. $2x_1 + x_2 - 3 \leq 0$

4. $\lambda_1\ \ 2x_1 + x_2 - 3\ \ = 0$

5. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

6. $\lambda_1 \geq 0$

Langkah penyelesaian kondisi KKT untuk contoh di atas:

1. $\lambda_1 \geq 1$, dari kondisi 1 (j=2)

   $x_1 \geq 0$, dari kondisi 5.

2. $\frac{1}{x_1+1} - 2\lambda_1 < 0$

3. $x_1 = 0$, dari kondisi 2 (j=1)

4. $\lambda_1 \neq 0$, berimpilkasi $2x_1 + x_2 - 3 = 0$ dari kondisi 4

5. Dari (3) dan (4) diperoleh nilai $x_2 = 3$

6. $x_2 \neq 0$, berimplikasi $\lambda_1 = 1$ dari kondisi 2 (j=2)

7. Tidak ada kondisi yang dilanggar oleh $x_1 = 0, x_2 = 3, \lambda_1 = 1$

Sehingga diperoleh solusi $x_1 = 0, x_2 = 3, \lambda_1 = 1$ atau x*=(0,3).

L. Metode Kuadratik

Menurut Mokhtar S Bazaraa (1979:447) metode kuadratik merupakan bentuk khusus dari program *nonlinear* yang memiliki fungsi tujuan berbentuk kuadratik dan kendala linear.

Bentuk umum dari model kuadratik yaitu:

Minimum $\quad f(x) = c^t x + \frac{1}{2} x^t H x \qquad (2.57)$

dengan kendala $\quad Ax \leq b \qquad (2.58)$

$x \geq 0$

Dimana:

c : vektor kolom dari fungsi tujuan

A : matriks kendala

x : matriks kolom dari variabel keputusan

b : vektor kolom dari kendala bagian kanan

H : matriks Hessian

t : transposisi matriks

Notasi dari perkalian vektor Lagrange dengan kendala $Ax \leq b$ dan $x \geq 0$ oleh u dan v. Notasi dari variabel slack yaitu y, sehingga kondisi KKT dapat dinyatakan sebagai:

$$Ax + y = b \tag{2.59}$$

$$Hx - A^t u + v = c \tag{2.60}$$

$$x, y, u, v \geq 0 \tag{2.61}$$

diperoleh:

$$M = \begin{matrix} 0 & -A \\ A^t & H \end{matrix} \qquad q = \begin{matrix} b \\ c \end{matrix} \qquad \text{w} = \begin{matrix} y \\ v \end{matrix} \qquad \text{z} = \begin{matrix} u \\ x \end{matrix} \tag{2.62}$$

M. Permasalahan Komplementaritas Linear (*The Linear Complementary Problem*)

Kondisi KKT dan model kuadratik dapat dinyatakan dalam permasalahan komplementaritas, dengan algoritma ini dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan *nonlinear* dengan metode kuadratik.

Definisi 2.15 (Mokhtar S Bazaraa,1979:438)

Jika M adalah sebuah matrik berukuran *pxp*, dan **q** merupakan vektor *p*. Permasalahan komplementaritas linear untuk menentukan vektor **w** dan **z** yaitu:

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} = \mathbf{q} \tag{2.63}$$

$w_j \geq 0$, $z_j \geq 0$ untuk j= 1, 2, ..., p (2.64)

$w_j z_j = 0$ untuk j= 1, 2, ..., p (2.65)

Dimana:

(w_j, z_j) : variabel komplemen

q : vektor kolom

M : matriks pxp yang diketahui.

Algoritma yang efisien telah dikembangkan untuk memecahkan permasalahan komplemen linear dengan asumsi pada matriks **M**. Algoritma yang digunakan yaitu pemutaran (*pivoting*) dari satu solusi BF (*Basic Feasible*) ke solusi selanjutnya, seperti pada metode simpleks dalam program linear. Jika q bilangan *nonnegative* dengan $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{q}$ dan $\boldsymbol{z} = 0$, maka penyelesaian dari (1), (2), (3) yaitu:

$$\mathbf{w} - \mathbf{Mz} - \mathbf{1}\boldsymbol{z_o} = \mathbf{q} \quad (2.66)$$

$w_j \geq 0$, $z_j \geq 0$, $z_o \geq 0$ untuk j= 1, 2, ..., p (2.67)

$w_j z_j = 0$ untuk j= 1, 2, ..., p (2.68)

N. Langkah-langkah Penyelesaian Metode Kuadratik

Model kuadratik pada persamaan (2.57) dapat diselesaikan dengan metode Kuadratik. Adapun langkah-langkah penyelesainnya sebagai berikut:

a. Menentukan turunan dari fungsi tujuan.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \qquad \frac{\partial_f^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial_f^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial_f^2}{\partial x_1 \partial x_n} \qquad \frac{\partial_f^2}{\partial x_n \partial x_1}, \frac{\partial_f^2}{\partial x_n \partial x_2}, \dots, \frac{\partial f^2}{\partial x_n^2}$$

b. Menentukan matriks Hessian seperti pada persamaan (2.17).

$$H = \begin{matrix} \frac{\partial_f^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial_f^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial_f^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial_f^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial_f^2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial_f^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial_f^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial_f^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial_f^2}{\partial x_n^2} \end{matrix}$$

c. Menentukan Persyaratan *Karush Kuhn Tucker* (KKT)

Berdasarkan pada Definisi 2.14 diperoleh persyaratan *Karush Kuhn Tucker* sebagai berikut:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \leq 0$ pada $x = x^*$ untuk *j*=1, 2, ..., *n*

(ii) $x_j(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}) = 0$ pada $x = x^*$ untuk *j*=1, 2, ..., *n*

(iii) $g_i(\mathrm{x})^* - b_i \leq 0$ untuk *i*= 1, 2, .., *m*

(iv) $\lambda_i \; g_i \; \mathrm{x}^{*} - b_i = 0$ untuk *i*=1, 2, ..., *m*

(v) $x_j^* \geq 0$ untuk *j*=1, 2, ..., *n*

(vi) $\lambda_j \geq 0$ untuk *j*=1, 2, ..., *m*

d. Menyatakan permasalahan dalam bentuk umum model kuadratik seperti pada persamaan (2.57), dimana komponen-komponen pembentukan model kuadratik seperti pada persamaan (2.60).

$$c = \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix} \text{ sehingga } c^t = | \frac{\partial f}{\partial x_1} \;\; \frac{\partial f}{\partial x_2} \;\; \dots \;\; \frac{\partial f}{\partial x_n} |$$

$$x = \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad \text{sehingga } x^t = |x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n|$$

Model umum Kuadratik yaitu meminimumkan

$$f(x) \; = \; c^t x + \frac{1}{2} x^t H x$$

$$= \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{matrix} \; . \; \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

$$+ \frac{1}{2} . \; \begin{matrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{matrix} \; . \; \begin{matrix} \frac{\partial^2_f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2_f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2_f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2_f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2_f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2_f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2_f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2_f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2_f}{\partial x_n^2} \end{matrix} \; . \; \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix}$$

Dengan kendala $g_i(\mathrm{x})^* = b_i$

e. Mengubah kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang berbentuk pertidaksamaan menjadi persamaan dengan menambah *slack* variabel.

Untuk mengubah pertidaksamaan pada persyaratan *Karush Kuhn Tucker* kondisi (i) dan (iii) menjadi persamaan yaitu dengan memindahkan konstanta ke sisi sebelah kanan dan menambahkan *slack* variabel *nonnegative* yang dilambangkan dengan $y_1, \dots, \; y_j, v_i$.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + y_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} = y_1$

$\vdots$

$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + y_j = 0 \;\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = y_j$

(iii) $g_i(\mathrm{x})^* - b_i + v_i = 0$

f. Menentukan kendala komplementaritas.

Kendala komplementaritas diperoleh dengan mensubstitusikan hasil perhitungan point e pada kondisi *Karush Kuhn Tucker* yang berbentuk persamaan yaitu kondisi (ii) dan kondisi (iii).

(ii) $$x_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 \, y_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$x_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1}\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 \, y_j = 0$$

(iii) $\lambda_i \left(g_i(\mathrm{x}^*) - b_i\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda_i \, v_i = 0.$

Setiap pasang (x_1, y_1), ..., (x_j, y_j) dan $(\lambda_\mathrm{i}, v_\mathrm{i})$ merupakan variabel komplementer karena hanya satu dari dua variabel tersebut yang dapat bernilai nol. Kendala komplementer tersebut digabung menjadi satu kendala yaitu:

$$x_1 y_1 + \cdots + x_j y_j + \lambda_i v_i = 0$$

g. Membentuk permasalahan komplementaritas dengan menambah variabel *artificial*.

Permasalahan komplementaritas adalah meminimumkan nilai variabel *artificial* pada *Karush kuhn Tucker*. Variabel *artificial* ditambahkan pada persyaratan *Karush Kuhn Tucker* kondisi (i) yang telah diubah menjadi persamaan yang terdapat pada point e. Variabel semu yang ditambahkan yaitu $z_1, \ldots, z_j$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + y_1 + z_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + y_j + z_j = 0$$

Model kuadratik pada persamaan (2.57) telah ditransformasi menjadi model linear, sehingga fungsi tujuan yang akan diselesaikan dengan metode simpleks yaitu:

meminimumkan Z dimana $Z = z_1 + \cdots + z_j$

dengan semua kendalanya yaitu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_1} + y_1 + z_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + y_j + z_j = 0$$

$g_i(\mathrm{x})^* - b_i + v_i = 0$

$x_1, x_2, \dots, x_j \geq 0$, $\lambda_\mathrm{i} \geq 0$, $y_1, y_2, \dots, y_j \geq 0$, $v_j \geq 0$, $z_1, z_2, \dots, z_j \geq 0$

h. Menyatakan persamaan komplementer dalam bentuk matriks.

$A = |a_1 \; a_2 \dots \; a_j|$

$$b = \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \end{matrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^t & H \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

Meminimumkan $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix}$

Dengan kendala:

$$w - Mz = q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^t & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$$

i. Menyelesaikan model linear dengan metode simpleks.

   Secara komputasi perhitungan dapat diselesaikan dengan bantuan QSB.

O. Program Linear

1. Pengertian Program Linear

Program linear merupakan salah satu model yang dapat digunakan untuk memodelkan permasalahan optimasi. Untuk mendapatkan hasil yang optimal, persyaratan yang harus dipenuhi adalah dengan menyelesaikan persoalan secara matematis. Menurut Zulian Yamit (1991:1), syarat-syarat yang harus dipenuhi agar suatu persoalan dapat dipecahkan dengan program linear secara lengkap sebagai berikut:

a. Fungsi tujuan harus didefinisikan secara jelas dan dinyatakan sebagai fungsi obyektif yang linear.
b. Fungsi tujuan dan fungsi kendala dinyatakan dalam hubungan linear.
c. Variabel keputusan harus positif.
d. Sumber-sumber dan aktifitas mempunyai sifat dapat dibagi, artinya solusi tidak harus merupakan bilangan *integer* (bilangan bulat).
e. Sumber-sumber dan aktifitas mempunyai jumlah yang terbatas.
f. Aktifitas harus proporsional terhadap sumber-sumber, artinya adanya proposionalitas dalam fungsi tujuan dan fungsi kendala.
g. Model *programming deterministik* , artinya sumber dan aktifitas diketahui secara pasti.

2. Model Program Linear

Menurut Zulian Yamit (1991:2), untuk menyelesaikan permasalahan optimasi dengan program linear, hal pertama yang dilakukan adalah mengidentifikasi masalah kemudian membuat model matematis dari masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan untuk merumuskan model program linear adalah

a. Tentukan variabel keputusan yang akan dicari, dan beri notasi dalam bentuk matematis.

b. Tentukan batasan dari variabel keputusan, dan nyatakan dalam bentuk persamaan linear atau ketidaksamaan linear.

c. Tentukan tujuan yang akan dicapai dari variabel keputusan.

Menurut B. Susanta (1994: 6), model program linear secara umum adalah

Mencari $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dengan tujuan:

Memaksimumkan/meminimumkan:

$$f(x_{1,} x_2, x_3, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3\,x_3 + \cdots + c_nx_n \tag{2.69}$$

dengan kendala :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_2$

. . .

. . .

. . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n\ (\leq, =, \geq)\ b_m$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_n \geq 0$

Keterangan:

f : fungsi tujuan

x_j : variabel keputusan

a_{ij} : koefisien teknis (koefisien dalam kendala utama)

b_i : suku tetap

c_j : koefisien biaya (koefisien dalam fungsi tujuan)

$x_j \geq 0$: kendala tak negatif

Perumusan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

mencari x_j, j=1,2,...,n

mak/min $\quad f = {}_j\, c_j x_d$ (2.70)

dengan kendala $\quad a_{ij} x_j\ (\leq, =, \geq) b_i$, i=1,2,...,m

$$x_j \geq 0, \quad x = 1,2, \ldots, n.$$

Fungsi tujuan pada rumusan program linear di atas yaitu $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ merupakan tujuan yang akan dicapai atau dioptimalkan. Selanjutnya, persamaan atau pertidaksamaan yang merepresentasikan keterbatasan atau kendala yang membatasi pencapaian fungsi tujuan dinamakan fungsi kendala. Untuk *m* kendala pertama disebut kendala utama. Syarat bahwa nilai variabel keputusan harus lebih dari atau sama dengan nol ($x_j \geq 0$) dinamakan kendala-kendala tidak negatif. Rumusan program linear di atas menunjukkan bahwa setiap kendala dapat berbentuk kendala pertidaksamaan atau persamaan.

Menurut B. Susanta (1994: 81-82), terdapat tiga jenis bentuk masalah program linear sebagai berikut:

a) Masalah program linear berbentuk kanonik yaitu masalah program linear yang semua kendala utamanya berbentuk persamaan.

   Mencari x_j, *j* = 1, 2, ..., *n* dengan tujuan:

   memaksimumkan (atau meminimumkan) $f(x_j) = {}_j^n\, c_j x_j$ (2.71)

   dan memenuhi susunan kendala berikut: ${}_{j=1}^{n}\, a_{ij} x_j$ = b_i, i=1,2,...,m

   $x_j \geq$ 0, *x*=1,2,...,*n*.

b) Masalah program linear berpola maksimum yaitu masalah program linear yang memaksimumkan fungsi tujuan dengan model sebagai berikut:

Mencari x_j, j = 1, 2, ..., n

yang memaksimumkan $f(x_j) = {}^{n}_{j} c_j x_j$ (2.72)

dengan kendala ${}^{n}_{j=1} a_{ij} x_j$ ($\geq, \leq, =$) b_i, i=1,2,...,m

$x_j \geq 0$ x=1,2,...,n.

Jika relasi setiap kendala utama pada masalah program linear berpola maksimum adalah kurang dari atau sama dengan (≤), maka disebut model berpola maksimum baku.

c) Masalah program linear berpola minimum yaitu masalah program linear yang meminimumkan fungsi tujuan dengan model sebagai berikut:

Mencari x_j, j = 1, 2, ..., n

yang meminimumkan $f(x_j) = {}^{n}_{j} c_j x_j$ (2.73)

dengan kendala: ${}^{n}_{j=1} a_{ij} x_j$ ($\geq, \leq, =$) b_i, i=1,2,...,m

$x_j \geq 0$, x=1,2,...,n.

Jika relasi setiap kendala utama pada masalah program linear berpola minimum adalah lebih dari atau sama dengan (≥), maka disebut model masalah berpola minimum baku.

Contoh 2.5

Sebuah perusahaan sedang mencari alternatif kombinasi produksi dari produk yang dihasilkan, agar memperoleh keuntungan yang maksimum. Pada saat ini perusahaan memproduksi 3 jenis produk yang diberi merek AB, AC dan AD. Ketiga produk tersebut dibuat dengan menggunakan sumber daya berupa: bahan baku, mesin, tenaga kerja. Bagian penelitian dan pengembangan hasil produksi memberikan informasi bahwa untuk membuat ketiga jenis produk setiap unitnya memerlukan sumber daya seperti terlihat dalam tabel berikut ini:

Tabel 2. Sumber daya produksi

Sumber Daya	AB	AC	AD
Bahan Baku	2 Kg	3 Kg	4 Kg
Tenaga Kerja	5 Jam	2 Jam	4 Jam
Mesin	3 Jam	4 Jam	2 Jam

Setiap bulannya perusahaan mampu menyediakan paling banyak 200 Kg bahan baku, 250 jam tenaga kerja dan 150 jam kerja mesin. Ketiga produk tersebut memberikan sumbangan keuntungan masing-masing sebesar Rp.50,00 untuk produk AB, Rp.30,00 untuk produk AC dan Rp.40,00 untuk produk AD. Berapa banyak produk untuk tiap jenis agar diperoleh keuntungan yang maksimum?

a. Menentukan variabel keputusan

Aktivitas yang diketahui adalah produksi bulanan dari ketiga jenis produk.

Misalkan: *x* adalah banyak produksi bulanan dari jenis AB

y adalah banyak produksi bulanan dari jenis AC

z adalah banyak produksi bulanan dari jenis AD

b. Menentukan batasan/kendala

Untuk setiap unit produk jenis AB memerlukan 2 Kg bahan baku, sehingga untuk x unit produk AB memerlukan $2x$ bahan baku. Model AC memerlukan $3y$ dan model AD memerlukan $4z$. Dengan demikian kebutuhan bahan baku secara total ketiga jenis produk tersebut adalah $2x + 3y + 4z$ yang tidak boleh melebihi 200 Kg. Demikian pula halnya untuk sumber daya jam tenaga kerja dan jam kerja mesin. Apabila ketiga batasan tersebut dibuat dalam satu set fungsi linear, akan berbentuk sebaagai berikut:

bahan baku $2x + 3y + 4z \leq 200$

tenaga kerja $5x + 2y + 4z \leq 250$

jam mesin $3x + 4y + 2z \leq 150$

c. Menentukan tujuan yang akan dicapai

Koefisien fungsi tujuan dibentuk dari sumbangan keuntungan setiap jenis produk, yang akan dimaksimumkan. Apabila keuntungan maksimum diberi notasi Z maka fungsi tujuan akan berbentuk sebagai berikut:

Maksimum $Z = 50x + 30y + 40z$

Dari ketiga langkah tersebut, diperoleh model linearnya adalah

Maksimum $Z = 50x + 30y + 40z$

Dengan batasan / kendala

1) $2x + 3y + 4z \leq 200$

2) $5x + 2y + 4z \leq 250$

3) $3x + 4y + 2z \leq 150$

untuk harga $x,\ y,\ z \geq\ 0$.

3. Operasi Elementer

Operasi elementer dibutuhkan untuk mengetahui langkah-langkah penyelesaian pada metode simpleks.

Definisi 2.16 (Howard Anton, 1995: 5)

Operasi elementer adalah operasi yang dilakukan pada suatu matriks. Langkah-langkah operasi elementer yaitu:

1) Mengalikan sebuah baris atau kolom dengan sebuah konstanta yang tidak sama dengan nol.
2) Mempertukarkan dua baris atau kolom.
3) Mengalikan suatu baris atau kolom dengan sebuah konstanta yang tidak nol, kemudian ditambahkan pada baris atau kolom yang lain.

Contoh 2.6

Diberikan contoh penerapan operasi elementer pada sebuah matriks.

Misal terdapat matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}$$

$$[A \mid I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad OBE = B_2 - 2B_1, B_3 - B_1$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad OBE = B_3 + 2B_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad OBE = -1.B_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad OBE = B_2 + 3B_3,\ B_1 - 3B_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad OBE = B_1 - 2B_2$$

$$= [I \mid A^{-1}]$$

4. Metode Simpleks

Menurut B.Susanta (1994:68) masalah program linear dengan dua perubah atau dengan tiga perubah yang disusutkan masih dapat diselesaikan dengan metode grafik. Untuk masalah program linear yang memuat tiga perubah atau lebih dan tidak dapat disusutkan menjadi masalah dengan dua perubah dapat diselesaikan dengan metode simpleks. Menurut B. Susanta (1994: 86-87) setiap iterasi pada metode simpleks menggunakan alat bantu berupa tabel simpleks sebagai berikut:

Tabel 3. Tabel Simpleks

	c_j	c_1	c_2	$\cdots$	c_n		
$c_\imath$	$x_\imath \diagdown x_j$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	b_i	R_i
c_1	x_1	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1	R_1
c_2	x_2	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2	R_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
c_m	x_m	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m	R_m
	z_j	z_1	z_2	$\cdots$	z_n	Z	
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\cdots$	$z_n - c_n$	Z	

Keterangan:

x_j : perubah-perubah lengkap

a_{ij} : koefisien teknis (koefisien dalam kendala utama)

b_i : suku tetap (tak negatif)

c_j : koefisien biaya (koefisien dalam fungsi tujuan)

$x_\imath$: perubah yang menjadi basis dalam tablo yang ditinjau

$c_\imath$: koefisien ongkos milik perubah basis $x_\imath$

z_j : ${}^{m}_{i=1} c_\imath a_{ij}$ (hasil kali dari $c_\imath$ dengan kolom a_{ij})

Z : ${}^{m}_{i=1} c_\imath b_i$ (hasil kali dari ${}^{m}_{i=1} c_\imath$ dengan b_i)

$z_j - c_j$: selisih z_j dengan c_j

R_i : $\frac{b_i}{a_{ik}}$ hanya untuk $a_{ik} > 0$

Berikut diberikan langkah-langkah penyelesaian model program linear menggunakan metode simpleks menurut B. Susanta(1994: 87-108):

1) Langkah Awal: Membuat Tabel Awal Simpleks

Langkah awal metode simpleks adalah mengubah bentuk model masalah program linear yang ada ke bentuk kanonik, kemudian memasukkan masalah tersebut pada tabel awal simpleks yang disusun seperti Tabel Simpleks pada Tabel 3. Variabel *slack* dan *artificial* menjadi variabel basis karena variabel-variabel ini berada dalam matriks identitas dengan koefisien $+1$. Apabila ada penambahan variabel *slack, surplus,* dan *artificial* pada suatu model maka dibuat fungsi tujuan baru, yaitu fungsi tujuan yang memuat variabel-variabel tersebut. Koefisien biaya variabel *slack* dan *surplus* adalah nol, variabel *artificial* adalah –M untuk kasus memaksimumkan dan +M untuk kasus meminimumkan fungsi tujuan. M mewakili suatu bilangan yang sangat besar.

2) Langkah Kedua: Menguji Keoptimuman Penyelesaian

Langkah kedua ini bertujuan untuk memeriksa penyelesaian yang diperoleh tabel simpleks pada suatu iterasi. Suatu penyelesaian layak basis masalah program linear kasus memaksimumkan fungsi tujuan dikatakan telah optimum apabila $z_j - c_j \geq 0$, sedangkan untuk kasus meminimumkan penyelesaian layak basis telah optimum jika $z_j - c_j \leq 0$, untuk setiap j, dengan j = 1, 2, ..., n. Apabila penyelesaian yang diperoleh tabel pada suatu iterasi telah optimum, maka langkah metode simpleks berhenti. Namun, apabila penyelesaian yang diperoleh belum optimum, tabel simpleks perlu diperbaiki untuk memperoleh penyelesaian yang lebih baik yaitu penyelesaian yang lebih mengoptimumkan fungsi tujuan. Memperbaiki tabel simpleks ini merupakan langkah ketiga dari metode simpleks.

3) Langkah Ketiga: Memperbaiki tabel

Tahap ini bertujuan untuk membuat tabel simpleks baru yang menghasilkan penyelesaian yang lebih baik dari tabel sebelumnya.

Hal tersebut dilakukan dengan cara memilih satu variabel non-basis untuk dijadikan variabel basis baru pada tabel simpleks baru yang akan dibuat dan pemilihan satu variabel basis yang keluar dari basiskarena akan digantikan oleh variabel basis baru yang terpilih. Setelah diperoleh tabel baru dilanjutkan menguji keoptimuman penyelesaian. Apabila penyelesaiannya telah optimal maka iterasi dihentikan, tetapi apabila penyelesaiannya belum optimal maka dilanjutkan langkah ketiga yaitu tahap memperbaiki tabel. Variabel non-basis yang menjadi variabel basis untuk kasus memaksimumkan fungsi tujuan adalah variabel non-basis x_k pada kolom ke-k yang memiliki nilai $z_j - c_j$ paling kecil (j = 1, 2, ..., n). Pada kasus meminimukan, variabel non-basis x_k dari kolom ke-k yang memiliki nilai $z_j - c_j$ paling besar (j = 1, 2, ..., n). Apabila ada beberapa kolom yang memiliki nilai $z_j - c_j$ yang sama, maka dapat dipilih salah satu diantaranya secara acak. Selanjutnya kolom yang terpilih tersebut dinamakan kolom kunci.

Variabel basis yang harus keluar baik pada kasus memaksimumkan atau meminimumkan fungsi tujuan adalah sama yaitu variabel x_p yang diperoleh dari baris R_i yang terkecil. Nilai R_i diperoleh dari perhitungan berikut: $R_i = \frac{b_i}{a_{ik}}$ dengan $a_{ik} > 0$. Baris yang terpilih dinamakan sebagai baris kunci. Unsur yang menjadi perpotongan kolom dan baris kunci dinamakan unsur kunci, yang digunakan untuk memperbaiki tabel. Nilai unsur kunci ini harus dibuat sama dengan 1 dan nilai-nilai lainnya pada kolom yang sama harus nol dengan melakukan beberapa kali operasi baris elementer.

5. Langkah-langkah pada QSB

QSB digunakan untuk membantu perhitungan permasalahan portofolio optimal. Dimana fungsi dari QSB sama dengan metode simpleks. Hanya saja perhitungan dengan QSB menggunakan program, sedangkan untuk metode Simpleks secara manual. Langkah-langkah pada QSB secara lengkap dapat dilihat pada Lampiran III.

a. Buka Program QSB .
b. Pilih *Linear Programming* .
c. Pilih *enter new problem* untuk menginput permasalahan baru .
d. Pemberian nama permasalahan.

e. Menginput hal-hal yang akan ditinjau seperti: fungsi tujuan, banyaknya kendala, banyaknya variabel, dll.

f. Menginput variabel.

g. Menginput data permasalahan seperti fungsi tujuan dan fungsi kendala.

h. Menentukan Solusi Permasalahan. Ada beberapa pilihan seperti solusi per langkah, ataupun solusi akhirnya.

i. Solusi akhir dari permasalahan.

Berikut diberikan contoh penyelesaian persamaan *nonlinear* dengan metode kuadratik.

Contoh 2.8 :

Diketahui fungsi tujuan:

Meminimumkan $f\ \ x_1, x_2\ \ = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$

Dengan kendala $x_1 + 2x_2 \leq 0$

$x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian:

a. Menentukan turunan parsial dari fungsi tujuan.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 15 + 4x_2 - 4x_1 \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} = -4 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1 x_2} = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 30 + 4x_1 - 8x_2 \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_2^2} = -8 \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2 x_1} = 4$$

b. Menentukan matriks Hessian seperti pada persamaan (2.17).

$$\text{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$$

Det H= $(-4.-8) - (4.4) = 32 - 16 = 16 > 0$

Jadi matriks H adalah definit positif

Nilai dari $\frac{\partial f^2}{\partial x_1^2} = -4 < 0$ dan $\frac{\partial f^2}{\partial x_2^2} = -8 < 0$

Jadi fungsi $f(x_1, x_2)$ merupakan fungsi konkaf.

c. Menentukan persyaratan *Karush Kuhn Tucker*

1. Untuk j=1, $15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda_1 \leq 0$

   Untuk j=2, $30 + 4x_1 - 8x_2 - 2\lambda_1 \leq 0$

2. Untuk j=1, $x_1(15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda_1) = 0$

   Untuk j=2, $x_2(30 + 4x_1 - 8x_2 - 2\lambda_1) = 0$

4. $x_1 + 2x_2 - 30 \leq 0$

5. $\lambda_1(x_1 + 2x_2 - 30) = 0$

6. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

7. $\lambda_1 \geq 0$

d. Menyatakan permasalahan dalam bentuk model kuadratik seperti pada persamaan (2.57).

Dari soal diatas diperoleh

$$c = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 30 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{x^t Hx} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(-4x_1 + 4x_2)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(-4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_2 - 8x_2^2)$$

$$= (-2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2)$$

Sehingga model umumnya yaitu meminimumkan

$$f(x) = c^t x + \tfrac{1}{2}x^t Hx$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 15 & 30 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dengan kendala $x_1 + 2x_2 \leq 30$

e. Mengubah kondisi Karush Kuhn Tucker yang berbentuk pertidaksamaan menjadi persamaan dengan menambah *slack* variabel.

Untuk mengubah pertidaksamaan pada kondisi KKT 1. untuk $j = 1$, $j = 2$ dan kondisi 3 menjadi persamaan yaitu dengan memindahkan konstanta ke sisi sebelah kanan dan menambahkan *slack* variabel *nonnegative* yang dilambangkan dengan y_1, y_2, v_1.

1. Untuk j=1, $-4x_1 + 4x_2 - \lambda_1 + y_1 = -15$

$$\Leftrightarrow 15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda_1 = y_1$$

Untuk j=2, $4x_1 - 8x_2 - 2\lambda_1 + y_2 = -30$

$$\Leftrightarrow 30 + 4x_1 - 8x_2 - 2\lambda_1 = y_2$$

3. $x_1 + 2x_2 + v_1 = 30 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 - 30 = v_1$

f. Menentukan kendala komplementaritas.

Perhatikan kondisi 2 untuk j=1 dan dari point (e) untuk j=1, sehingga

$$x_1 \; 15 + 4x_2 - 4x_1 - \lambda_1 \;\; = 0$$

$$x_1(y_1) = 0$$

Nilai yang memenuhi yaitu $x_1 = 0$ atau $y_1 = 0$

Dengan cara yang sama, kondisi 1untuk j=2 dan dari point (e) untuk j=2, sehingga

$$\mathrm{x}_2 \; 30 + 4x_1 - 8x_2 - 2\lambda_1 \;\; = 0$$

$$\mathrm{x}_2 \; y_2 \;\; = 0$$

Nilai yang memenuhi yaitu $\mathrm{x}_2 = 0$ atau $\mathrm{y}_2 = 0$

Dengan cara yang sama untuk kondisi 4 dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda_1 \; \mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 - 30 \;\; = 0$$

$$\lambda_1(v_1) = 0$$

Nilai yang memenuhi yaitu $\lambda_1 = 0$ atau $v_1 = 0$

Setiap pasang (x_1, y_1), (x_2, y_2), (λ_1, v_1) dua variabel tersebut merupakan variabel komplementer karena hanya satu dari dua variabel tersebut yang dapat bernilai nol. Bentuk baru kondisi 2 untuk (j=1), kondisi 2 untuk (j=2) dan 4 dapat digabung menjadi satu kendala yaitu: $x_1\mathrm{y}_1 + x_2\mathrm{y}_2 + \lambda_1 v_1 = 0$

Persamaan ini disebut kendala komplementaritas.

Dengan mengalikan -1 pada kondisi 1 untuk (j=1) dan untuk (j=2) untuk mendapatkan ruas kanan *nonnegative*, sehingga kondisi secara keseluruhan yaitu:

$$4x_1 - 4x_2 + \lambda_1 - \mathrm{y}_1 = 15$$

$$-4x_1 + 8x_2 + 2\lambda_1 - \mathrm{y}_2 = 30$$

$$\mathrm{x}_1 + 2\mathrm{x}_2 + \mathrm{v}_1 = 30$$

$$x_1\mathrm{y}_1 + x_2\mathrm{y}_2 + \lambda_1 v_1 = 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0$$

g. Membentuk permasalahan komplementaritas dengan menambah variabel artificial.

Permasalahan komplementaritas adalah meminimumkan nilai variabel *artificial* pada *Karush Kuhn Tucker*. Masalah program linear yang diselesaikan dengan metode simpleks adalah

Meminimumkan $Z = z_1 + z_2$

$$4x_1 - 4x_2 + \lambda_1 - y_1 + z_1 = 15$$

$$-4x_1 + 8x_2 + 2\lambda_1 - y_2 + z_2 = 30$$

$$x_1 + 2x_2 + v_1 = 30$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, v_1 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$$

h. Menyatakan permasalahan komplementaritas dalam bentuk matriks.

$$w - Mz = q \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} - \begin{array}{cccc} 0 & -1 & -2 & z_1 \\ 1 & -4 & 4 & z_2 \\ 2 & 4 & -8 & 3 \end{array} = \begin{array}{c} 30 \\ 15 \\ 30 \end{array}$$

i. Menyelesaikan dengan metode simpleks

Tabel berikut menunjukkan hasil dari penerapan metode simpleks untuk menyelesaikan masalah di atas.

Langkah awal:

	c_j	0	0	0	0	0	0	1	1		
c_i	x_i / x_j	x_1	x_2	λ_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	B	R
1	z_1	4	-4	1	-1	0	0	1	0	15	-
1	z_2	-4	8	2	0	-1	0	0	1	30	
0	v_1	1	2	0	0	0	1	0	0	30	15
	z_j	0	4	3	-1	-1	0	1	1	45	
	$z_j - c_j$	0	4	3	-1	-1	0	0	0		

Iterasi pertama

OBE: $\frac{1}{8}b_2$, $b_1 + 4b_2$, $b_3 - 2b_2$

	c_j	0	0	0	0	0	0	1	1		
c_i	x_i / x_j	x_1	x_2	λ_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	B	R
1	z_1	2	0	1	-1	-1	0	1	1	30	15
0	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{-1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{30}{8}$	

0	v_1	2	0	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{90}{4}$	
	z_j	2	0	2	-1	-1	0	1	1	30	
	$z_j - c_j$	2	0	2	-1	-1	0	0	0		

Iterasi kedua

OBE: $\frac{1}{2}b_3, b_1 - 2b_3, b_2 + \frac{1}{2}b_3$

	c_j	0	0	0	0	0	0	1	1		
c_i	x_i / x_j	x_1	x_2	λ_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	B	R
1	z_1	0	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{-3}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$	3
0	x_2	0	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{75}{8}$	75
0	x_1	1	0	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{45}{4}$	-
	z_j	0	0	$\frac{5}{2}$	-1	$\frac{-3}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{2}$	
	$z_j - c_j$	0	0		-1	$\frac{-3}{2}$	-1	0	$\frac{-1}{2}$		

Iterasi ketiga

OBE: $\frac{2}{5}b_1, b_2 - \frac{1}{8}b_1, b_3 + \frac{1}{4}b_1$

	c_j	0	0	0	0	0	0	1	1		
c_i	x_i / x_j	x_1	x_2	λ_1	y_1	y_2	v_1	z_1	z_2	b	R

0	λ_1	0	0	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	3	
0	x_2	0	1	0	$\frac{2}{40}$	$\frac{-8}{40}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{-2}{40}$	$\frac{14}{40}$	9	
0	x_1	1	0	0	$\frac{-2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{6}{20}$	12	
	z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	-1	-1		

Hasil optimal yang diperoleh adalah $x_1 = 12,\ x_2 = 9,$ dan $\lambda_1 = 3.$ Sehingga diperoleh nilai fungsi minimumnya adalah

$$f\ x_1, x_2\ = 15x_1 + 30x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 4x_2^2$$

$$= 15(12) + 30(9) + 4(12)(9) - 2(12)^2 - 4(9)^2$$

$$= 180 + 270 + 432 - 288 - 324 = 270$$