GRUP-GRUP NON ISOMORPIK BERORDER 20

Oleh
Fajar Hariyono
NIM. 033114701

ABSTRAK

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk memaparkan cara mencari presentasi dan banyaknya grup-grup non isomorpik berorder 20. Metode yang digunakan adalah dengan hasilkali langsung dan penggabungan koset. Pembahasan ini juga menyangkut beberapa konsep dan teorema-teorema penting dalam teori grup, antara lain grup siklik, subgrup normal, homomorpisme, Teorema Lagrange, Teorema Fundamental Grup Abelian, dan Teorema Sylow.

Jika G adalah grup berorder 20, maka kemungkinan subgrup-subgrupnya berorder faktor dari 20, yaitu 1, 2, 4, 5, 10, dan 20. Untuk subgrup berorder 1 adalah $\{e\}$ dan untuk subgrup berorder 20 adalah grup G itu sendiri. Sama seperti order dari subgrup-subgrupnya, periode elemen-elemen dari grup G juga merupakan faktor dari 20. Selanjutnya ada dua kemungkinan untuk grup G, yaitu abelian dan non abelian. Apabila G grup abelian, maka presentasi grup G didapatkan dari hasilkali langsung subgrup-subgrup sikliknya, yaitu Z_2, Z_4, Z_5, Z_{10}, dan Z_{20}. Kemudian untuk mendapatkan presentasi grup non abelian, dimisalkan G adalah grup non abelian. Berikutnya diselidiki kemungkinan periode elemen-elemennya, untuk selanjutnya dibentuk subgrup normal dengan generator elemen-elemen tersebut, maka diperoleh koset-koset yang mempartisi grup G tersebut. Dari penggabungan koset ini dapat dicari presentasi grup-grup non abelian berorder 20. Misalnya G mempunyai elemen berperiode 20, maka G akan isomorpik dengan Z_{20}, sehingga tidak mungkin grup G mempunyai elemen berperiode 20. Selanjutnya jika G mempunyai elemen berperiode 10, misalkan a, maka dibentuk subgrup normal $H = \langle a \rangle$ dari G. Sehingga $i_G(H) = 2$ yang berarti ada dua koset kanan dari H dalam G, yaitu H dan Hb dengan $b \in G - H$ dan $b^2 \in H$, sebab jika $b^2 \in G - H$, maka akan terdapat tiga koset kanan dari H dalam G. Kemudian karena H subgrup normal dari G maka $b^{-1}ab \in H$. Dengan menyelidiki kemungkinan-kemungkinan untuk b^2 dan $b^{-1}ab$, maka didapatkan presentasi grup non abelian order 20. Hal yang sama dilakukan pula untuk elemen-elemen berperiode 2, 4, dan 5. Selanjutnya dari grup-grup berorder 20 yang didapatkan, baik abelian maupun non abelian, dicari grup-grup yang saling isomorpik dengan membentuk isomorpisme dari grup-grup yang diduga saling isomorpik. Untuk grup yang tidak dapat dibentuk isomorpisme ke grup yang lain, maka dikatakan bahwa grup-grup tersebut non isomorpik.

Pada akhirnya didapatkan lima grup non isomorpik berorder 20, dua grup antaranya abelian dan tiga grup yang lain non abelian. Grup-grup tersebut mempunyai presentasi $Z_{20} = \langle a \mid a^{20} = e \rangle$, $Z_{10} \times Z_2 = \langle a, b \mid a^{10} = b^2 = e, ab = ba \rangle$, $H \rtimes K = \langle a, b \mid a^5 = b^4 = e, ab = ba^4, ba = a^4b \rangle$, $D_{10} = \langle a, b \mid a^{10} = b^2 = e, ab = ba^9, ba = a^9b \rangle$, dan $F_{20} = \langle a, b \mid a^5 = b^4 = e, ab = ba^3, ba = a^2b \rangle$.