

**ANALISIS PERUBAHAN KOEFISIEN FUNGSI TUJUAN  
SECARA SIMPLEKS PADA MASALAH PROGRAM LINEAR  
BILANGAN BULAT**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan  
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



**Disusun Oleh :**

**ERNAWATI  
NIM. 06305141050**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA  
2010**

## **PERSETUJUAN**

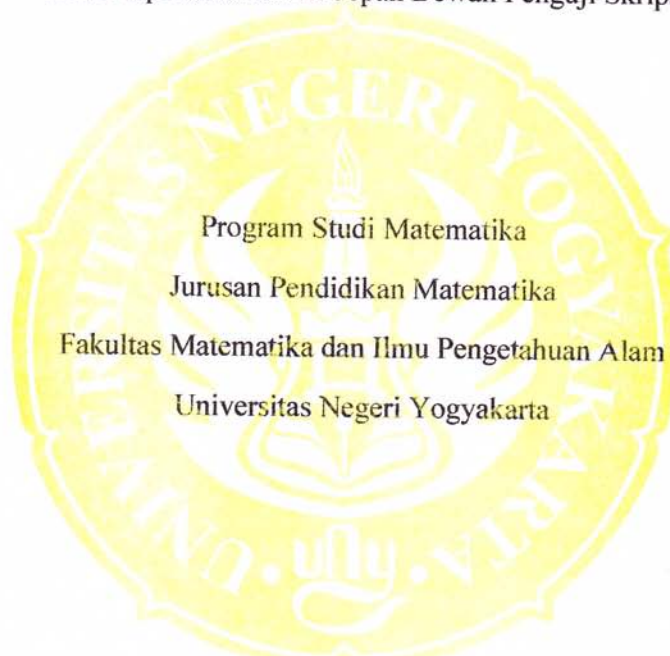
### **SKRIPSI**

#### **ANALISIS PERUBAHAN KOEFISIEN FUNGSI TUJUAN SECARA SIMPLEKS PADA MASALAH PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT**

Telah disetujui dan disahkan pada tanggal :

30 Agustus 2010

untuk dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi



Yogyakarta, 30 Agustus 2010

Pembimbing

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "Himmawati P. L.", is positioned above the printed name.

Himmawati P. L., M.Si  
NIP.19750110 200012 2 001

## PENGESAHAN

### SKRIPSI

#### ANALISIS PERUBAHAN KOEFISIEN FUNGSI TUJUAN SECARA SIMPLEKS PADA MASALAH PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT


Oleh :  
**Ernawati**  
NIM. 06305141050

Telah dipertahankan di depan Dewan Penguji Skripsi Program Studi Matematika, Jurusan Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta pada tanggal 28 September 2010 dan dinyatakan telah memenuhi syarat guna memperoleh gelar Sarjana Sains di bidang Matematika.

#### Susunan Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda tangan	Disetujui Tanggal
Himmawati P.L, M.Si	Ketua Penguji		12 Oktober 2010
Tuharto, M.Si	Sekretaris Penguji		8 Oktober 2010
Caturiyati, M.Si	Penguji Utama		7 Oktober 2010
R.Rosnawati, M.Si	Anggota Penguji		7 Oktober 2010

Yogyakarta, 15 Oktober 2010  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Negeri Yogyakarta  
Dekan

  
Dr. Ariswan  
NIP. 19590914 198803 1 003

## MOTTO DAN PERSEMBAHAN

“Apabila kamu dihormati dengan suatu penghormatan, maka balaslah penghormatan itu dengan yang lebih baik, atau balaslah (dengan yang serupa)”

(QS. An-nisa'-86)

*“Apa yang kamu simpan untuk dirimu sendiri akan senyap dan apa yang kamu berikan pada orang lain akan kamu miliki selamanya”*

*(Axel Munthe)*

“Kesetiaan merupakan sifat yang paling suci dari hati manusia”  
(Seneca)

*“Orang yang beruntung adalah orang-orang yang menjauhkan diri dari perbuatan dan perkataan yang tiada berguna”*

*(QS. Al-Mu'minun-3)*

“Hidup lebih bermakna dengan ilmu, namun ilmu tidak bermakna jika tidak diamalkan”

*Dengan mengucapkan syukur Alhamdulillah,*

*Karya ini kupersembahkan untuk:*

- *Ayah dan Ibuku tercinta yang telah memberikan dukungan moral maupun materiil*
- *Kakakku tersayang (mbk hari), yang telah memberikan motivasi dan hari-hari yang indah....thank's*
- *Sahabat-sahabatku (susi, eka, yayuk, iin, pratti, ina, mujek dll) yang telah membantuku dan memberikan kenangan selama di jogja....*
- *Keluarga besar Matematika Reg '06, terima kasih atas kebersamaan dan kekompakannya selama ini.....*
- *Keluarga besar Kos Karang Malang B3, terima kasih untuk semua....*
- *Almamaterku Universitas Negeri Yogyakarta*

## PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya :

Nama : Ernawati  
NIM : 06305141050  
Program Studi : Matematika  
Fakultas : Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Judul Skripsi : Analisis Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan Secara Simpleks pada Masalah Program Linear Bilangan Bulat

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di Perguruan Tinggi lain kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan. Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya.

Yogyakarta, 30 Agustus 2010

Yang menyatakan,



Ernawati  
NIM. 06305141050

# ANALISIS PERUBAHAN KOEFISIEN FUNGSI TUJUAN SECARA SIMPLEKS PADA MASALAH PROGRAM LINEAR BILANGAN BULAT

Oleh  
Ernawati  
NIM. 06305141050

## ABSTRAK

Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk membahas mengenai langkah-langkah dalam melakukan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni jika terjadi perubahan koefisien fungsi tujuan setelah diperoleh penyelesaian optimal dan cara menentukan batas perubahan koefisien fungsi tujuan yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama secara simpleks.

Setelah penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat murni diperoleh menggunakan metode simpleks yang dilanjutkan dengan metode *cutting plane*, akan dianalisis apakah adanya perubahan koefisien fungsi tujuan berpengaruh terhadap penyelesaian optimal tersebut menggunakan strategi yang disebut analisis sensitivitas. Analisis sensitivitas adalah analisis yang dilakukan untuk mengetahui akibat atau pengaruh dari perubahan yang terjadi terhadap penyelesaian optimal yang telah diperoleh. Analisis dilakukan dengan asumsi bahwa perubahan yang terjadi hanya pada salah satu koefisien fungsi tujuan dan koefisien yang lain bersifat tetap, sehingga perubahan dapat terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis atau variabel bukan basis.

Prinsip dasar dalam analisis perubahan koefisien fungsi tujuan adalah menganalisis nilai dari koefisien kontrol yang baru, yaitu setelah adanya perubahan menggunakan rumus umum  $z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{C}Y_j - \Delta c_j$ . Jika nilai dari koefisien kontrol tersebut ada yang bernilai negatif, maka adanya perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut akan merubah penyelesaian optimal lama. Penyelesaian optimal yang baru dapat diperoleh dengan melanjutkan perhitungan pada tabel simpleks optimal lama dengan merubah koefisien fungsi tujuan sesuai perubahan masalah. Hasil perhitungan ini sama dengan perhitungan jika adanya perubahan dianggap sebagai masalah baru. Untuk menentukan besarnya perubahan koefisien fungsi tujuan dari  $c_j$  menjadi  $c_j + \Delta c_j$  yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama, dapat diperoleh dari batas-batas yang ditetapkan oleh semua variabel bukan basis. Batas perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut diperoleh dengan menggunakan persamaan umum  $z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{C}Y_j - \Delta c_j \geq 0$  untuk setiap  $x_j$  variabel bukan basis. Batas perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni yang diperoleh tidak melebihi batas perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linearnya.

## KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi dengan judul “Analisis Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan Secara Simpleks pada Masalah Program Linear Bilangan Bulat” ini disusun sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Sains (S.Si) Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta.

Terselesaikannya penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Ariswan, selaku Dekan FMIPA UNY.
2. Bapak Dr. Hartono, selaku Kajurdik Matematika FMIPA UNY.
3. Ibu Atmini Dhoruri, M.Si, selaku Kaprodi Matematika FMIPA UNY.
4. Bapak Muhammad Fauzan, M.Sc.ST, selaku Penasehat Akademik penulis, yang telah memberikan pengarahan selama menjalani masa kuliah di FMIPA UNY.
5. Ibu Himmawati Puji Lestari, M.Si, selaku Dosen Pembimbing yang telah banyak memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyusunan skripsi ini.
6. Ibu Caturiyati, M.Si, Ibu R. Rosnawati, M.Si dan Bapak Tuharto, M.Si yang telah bersedia menjadi Dosen Penguji.

7. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan berbagai ilmu kepada penulis.
8. Semua pihak yang telah banyak membantu penulis dalam menyusun skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu kritik dan saran dari semua pihak yang dapat membangun, sangat penulis harapkan demi kesempurnaannya. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Yogyakarta, 30 September 2010

Penulis



## DAFTAR ISI

	halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
HALAMAN MOTTO DAN PERSEMBAHAN.....	iv
HALAMAN PERNYATAAN.....	v
ABSTRAK.....	vi
KATA PENGANTAR.....	vii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
DAFTAR LAMPIRAN.....	xiii
 BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Identifikasi Masalah.....	5
C. Batasan Masalah.....	6
D. Rumusan Masalah.....	6
E. Tujuan Penulisan.....	7
F. Manfaat Penulisan.....	7
 BAB II LANDASAN TEORI	
A. Matriks dan Operasinya	
1. Pengertian Matriks.....	8
2. Operasi Matriks.....	10
3. Sistem Persamaan Linear.....	16
B. Program Linear	
1. Pengertian Program Linear.....	22
2. Sifat Umum Program Linear.....	25
C. Penyelesaian Program Linear dengan Metode Simpleks	
1. Pengertian Metode Simpleks.....	26

2. Format Tabel Simpleks.....	28
3. Langkah-langkah Metode Simpleks.....	30
D. Penyelesaian Program Linear dengan Metode Simpleks Dual.....	31
E. Analisis Sensitivitas	
1. Pengertian Analisis Sensitivitas.....	34
2. Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan ( $c_j$ ).....	35
F. Program Linear Bilangan Bulat	
1. Pengertian Program Linear Bilangan Bulat.....	37
2. Metode <i>Cutting Plane</i> untuk Menyelesaikan Program Linear Bilangan Bulat Murni.....	39
 BAB III PEMBAHASAN	
A. Analisis Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan ( $c_j$ ) pada Masalah Program Linear Bilangan Bulat Murni.....	49
B. Batas Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan pada Masalah Program Linear Bilangan Bulat Murni yang Masih Mempertahankan Penyelesaian Optimal Lama.....	94
 BAB IV PENUTUP	
A. Kesimpulan.....	117
B. Saran.....	120
DAFTAR PUSTAKA.....	121
LAMPIRAN.....	122

## DAFTAR TABEL

	halaman
Tabel 2.1 Bentuk Umum Tabel Simpleks.....	29
Tabel 2.2 Tabel Optimal Terakhir Masalah Program Linear.....	40
Tabel 2.3 Tabel Baru Setelah Penambahan Potongan <i>Gomory</i> .....	42
Tabel 2.4 Tabel Simpleks Optimal Contoh 2.8 dengan Mengabaikan Syarat <i>Integer</i> .....	45
Tabel 2.5 Tabel 2.4 Setelah Ditambah Persamaan Batasan Gomory 1 .....	46
Tabel 2.6 Tabel Simpleks Optimal Masalah Program Linear Bilangan Bulat Murni Contoh 2.8 .....	47
Tabel 3.1 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.1 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama .....	58
Tabel 3.2 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.2 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama .....	64
Tabel 3.3 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.2.....	65
Tabel 3.4 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.3 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama .....	72
Tabel 3.5 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.4 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama .....	75
Tabel 3.6 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.4 .....	76
Tabel 3.7 Tabel Simpleks Contoh 3.5 dengan Mengabaikan Syarat <i>Integer</i> .....	79
Tabel 3.8 Lanjutan Tabel 3.7 .....	80
Tabel 3.9 Tabel Simpleks Setelah Ditambah Persamaan <i>Gomory</i> 1 .....	81
Tabel 3.10 Tabel Simpleks Setelah Adanya Perubahan .....	84
Tabel 3.11 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.5 yang Mengalami Perubahan..	86

Tabel 3.12	Tabel Simpleks Setelah Ditambah Persamaan <i>Gomory</i> 2 .....	87
Tabel 3.13	Tabel Simpleks Contoh 3.6 dengan Mengabaikan Syarat <i>Integer</i> .....	89
Tabel 3.14	Lanjutan Tabel 3.13 .....	90
Tabel 3.15	Tabel 3.14 Setelah Ditambah Persamaan <i>Gomory</i> 1 .....	91
Tabel 3.16	Tabel 3.15 Setelah Ditambah Persamaan <i>Gomory</i> 2 .....	92
Tabel 3.17	Tabel Simpleks Optimal Contoh 2.8 .....	98
Tabel 3.18	Tabel 3.17 dengan Adanya Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan.....	106
Tabel 3.19	Analisis Sensitivitas Koefisien Fungsi Tujuan Kasus Perusahaan Sonic .....	111
Tabel 3.20	Besarnya Batas $c_j$ yang Tidak Merubah Penyelesaian Optimal.....	111
Tabel 3.21	Tabel Perbandingan Batas Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan untuk Contoh 2.8 .....	115

## DAFTAR LAMPIRAN

	halaman
Lampiran 1. Tabel Simpleks Contoh 2.8 dengan Mengabaikan Syarat Bulat.....	122
Lampiran 2. Penyelesaian Masalah Program Linear Bilangan Bulat Contoh 2.8 dengan Program Lindo.....	123
Lampiran 3. Penyelesaian Contoh 3.1 dengan Program Lindo.....	124
Lampiran 4. Penyelesaian Contoh 3.2 dengan Program Lindo.....	125
Lampiran 5. Penyelesaian Contoh 3.3 dengan Program Lindo.....	126
Lampiran 6. Penyelesaian Contoh 3.4 dengan Program Lindo.....	127
Lampiran 7. Penyelesaian Contoh 3.5 dengan Program Lindo.....	128
Lampiran 8. Penyelesaian Contoh 3.6 dengan Program Lindo.....	129
Lampiran 9. Penyelesaian Contoh 3.6 dengan Program Lingo.....	130
Lampiran 10. Hasil Penyelesaian dan Analisis Sensitivitas dari Contoh 2.8 Jika Merupakan Masalah Program Linear Biasa dengan Program Lindo.....	131

## **BAB 1**

### **PENDAHULUAN**

#### **A. Latar Belakang Masalah**

Dalam kehidupan sehari-hari, ilmu mengenai riset operasi banyak digunakan dan diterapkan oleh manusia, terutama diterapkan pada bidang ekonomi yaitu pada dunia usaha. Setiap pelaku usaha atau pelaku ekonomi pasti melakukan apa yang disebut dengan prinsip ekonomi, yaitu dengan usaha atau modal yang sedikit mampu menghasilkan keuntungan yang besar, sehingga muncullah masalah optimisasi. Masalah optimisasi tersebut meliputi meminimumkan biaya atau memaksimumkan keuntungan dengan kapasitas sumber daya yang ada agar mampu mendapatkan hasil yang optimal.

Untuk mendapatkan penyelesaian optimal dari masalah tersebut, dikembangkanlah suatu cara yang disebut dengan program linear. Program linear merupakan suatu teknik perencanaan yang menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif dari pemecahan masalah yang kemudian dipilih mana yang terbaik untuk menyusun strategi dan langkah-langkah kebijakan tentang alokasi sumber daya yang ada agar mencapai tujuan atau sasaran yang diinginkan secara optimal dengan melibatkan variabel-variabel linear. Dalam model program linear dikenal dua macam fungsi, yaitu fungsi objektif (*objective function*) dan fungsi kendala (*constraint function*) yang linear.

Ada beberapa metode untuk mencari penyelesaian optimal pada masalah program linear, yaitu metode grafik, metode simpleks, metode simpleks dua tahap

metode titik interior dan sebagainya. Dengan metode-metode tersebut akan diperoleh penyelesaian optimal yang hasilnya merupakan bilangan real yaitu bisa berupa bilangan bulat atau bilangan pecahan. Namun di dalam dunia usaha sering dijumpai adanya ketentuan bahwa nilai dari variabel keputusan tertentu yang diperoleh harus berupa bilangan bulat atau tidak boleh pecahan. Misalnya suatu barang yang tidak bisa di bagi-bagi seperti banyaknya mesin yang digunakan dalam suatu perusahaan, jenis barang jadi yang dihasilkan atau jumlah tenaga manusia yang dibutuhkan untuk mengerjakan suatu proyek. Tidak mungkin suatu perusahaan hanya memakai 10,5 manusia atau menghasilkan barang jadi hanya 0,5 bagian, sehingga muncullah masalah program linear bilangan bulat yang merupakan masalah khusus dari program linear. Jika variabel keputusan yang diperoleh semua ditentukan harus bilangan bulat, maka masalah ini disebut masalah program linear bilangan bulat murni (*Pure Integer Programming*). Model matematis dari program bilangan bulat sebenarnya hampir sama dengan model program linear, hanya terdapat tambahan batasan bahwa variabel keputusannya harus bilangan bulat.

Seperti dalam masalah program linear, penyelesaian optimal pada masalah program linear bilangan bulat yang diperoleh ditentukan oleh nilai koefisien tujuan dan batasan kendala yang dihadapi. Namun dalam kenyataannya, nilai koefisien tujuan dan batasan kendala yang dihadapi tidak selalu tetap dan bisa berubah-ubah setiap waktu sesuai dengan keadaan. Setiap perubahan yang terjadi tentunya akan membawa dampak pada penyelesaian optimal. Hal ini disebabkan dengan adanya perubahan koefisien pada fungsi tujuan atau kendala akan

mengubah persoalan program linear bilangan bulat yang dapat mempengaruhi penyelesaian optimal. Selain itu, adanya penambahan terhadap kegiatan maupun kendala baru juga dapat mempengaruhi penyelesaian optimal. Cara sederhana untuk menangani perubahan-perubahan ini adalah dengan menyelesaikan setiap masalah yang muncul karena perubahan-perubahan tersebut. Namun cara ini tidak efisien sehingga untuk menghadapi berbagai macam perubahan tersebut perlu dikembangkan suatu strategi guna mempelajari bagaimana penyelesaian optimal akan berubah dengan adanya perubahan keadaan tersebut.

Strategi ini dikenal dengan analisis sensitivitas. Analisis sensitivitas adalah analisis yang dilakukan untuk mengetahui akibat atau pengaruh dari perubahan yang terjadi terhadap penyelesaian optimal yang telah diperoleh. Pada program linear dengan metode simpleks dapat diperoleh rumus untuk mengetahui rentang atau batas perubahan sehingga penyelesaian optimal lama tetap dipertahankan. Analisis sensitivitas juga sering disebut sebagai analisis pasca optimal sebab analisis ini dikembangkan dari penyelesaian optimal. Analisis sensitivitas sangat bermanfaat untuk menghindari pengulangan perhitungan dari awal apabila terjadi perubahan-perubahan pada masalah program linear (Siswanto, 2000: 162).

Karena program linear bilangan bulat merupakan masalah khusus dari program linear, maka pada program linear bilangan bulat juga dapat dilakukan analisis sensitivitas untuk mengetahui akibat atau pengaruh dari perubahan yang terjadi terhadap penyelesaian optimal yang telah diperoleh dengan penerapan analisis sensitivitas pada program linear dengan tambahan syarat berupa bilangan bulat untuk variabel keputusannya. Oleh karena itu, dengan adanya analisis ini



dapat diketahui penyelesaian optimal yang baru dari program linear bilangan bulat jika terjadi perubahan pada masalah program linear bilangan bulat lama tanpa harus melakukan perhitungan dari awal.

Sebelum dilakukan analisis sensitivitas, suatu masalah program linear bilangan bulat harus dicari terlebih dahulu penyelesaian optimalnya. Penyelesaian yang paling mudah pada masalah program linear bilangan bulat tersebut adalah menggunakan metode *round off* yaitu dengan cara melakukan pembulatan dari solusi optimal yang diperoleh dari metode grafik atau simpleks. Namun cara ini tidak bisa digunakan, sebab hasil yang diperoleh mungkin bukan merupakan penyelesaian layak atau bukan merupakan penyelesaian optimal yang menyebabkan nilai tujuan lebih rendah. Oleh karena itu, digunakan cara lain yang lebih tepat dan efisien untuk menyelesaikan masalah program linear bilangan bulat tersebut, diantaranya adalah metode *cutting plane* dan metode *branch and bound* (Ajie Wahyujati, 2009).

Analisis sensitivitas dengan perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat digunakan untuk mengetahui pengaruh perubahan koefisien fungsi tujuan terhadap penyelesaian optimal, mengetahui seberapa besar koefisien fungsi tujuan dapat diubah tanpa mengubah penyelesaian optimal lama serta untuk mengetahui penyelesaian optimal yang baru dari masalah program linear bilangan bulat lama yang mengalami perubahan tanpa harus melakukan perhitungan dari awal. Analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat dapat dilakukan untuk

perubahan koefisien fungsi tujuan dari variabel basis dan perubahan koefisien fungsi tujuan dari variabel bukan basis.

Dengan demikian perlu diteliti bagaimana langkah-langkah analisis sensitivitas dengan adanya perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat dan seberapa besar perubahan dari masing-masing koefisien fungsi tujuan dapat dilakukan tanpa mengubah penyelesaian optimal lama. Dengan analisis ini, dapat diketahui apakah adanya perubahan tersebut berpengaruh atau tidak terhadap penyelesaian optimal lama. Jika adanya perubahan tersebut berpengaruh terhadap penyelesaian optimal lama yang berarti mengubah penyelesaian optimal lama, maka bagaimana cara untuk mencari penyelesaian optimal yang baru tanpa harus menyelesaikan permasalahan secara lengkap sebagai masalah baru.

## **B. Identifikasi Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, ditemukan masalah yang berkaitan dengan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat. Permasalahan tersebut adalah :

1. Bagaimana menentukan langkah-langkah untuk melakukan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat?

2. Bagaimana menentukan batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama?

### **C. Batasan Masalah**

Permasalahan mengenai analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat akan dibatasi pada pembahasan mengenai masalah program linear bilangan bulat murni (*Pure Integer Programming*) dengan pola memaksimumkan.

Penyelesaian masalah program linear bilangan bulat ini diselesaikan menggunakan metode *cutting plane* dengan langkah awalnya menggunakan metode simpleks dengan mengabaikan syarat variabel keputusan atau penyelesaian optimalnya harus bilangan bulat.

### **D. Rumusan Masalah**

Permasalahan yang akan menjadi pembahasan dalam penulisan ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana langkah-langkah untuk melakukan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat murni?
2. Bagaimana menentukan batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama?

## **E. Tujuan Penulisan**

Tujuan dari penulisan ini adalah:

1. Menentukan langkah-langkah untuk melakukan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat murni.
2. Menentukan batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama.

## **F. Manfaat Penulisan**

Dengan memperhatikan tujuan tersebut, diharapkan skripsi ini dapat menambah pustaka mengenai analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat khususnya pada masalah program linear bilangan bulat murni (*Pure Integer Programming*) bagi para pembaca.

## BAB II

### LANDASAN TEORI

#### A. Matriks dan Operasi Matriks

##### 1. Pengertian Matriks

Matriks adalah himpunan unsur-unsur yang disusun menurut baris dan kolom, sehingga berbentuk empat persegi panjang atau segiempat, dengan panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris. Unsur-unsur atau anggota dalam matriks tersebut berupa bilangan yang sering disebut dengan entri. Suatu matriks yang hanya terdiri dari satu kolom disebut **vektor kolom**, sedangkan yang terdiri dari satu baris disebut **vektor baris**. Suatu matriks **A** yang terdiri dari  $m$  baris dan  $n$  kolom disebut matriks **A** berdimensi (ukuran)  $m \times n$  (B. Susanto, 1994: 32).

$$\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

##### a) Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks yang memiliki baris dan kolom yang sama banyaknya. Sebuah matriks **A** dengan  $n$  baris dan  $n$  kolom dinamakan matriks persegi berorde  $n$  dan entri-entri  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$  berada pada diagonal utama dari **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

### b) Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah suatu matriks persegi yang unsur-unsurnya semua bernilai nol, kecuali mungkin pada diagonal utamanya.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i \neq j \\ a_{ii}, & \text{untuk } i = j \end{cases}$$

dengan  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

### c) Matriks Skalar

Matriks skalar adalah suatu matriks persegi yang unsur-unsurnya bernilai sama pada diagonal utamanya, sedangkan unsur lainnya bernilai nol.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan  $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$ .

**d) Matriks Identitas atau Matriks Satuan (I)**

Matriks identitas adalah suatu matriks skalar yang nilai unsur-unsur diagonal utamanya sama dengan satu.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

**2. Operasi Matriks**

**a) Penjumlahan**

Jika **A** dan **B** adalah matriks-matriks berukuran sama, maka jumlah **A + B** adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan anggota-anggota **A** yang berpadanan. Matriks-matriks berukuran berbeda tidak dapat ditambahkan (Howard Anton, 2000: 47).

**Contoh 2.1 :**

Diberikan matriks **A** dan **B** sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dicari hasil penjumlahan dari matriks **A** dan **B**.

Hasil penjumlahan dari matriks **A** dan **B** adalah :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+1 & (-2)+2 & 3+1 \\ 1+1 & 2+(-1) & 4+1 \\ 2+(-3) & 1+2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat penjumlahan matriks :

1. Komutatif :  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
2. Asosiatif :  $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$
3.  $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})k$ , dengan  $k$  = skalar.

## b) Perkalian

### 1) Perkalian matriks dengan skalar

Jika  $\mathbf{A}$  adalah sebarang matriks dan  $c$  adalah sebarang skalar, maka hasil kali  $c\mathbf{A}$  adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan setiap anggota  $\mathbf{A}$  oleh  $c$  (Howard Anton, 2000: 48).

#### Contoh 2.2 :

Diberikan matriks  $\mathbf{A}$  dan skalar  $c$  sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dikalikan dengan skalar } c = 4.$$

Akan dicari hasil perkalian dari matriks  $\mathbf{A}$  dengan skalar  $c$ .

Hasil perkalian matriks  $\mathbf{A}$  dengan skalar  $c$  adalah :

$$c\mathbf{A} = 4 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 & 12 \\ 4 & 8 & 16 \\ 8 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$



## 2) Perkalian matriks dengan matriks

Jika **A** adalah matriks  $m \times r$  dan **B** matriks  $r \times n$ , maka hasil kali **AB** adalah matriks  $m \times n$  yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut (Howard Anton, 2000: 49) :

- Untuk mencari entri dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  dari **AB**, memilih baris  $i$  dari matriks **A** dan kolom  $j$  dari matriks **B**.
- Mengalikan entri-entri yang berpadanan dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian menambahkan hasil kali yang dihasilkan.

### Contoh 2.3 :

Diberikan matriks **A** dan **B** sebagai berikut:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dicari hasil perkalian dari matriks **A** dan matriks **B**.

Hasil perkalian dari matriks **A** dan matriks **B** adalah :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 \times 1) + ((-2) \times 1) + (3 \times (-3)) & (1 \times 2) + ((-2) \times (-1)) + (3 \times 2) & (1 \times 1) + ((-2) \times 1) + (3 \times 1) \\ (1 \times 1) + (2 \times 1) + (4 \times (-3)) & (1 \times 2) + (2 \times (-1)) + (4 \times 2) & (1 \times 1) + (2 \times 1) + (4 \times 1) \\ (2 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times (-3)) & (2 \times 2) + (1 \times (-1)) + (1 \times 2) & (2 \times 1) + (1 \times 1) + (1 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & 10 & 2 \\ -9 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sifat-sifat perkalian matriks :

1. Asosiatif :  $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$
2. Distribusi terhadap penjumlahan :  $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

**c) Transpose**

Jika  $\mathbf{A}$  adalah sebarang matriks  $m \times n$ , maka transpose  $\mathbf{A}$  dinyatakan oleh  $\mathbf{A}^t$  dan didefinisikan dengan matriks  $n \times m$  yang didapatkan dengan mempertukarkan baris dan kolom dari  $\mathbf{A}$ , yaitu kolom pertama dari  $\mathbf{A}^t$  adalah baris pertama dari  $\mathbf{A}$ , kolom kedua dari  $\mathbf{A}^t$  adalah baris kedua dari  $\mathbf{A}$  dan seterusnya (Howard Anton, 2000: 55).

**Contoh 2.4 :**

Diberikan matriks  $\mathbf{A}$  sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Akan dicari transpose dari matriks  $\mathbf{A}$ .

Transpose dari matriks  $\mathbf{A}$  adalah :

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-sifat operasi transpose adalah (Howard Anton, 2000: 69) :

1.  $((\mathbf{A})^t)^t = \mathbf{A}$
2.  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$  dan  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t - \mathbf{B}^t$
3.  $(k\mathbf{A})^t = k\mathbf{A}^t$  , dengan  $k$  adalah skalar
4.  $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t\mathbf{A}^t$  .

#### d) Determinan

Determinan suatu matriks persegi  $\mathbf{A}$  dilambangkan dengan  $\det(\mathbf{A})$ , yaitu bilangan yang diperoleh dari unsur-unsur  $\mathbf{A}$  dengan perhitungan tertentu seperti di bawah ini (B. Susanto, 1994: 36) :

1. Untuk  $\mathbf{A}_{1 \times 1} = [a]$  maka  $\det(\mathbf{A}) = a$
2. Untuk  $\mathbf{A}_{n \times n} = (a_{ij})$  maka  $\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\mathbf{M}_{ij})$

dengan matriks  $\mathbf{M}_{ij}$  merupakan submatriks dari matriks  $\mathbf{A}$  yang diperoleh dengan menghilangkan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari matriks  $\mathbf{A}$ .

#### Contoh 2.5

Diberikan matriks  $\mathbf{A}$  sebagai berikut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Akan dicari determinan dari matriks  $\mathbf{A}$ .

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{31} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinan dari matriks  $\mathbf{A}$  adalah :

$$\begin{aligned}
\text{Det } (\mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1}(1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}(0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (1)(4) + (0)(2) + (0)(0) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Sifat-sifat determinan untuk  $\mathbf{A}$  matriks persegi adalah (B. Susanto, 1994: 37):

1. Bila tiap unsur dalam suatu baris (kolom) adalah nol maka  $\det (\mathbf{A}) = 0$
2.  $\det (\mathbf{A}^t) = \det (\mathbf{A})$
3. Bila  $\mathbf{B}$  diperoleh dari  $\mathbf{A}$  dengan :
  - a. Mempertukarkan dua baris (kolom) maka  $\det (\mathbf{B}) = -\det (\mathbf{A})$
  - b. Mengalikan semua unsur suatu baris (kolom) dengan skalar  $k$  maka :  
 $\det (\mathbf{B}) = k \det (\mathbf{A})$
  - c. Setiap unsur suatu baris (kolom) dikalikan dengan skalar  $k$  lalu ditambahkan pada unsur yang sesuai pada baris (kolom) lain maka  $\det (\mathbf{B}) = \det (\mathbf{A})$ .

#### e) Invers

Jika  $\mathbf{A}$  adalah matriks persegi, dan jika dapat mencari  $\mathbf{B}$  sehingga  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ , maka  $\mathbf{A}$  dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan  $\mathbf{B}$  dinamakan *invers* (*inverse*) dari  $\mathbf{A}$  dengan  $\mathbf{I}$  adalah matriks identitas.

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

*Invers* suatu matriks  $\mathbf{A}$  disimbolkan dengan  $\mathbf{A}^{-1}$  dan memenuhi hubungan :

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Tidak semua matriks mempunyai *invers* atau kebalikan, hanya matriks *nonsingular* yang mempunyai *invers*. Matriks *nonsingular* adalah matriks yang determinannya tidak sama dengan nol, sedangkan matriks *singular* adalah matriks yang determinannya sama dengan nol sehingga tidak mempunyai *invers*.

### 3. Sistem Persamaan Linear

Suatu persamaan linear dalam  $n$  variabel adalah persamaan dengan bentuk :

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b,$$

dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dan  $b$  adalah konstanta anggota bilangan real dan  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah variabel. Sistem persamaan linear dengan  $m$  persamaan dan  $n$  variabel dapat ditulis sebagai berikut (Howard Anton, 2000: 20):

[illegible]

Sistem persamaan linear dengan  $m$  persamaan dan  $n$  variabel dapat disingkat dengan hanya menuliskan susunan angka dalam bentuk segiempat :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Bentuk (2.2) tersebut merupakan bentuk matriks yang diperbesar untuk sistem persamaan (2.1).

Untuk mencari penyelesaian dari sistem persamaan linear dalam bentuk (2.2) dapat diselesaikan dengan operasi Eliminasi Gauss dan operasi Eliminasi Gauss-Jordan. Sebelum didefinisikan Eliminasi Gauss, perlu didefinisikan terlebih dahulu Operasi Baris Elementer (OBE).

**a) Operasi Baris Elementer (OBE)**

Operasi Baris Elementer (OBE) adalah operasi yang terdiri dari tiga tipe (Howard Anton, 2000: 22) :

1. Mengalikan sebuah baris  $i$  dengan sebuah konstanta yang tidak sama dengan nol ( $k \neq 0$ ) dengan notasi  $kR_i$ .
2. Menukarkan baris  $i$  dengan baris  $j$  dengan notasi  $R_{ij}$ .
3. Mengganti baris  $j$  dengan jumlah antara baris itu sendiri dengan  $k$  kali baris  $i$  dengan notasi  $R_j + kR_i$ .

Operasi-operasi tersebut tidak merubah penyelesaian dari sistem persamaan linear, sebab operasi tersebut hanya bersifat menyederhanakan masalah yang ada.

## b) Metode Eliminasi Gauss

Metode Eliminasi Gauss adalah suatu eliminasi yang menggunakan operasi baris elementer untuk membuat menjadi nol semua elemen  $a_{ij}$ , untuk  $i > j$ , sehingga diperoleh matriks segitiga atas  $\mathbf{A}_{n \times n}$  (Ruminta, 2009: 282).

Berikut ini akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan operasi Eliminasi Gauss.

### Contoh 2.6 :

Diberikan tiga sistem persamaan sebagai berikut:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+2z = 9 \\ 2x+4y-3z = 1 \\ 3x+6y-5z = 0 \end{array} \right\} \quad (a)$$

Akan ditentukan nilai  $x$ ,  $y$  dan  $z$  menggunakan Eliminasi Gauss.

Penyelesaian :

Mengubah persamaan (a) dalam bentuk matriks yang diperbesar :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Operasikan matriks tersebut dengan menambahkan -2 baris pertama pada baris kedua ( $R_2 + (-2)R_1$ ) dan menambahkan -3 baris pertama pada baris ketiga ( $R_3 + (-3)R_1$ ) akan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Operasi selanjutnya adalah mengalikan baris kedua dengan  $1/2$  ( $1/2(R_2)$ ) dan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Kemudian dengan menambahkan baris ketiga dengan -3 baris kedua ( $R_3 + (-3)R_2$ ) akan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right]$$

Operasi selanjutnya adalah mengalikan baris ketiga dengan -2 ( $-2(R_3)$ ) dan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Maka diperoleh tiga persamaan baru :

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 9 \\ y - 7/2 z = -17/2 \\ z = 3 \end{array} \right\}$$

Dengan substitusi balik akan diperoleh :

$$y - 7/2 z = -17/2$$

$$y - 7/2 (3) = -17/2$$

$$y - 21/2 = -17/2$$

$$y = 2$$

$$x + y + 2z = 9$$

$$x + 2 + 2(3) = 9$$

$$x = 1$$

Jadi nilai dari  $x=1$ ,  $y=2$  dan  $z=3$ .



**c) Metode Eliminasi Gauss-Jordan**

Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah suatu eliminasi menggunakan operasi baris elementer untuk membuat menjadi nol semua elemen yang ada di sebelah kiri di bawah diagonal utama dan di sebelah kanan di atas diagonal utama matriks  $A_{n \times n}$ , sehingga diperoleh matriks identitas (Ruminta, 2009: 287).

Berikut ini akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan operasi Eliminasi Gauss-Jordan.

**Contoh 2.7:**

Diberikan tiga sistem persamaan sebagai berikut:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+2z = 9 \\ 2x+4y-3z = 1 \\ 3x+6y-5z = 0 \end{array} \right\} \quad (a)$$

Akan ditentukan nilai  $x, y$  dan  $z$  menggunakan Eliminasi Gauss-Jordan.

Penyelesaian :

Mengubah persamaan (a) dalam bentuk matriks yang diperbesar :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right]$$

Operasikan matriks tersebut dengan menambahkan -2 baris pertama pada baris kedua ( $R_2+(-2)R_1$ ) dan menambahkan -3 baris pertama pada baris ketiga ( $R_3+(-3)R_1$ ) akan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Operasi selanjutnya adalah mengalikan baris kedua dengan  $1/2$  ( $1/2(R_2)$ ) dan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right]$$

Kemudian dengan menambahkan baris pertama dengan  $-1$  baris kedua ( $R_1+(-1)R_2$ ) dan menambahkan baris ketiga dengan  $-3$  baris kedua ( $R_3+(-3)R_2$ ) akan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \right]$$

Operasi selanjutnya adalah mengalikan baris ketiga dengan  $-2$  ( $-2(R_3)$ ) dan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11/2 & 35/2 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Kemudian dengan menambahkan baris pertama dengan  $-11/2$  baris ketiga ( $R_1+(-11/2)R_3$ ) dan menambahkan baris kedua dengan  $7/2$  baris ketiga ( $R_2+7/2R_3$ ) akan diperoleh matriks :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Jadi diperoleh nilai dari  $x=1$ ,  $y=2$  dan  $z=3$ .

## B. Program Linear

### 1. Pengertian Program Linear

Program linear merupakan suatu teknik perencanaan yang menggunakan model matematika dengan tujuan menemukan beberapa kombinasi alternatif dari pemecahan masalah yang kemudian dipilih mana yang terbaik untuk menyusun strategi dan langkah-langkah kebijakan tentang alokasi sumber daya yang ada agar mencapai tujuan atau sasaran yang diinginkan secara optimal dengan melibatkan variabel-variabel linear. Dalam model program linear dikenal dua macam fungsi, yaitu fungsi objektif (*objective function*) dan fungsi kendala (*constraint function*) yang linear.

Bentuk umum masalah program linear adalah sebagai berikut :

Mencari :  $x_1, x_2, \dots, x_n$

yang memaksimumkan atau meminimumkan :

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

dengan kendala :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (=, \leq, \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (=, \leq, \geq) b_2$$

...

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (=, \leq, \geq) b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

} (2.3)

$a_{ij}$  dan  $b_i$  merupakan anggota bilangan real,  $c_j$  anggota bilangan real positif karena merupakan koefisien fungsi tujuan sehingga nilainya harus bilangan real positif dan  $x_j$  merupakan variabel, dengan  $i=1,2,\dots,m$  dan  $j=1,2,\dots,n$ .

Persamaan (2.3) dapat diringkas sebagai berikut (B. Susanto, 1994: 6) :

Mencari  $x_j, j= 1, 2, \dots, n$

yang memaksimumkan atau meminimumkan :  $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

dengan kendala  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i$  untuk  $i= 1, 2, \dots, m$

$x_j \geq 0$  untuk  $j= 1, 2, \dots, n$

Keterangan :

$f$  : fungsi sasaran atau fungsi tujuan  
 $x_j$  : variabel keputusan  
 $c_j$  : koefisien ongkos  
 $a_{ij}$  : koefisien teknis  
 $b_i$  : nilai ruas kanan atau suku tetap.

Fungsi kendala bisa berbentuk persamaan (=) atau pertidaksamaan ( $\leq$  atau  $\geq$ ). Konstanta (baik sebagai koefisien  $a_{ij}$  atau  $c_j$  maupun nilai kanan ( $b_i$ )) dalam fungsi kendala maupun pada fungsi tujuan dikatakan sebagai parameter model.

Simbol  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $x_j$ ) menunjukkan variabel keputusan. Jumlah variabel keputusan ( $x_j$ ) tergantung dari jumlah kegiatan atau aktivitas yang dilakukan untuk mencapai tujuan. Simbol  $c_1, c_2, \dots, c_n$  merupakan kontribusi masing-masing variabel keputusan terhadap tujuan, disebut juga koefisien fungsi tujuan pada model matematikanya. Simbol  $a_{11}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{mn}$  merupakan penggunaan per unit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi atau disebut juga sebagai koefisien fungsi kendala pada model matematikanya. Simbol  $b_1, b_2, \dots, b_m$

menunjukkan jumlah masing-masing sumber daya yang ada. Jumlah fungsi kendala akan tergantung dari banyaknya sumber daya yang digunakan.

Pertidaksamaan terakhir  $(x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0)$  menunjukkan kendala non-negatif (Saprida Montaria, 2009: 16).

Dalam memformulasikan program linear terdapat beberapa bentuk program linear yang harus diubah dalam bentuk standar untuk memperoleh hasil maksimal atau minimal sebagai hasil yang optimal. Bentuk standar dari masalah program linear dengan pola memaksimumkan adalah sebagai berikut :

Mencari  $x_j, j= 1, 2, \dots, n$

yang memaksimumkan:  $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

dengan kendala  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$  untuk  $i= 1, 2, \dots, m$

$x_j \geq 0$  untuk  $j= 1, 2, \dots, n$

Jika suatu program linear diberikan dalam bentuk standar kecuali ada satu atau lebih variabel yang tidak ditentukan harus non-negatif, maka masalah tersebut dapat ditransformasikan ke bentuk standar. Misalnya dalam program linear, variabel  $x_1$  tidak ditentukan tandanya berarti variabel tersebut bebas berharga positif atau negatif. Untuk mengatasi hal ini, dilakukan dengan menyatakan nilai  $x_1$  sebagai  $x_1 = u_1 - v_1$ , dengan  $u_1 \geq 0, v_1 \geq 0$ . Dengan mensubstitusi variabel  $x_1$  tadi maka linearitas dari kendala dipertahankan dan semua variabel berharga non-negatif.

Program linear juga dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks sebagai berikut (B. Susanto, 1994: 7) :

Mencari  $\mathbf{X}$

yang memaksimumkan atau meminimumkan  $f = \mathbf{CX}$

dengan kendala  $\mathbf{AX}(\leq, =, \geq)\mathbf{B}$

$$\mathbf{X} \geq 0$$

$$\text{dengan } \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

## 2. Sifat Umum Program Linear

Semua persoalan program linear mempunyai empat sifat umum yaitu, sebagai berikut (B. Susanto, 1994: 13) :

### a) Fungsi Tujuan (*objective function*)

Persoalan program linear bertujuan untuk memaksimumkan atau meminimumkan pada umumnya berupa laba atau biaya sebagai hasil yang optimal.

### b) Adanya kendala atau batasan (*constrains*) yang membatasi tingkat sampai di mana sasaran dapat dicapai. Oleh karena itu, untuk memaksimumkan atau meminimumkan suatu kuantitas fungsi tujuan bergantung kepada sumber daya yang jumlahnya terbatas.

### c) Harus ada beberapa alternatif solusi layak yang dapat dipilih.

### d) Tujuan dan batasan dalam permasalahan program linear harus dinyatakan dalam hubungan dengan pertidaksamaan atau persamaan linear.

## C. Penyelesaian Program Linear dengan Metode Simpleks

### 1. Pengertian Metode Simpleks

Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah program linear adalah dengan menggunakan metode simpleks. Metode simpleks merupakan prosedur aljabar yang bersifat iteratif, yang bergerak selangkah demi selangkah dimulai dari titik ekstrem pada daerah layak menuju ke titik ekstrem yang optimum untuk mencari nilai optimal dari fungsi tujuan dalam masalah optimasi yang terkendala (Frederick S. Hillier dan Gerald J. Lieberman, 1995: 57).

Syarat-syarat yang harus dipenuhi dalam menggunakan metode simpleks untuk menyelesaikan masalah program linear adalah (Muhiddin Sirat, 2007 : 3):

- a) Semua kendala pertidaksamaan harus diubah menjadi bentuk persamaan.
- b) Sisi kanan dari tanda pertidaksamaan kendala tidak boleh ada yang negatif.
- c) Semua variabel dibatasi pada nilai non-negatif.

Untuk memecahkan masalah program linear dengan menggunakan metode simpleks, masalah program linear harus diubah terlebih dahulu dalam bentuk kanonik. Bentuk kanonik dari masalah program linear adalah sebagai berikut :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mencari } x_j, \quad j= 1, 2, \dots, n \\ \\ \text{yang memaksimumkan: } f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \\ \text{dengan kendala } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad \text{untuk } i= 1, 2, \dots, m \\ \\ x_j \geq 0 \quad \text{untuk } j= 1, 2, \dots, n \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Bentuk kanonik dari masalah program linear seperti persamaan (2.4) dapat diperoleh dengan menambahkan variabel pengetat, yaitu variabel *slack* dan variabel *surplus*.

**a) Variabel Slack**

Variabel *slack* adalah variabel yang digunakan untuk mengubah pertidaksamaan dengan tanda  $\leq$  menjadi persamaan ( $=$ ).

Misalnya kendala masalah program linear berbentuk :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i \quad \text{maka pada ruas kiri disisipkan } y_i \text{ sehingga kendala menjadi :}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i = b_i \quad \text{dengan } y_i \geq 0.$$

Variabel  $y_i$  inilah yang dinamakan dengan variabel *slack* dengan besarnya koefisien ongkos sama dengan nol.

**b) Variabel Surplus**

Variabel *surplus* adalah variabel yang digunakan untuk mengubah pertidaksamaan dengan tanda  $\geq$  menjadi persamaan ( $=$ ).

Misalnya kendala masalah program linear berbentuk :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i \quad \text{maka pada ruas kiri disisipkan } s_i \text{ sehingga kendala menjadi :}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i \quad \text{dengan } s_i \geq 0.$$

Variabel  $s_i$  inilah yang dinamakan dengan variabel *surplus* dengan besarnya koefisien ongkos sama dengan nol.



**c) Variabel Semu (Artifisial)**

Variabel semu adalah variabel yang ditambahkan jika dalam persamaan tidak ada variabel yang dapat menjadi basis.

Pada perubahan  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$  menjadi  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i = b_i$  persamaan tersebut

tidak mempunyai variabel dengan koefisien +1 artinya tidak ada variabel yang dapat menjadi basis dalam tabel awal simpleks sehingga perlu ditambahkan  $q_i \geq 0$  pada ruas kiri sehingga persamaan kendala menjadi :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - s_i + q_i = b_i \text{ dengan } s_i, q_i \geq 0.$$

Variabel  $q_i$  inilah yang dinamakan variabel semu dengan besarnya koefisien ongkos sama dengan  $-M$  untuk pola memaksimumkan dan  $M$  untuk pola meminimumkan, dengan  $M$  adalah bilangan positif sangat besar.

**2. Format Tabel Simpleks**

Pemakaian metode simpleks dalam bentuk tabel ini hanya menggambarkan persoalan program linear dalam bentuk koefisiennya saja, baik koefisien tujuan maupun koefisien fungsi kendala. Bentuk umum dari tabel simpleks adalah sebagai berikut (Zulian Yamit, 1991: 43) :

**Tabel 2.1. Bentuk Umum Tabel Simpleks**

	$c_j$	$c_1$	$c_2$	.....	$c_n$		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_n$	$b_i$	$R_i$
$c_1$	$x_1$	$a_{11}$	$a_{12}$	.....	$a_{1n}$	$b_1$	$R_1$
$c_2$	$x_2$	$a_{21}$	$a_{22}$	.....	$a_{2n}$	$b_2$	$R_2$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	.....	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$		$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$c_m$	$x_m$	$a_{m1}$	$a_{m2}$	.....	$a_{mn}$	$b_m$	$R_m$
	$z_j$	$z_1$	$z_2$	.....	$z_n$	$Z$	
	$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	.....	$z_n - c_n$	$Z$	

Keterangan tabel :

$x_j$  : variabel lengkap

$a_{ij}$  : koefisien teknis

$b_i$  : konstanta ruas kanan (suku tetap) setiap kendala

$c_j$  : koefisien ongkos relatif dari fungsi tujuan, untuk variabel *slack* dan *surplus* bernilai nol sedangkan untuk variabel semu bernilai  $-M$  untuk pola memaksimumkan dan  $M$  untuk pola meminimumkan.

$\overline{x_i}$  : variabel yang menjadi variabel basis.

$\overline{c_i}$  : koefisien ongkos relatif untuk variabel dalam basis  $\overline{x_i}$ , pada awalnya koefisien ini bernilai nol.

$z_j$  : hasil kali  $\overline{c_i}$  dengan kolom  $a_{ij}$  ( $\sum_{i=1}^m \overline{c_i} a_{ij}$ )

$R_i$  : diperoleh dengan rumus :  $R_i = b_i / a_{ik}$ , yang digunakan untuk menentukan baris kunci, yaitu dipilih dengan nilai  $R_i$  terkecil dengan  $a_{ik} > 0$ .

$Z$  : hasil kali kolom  $\overline{c_i}$  dan kolom  $b_i$  ( $\sum_{i=1}^m \overline{c_i} b_i$ ). Pada tabel simpleks yang

telah optimal nilai ini merupakan nilai program atau nilai tujuan.

$z_j - c_j$  : diperoleh dari  $z_j$  dikurangi  $c_j$ , nilai ini akan memberikan informasi apakah fungsi tujuan telah optimal atau belum. Jika kita menghadapi persoalan **memaksimumkan**, maka tabel telah optimal jika nilai pada baris  $z_j - c_j \geq 0$ .

### 3. Langkah-langkah Metode Simpleks

Langkah-langkah metode simpleks secara umum adalah sebagai berikut  
(Zulian Yamit, 1991: 44) :

*Langkah 1:* Mengubah model program linear menjadi model persamaan linear dengan menambahkan variabel pengetat.

*Langkah 2:* Menyusun tabel simpleks awal dan memasukkan nilai dari koefisien teknis ( $a_{ij}$ ) dan koefisien kapasitas sumber daya ( $b_i$ ) pada fungsi kendala dan koefisien fungsi tujuan ( $c_j$ ) pada fungsi tujuan ke dalam tabel simpleks.

*Langkah 3:* Menghitung nilai  $z_j$  pada setiap kolom variabel dan kolom  $b_i$ .

- a) Nilai  $z_j$  variabel = jumlah perkalian unsur-unsur kolom  $c_i$  dengan unsur-unsur variabel pada kolom tersebut.
- b) Nilai  $z_j$  kolom  $b_i$  = jumlah perkalian unsur-unsur kolom  $c_i$  dengan unsur-unsur variabel pada kolom  $b_i$ .

*Langkah 4:* Menghitung nilai  $(z_j - c_j)$  pada setiap kolom variabel.

*Langkah 5:* Memeriksa nilai  $(z_j - c_j)$ : untuk tujuan memaksimumkan jika :

- a)  $(z_j - c_j) < 0$ ; maka lanjut ke langkah berikutnya
- b)  $(z_j - c_j) \geq 0$ ; optimal maka lanjut ke langkah 12
- c) jika tujuannya meminimumkan, maka sebaliknya.

*Langkah 6:* Menentukan **kolom kunci (KK)** atau **kolom masuk** yaitu kolom dengan nilai  $(z_j - c_j)$  **negatif terbesar** (untuk tujuan memaksimumkan) atau kolom dengan nilai  $(z_j - c_j)$  positif terbesar (untuk tujuan meminimumkan).

*Langkah 7:* Menentukan **baris kunci (BK)** atau **persamaan pivot** yaitu baris yang memiliki nilai  $(b_i/a_{kk})$  **positif terkecil**.  $a_{kk}$  = angka pada kolom kunci dan baris yang sama.

*Langkah 8:* Menentukan **angka kunci ( $a_k$ )** atau **elemen pivot** yaitu angka pada perpotongan baris kunci dan kolom kunci.

*Langkah 9:* Mengganti variabel  $c_i$  pada baris kunci dengan variabel kolom yang terletak pada kolom kunci. Nama variabel basis menjadi nama variabel yang dipindahkan.

*Langkah 10:* Transformasi dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan : terhadap baris persamaan

a) BK baru ( $R_k^*$ ) = Baris lama ( $R_k$ )  $\times \frac{1}{a_k}$ , dengan  $a_k$  adalah angka kunci. Hal

ini dilakukan agar angka kunci sama dengan 1, dengan notasi  $\frac{1}{a_k} \times R_k$ .

b) Baris lain yang baru ( $R_l^*$ ) = Baris lama ( $R_l$ ) + (koefisien pada kolom kunci ( $k_k$ ) x BK baru), dengan notasi  $R_l^* = R_l + k_k R_k^*$ .

*Langkah 11:* Kembali ke langkah 3

*Langkah 12:* Solusi optimal diperoleh, dengan nilai variabel basis (nilai penyelesaian optimal) untuk masing-masing baris terletak di kolom  $b_i$ .

#### **D. Penyelesaian Program Linear dengan Metode Simpleks Dual**

Metode simpleks dual merupakan metode pemecahan masalah program linear yang sedikit berbeda dengan metode simpleks. Perbedaannya yaitu pada metode simpleks pemecahan masalah program linear diawali dengan penyelesaian

layak tetapi tidak optimal. Hal dapat dilihat pada tabel awal simpleks, nilai dari kolom  $b_i$  bernilai positif semua namun pada baris  $z_j - c_j$  masih ada yang bernilai negatif. Pada metode simpleks dual pemecahan masalah program linear diawali dengan penyelesaian tidak layak tetapi optimal yang ditandai pada tabel simpleks awal, pada kolom  $b_i$  ada yang bernilai negatif yang menyebabkan penyelesaian tidak layak walaupun nilai dari  $z_j - c_j$  sudah positif semua.

Langkah-langkah metode simpleks dual secara umum adalah sebagai berikut (Paul A. Jensen dan Jonathan F. Bard, 2003: 90) :

*Langkah 1:* Menyusun tabel awal simpleks dual seperti pada tabel simpleks biasa dan memasukkan nilai dari koefisien teknis ( $a_{ij}$ ) dan koefisien kapasitas sumber daya ( $b_i$ ) pada fungsi kendala dan koefisien fungsi tujuan ( $c_j$ ) pada fungsi tujuan ke dalam tabel simpleks.

*Langkah 2:* Menguji kelayakan, yaitu tabel sudah layak jika  $b_i \geq 0$  untuk semua  $i$ . Jika  $b_i \geq 0$  maka masalah selesai, jika belum dipenuhi maka dilanjutkan ke langkah 3.

*Langkah 3:* Memperbaiki tabel dengan cara memilih  $b_i$  dengan koefisien negatif terbesar. Misalkan dinotasikan dengan  $b_r$ , maka  $b_r = \min_i (b_i < 0)$ . Baris dari  $b_r$  ini kemudian dijadikan sebagai baris kunci. Elemen-elemen yang terletak pada baris kunci dinotasikan dengan  $a_{rj}$ .

Untuk menentukan kolom kunci dipilih nilai  $\frac{c_j}{-a_{rj}}$  terkecil dengan  $a_{rj} < 0$

yang dinotasikan dengan  $\frac{c_p}{-a_{rp}} = \min_{a_{rj} < 0} (\frac{c_j}{-a_{rj}})$ , dengan  $c_j$  merupakan koefisien

pada baris  $z_j - c_j$  jika menggunakan Tabel 2.1. Nilai dari  $\frac{c_j}{-a_{rj}}$  selalu bernilai positif, sebab  $a_{rj}$  yang dipilih harus  $< 0$ . Hal ini bertujuan agar angka kunci yang diperoleh bernilai positif lebih dari nol ( $a_k > 0$ ) sehingga penyelesaian optimalnya layak. Jika  $a_{rj} \geq 0$  untuk semua  $x_j$  variabel bukan basis, maka masalah tidak mempunyai solusi layak (Hamdy A. Taha, 2007: 175). Perpotongan dari baris kunci dan kolom kunci merupakan angka kunci ( $a_k$ ). Jika tidak ada koefisien negatif  $a_{rj} < 0$ , maka tidak ada penyelesaian layak sehingga iterasi dihentikan.

*Langkah 4:* Mengganti variabel  $c_i$  pada baris kunci dengan variabel kolom yang terletak pada kolom kunci.

*Langkah 5:* Transformasi dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan: terhadap baris persamaan

a) BK baru ( $R_k^*$ ) = Baris lama ( $R_k$ )  $\times \frac{1}{a_k}$ , dengan  $a_k$  adalah angka kunci. Hal

ini dilakukan agar angka kunci sama dengan 1, dengan notasi  $\frac{1}{a_k} \times R_k$ .

b) Baris lain yang baru ( $R_l^*$ ) = Baris lama ( $R_l$ ) + (koefisien pada kolom kunci

( $k_k$ ) x BK baru), dengan notasi  $R_l^* = R_l + k_k R_k^*$ .

*Langkah 6:* Kembali ke langkah 3.

*Langkah 7:* Solusi optimal diperoleh, dengan nilai variabel basis (nilai penyelesaian optimal) untuk masing-masing baris terletak di kolom  $b_i$ .

## **E. Analisis Sensitivitas**

### **1. Pengertian Analisis Sensitivitas**

Analisis sensitivitas merupakan suatu usaha untuk mempelajari nilai-nilai dari variabel-variabel pengambilan keputusan dalam suatu model matematika jika satu atau beberapa atau semua parameter model tersebut berubah atau menjelaskan pengaruh perubahan data terhadap penyelesaian optimal yang sudah ada.

Menurut Faigiziduhu Bu'lolo (2005: 78), analisis sensitivitas adalah analisis yang dilakukan untuk mengetahui akibat atau pengaruh dari perubahan yang terjadi terhadap penyelesaian optimal yang telah diperoleh.

Analisis sensitivitas akan menjelaskan interval atau batas perubahan dari parameter agar tidak merubah penyelesaian optimal (Siswanto, 2000: 162).

Tujuan utama dari analisis sensitivitas selain digunakan untuk pengecekan adalah untuk mengurangi perhitungan-perhitungan dan menghindari penghitungan ulang bila terjadi perubahan koefisien-koefisien pada model program linear setelah dicapai tahap optimal.

Analisis sensitivitas dapat dikelompokkan menjadi lima berdasarkan perubahan-perubahan parameter yang terjadi, yaitu:

1. Perubahan koefisien fungsi tujuan ( $c_j$ ),
2. Perubahan koefisien teknologi ( $a_{ij}$ ) atau koefisien teknis,
3. Perubahan koefisien kapasitas sumber daya dari fungsi kendala ( $b_i$ ),
4. Adanya tambahan fungsi kendala baru,

5. Adanya tambahan variabel pengambilan keputusan ( $x_j$ ) atau adanya penambahan kegiatan baru.

Perubahan yang dimaksud dalam penelitian ini adalah perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni.

## 2. Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan ( $c_j$ )

Perubahan koefisien fungsi tujuan merupakan perubahan yang terjadi karena adanya penambahan atau pengurangan pada koefisien ongkos yang merupakan kontribusi dari setiap satuan kegiatan terhadap tujuan.

Misalnya koefisien ongkos ( $c_j$ ) soal lama berubah menjadi :

$$c_j^* = c_j + \Delta c_j \quad (2.5)$$

Jika ditulis dalam notasi vektor,  $\mathbf{C}$  berubah menjadi  $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}$ .

Jika perubahan terjadi pada koefisien tujuan untuk variabel basis maka  $\bar{\mathbf{C}}$  berubah menjadi  $\bar{\mathbf{C}}^* = \bar{\mathbf{C}} + \Delta \bar{\mathbf{C}}$  (B. Susanto, 1994: 304).

Dengan :

- $\bar{\mathbf{C}}$  : vektor yang anggotanya merupakan koefisien ongkos lama dari variabel yang menjadi basis optimal pada soal lama
- $\Delta \bar{\mathbf{C}}$  : vektor yang anggotanya merupakan besarnya perubahan koefisien ongkos untuk variabel basis
- $\bar{\mathbf{C}}^*$  : vektor yang anggotanya merupakan koefisien ongkos baru dari variabel basis optimum pada soal lama.

Karena adanya perubahan tersebut, maka dalam tabel optimum soal lama koefisien kontrol :

$$z_j - c_j = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j$$

akan berubah menjadi :



$$\begin{aligned}
z_j^* - c_j^* &= \bar{\mathbf{C}}^* \mathbf{Y}_j - c_j^* \\
&= (\bar{\mathbf{C}} + \Delta \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{Y}_j - (c_j + \Delta c_j) \\
&= (\bar{\mathbf{C}} + \Delta \bar{\mathbf{C}}) \mathbf{Y}_j - c_j - \Delta c_j \\
&= \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j - \Delta c_j \\
&= (\bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j
\end{aligned}$$

karena  $z_j - c_j = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j$  maka :

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j.$$

Dari perubahan di atas, penyelesaian optimal soal lama akan tetap menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru (soal lama yang mengalami perubahan) jika nilai dari koefisien kontrol  $(z_j - c_j)$  soal baru bernilai positif atau jika dipenuhi:

$$z_j^* - c_j^* \geq 0 \text{ (untuk pola memaksimumkan) atau}$$

$$z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \geq 0, \text{ untuk } x_j \text{ bukan basis} \quad (2.6)$$

Jika persamaan (2.6) dipenuhi maka variabel basis yang menyusun penyelesaian optimal dan nilainya tidak berubah, yang berubah adalah nilai program yang semula  $f = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{x}$  berubah menjadi:

$$\begin{aligned}
f^* &= \bar{\mathbf{C}}^* \bar{\mathbf{x}} = (\bar{\mathbf{C}} + \Delta \bar{\mathbf{C}}) \bar{\mathbf{x}} \\
&= \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}} + \Delta \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}} \\
&= f + \Delta f
\end{aligned}$$

Jadi nilai program mengalami perubahan sebesar  $\Delta f = \Delta \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{x}}$ .

Jika perubahan hanya terjadi pada  $c_j$  dengan  $x_j$  bukan basis dalam tabel optimum, maka  $\Delta \bar{\mathbf{C}} = 0$ . Hal ini disebabkan karena koefisien fungsi tujuan pada

variabel basis optimal tidak mengalami perubahan sehingga syarat (2.6) berubah menjadi :

$$z_j - c_j - \Delta c_j \geq 0, \text{ untuk } x_j \text{ bukan basis.} \quad (2.7)$$

Kasus ini merupakan kasus khusus dengan syarat  $z_j - c_j - \Delta c_j \geq 0$ .

Analisis sensitivitas parameter  $c_j$  adalah persoalan penentuan batas atas dan batas bawah nilai  $c_j$  di mana pada batas itu nilai optimal variabel keputusan tidak berubah. Perubahan salah satu parameter selalu disertai anggapan bahwa parameter yang lain tetap (Siswanto, 2000: 169).

## **F. Program Linear Bilangan Bulat**

### **1. Pengertian Program Linear Bilangan Bulat**

Program linear bilangan bulat merupakan suatu program linear dengan variabel keputusannya merupakan bilangan bulat, sehingga pada bentuk umum program linear terdapat tambahan syarat bahwa variabel keputusannya harus bilangan bulat. Pada masalah program linear bilangan bulat untuk pola memaksimalkan, nilai tujuan dari program linear bilangan bulat tidak akan pernah melebihi nilai tujuan dari program linear (Ajie Wahyujati, 2009).

Terdapat tiga macam permasalahan dalam program linear bilangan bulat, yaitu sebagai berikut :

1. Program bulat murni (*Pure Integer Programming*), yaitu program linear bilangan bulat yang menghendaki semua variabel keputusan harus merupakan bilangan bulat non-negatif.

2. Program bulat campuran (*Mixed Integer Programming*), yaitu program linear bilangan bulat yang menghendaki beberapa, tetapi tidak semua variabel keputusan harus merupakan bilangan bulat non-negatif.
3. Program bulat biner (*Zero One Integer Programming*), yaitu program linear bilangan bulat yang menghendaki semua variabel keputusan harus bernilai 0 atau 1.

Bentuk umum dari masalah program linear bilangan bulat murni adalah sebagai berikut :

Mencari  $x_j$ ,  $j= 1, 2, \dots, n$

yang memaksimumkan atau meminimumkan :  $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

dengan kendala  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i$  untuk  $i= 1, 2, \dots, m$

$x_j \geq 0$  untuk  $j= 1, 2, \dots, n$

$x_j$  bilangan bulat, untuk  $j= 1, 2, \dots, k$

dengan  $k=n$

} (2.8)

Bentuk (2.8) merupakan bentuk umum dari program linear bilangan bulat murni. Jika dari bentuk di atas  $x_j$  bilangan bulat, untuk  $j= 1, 2, \dots, k$  dengan  $k \leq n$ , maka dinamakan bentuk umum dari program linear bilangan bulat campuran (*Mixed Integer Programming*). Program linear bilangan bulat campuran merupakan program linear bilangan bulat tapi variabel keputusannya tidak semua merupakan bilangan bulat (ada variabel keputusan yang bernilai pecahan) (Zulian Yamit, 1991: 91).

## 2. Metode *Cutting Plane* untuk Menyelesaikan Program Linear Bilangan Bulat Murni

Metode *Cutting Plane* merupakan metode yang digunakan untuk menyelesaikan program linear bilangan bulat, baik bilangan bulat murni maupun campuran dengan penambahan batasan baru yang disebut *Gomory*. Batasan *Gomory* diberikan jika nilai dari variabel keputusan belum bulat (bernilai pecahan). Batasan-batasan tersebut secara efektif akan menyingkirkan beberapa ruang penyelesaian yang tidak berisi titik bilangan bulat yang layak, tetapi tidak pernah menyingkirkan satupun titik bilangan bulat yang layak.

Syarat dasar dari metode ini adalah semua koefisien dan konstanta ruas kanan dari setiap batasan harus bernilai *integer*. Syarat ini dilakukan karena dalam algoritma *integer* murni semua variabel harus bernilai *integer*. Adanya koefisien pecahan dalam batasan atau kendala tidak memungkinkan variabel *slack* bernilai bulat, sehingga jika tidak bulat maka masalah tidak mempunyai solusi *integer* yang layak.

Langkah-langkah Metode *Cutting Plane* pada program linear bilangan bulat murni adalah sebagai berikut (Hamdy A. Taha, 2007: 379) :

*Langkah 1:* Menyelesaikan masalah program linear bilangan bulat dengan metode simpleks dengan mengabaikan syarat bilangan bulat. Jika pada penyelesaian optimal variabel  $x_k$  sudah berupa bilangan bulat, maka masalah selesai. Jika variabel  $x_k$  belum merupakan bilangan bulat, maka dilanjutkan ke langkah 2. Misalkan tabel optimal terakhir untuk program linear pada langkah 1 diketahui sebagai berikut:

**Tabel 2.2. Tabel Optimal Terakhir Masalah Program Linear**

	$c_j$	$c_1$	$c_2$	....	$c_m$	0		0		0	
$\overline{c_i}$	$\overline{x_j} \quad \overline{x_i}$	$x_1$	$x_2$	....	$x_m$	$y_1$	... ....	$y_j$	.....	$y_n$	$b_i$
$c_1$	$x_1$	1	0	....	0	$a_{11}$	... ...	$a_{1j}$	.....	$a_{1n}$	$b_1$
$c_2$	$x_2$	0	1	....	0	$a_{21}$	... ...	$a_{2j}$	.....	$a_{2n}$	$b_2$
...	.....	....	....	....	...	.....	....	....	....	....	....
...	.....	....	....	....	...	.....	....	....	....	....	....
$c_m$	$x_m$	0	0	....	1	$a_{m1}$	... ...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$b_m$
	$z_j$	$c_1$	$c_2$	....	$c_m$	$\overline{c_1}$	.... .	$\overline{c_j}$	....	$\overline{c_n}$	$z$
	$z_j - c_j$	0	0	....	0	$\overline{c_1}$	.... .	$\overline{c_j}$	....	$\overline{c_n}$	$z$

Misalkan variabel  $x_i$  mewakili variabel basis dan variabel  $y_j$  adalah variabel bukan basis. Variabel-variabel ini diatur demikian untuk kemudahan.

*Langkah 2:* Pada langkah ini dibentuk potongan *Gomory* yang digunakan sebagai batasan baru.

Misalkan persamaan ke- $i$  dimana variabel basis  $x_i$  memiliki nilai *noninteger*.

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad b_i \text{ noninteger (baris sumber)} \quad (2.9)$$

Anggaplah :

$$b_i = \lfloor b_i \rfloor + \beta_i \quad (2.10)$$

$$a_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor + \alpha_{ij} \quad (2.11)$$

dengan  $\lfloor b_i \rfloor$  : bilangan bulat terbesar yang  $\leq b_i$

$\lfloor a_{ij} \rfloor$  : bilangan bulat terbesar yang  $\leq a_{ij}$

Akibatnya  $\beta_i$  adalah pecahan yang positif secara ketat ( $0 < \beta_i < 1$ ) dan  $\alpha_{ij}$  adalah pecahan non-negatif ( $0 \leq \alpha_{ij} < 1$ ).

Dari persamaan (2.9) , (2.10) dan (2.11) menghasilkan :

$$\begin{aligned}
 x_i &= b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \\
 x_i &= \lfloor b_i \rfloor + \beta_i - \sum_{j=1}^n (\lfloor a_{ij} \rfloor + \alpha_{ij}) y_j \\
 x_i &= \lfloor b_i \rfloor + \beta_i - \sum_{j=1}^n \lfloor a_{ij} \rfloor y_j - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \\
 \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j &= x_i - \lfloor b_i \rfloor + \sum_{j=1}^n \lfloor a_{ij} \rfloor y_j
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Agar semua variabel  $x_i$  dan  $y_j$  adalah *integer*, ruas kanan dari persamaan harus bernilai *integer*, yang berakibat ruas kiri juga harus *integer*.

Dengan diketahui  $\alpha_{ij} \geq 0$  dan  $y_j \geq 0$  untuk semua  $i$  dan  $j$ , dapat disimpulkan bahwa :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \geq 0.$$

Karena  $\beta_i$  dan  $\alpha_{ij}$  adalah bilangan antara 0 dan 1, sementara nilai dari  $y_i$  positif lebih dari nol ( $y_i > 0$ ) maka :

$$\text{Hal ini akan mengakibatkan: } \beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j \leq 0 \tag{2.13}$$

Persamaan (2.13) ini dapat diubah menjadi :

$$\beta_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j + s_i = 0 \tag{2.14}$$

$$\text{Jadi } s_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j = -\beta_i \tag{2.15}$$

dengan  $s_i$  adalah variabel *slack* non-negatif.

Jadi persamaan (2.14) inilah yang disebut persamaan potongan *Gomory*.

*Langkah 3:* Menambahkan persamaan potongan *Gomory* yang telah terbentuk pada langkah 2 ke baris terakhir dalam tabel dengan  $s_i$  adalah variabel *slack* non-negatif yang menjadi variabel basis seperti pada persamaan (2.15).

Persamaan (2.15) ini merupakan potongan *Gomory* yang diperlukan dan ini mewakili kondisi yang diperlukan agar  $x_i$  bilangan bulat. Pada tabel nilai  $y_j=0$  dan  $s_i = -\beta_i$ , yang tidak layak maka dapat disimpulkan bahwa potongan ini tidak layak. Jadi metode simpleks dual dipergunakan untuk ketidaklayakan ini. Berikut akan ditunjukkan tabel baru setelah penambahan potongan *Gomory* :

**Tabel 2.3. Tabel Baru Setelah Penambahan Potongan *Gomory***

	$c_j$	$c_1$	$c_2$	....	$c_m$	0		0		0	
$\overline{c_i}$	$\begin{matrix} x_j \\ \overline{x_i} \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	....	$x_m$	$y_1$	...	$y_j$	....	$y_n$	$b_i$
$c_1$	$x_1$	1	0	....	0	$a_{11}$	...	$a_{1j}$	....	$a_{1n}$	$b_1$
$c_2$	$x_2$	0	1	....	0	$a_{21}$	...	$a_{2j}$	....	$a_{2n}$	$b_2$
...	.....	....	....	....	...	.....	....	....	....	....	....
...	.....	....	....	....	...	.....	....	....	....	....	....
$c_m$	$x_m$	0	0	....	1	$a_{m1}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$b_m$
0	$s_i$	0	0	....	0	$-a_{i1}$	...	$-a_{ij}$	...	$-a_{in}$	$-\beta_i$
	$z_j$	$c_1$	$c_2$	....	$c_m$	$\overline{c_1}$	....	$\overline{c_j}$	....	$\overline{c_n}$	$z$
	$z_j - c_j$	0	0	....	0	$\overline{c_1}$	....	$\overline{c_j}$	....	$\overline{c_n}$	$z$

*Langkah 4:* Mengerjakan dengan metode simpleks dual untuk memperoleh penyelesaian optimal yang baru. Langkah-langkahnya seperti yang telah dikemukakan pada bab sebelumnya.

*Langkah 5:* Jika penyelesaian baru (setelah menerapkan metode simpleks dual) bernilai *integer*, maka proses selesai. Jika belum, langkah selanjutnya adalah menentukan persamaan batasan *Gomory* lagi dari tabel yang dihasilkan pada langkah 4 kemudian diselesaikan menggunakan metode simpleks dual kembali. Langkah ini diulang sampai diperoleh penyelesaian yang bernilai *integer*. Jika pada salah satu langkah simpleks dual tersebut menunjukkan bahwa tidak ada penyelesaian layak, maka masalah tersebut tidak memiliki penyelesaian *integer* yang layak.

Untuk memahami uraian di atas diberikan contoh sebagai berikut :

### **Contoh 2.8 :**

Diberikan masalah program linear bilangan bulat sebagai berikut :

Sebuah perusahaan manufaktur elektronik “Sonic” memproduksi 3 buah produk, yaitu televisi, radio dan kipas angin. Tiap-tiap produk tersebut membutuhkan 2 tahapan produksi, yaitu penyolderan (perakitan komponen elektronik) dan *assembling* (perakitan komponen non-elektronik). Penyolderan membutuhkan waktu 3 jam untuk televisi, 2 jam untuk radio dan 2 jam untuk kipas angin, sedangkan *assembling* membutuhkan waktu 5 jam untuk televisi, 4 jam untuk radio dan 3 jam untuk kipas angin. Perusahaan tersebut hanya



mempunyai waktu untuk penyolderan 15 jam dan *assembling* 35 jam kerja setiap minggunya.

Bila televisi memberikan keuntungan Rp 60.000,00, radio memberikan keuntungan Rp 50.000,00 dan kipas angin memberikan keuntungan sebanyak Rp 40.000,00 per unit, maka formulasi keputusan produksi perusahaan Sonic dari permasalahan di atas adalah sebagai berikut:

Mencari  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$

yang memaksimumkan :  $f=6x_1 + 5x_2 + 4x_3$  (dalam puluhan ribu rupiah)

dengan kendala :  $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 15$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 35$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan integer}$$

dengan :  $x_1$  : televisi

$x_2$  : radio

$x_3$  : kipas angin

Dari permasalahan di atas akan dicari penyelesaian optimal bilangan bulat murni menggunakan metode *cutting plane* sehingga perusahaan mendapatkan keuntungan yang optimal.

*Langkah 1:* Menyelesaikan masalah program linear bilangan bulat dengan metode simpleks dengan mengabaikan syarat bilangan bulat.

a) Mengubah masalah program linear menjadi model persamaan linear (bentuk kanonik) dengan menambahkan variabel pengetat.

Bentuk siap simpleks dari soal di atas dengan menambah variabel *slack*  $y_1 \geq 0$  pada kendala (1),  $y_2 \geq 0$  pada kendala (2) dan  $y_3 \geq 0$  pada kendala (3) adalah:

Mencari  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$

yang memaksimumkan :  $f=6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 0y_1 + 0y_2$

dengan kendala :  $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + y_1 = 15$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + y_2 = 35$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan } y_1, y_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ dan } x_3 \text{ integer}$$

b) Penyelesaian optimal dengan tabel simpleks

Persoalan di atas jika disusun dan diselesaikan menggunakan metode simpleks seperti langkah-langkah yang telah diuraikan di bab sebelumnya akan diperoleh tabel optimal sebagai berikut :

**Tabel 2.4. Tabel Simpleks Optimal Contoh 2.8 dengan Mengabaikan Syarat *Integer***

	$c_j$	6	5	4	0	0		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_j} \backslash \overline{x_i}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	3/2	1	1	1/2	0	<b>15/2</b>	
0	$y_2$	-1	0	-1	-2	1	5	
	$z_j$	15/2	5	5	5/2	0	37,5	
	$z_j - c_j$	3/2	0	1	5/2	0	<b>37,5</b>	

Tabel penyelesaian lengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1.

*Langkah 2:* Menguji keoptimalan, yaitu apakah  $b_i \geq 0$  dan variabel  $x_k$  sudah merupakan bilangan bulat.

Dari Tabel 2.4 menunjukkan bahwa penyelesaian optimal diperoleh dengan  $x_1=0$ ,  $x_2=15/2=7,5$  dan  $x_3=0$ .

Penyelesaian ini belum memenuhi ketentuan bilangan bulat karena masih ada variabel keputusan yang bernilai pecahan. Padahal pada fungsi kendala

disyaratkan bahwa nilai dari semua variabel keputusan harus bilangan bulat, sehingga masalah belum selesai dan dilanjutkan ke langkah 3.

*Langkah 3:* Pada langkah ini dibentuk potongan *Gomory* dengan persamaan:

$$s_i - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j = -\beta_i.$$

Karena pada hasil Tabel 2.4 persamaan batasan yang bersesuaian dengan pemecahan *noninteger* ada satu, yaitu persamaan pada baris  $x_2$ , maka persamaan  $x_2$  pada Tabel 2.4 terpilih untuk menentukan persamaan pembatas baru.

$$3/2 x_1 + x_2 + x_3 + 1/2 y_1 = 15/2$$

$$[1+1/2] x_1 + x_2 + x_3 + [0+1/2] y_1 = 7+1/2$$

Jadi persamaan batasan *Gomory* dari persamaan di atas adalah :

$$s_1 - 1/2 x_1 - 1/2 y_1 = -1/2$$

*Langkah 4:* Menambahkan persamaan batasan *Gomory* yang telah terbentuk ke baris terakhir dalam tabel dengan  $s_1$  adalah variabel *slack* non-negatif yang menjadi variabel basis. Tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 2.5. Tabel 2.4 Setelah Ditambah Persamaan Batasan Gomory 1**

	$c_j$	6	5	4	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	3/2	1	1	1/2	0	0	15/2	
0	$y_2$	-1	0	-1	-2	1	0	5	
0	$s_1$	-1/2	0	0	-1/2	0	1	-1/2	
	$z_j$	15/2	5	5	5/2	0	0	37,5	
	$z_j - c_j$	3/2	0	1	5/2	0	0	37,5	

Persamaan terakhir ini merupakan persamaan batasan *Gomory* yang diperlukan dan mewakili kondisi yang diperlukan agar  $x_i$  bilangan bulat. Setiap persamaan tambahan atau persamaan batasan *Gomory* nilai dari ruas kanan bernilai negatif, maka dapat disimpulkan bahwa potongan ini tidak layak. Jadi metode simpleks dual dipergunakan untuk ketidaklayakan ini.

*Langkah 5:* Mengerjakan metode simpleks dual untuk memperoleh penyelesaian optimal yang baru.

**Tabel 2.6. Tabel Simpleks Optimal Masalah Program Linear Bilangan Bulat Murni Contoh 2.8**

	$c_j$	6	5	4	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{matrix} x_j \\ \overline{x_i} \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	3/2	1	1	1/2	0	0	15/2	
0	$y_2$	-1	0	-1	-2	1	0	5	
0	$s_1$	-1/2	0	0	-1/2	0	1	-1/2	
	$z_j$	15/2	5	5	5/2	0	0	37,5	
	$z_j - c_j$	3/2	0	1	5/2	0	0	37,5	
5	$x_2$	1	1	1	0	0	1	7	7
0	$y_2$	1	0	-1	0	1	-4	7	7
0	$y_1$	1	0	0	1	0	-2	1	1
	$z_j$	5	5	5	0	0	5	35	
	$z_j - c_j$	-1	0	1	0	0	5	35	
5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	6	
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	
6	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	1	
	$z_j$	6	5	5	1	0	3	36	
	$z_j - c_j$	0	0	1	1	0	3	36	

Karena tabel sudah optimal dan nilai dari semua variabel keputusan sudah merupakan bilangan bulat maka masalah selesai.

Jadi penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat pada Contoh 2.8 di atas adalah  $x_1=1$ ,  $x_2=6$  dan  $x_3=0$  dengan keuntungan maksimal 36 (dalam puluhan ribu rupiah) atau Rp 360.000,00.

Artinya perusahaan Sonic akan mendapatkan keuntungan maksimal sebesar Rp 360.000,00 dengan memproduksi televisi sebanyak 1 unit dan radio sebanyak 6 unit. Hasil ini jika dibandingkan dengan menggunakan program lingo pada Lampiran 2 nilainya sama.

### **BAB III**

#### **PEMBAHASAN**

Analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat merupakan analisis yang dilakukan untuk mengetahui pengaruh atau akibat dari perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat terhadap penyelesaian optimal yang telah diperoleh.

Dalam bab ini akan diselidiki apakah penyelesaian optimal akan berubah jika terjadi perubahan koefisien fungsi tujuan dari masalah awal program linear bilangan bulat murni (*Pure Integer Programming*). Selain itu akan dibahas mengenai batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama. Dengan batas tersebut dapat diketahui sampai sejauh mana perubahan dari koefisien fungsi tujuan dapat dilakukan tanpa mempengaruhi penyelesaian optimal lama.

#### **A. Analisis Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan ( $c_j$ ) pada Masalah Program Linear Bilangan Bulat Murni**

Perubahan koefisien fungsi tujuan merupakan perubahan yang terjadi karena adanya penambahan atau pengurangan pada koefisien ongkos yang merupakan kontribusi dari setiap variabel keputusan terhadap tujuan. Misalnya koefisien ongkos ( $c_j$ ) soal lama berubah menjadi :

$$c_j^* = c_j + \Delta c_j.$$

Satu-satunya data yang dipengaruhi oleh perubahan ini adalah baris bawah

dari tabel akhir penyelesaian optimal atau pada nilai koefisien kontrolnya  $(z_j - c_j)$ .

Dari bab sebelumnya telah diperoleh rumus untuk menghitung koefisien kontrol yang baru setelah adanya perubahan secara umum, yaitu :

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \quad (3.1)$$

dengan :

- $\Delta c_j$  : suatu konstanta yang merupakan selisih dari koefisien fungsi tujuan soal baru dikurangi koefisien fungsi tujuan soal lama.
- $(z_j - c_j)$  : koefisien kontrol pada masalah lama untuk  $x_j$  variabel bukan basis. Untuk variabel basis tidak perlu dihitung sebab hasil dari koefisien kontrol yang baru sama dengan nol  $(z_j^* - c_j^* = 0)$ .
- $\mathbf{Y}_j$  : matriks kolom yang bersesuaian dengan  $x_j$ , untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.
- $(\Delta \bar{\mathbf{C}})$  : perubahan fungsi tujuan  $(\Delta c_j)$  untuk  $x_j$  yang merupakan variabel basis yang ditulis dalam bentuk vektor yang anggota atau elemennyaurut sesuai urutan kolom variabel basis pada tabel optimal soal lama.

Dengan adanya perubahan di atas, penyelesaian optimal soal lama akan tetap menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru (soal lama yang mengalami perubahan) jika nilai dari koefisien kontrol  $(z_j - c_j)$  soal baru bernilai positif atau jika dipenuhi:

$$z_j^* - c_j^* \geq 0 \text{ (untuk pola memaksimumkan) atau}$$

$$z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \geq 0, \text{ untuk } x_j \text{ bukan basis.}$$

Untuk  $x_i$  yang merupakan variabel basis tidak perlu dihitung, sebab hasilnya pasti sama dengan nol  $(z_j^* - c_j^* = 0)$ .

Misalnya  $x_j$  yang merupakan variabel basis dinotasikan dengan  $x_i$ .

Akan ditunjukkan bahwa nilai untuk  $x_j$  yang merupakan variabel basis hasilnya sama dengan nol ( $z_i^* - c_i^* = 0$ ).

Misalnya:

$(\bar{z}_i^* - \bar{c}_i^*)$  : vektor koefisien kontrol baru untuk  $x_i$  variabel basis  
 $(\bar{z}_i - \bar{c}_i)$  : vektor koefisien kontrol lama untuk  $x_i$  variabel basis  
 $\Delta \bar{\mathbf{C}}_i$  : vektor perubahan koefisien fungsi tujuan untuk  $x_i$  variabel basis.

Karena yang akan dibuktikan adalah  $(\bar{z}_i^* - \bar{c}_i^*)$  untuk  $x_i$  variabel basis maka perubahan yang terjadi hanya pada variabel basis sehingga  $\Delta \bar{\mathbf{c}}_i = \Delta \bar{\mathbf{C}}_i$ .

Dalam penyelesaian program linear menggunakan tabel simpleks telah diketahui bahwa nilai dari koefisien kontrol untuk  $x_i$  yang merupakan variabel basis pasti bernilai 0 dan koefisien vektor kolom ( $\bar{\mathbf{Y}}_i$ ) dari  $x_i$  yang merupakan variabel basis merupakan anggota dari suatu matriks Identitas ( $\mathbf{I}$ ). Jika kolom-kolom tersebut disusun dalam satu matriks ( $\mathbf{Y}_i$ ) sesuai urutan variabel basis pada tabel optimal akan menghasilkan suatu matriks identitas.

Dari keterangan di atas, akan diperoleh nilai dari :

$$\begin{aligned}\bar{z}_i^* - \bar{c}_i^* &= \bar{z}_i - \bar{c}_i + \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{Y}_i - \Delta \bar{\mathbf{c}}_i \\ \bar{z}_i^* - \bar{c}_i^* &= \bar{z}_i - \bar{c}_i + \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{Y}_i - \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \\ &= 0 + \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \mathbf{I} - \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \\ &= 0 + \Delta \bar{\mathbf{C}}_i - \Delta \bar{\mathbf{C}}_i \\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa nilai dari koefisien kontrol yang baru untuk  $x_j$  yang merupakan variabel basis ( $x_i$ ) sama dengan nol, sehingga dalam analisis perubahan koefisien fungsi tujuan, untuk  $x_j$  yang merupakan variabel basis tidak



perlu dihitung. Perhitungan nilai koefisien kontrol yang baru hanya dilakukan untuk  $x_j$  yang merupakan variabel bukan basis.

### **A.1. Perubahan yang Terjadi pada Salah Satu Koefisien Fungsi Tujuan**

Perubahan yang terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan dilakukan dengan asumsi bahwa koefisien yang lain bersifat tetap, maka kemungkinan perubahan yang terjadi dari koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni adalah perubahan yang terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis atau perubahan yang terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan yang bukan merupakan variabel basis.

#### **1. Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Basis**

Perubahan koefisien untuk variabel basis merupakan perubahan yang terjadi pada koefisien fungsi tujuan dari variabel yang menjadi basis pada penyelesaian optimal lama. Karena perubahan hanya terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis, maka untuk koefisien fungsi tujuan dari variabel bukan basis bernilai tetap. Oleh karena itu perubahan dari variabel bukan basis sama dengan nol atau  $\Delta c_j=0$ , untuk  $x_j$  variabel bukan basis.

Karena koefisien kontrol yang diselidiki adalah koefisien kontrol untuk  $x_j$  variabel bukan basis dengan  $\Delta c_j=0$  maka rumus untuk menghitung koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis akan berubah menjadi :

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j$$

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - 0$$

$$z_j^* - c_j^* = (\Delta - c_j) + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j$$

Jadi rumus yang digunakan untuk menyelidiki koefisien kontrol yang baru jika perubahan terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis adalah  $z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j$ .

Langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis pada program linear bilangan bulat murni dapat ditentukan sebagai berikut :

*Langkah 1:* Karena data yang akan diselidiki adalah koefisien kontrol yang

dihitung menggunakan rumus :  $z_j^* - c_j^* = (\Delta - c_j) + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j$

Maka ditentukan terlebih dahulu nilai dari:

- Perubahan koefisien fungsi tujuan ( $\Delta c_j$ ).
- $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.
- $\mathbf{Y}_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.
- $(\Delta \bar{\mathbf{C}})$ .

*Langkah 2:* Menghitung nilai  $z_j^* - c_j^*$ , untuk  $x_j$  variabel bukan basis dengan

menggunakan rumus :  $z_j^* - c_j^* = (\Delta - c_j) + \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j$

Dari perhitungan pada langkah 2 di atas untuk pola memaksimumkan, jika diperoleh :

- $z_j^* - c_j^* \geq 0$  maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi

penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini disebabkan nilai dari koefisien kontrol yang baru masih bernilai positif, sehingga tabel optimal soal lama masih optimal untuk masalah baru (masalah program linear yang telah mengalami perubahan). Oleh karena itu, adanya perubahan dari koefisien fungsi tujuan tidak mengubah penyelesaian optimal soal lama. Perubahan hanya terjadi pada nilai tujuan dengan pertambahan nilai tujuan :  $\Delta f = \Delta \overline{CX}$ .

Nilai program atau nilai tujuan yang baru berubah menjadi :

$$\begin{aligned} f^* &= f_{\max} + \Delta f \\ &= f_{\max} + \Delta \overline{CX}. \end{aligned}$$

- b.  $z_j^* - c_j^* < 0$  berarti syarat tabel simpleks mencapai optimal belum dipenuhi, sehingga tabel optimal soal lama belum menjadi tabel optimal bagi soal yang baru. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan dengan memasukkan  $x_j$  yang menyebabkan  $z_j^* - c_j^* < 0$  menjadi variabel basis. Jika terdapat lebih dari satu  $x_j$  yang nilai  $z_j^* - c_j^* < 0$ , maka dipilih  $x_j$  dengan nilai  $z_j^* - c_j^*$  terkecil agar variabel yang menyebabkan nilai koefisien kontrol bernilai negatif keluar dari variabel basis dan digantikan dengan variabel baru yang lebih mendekati nilai penyelesaian optimal. Kemudian dilanjutkan perhitungan dengan menggunakan tabel simpleks.

*Langkah 3:* Jika nilai penyelesaian optimal pada langkah 2.b layak yaitu variabel keputusan sudah bernilai bilangan bulat, maka masalah selesai. Namun jika

hasil dari penyelesaian optimal untuk variabel keputusan belum merupakan bilangan bulat semua, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* untuk mendapatkan penyelesaian optimal yang bulat. Setelah diperoleh penyelesaian yang optimal dan layak, maka penyelesaian optimal inilah yang menjadi penyelesaian optimal pada masalah program linear bilangan bulat murni yang mengalami perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut.

Untuk menjelaskan uraian dari langkah-langkah analisis di atas, diberikan contoh perubahan koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis dari Contoh 2.8 sebagai berikut:

### **Contoh 3.1**

Diberikan masalah program linear bilangan bulat seperti pada Contoh 2.8 pada bab sebelumnya.

Misalnya keuntungan penjualan untuk televisi dari perusahaan Sonic berubah menjadi Rp 70.000,00.

Akan diselidiki apakah perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut berpengaruh terhadap penyelesaian optimal dan bagaimana pengaruh perubahan koefisien tersebut terhadap penyelesaian optimal?

Dari perubahan masalah program linear bilangan bulat tersebut, perubahan yang terjadi adalah nilai  $c_1$  berubah menjadi 7 (dalam puluhan ribu rupiah).

Berdasarkan keterangan soal di atas, perubahan yang terjadi adalah :

Maksimumkan :  $f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$

menjadi:

$$\text{Maksimumkan : } f = 7x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

Langkah-langkah analisis pada program linear bilangan bulat dengan perubahan koefisien fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

*Langkah 1:* Menentukan nilai dari :

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru :

$$\Delta c_1 = 1 \text{ (} x_1 \text{ variabel basis)} \quad \Delta c_4 = 0 \text{ (} y_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_2 = 0 \text{ (} x_2 \text{ variabel basis)} \quad \Delta c_5 = 0 \text{ (} y_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 0 \text{ (} x_3 \text{ variabel bukan basis)} \quad \Delta c_6 = 0 \text{ (} s_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

- b.  $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari koefisien kontrol lama untuk variabel bukan basis yaitu:

$$z_3 - c_3 = 1, z_4 - c_4 = 1 \text{ dan } z_6 - c_6 = 3$$

- c.  $Y_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari  $Y_j$  untuk variabel bukan basis yaitu:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- d.  $(\Delta \bar{C})$

Dari Tabel 2.6 diketahui bahwa variabel yang merupakan variabel basis optimal adalah  $x_2, y_2, x_1$  sehingga :

$$\Delta \bar{C} = (\Delta c_2, \Delta c_5, \Delta c_1)$$

$$= (0,0,1)$$

*Langkah 2:* Menghitung  $z_j^* - c_j^*$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis dengan rumus :

$$\begin{aligned} z_3^* - c_3^* &= z_3 - c_3 + \Delta \overline{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_3 \\ &= 1 + (0,0,1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4^* - c_4^* &= z_4 - c_4 + \Delta \overline{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_4 \\ &= 1 + (0,0,1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_6^* - c_6^* &= z_6 - c_6 + \Delta \overline{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_6 \\ &= 3 + (0,0,1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

Karena  $z_j^* - c_j^* \geq 0$  untuk semua  $x_j$  variabel bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru dengan perubahan nilai sebesar :

$$\Delta f = \Delta \overline{\mathbf{C}} \overline{\mathbf{X}} = (0,0,1) \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Sehingga nilai tujuan yang baru adalah:

$$\begin{aligned} f^* &= f_{max} + \Delta f \\ &= 36 + 1 = 37 \end{aligned}$$

Jika analisis dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni, maka diperoleh perhitungan pada tabel simpleks sebagai berikut :

**Tabel 3.1. Tabel Simpleks untuk Contoh 3.1 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama**

	$c_j$	7	5	4	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_j} \backslash \overline{x_i}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	<b>6</b>	
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	
<b>7</b>	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	<b>1</b>	
	$z_j$	7	5	5	2	0	1	37	
	$z_j - c_j$	0	0	1	2	0	1	<b>37</b>	

Jadi nilai tujuan soal baru untuk Contoh 3.1 sama dengan  $f_{max} = 37$  (dalam puluhan ribu rupiah) dengan penyelesaian optimal dari variabel keputusannya adalah  $x_1=1$ ,  $x_2=6$  dan  $x_3=0$ .

Hal ini berarti penyelesaian optimal (variabel basis optimal) dan nilai penyelesaian optimal dari soal baru masih sama dengan penyelesaian optimal soal lama. Untuk nilai tujuan soal baru berbeda dengan soal lama sebab terdapat penambahan nilai tujuan sebesar **1**. Hasil ini sama dengan hasil *output* menggunakan program lindo yang ada pada Lampiran 3.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa jika  $c_1$  berubah menjadi 7 maka penyelesaian optimalnya tidak berubah, yang berarti perubahan  $c_1$  menjadi 7

masih mempertahankan penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat lama.

## 2. Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Bukan Basis

Perubahan koefisien untuk variabel bukan basis merupakan perubahan yang terjadi pada koefisien fungsi tujuan dari variabel yang tidak menjadi basis pada penyelesaian optimal lama.

Langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel bukan basis pada program linear bilangan bulat murni sebenarnya sama dengan perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis. Perbedaannya hanya terletak pada rumus yang digunakan untuk menghitung koefisien kontrol yang baru.

Rumus untuk menghitung koefisien kontrol secara umum adalah :

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j$$

Karena perubahan yang terjadi bukan merupakan perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis, maka nilai dari  $\Delta \bar{\mathbf{C}} = 0$  sehingga diperoleh :

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + 0 \mathbf{Y}_j - \Delta c_j$$

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) - \Delta c_j$$

Jadi rumus untuk menghitung koefisien kontrol yang baru dari perubahan koefisien fungsi tujuan yang bukan merupakan variabel basis adalah :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j.$$

Langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel bukan basis pada program linear bilangan bulat murni dapat ditentukan sebagai berikut :



*Langkah 1:* Karena data yang akan diselidiki adalah koefisien kontrol yang

dihitung menggunakan rumus :  $z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j$ .

Maka ditentukan terlebih dahulu nilai dari:

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru ( $\Delta c_j$ ).
- b.  $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.

*Langkah 2:* Menghitung nilai  $z_j^* - c_j^*$ , untuk  $x_j$  variabel bukan basis dengan

menggunakan rumus :  $z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j$ .

Dari perhitungan pada langkah 2 di atas untuk pola memaksimumkan, jika diperoleh :

- a.  $z_j^* - c_j^* \geq 0$  maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini berarti baris terakhir dari tabel simpleks optimal soal lama atau koefisien kontrol bernilai positif yang berarti tabel masih optimal, sehingga adanya perubahan dari koefisien fungsi tujuan tidak mengubah penyelesaian optimal soal lama. Perubahan hanya terjadi pada nilai tujuan dengan penambahan nilai tujuan :

$$\Delta f = \Delta \overline{\mathbf{CX}}.$$

Nilai program atau nilai tujuan yang baru berubah menjadi :

$$\begin{aligned} f^* &= f_{\max} + \Delta f \\ &= f_{\max} + \Delta \overline{\mathbf{CX}}. \end{aligned}$$

- b.  $z_j^* - c_j^* < 0$  berarti syarat tabel simpleks mencapai optimal belum dipenuhi sehingga tabel optimal soal lama belum menjadi tabel optimal bagi soal yang baru, maka perlu dilanjutkan dengan memasukkan  $x_j$  yang menyebabkan  $z_j^* - c_j^* < 0$  menjadi variabel basis. Jika terdapat lebih dari satu  $x_j$  yang nilai  $z_j^* - c_j^* < 0$ , maka dipilih  $x_j$  dengan nilai  $z_j^* - c_j^*$  terkecil agar variabel yang menyebabkan nilai koefisien kontrol bernilai negatif keluar dari variabel basis dan digantikan dengan variabel baru yang lebih mendekati nilai penyelesaian optimal. Kemudian dilanjutkan perhitungan dengan menggunakan tabel simpleks.

*Langkah 3:* Jika nilai penyelesaian optimal pada langkah 2.b layak yaitu variabel keputusan sudah bernilai bilangan bulat, maka masalah selesai. Namun jika hasil dari penyelesaian optimal untuk variabel keputusan belum merupakan bilangan bulat semua, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* untuk mendapatkan penyelesaian optimal yang bulat. Setelah diperoleh penyelesaian yang optimal dan layak, maka penyelesaian optimal inilah yang menjadi penyelesaian optimal pada masalah program linear bilangan bulat murni yang mengalami perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut.

Analisis juga dapat dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni. Cara ini lebih mudah karena perubahan penyelesaian optimal yang baru akan terlihat lebih jelas.

Untuk menjelaskan uraian dari langkah-langkah analisis di atas, diberikan contoh perubahan koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel bukan basis dari Contoh 2.8 sebagai berikut:

### Contoh 3.2

Diberikan masalah program linear bilangan bulat seperti pada Contoh 2.8 pada bab sebelumnya. Dalam contoh ini variabel yang bukan merupakan variabel basis dari penyelesaian optimal adalah  $x_3$  yang merupakan kipas angin.

Misalnya keuntungan penjualan untuk kipas angin dari perusahaan Sonic berubah menjadi Rp 70.000,00.

Akan diselidiki apakah perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut berpengaruh terhadap penyelesaian optimal dan bagaimana pengaruh perubahan koefisien tersebut terhadap penyelesaian optimal?

Dari perubahan masalah program linear bilangan bulat tersebut, perubahan yang terjadi adalah nilai  $c_3$  berubah menjadi 7 (dalam puluhan ribu rupiah).

Berdasarkan keterangan soal di atas, perubahan yang terjadi adalah :

$$\text{Maksimumkan : } f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

menjadi:

$$\text{Maksimumkan : } f = 6x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

Langkah-langkah analisis pada program linear bilangan bulat dengan perubahan koefisien fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

*Langkah 1:* Menentukan nilai dari :

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru :

$$\Delta c_1 = 0 \text{ (} x_1 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_4 = 0 \text{ (} y_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_2 = 0 \text{ (} x_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_5 = 0 \text{ (} y_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 3 \text{ (} x_3 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_6 = 0 \text{ (} s_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

b.  $(z_j - c_j)$  ma untuk  $x_j$  variabel bukan basis

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari variabel bukan basis yaitu:

$$z_3 - c_3 = 1, z_4 - c_4 = 1 \text{ dan } z_6 - c_6 = 3$$

*Langkah 2:* Menghitung  $z_j^* - c_j^*$  untuk  $x_j$  bukan basis dengan rumus :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j$$

$$z_3^* - c_3^* = z_3 - c_3 - \Delta c_3$$

$$= 1 - 3 = -2$$

$$z_4^* - c_4^* = z_4 - c_4 - \Delta c_4$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$z_6^* - c_6^* = z_6 - c_6 - \Delta c_6$$

$$= 3 - 0 = 3$$

Jika analisis dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni, maka diperoleh perhitungan pada tabel simpleks sebagai berikut :

**Tabel 3.2. Tabel Simpleks untuk Contoh 3.2 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama**

	$c_j$	6	5	<b>7</b>	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	<b>6</b>	
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	
6	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	<b>1</b>	
	$z_j$	6	5	5	1	0	3	36	
	$z_j - c_j$	0	0	<b>-2</b>	1	0	3	<b>36</b>	

Ternyata dari hasil perhitungan di atas, jika koefisien fungsi tujuan yang pertama yaitu  $c_1$  sebesar Rp 40.000,00 naik menjadi Rp 70.000,00, maka koefisien kontrol dari  $x_3$  atau  $z_3^* - c_3^*$  bernilai negatif.

Karena terdapat  $z_j^* - c_j^* < 0$  untuk  $x_j$  bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama belum menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini terlihat bahwa pada Tabel 3.2, perubahan dari koefisien fungsi tujuan menyebabkan tabel simpleks belum optimal, sehingga perlu dilanjutkan perhitungan pada tabel simpleks dengan memasukkan variabel  $x_3$  ke dalam variabel basis menggantikan variabel  $x_2$ , sehingga perhitungan dalam tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 3.3. Tabel Simpleks untuk Contoh 3.2**

	$c_j$	6	5	<b>7</b>	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	0	1	<b>1</b>	-1	0	3	<b>6</b>	<b>6</b>
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	-
6	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	<b>1</b>	-
	$z_j$	6	5	5	1	0	3	36	
	$z_j - c_j$	0	0	<b>-2</b>	1	0	3	<b>36</b>	
7	$x_3$	0	1	1	-1	0	3	6	-
0	$y_2$	0	1	0	-2	1	1	12	-
6	$x_1$	1	0	0	<b>1</b>	0	-2	<b>1</b>	<b>1</b>
	$z_j$	6	7	7	-1	0	9	48	
	$z_j - c_j$	0	2	0	<b>-1</b>	0	9	48	
7	$x_3$	1	1	1	0	0	1	<b>7</b>	
0	$y_2$	2	1	0	0	1	-3	14	
0	$y_1$	1	0	0	1	0	-2	1	
	$z_j$	7	7	7	0	0	7	49	
	$z_j - c_j$	1	2	0	0	0	7	<b>49</b>	

Pada Tabel 3.3 dapat dilihat bahwa pada iterasi kedua sudah dipenuhi syarat optimum (  $z_j^* - c_j^* \geq 0$  , untuk semua  $j$ ) sehingga tabel sudah optimal dan untuk semua variabel keputusannya sudah bernilai bulat sehingga penyelesaian ini sudah layak untuk program linear bilangan bulat. Oleh karena itu, perhitungan selesai tanpa dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane*.

Dari tabel di atas diperoleh variabel basis optimal soal baru adalah  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  dan  $x_3=7$  dengan  $f_{max} = \mathbf{49}$  (dalam puluhan ribu rupiah) atau Rp

490.000,00. Dari hasil ini diketahui bahwa penyelesaian optimal soal lama berubah, tidak lagi menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Perubahan terjadi pada nilai variabel keputusannya.

Jadi dengan adanya perubahan keuntungan penjualan dari kipas angin menjadi Rp 70.000,00, maka keuntungan perusahaan Sonic mengalami kenaikan menjadi Rp 490.000,00. Keuntungan tersebut diperoleh dengan memproduksi kipas angin sebanyak 7 unit tiap minggunya. Hasil ini sama jika dilakukan menggunakan program lindo yang dapat dilihat pada Lampiran 4.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa jika  $c_3$  berubah menjadi 7 maka penyelesaian optimalnya berubah, yang berarti perubahan  $c_3$  menjadi 7 sudah tidak mempertahankan penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat lama.

## **A.2. Perubahan yang Terjadi pada Beberapa Koefisien Fungsi Tujuan**

Perubahan yang terjadi pada beberapa koefisien fungsi tujuan merupakan perubahan yang terjadi pada beberapa koefisien fungsi tujuan baik dari semua variabel yang menjadi basis, variabel bukan basis atau gabungan dari variabel basis dan bukan basis pada penyelesaian optimal lama. Karena perubahan bisa terjadi pada semua variabel, maka rumus koefisien kontrol baru yang digunakan untuk menganalisis adanya perubahan tersebut adalah rumus persamaan (3.1) :

$$z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j$$

Langkah-langkah analisis perubahan beberapa koefisien fungsi tujuan pada program linear bilangan bulat murni dapat ditentukan sebagai berikut :

*Langkah 1:* Karena data yang akan diselidiki adalah koefisien kontrol yang

dihitung menggunakan rumus :  $z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j$

Maka ditentukan terlebih dahulu nilai dari:

- Perubahan koefisien fungsi tujuan ( $\Delta c_j$ ).
- $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.
- $\mathbf{Y}_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.
- $(\Delta \bar{\mathbf{C}})$

*Langkah 2:* Menghitung nilai  $z_j^* - c_j^*$ , untuk  $x_j$  variabel bukan basis dengan

menggunakan rumus :  $z_j^* - c_j^* = (z_j - c_j) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - c_j$

Dari perhitungan pada langkah 2 di atas untuk pola memaksimumkan, jika diperoleh :

- $z_j^* - c_j^* \geq 0$  maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini disebabkan nilai dari koefisien kontrol yang baru masih bernilai positif, sehingga tabel optimal soal lama masih optimal untuk masalah baru (masalah program linear yang telah mengalami perubahan). Oleh karena itu, adanya perubahan dari koefisien fungsi tujuan tidak mengubah penyelesaian optimal soal lama. Perubahan hanya terjadi pada nilai tujuan dengan



pertambahan nilai tujuan :  $\Delta f = \Delta \overline{CX}$ .

Nilai program atau nilai tujuan yang baru berubah menjadi :

$$\begin{aligned} f^* &= f_{\max} + \Delta f \\ &= f_{\max} + \Delta \overline{CX}. \end{aligned}$$

- c.  $z_j^* - c_j^* < 0$  berarti syarat tabel simpleks mencapai optimal belum dipenuhi, sehingga tabel optimal soal lama belum menjadi tabel optimal bagi soal yang baru. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan dengan memasukkan  $x_j$  yang menyebabkan  $z_j^* - c_j^* < 0$  menjadi variabel basis.

Jika terdapat lebih dari satu  $x_j$  yang nilai  $z_j^* - c_j^* < 0$ , maka dipilih  $x_j$  dengan nilai  $z_j^* - c_j^*$  terkecil agar variabel yang menyebabkan nilai koefisien kontrol bernilai negatif keluar dari variabel basis dan digantikan dengan variabel baru yang lebih mendekati nilai penyelesaian optimal. Kemudian dilanjutkan perhitungan dengan menggunakan tabel simpleks.

*Langkah 3:* Jika nilai penyelesaian optimal pada langkah 2.b layak yaitu variabel keputusan sudah bernilai bilangan bulat, maka masalah selesai. Namun jika hasil dari penyelesaian optimal untuk variabel keputusan belum merupakan bilangan bulat semua, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* untuk mendapatkan penyelesaian optimal yang bulat. Setelah diperoleh penyelesaian yang optimal dan layak, maka penyelesaian optimal inilah yang menjadi penyelesaian optimal pada masalah program linear bilangan bulat murni yang mengalami perubahan koefisien fungsi tujuan

tersebut.

Analisis juga dapat dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari masalah program linear bilangan bulat murni. Cara ini lebih mudah karena perubahan penyelesaian optimal yang baru akan terlihat lebih jelas.

Untuk menjelaskan uraian dari langkah-langkah analisis di atas, diberikan contoh perubahan koefisien fungsi tujuan yang merupakan variabel basis dari Contoh 2.8 sebagai berikut:

### **Contoh 3.3**

Diberikan masalah program linear bilangan bulat seperti pada Contoh 2.8 pada bab sebelumnya.

Misalnya keuntungan penjualan untuk televisi dari perusahaan Sonic berubah menjadi Rp 70.000,00, keuntungan penjualan radio berubah menjadi Rp 55.000,00 dan keuntungan penjualan kipas angin berubah menjadi Rp 50.000,00.

Akan diselidiki apakah perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut berpengaruh terhadap penyelesaian optimal dan bagaimana pengaruh perubahan koefisien tersebut terhadap penyelesaian optimal?

Dari perubahan masalah program linear bilangan bulat tersebut, perubahan yang terjadi adalah nilai  $c_1$  berubah menjadi 7,  $c_2$  menjadi 5,5 dan  $c_3$  berubah menjadi 5 (dalam puluhan ribu rupiah).

Berdasarkan keterangan soal di atas, perubahan yang terjadi adalah :

$$\text{Maksimumkan : } f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

menjadi:

Maksimumkan :  $f = 7x_1 + 5,5x_2 + 5x_3$

Langkah-langkah analisis pada program linear bilangan bulat dengan perubahan beberapa koefisien fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

*Langkah I:* Menentukan nilai dari :

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru :

$$\Delta c_1 = 1 \text{ (} x_1 \text{ variabel basis)} \quad \Delta c_4 = 0 \text{ (} y_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_2 = 0,5 \text{ (} x_2 \text{ variabel basis)} \quad \Delta c_5 = 0 \text{ (} y_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 1 \text{ (} x_3 \text{ variabel bukan basis)} \quad \Delta c_6 = 0 \text{ (} s_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

- b.  $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari koefisien kontrol lama untuk variabel bukan basis yaitu:

$$z_3 - c_3 = 1, z_4 - c_4 = 1 \text{ dan } z_6 - c_6 = 3$$

- c.  $Y_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari  $Y_j$  untuk variabel bukan basis yaitu:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- d.  $(\Delta \bar{C})$

Dari Tabel 2.6 diketahui bahwa variabel yang merupakan variabel basis optimal adalah  $x_2, y_2, x_1$  sehingga :

$$\Delta \bar{C} = (\Delta c_2, \Delta c_5, \Delta c_1)$$

$$= (0.5, 0, 1)$$

*Langkah 2:* Menghitung  $z_j^* - c_j^*$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis dengan rumus :

$$\begin{aligned} z_3^* - c_3^* &= (z_3^* - c_3) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_3 - c_3 \\ &= 1 + (0.5, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4^* - c_4^* &= (z_4^* - c_4) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_4 - c_4 \\ &= 1 + (0.5, 0, 1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 1.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_6^* - c_6^* &= (z_6^* - c_6) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_6 - c_6 \\ &= 3 + (0.5, 0, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 = 2.5 \end{aligned}$$

Karena  $z_j^* - c_j^* \geq 0$  untuk semua  $x_j$  variabel bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru dengan perubahan nilai sebesar :

$$\Delta f = \Delta \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} = (0.5, 0, 1) \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Sehingga nilai tujuan yang baru adalah:

$$\begin{aligned} f^* &= f_{\max} + \Delta f \\ &= 36 + 4 = 40 \end{aligned}$$

Jika analisis dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni, maka diperoleh perhitungan pada tabel simpleks sebagai berikut :

**Tabel 3.4. Tabel Simpleks untuk Contoh 3.3 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama**

	$c_j$	7	5,5	5	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5,5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	6	
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	
7	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	1	
	$z_j$	7	5,5	5,5	1,5	0	2,5	40	
	$z_j - c_j$	0	0	0,5	1,5	0	2,5	40	

Jadi nilai tujuan soal baru untuk Contoh 3.3 sama dengan  $f_{max} = 40$  (dalam puluhan ribu rupiah) atau Rp 400.000,00 dengan penyelesaian optimal dari variabel keputusannya adalah  $x_1=1$ ,  $x_2=6$  dan  $x_3=0$ .

Hal ini berarti penyelesaian optimal (variabel basis optimal) dan nilai penyelesaian optimal dari soal baru masih sama dengan penyelesaian optimal soal lama. Untuk nilai tujuan soal baru berbeda dengan soal lama sebab terdapat penambahan nilai tujuan sebesar 4. Hasil ini sama dengan hasil *output* menggunakan program lindo yang ada pada Lampiran 5.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa jika  $c_1$  berubah menjadi 7,  $c_2$  berubah menjadi 5,5 dan  $c_3$  berubah menjadi 5 yang masing-masing dalam puluhan ribu rupiah, maka penyelesaian optimalnya tidak berubah, yang berarti

perubahan tersebut masih mempertahankan penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat lama.

### Contoh 3.4

Diberikan masalah program linear bilangan bulat seperti pada Contoh 2.8 pada bab sebelumnya.

Misalnya keuntungan penjualan untuk televisi dari perusahaan Sonic berubah menjadi Rp 50.000,00, keuntungan penjualan radio berubah menjadi Rp 55.000,00 dan keuntungan penjualan kipas angin berubah menjadi Rp 60.000,00.

Akan diselidiki apakah perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut berpengaruh terhadap penyelesaian optimal dan bagaimana pengaruh perubahan koefisien tersebut terhadap penyelesaian optimal?

Dari perubahan masalah program linear bilangan bulat tersebut, perubahan yang terjadi adalah nilai  $c_1$  berubah menjadi 5,  $c_2$  menjadi 5,5 dan  $c_3$  berubah menjadi 6 yang masing-masing dalam puluhan ribu rupiah.

Berdasarkan keterangan soal di atas, perubahan yang terjadi adalah :

$$\text{Maksimumkan : } f = 6x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

menjadi:

$$\text{Maksimumkan : } f = 5x_1 + 5,5x_2 + 6x_3$$

Langkah-langkah analisis pada program linear bilangan bulat dengan perubahan beberapa koefisien fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

*Langkah 1:* Menentukan nilai dari :

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru :

$$\Delta c_1 = -1 \text{ (} x_1 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_4 = 0 \text{ (} y_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_2 = 0,5 \text{ (} x_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_5 = 0 \text{ (} y_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 2 \text{ (} x_3 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_6 = 0 \text{ (} s_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

- b.  $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari variabel bukan basis yaitu:

$$z_3 - c_3 = 1, z_4 - c_4 = 1 \text{ dan } z_6 - c_6 = 3$$

- c.  $Y_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari  $Y_j$  untuk variabel bukan basis yaitu:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- d.  $(\Delta \bar{C})$

Dari Tabel 2.6 diketahui bahwa variabel yang merupakan variabel basis optimal adalah  $x_2, y_2, x_1$  sehingga

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C} &= (\Delta c_2, \Delta c_5, \Delta c_1) \\ &= (0,5, 0, -1) \end{aligned}$$

Langkah 2: Menghitung  $z_j^* - c_j^*$  untuk  $x_j$  bukan basis dengan rumus :

$$\begin{aligned} z_3^* - c_3^* &= (z_3^* - c_3^*) + \Delta \bar{C} Y_3 - c_3 \\ &= 1 + (0,5, 0, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 = -0,5 \end{aligned}$$

$$z_4^* - c_4^* = (z_4^* - c_4^*) + \Delta \bar{C} Y_4 - c_4$$

$$= 1 + (0.5, 0, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -0.5$$

$$\begin{aligned} z_6^* - c_6^* &= (z_6^* - c_6^*) + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_6 - c_6 \\ &= 3 + (0.5, 0, -1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} - 0 = 6.5 \end{aligned}$$

Jika analisis dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni, maka diperoleh perhitungan pada tabel simpleks sebagai berikut :

**Tabel 3.5. Tabel Simpleks untuk Contoh 3.4 Jika Adanya Perubahan Langsung Dihitung pada Tabel Simpleks Optimal Lama**

	$c_j$	5	5,5	6	0	0	0		
$\bar{c}_i$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5,5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	6	
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	
5	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	1	
	$z_j$	5	5,5	5,5	-0,5	0	6,5	38	
	$z_j - c_j$	0	0	-0,5	-0,5	0	6,5	38	

Ternyata dari hasil perhitungan di atas, jika koefisien fungsi tujuan (dalam puluhan ribu rupiah) yang pertama yaitu  $c_1$  sebesar 6 turun menjadi 5,  $c_2$  sebesar 5 naik menjadi 5,5 dan  $c_3$  sebesar 4 naik menjadi 6, maka koefisien kontrol dari  $x_3$  atau  $z_3^* - c_3^*$  dan  $y_1$  atau  $z_4^* - c_4^*$  bernilai negatif. Karena terdapat  $z_j^* - c_j^* < 0$  untuk  $x_j$  bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama belum menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Hal ini terlihat



bahwa pada Tabel 3.5 di atas, perubahan dari koefisien fungsi tujuan menyebabkan tabel simpleks belum optimal. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan perhitungan pada tabel simpleks dengan memasukkan variabel  $x_3$  atau  $y_1$  ke dalam variabel basis. Karena ada dua nilai yang sama maka variabel yang masuk bebas dipilih, misalnya variabel  $x_3$  masuk menjadi variabel basis menggantikan variabel  $x_2$ , sehingga perhitungan dalam tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 3.6. Tabel Simpleks untuk Contoh 3.4**

	$c_j$	5	5,5	6	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{matrix} x_j \\ \overline{x_i} \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5,5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	6	6
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	-
5	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	1	-
	$z_j$	5	5,5	5,5	-0,5	0	6,5	38	
	$z_j - c_j$	0	0	-0,5	-0,5	0	6,5	38	
6	$x_3$	0	1	1	-1	0	3	6	-
0	$y_2$	0	1	0	-2	1	1	12	-
5	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	1	1
	$z_j$	5	6	6	-1	0	8	41	
	$z_j - c_j$	0	0,5	0	-1	0	8	41	
6	$x_3$	1	1	1	0	0	1	7	
0	$y_2$	2	1	0	0	1	-3	14	
0	$y_1$	1	0	0	1	0	-2	1	
	$z_j$	6	6	6	0	0	6	42	
	$z_j - c_j$	1	0,5	0	0	0	6	42	

Pada Tabel 3.6 pada iterasi kedua sudah dipenuhi syarat optimum ( $z_j^* - c_j^* \geq 0$ , untuk semua  $j$ ) sehingga tabel sudah optimal dan untuk semua variabel keputusannya sudah bernilai bulat. Penyelesaian ini sudah layak untuk program linear bilangan bulat, sehingga perhitungan selesai tanpa dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane*.

Dari tabel di atas diperoleh variabel basis optimal soal baru adalah  $x_1=0$ ,  $x_2=0$  dan  $x_3=7$  dengan  $f_{max} = 42$ . Dari hasil ini diketahui bahwa penyelesaian optimal soal lama berubah, tidak lagi menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Perubahannya terjadi pada nilai variabel keputusannya.

Jadi dengan adanya perubahan keuntungan penjualan dari televisi menjadi 5, keuntungan penjualan radio menjadi 5,5 dan keuntungan penjualan kipas angin menjadi 6, maka keuntungan perusahaan Sonic mengalami kenaikan menjadi 42. Keuntungan tersebut diperoleh dengan memproduksi kipas angin sebanyak 7 unit tiap minggunya. Hasil ini sama jika dilakukan menggunakan program lindo yang dapat dilihat pada Lampiran 6.

Dari contoh di atas dapat dilihat bahwa jika  $c_1$  berubah menjadi 5,  $c_2$  berubah menjadi 5,5 dan  $c_3$  berubah menjadi 6, maka penyelesaian optimalnya sudah tidak mempertahankan penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat lama.

Dari beberapa contoh perubahan koefisien fungsi tujuan yang terjadi pada Contoh 2.8 baik perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis maupun variabel bukan basis di atas, terlihat bahwa jika adanya perubahan koefisien

fungsi tujuan merubah penyelesaian optimal lama, maka penyelesaian optimal yang baru langsung diperoleh menggunakan metode simpleks tanpa menggunakan metode *cutting plane*. Oleh karena itu analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni untuk Contoh 2.8 sama dengan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear biasa.

Tetapi dalam contoh masalah yang lain, jika adanya perubahan koefisien fungsi tujuan merubah penyelesaian optimal lama dan penyelesaian optimal baru yang diperoleh menggunakan metode simpleks dengan melanjutkan pada tabel simpleks optimal lama belum merupakan bilangan bulat, maka perhitungan dalam analisis dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* sampai diperoleh penyelesaian optimal baru yang berupa bilangan bulat.

Berikut ini diberikan contoh analisis perubahan koefisien fungsi tujuan yang perubahannya mempengaruhi penyelesaian optimal lama.

### Contoh 3.5

Diberikan masalah Program Linear (PL) Bilangan Bulat sebagai berikut :

Mencari  $x_1$ ,  $x_2$  dan  $x_3$

yang memaksimumkan :  $f = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$

dengan kendala :  $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_3 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan integer}$$

Bentuk siap simpleks dari soal di atas adalah:

Mencari  $x_1, x_2$  dan  $x_3$

yang memaksimumkan :  $f=5x_1 + 7x_2 + 3x_3+0y_1+0y_2+0y_3+0y_4+0y_5$

dengan kendala :  $3x_1+4x_2+2x_3+y_1=30$

$$4x_1+6x_2+2x_3+y_2=40$$

$$x_1+y_3=7$$

$$x_2+y_4=5$$

$$x_3+y_5=9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan } y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

$x_1, x_2$  dan  $x_3$  integer

Penyelesaian optimal dengan tabel simpleks:

**Tabel 3.7. Tabel Simpleks Contoh 3.5 dengan Mengabaikan Syarat *Integer***

	$c_j$	5	7	3	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{matrix} x_j \\ \hline x_i \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$b_i$	$R_i$
0	$y_1$	3	4	2	1	0	0	0	0	30	15/2
0	$y_2$	4	6	2	0	1	0	0	0	40	7
0	$y_3$	1	0	0	0	0	1	0	0	7	-
0	$y_4$	0	1	0	0	0	0	1	0	5	5
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	-
	$z_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	-5	-7	-3	0	0	0	0	0	0	
0	$y_1$	3	0	2	1	0	0	-4	0	10	10/3
0	$y_2$	4	0	2	0	1	0	-6	0	10	5/2
0	$y_3$	1	0	0	0	0	1	0	0	7	
7	$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	0	5	
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	
	$z_j$	0	7	0	0	0	7	0	0	35	
	$z_j - c_j$	-5	0	-3	2	0	7	0	0	35	

**Tabel 3.8. Lanjutan Tabel 3.7**

	$c_j$	5	7	3	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_j}$ $\overline{x_i}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$b_i$	$R_i$
0	$y_1$	0	0	1/2	1	-3/4	0	1/2	0	5/2	5
5	$x_1$	1	0	1/2	0	1/4	0	-3/2	0	5/2	-
0	$y_3$	0	0	-1/2	0	-1/4	1	<b>3/2</b>	0	9/2	<b>3</b>
7	$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	0	5	5
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	
	$z_j$	5	7	5/2	0	5/4	0	-1/2	0	47,5	
	$z_j - c_j$	0	0	-1/2	0	5/4	0	<b>-1/2</b>	0	47,5	
0	$y_1$	0	0	<b>2/3</b>	1	-2/3	-1/3	0	0	1	<b>3/2</b>
5	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	7	-
0	$y_4$	0	0	-1/3	0	-1/6	2/3	1	0	3	-
7	$x_2$	0	1	1/3	0	1/6	-2/3	0	0	2	6
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	9
	$z_j$	5	7	7/3	0	7/6	1/3	0	0	49	
	$z_j - c_j$	0	0	<b>-2/3</b>	0	7/6	1/3	0	0	49	
3	$x_3$	0	0	1	3/2	-1	-1/2	0	0	<b>3/2</b>	
5	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	<b>7</b>	
0	$y_4$	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	1	0	7/2	
7	$x_2$	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	0	0	<b>3/2</b>	
0	$y_5$	0	0	0	-3/2	1	1/2	0	1	15/2	
	$z_j$	5	7	3	1	1/2	0	0	0	50	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1	1/2	0	0	0	<b>50</b>	

Persamaan pembatas baru:

$$x_2 - 1/2y_1 + 1/2y_2 - 1/2y_3 = 3/2$$

$$x_2 + [-1 + 1/2]y_1 + [0 + 1/2]y_2 + [-1 + 1/2]y_3 = 1 + 1/2$$

Jadi persamaan batasan *Gomory* dari persamaan di atas adalah :

$$s_1 - 1/2y_1 - 1/2y_2 - 1/2y_3 = -1/2$$

**Tabel 3.9. Tabel Simpleks Setelah Ditambah Persamaan Gomory 1**

	$c_j$	5	7	3	0	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	3/2	-1	-1/2	0	0	0	3/2	
5	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	1	0	0	7/2	
7	$x_2$	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	0	0	0	3/2	
0	$y_5$	0	0	0	-3/2	1	1/2	0	1	0	15/2	
0	$s_1$	0	0	0	-1/2	-1/2	-1/2	0	0	1	-1/2	
	$z_j$	5	7	3	1	1/2	0	0	0	0	50	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1	1/2	0	0	0	0	50	
3	$x_3$	0	0	1	2	-1/2	0	0	0	-1	2	
5	$x_1$	1	0	0	-1	-1	0	0	0	2	6	
0	$y_4$	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	3	
7	$x_2$	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	2	
0	$y_5$	0	0	0	-2	1/2	0	0	1	1	7	
0	$y_3$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	1	
	$z_j$	5	7	3	1	1/2	0	0	0	0	50	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1	1/2	0	0	0	0	50	

Jadi penyelesaian optimal dari program linear bilangan bulat di atas adalah

$x_1=6, x_2=2$  dan  $x_3=2$  dengan  $f_{\max}=50$ .

### Contoh 3.6

Diberikan masalah program linear bilangan bulat seperti pada Contoh 3.5.

Misalnya koefisien fungsi tujuan dari  $x_1$  berubah menjadi 6.

Dari perubahan masalah program linear bilangan bulat tersebut, perubahan yang terjadi adalah nilai  $c_1$  berubah menjadi 6.

Berdasarkan keterangan soal di atas, perubahan yang terjadi adalah :

$$\text{Maksimumkan : } f = 5x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

menjadi:

$$\text{Maksimumkan : } f = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3$$

Langkah-langkah analisis pada program linear bilangan bulat dengan perubahan koefisien fungsi tujuan adalah sebagai berikut:

*Langkah 1:* Menentukan nilai dari :

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru :

$$\Delta c_1 = 1 \text{ (} x_1 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_6 = 0 \text{ (} y_3 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_2 = 0 \text{ (} x_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_7 = 0 \text{ (} y_4 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = 0 \text{ (} x_3 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_8 = 0 \text{ (} y_5 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_4 = 0 \text{ (} y_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_9 = 0 \text{ (} s_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_5 = 0 \text{ (} y_2 \text{ variabel bukan basis)}$$

- b.  $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis.

Dari Tabel 3.9 diketahui nilai dari variabel bukan basis yaitu:

$$z_4 - c_4 = 1, z_5 - c_5 = 1/2 \text{ dan } z_9 - c_9 = 0$$

- c.  $\mathbf{Y}_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.

Dari Tabel 3.9 diketahui nilai dari  $\mathbf{Y}_j$  untuk variabel bukan basis yaitu:

$$\mathbf{Y}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_5 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{Y}_9 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- d.  $(\Delta \bar{\mathbf{C}})$

Dari Tabel 3.9 diketahui bahwa variabel yang merupakan variabel basis optimal adalah  $x_3, x_1, y_4, x_2, y_5$  dan  $y_3$  sehingga :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\mathbf{C}} &= (\Delta c_3, \Delta c_1, \Delta c_7, \Delta c_2, \Delta c_8, \Delta c_6) \\ &= (0, 1, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

*Langkah 2:* Menghitung  $z_j^* - c_j^*$  untuk  $x_j$  bukan basis dengan rumus :

$$\begin{aligned} z_4^* - c_4^* &= z_4 - c_4 + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_4 \\ &= 1 + (0, 1, 0, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$z_5^* - c_5^* = z_5 - c_5 + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_5$$



$$= 1/2 + (0,1,0,0,0,0) \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1/2$$

$$z_9^* - c_9^* = z_9 - c_9 + \Delta \bar{C}Y_9$$

$$= 0 + (0,1,0,0,0,0) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2$$

Jika analisis dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni, maka diperoleh perhitungan pada tabel simpleks sebagai berikut :

**Tabel 3.10. Tabel Simpleks Setelah Adanya Perubahan**

	$c_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	0		
$\bar{c}_i$	$\begin{matrix} x_j \\ \hline x_i \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	2	-1/2	0	0	0	-1	2	
6	$x_1$	1	0	0	-1	-1	0	0	0	2	6	
0	$y_4$	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	3	
7	$x_2$	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	2	
0	$y_5$	0	0	0	-2	1/2	0	0	1	1	7	
0	$y_3$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	1	
	$z_j$	6	7	3	0	-1/2	0	0	0	2	50	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1/2	0	0	0	2	50	

Ternyata dari hasil perhitungan di atas, jika koefisien fungsi tujuan yang pertama yaitu  $c_1$  sebesar \$ 5 naik menjadi \$ 6, maka koefisien kontrol dari  $y_2$  atau  $z_5^* - c_5^*$  bernilai negatif, sehingga tabel belum optimal.

Berikut adalah penyelesaian masalah dengan adanya perubahan koefisien fungsi tujuan yang mempengaruhi penyelesaian optimal lama dengan melanjutkan perhitungan menggunakan tabel simpleks optimal lama dengan merubah koefisien fungsi tujuan sesuai perubahan soal.

Karena terdapat  $z_j^* - c_j^* < 0$  untuk  $x_j$  bukan basis, maka penyelesaian optimal soal lama belum menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan perhitungan pada tabel simpleks dengan memasukkan variabel  $y_2$  ke dalam variabel basis menggantikan variabel  $y_3$ , sehingga perhitungan dalam tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 3.11 Tabel Simpleks untuk Contoh 3.5 yang Mengalami Perubahan**

	$c_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	2	-1/2	0	0	0	-1	<b>2</b>	-
6	$x_1$	1	0	0	-1	-1	0	0	0	2	<b>6</b>	-
0	$y_4$	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	3	-
7	$x_2$	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	<b>2</b>	2
0	$y_5$	0	0	0	-2	1/2	0	0	1	1	7	14
0	$y_3$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	<b>1</b>	<b>1</b>
	$z_j$	6	7	3	0	-1/2	0	0	0	2	50	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	<b>-1/2</b>	0	0	0	2	50	
3	$x_3$	0	0	1	5/2	0	1/2	0	0	-2	<b>5/2</b>	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	1	0	1	1	0	-1	4	
7	$x_2$	0	1	0	-1	0	-1	0	0	1	1	
0	$y_5$	0	0	0	-5/2	0	-1/2	0	1	2	<b>13/2</b>	
0	$y_2$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	1	
	$z_j$	6	7	3	1/2	0	1/2	0	0	1	56,5	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	1	56,5	

Persamaan pembatas baru:

Dari Tabel 3.11 diketahui :

$$x_3 + 5/2y_1 + 1/2y_3 - 2s_1 = 5/2$$

$$x_3 + [2 + 1/2]y_1 + [0 + 1/2]y_3 + [-2 + 0]s_1 = 2 + 1/2$$

Jadi persamaan batasan *Gomory* dari persamaan di atas adalah :

$$s_2 - 1/2y_1 - 1/2y_3 = -1/2$$

sehingga tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 3.12. Tabel Simpleks Setelah Ditambah Persamaan Gomory 2**

	$c_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{matrix} x_j \\ \overline{x_i} \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$s_1$	$s_2$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	5/2	0	1/2	0	0	-2	0	5/2	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	1	0	1	1	0	-1	0	4	
7	$x_2$	0	1	0	-1	0	-1	0	0	1	0	1	
0	$y_5$	0	0	0	-5/2	0	-1/2	0	1	2	0	13/2	
0	$y_2$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	0	1	
0	$s_2$	0	0	0	-1/2	0	-1/2	0	0	0	1	-1/2	
	$z_j$	6	7	3	1/2	0	1/2	0	0	1	0	56,5	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	1	0	56,5	
3	$x_3$	0	0	1	0	0	-2	0	0	-2	5	0	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	2	3	
7	$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	2	
0	$y_5$	0	0	0	0	0	2	0	1	2	-5	9	
0	$y_2$	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	2	0	
0	$s_2$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	-2	1	
	$z_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	1	1	56	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	56	

Dari tabel di atas diperoleh penyelesaian optimal soal baru adalah  $x_1=7$ ,  $x_2=2$  dan  $x_3=0$  dengan  $f_{max} = 56$ .

Berikut adalah penyelesaian Contoh 3.6 jika adanya perubahan koefisien fungsi tujuan dianggap sebagai masalah baru.

Jika perubahan soal di atas dianggap sebagai masalah baru, masalah program linear bulatnya adalah sebagai berikut :

Mencari  $x_1, x_2$  dan  $x_3$

yang memaksimumkan :  $f=6x_1 + 7x_2 + 3x_3$

dengan kendala :  $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 30$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 \leq 40$$

$$x_1 \leq 7$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_3 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan integer}$$

Bentuk siap simpleks dari soal di atas adalah:

Mencari  $x_1, x_2$  dan  $x_3$

yang memaksimumkan :  $f=6x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 0y_4 + 0y_5$

dengan kendala :  $3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + y_1 = 30$

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + y_2 = 40$$

$$x_1 + y_3 = 7$$

$$x_2 + y_4 = 5$$

$$x_3 + y_5 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan } y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ dan } x_3 \text{ integer}$$

Penyelesaian optimal dengan tabel simpleks :

**Tabel 3.13. Tabel Simpleks Contoh 3.6 dengan Mengabaikan Syarat *Integer***

	$c_j$	6	7	3	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_i} \backslash x_j$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$b_i$	$R_i$
0	$y_1$	3	4	2	1	0	0	0	0	30	15/2
0	$y_2$	4	6	2	0	1	0	0	0	40	7
0	$y_3$	1	0	0	0	0	1	0	0	7	-
0	$y_4$	0	1	0	0	0	0	1	0	5	5
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	-
	$z_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	-6	-7	-3	0	0	0	0	0	0	
0	$y_1$	3	0	2	1	0	0	-4	0	10	10/3
0	$y_2$	4	0	2	0	1	0	-6	0	10	5/2
0	$y_3$	1	0	0	0	0	1	0	0	7	
7	$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	0	5	
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	
	$z_j$	0	7	0	0	0	7	0	0	35	
	$z_j - c_j$	-6	0	-3	2	0	7	0	0	35	
0	$y_1$	0	0	1/2	1	-3/4	0	1/2	0	5/2	5
6	$x_1$	1	0	1/2	0	1/4	0	-3/2	0	5/2	-
0	$y_3$	0	0	-1/2	0	-1/4	1	3/2	0	9/2	3
7	$x_2$	0	1	0	0	0	0	1	0	5	5
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	
	$z_j$	6	7	3	0	3/2	0	-2	0	50	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	3/2	0	-2	0	50	
0	$y_1$	0	0	2/3	1	-2/3	-1/3	0	0	1	3/2
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	7	-
0	$y_4$	0	0	-1/3	0	-1/6	2/3	1	0	3	-
7	$x_2$	0	1	1/3	0	1/6	-2/3	0	0	2	6
0	$y_5$	0	0	1	0	0	0	0	1	9	9
	$z_j$	6	7	7/3	0	7/6	4/3	0	0	56	
	$z_j - c_j$	0	0	-2/3	0	7/6	4/3	0	0	56	

**Tabel 3.14. Lanjutan Tabel 3.13**

	$c_j$	<b>6</b>	7	3	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\overline{x_j}$ $\overline{x_i}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	3/2	-1	-1/2	0	0	<b>3/2</b>	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	<b>7</b>	
0	$y_4$	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	1	0	7/2	
7	$x_2$	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	0	0	<b>3/2</b>	
0	$y_5$	0	0	0	-3/2	1	1/2	0	1	<b>15/2</b>	
	$z_j$	6	7	3	1	1/2	1	0	0	57	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1	1/2	0	0	0	<b>57</b>	

Persamaan pembatas baru:

$$x_2 - 1/2y_1 + 1/2y_2 - 1/2y_3 = 3/2$$

$$x_2 + [-1 + 1/2]y_1 + [0 + 1/2]y_2 + [-1 + 1/2]y_3 = 1 + 1/2$$

Jadi persamaan batasan *Gomory* dari persamaan di atas adalah :

$$s_1 - 1/2y_1 - 1/2y_2 - 1/2y_3 = -1/2$$

sehingga tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 3.15. Tabel 3.14 Setelah Ditambah Persamaan Gomory 1**

	$c_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	3/2	-1	-1/2	0	0	0	3/2	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	1/2	-1/2	1/2	1	0	0	7/2	
7	$x_2$	0	1	0	-1/2	1/2	-1/2	0	0	0	3/2	
0	$y_5$	0	0	0	-3/2	1	1/2	0	1	0	15/2	
0	$s_1$	0	0	0	-1/2	-1/2	-1/2	0	0	1	-1/2	
	$z_j$	6	7	3	1	1/2	1	0	0	0	57	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1	1/2	1	0	0	0	57	
3	$x_3$	0	0	1	0	-5/2	-2	0	0	3	0	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7	-
0	$y_4$	0	0	0	0	-1	0	1	0	1	3	-
7	$x_2$	0	1	0	0	1	0	0	0	-1	2	2
0	$y_5$	0	0	0	0	5/2	2	0	1	-3	9	18/5
0	$y_1$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	1	1
	$z_j$	6	7	3	0	-1/2	0	0	0	2	56	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	-1/2	0	0	0	2	56	
3	$x_3$	0	0	1	5/2	0	1/2	0	0	-2	5/2	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	1	0	1	1	0	-1	4	
7	$x_2$	0	1	0	-1	0	-1	0	0	1	1	
0	$y_5$	0	0	0	-5/2	0	-1/2	0	1	2	13/2	
0	$y_2$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	1	
	$z_j$	6	7	3	1/2	0	1/2	0	0	1	56,5	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	1	56,5	

Persamaan pembatas baru:



Dari Tabel 3.15 diketahui :

$$x_3 + 5/2y_1 + 1/2y_3 - 2s_1 = 5/2$$

$$x_3 + [2 + 1/2]y_1 + [0 + 1/2]y_3 + [-2 + 0]s_2 = 2 + 1/2$$

Jadi persamaan batasan *Gomory* dari persamaan di atas adalah :

$$s_2 - 1/2y_1 - 1/2y_3 = -1/2$$

sehingga tabel simpleksnya menjadi :

**Tabel 3.16. Tabel 3.15 Setelah Ditambah Persamaan Gomory 2**

	$c_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{matrix} x_j \\ \hline x_i \end{matrix}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$s_1$	$s_2$	$b_i$	$R_i$
3	$x_3$	0	0	1	5/2	0	1/2	0	0	-2	0	5/2	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	1	0	1	1	0	-1	0	4	
7	$x_2$	0	1	0	-1	0	-1	0	0	1	0	1	
0	$y_5$	0	0	0	-5/2	0	-1/2	0	1	2	0	13/2	
0	$y_2$	0	0	0	1	1	1	0	0	-2	0	1	
0	$s_2$	0	0	0	-1/2	0	-1/2	0	0	0	1	-1/2	
	$z_j$	6	7	3	1/2	0	1/2	0	0	1	0	56,5	
	$z_j - c_j$	0	0	0	1/2	0	1/2	0	0	1	0	56,5	
3	$x_3$	0	0	1	0	0	-2	0	0	-2	5	0	
6	$x_1$	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	7	
0	$y_4$	0	0	0	0	0	0	1	0	-1	2	3	
7	$x_2$	0	1	0	0	0	0	0	0	1	-2	2	
0	$y_5$	0	0	0	0	0	2	0	1	2	-5	9	
0	$y_2$	0	0	0	0	1	0	0	0	-2	2	0	
0	$y_1$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	-2	1	
	$z_j$	6	7	3	0	0	0	0	0	1	1	56	
	$z_j - c_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	56	

Dari tabel di atas diperoleh penyelesaian optimal soal baru adalah  $x_1=7$ ,  $x_2=2$  dan  $x_3=0$  dengan  $f_{max} = 56$ .

Jadi penyelesaian optimal baru yang diperoleh menggunakan perhitungan langsung pada tabel optimal soal lama dengan mengubah koefisien fungsi tujuan sesuai perubahan yang terjadi sama dengan hasil penyelesaian optimal baru yang diperoleh dengan menganggap perubahan soal sebagai masalah baru.

Dari langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada program linear bilangan bulat murni di atas, secara umum langkah analisisnya hampir sama dengan program linear biasa. Perbedaan hanya terletak pada hasil penyelesaian optimal yang harus berupa bilangan bulat, sehingga jika adanya perubahan koefisien fungsi tujuan merubah penyelesaian optimal lama, perhitungan dilanjutkan dengan menggunakan tabel simpleks optimal lama dengan merubah koefisien fungsi tujuan sesuai perubahan soal. Jika dari perhitungan ini diperoleh penyelesaian optimal baru yang belum merupakan bilangan bulat, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* sampai diperoleh penyelesaian optimal yang merupakan bilangan bulat. Hasil perhitungan dengan langkah ini sama dengan perhitungan dengan menganggap adanya perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut sebagai masalah baru.

Prinsip dari analisis perubahan koefisien fungsi tujuan dalam masalah program linear baik program linear biasa maupun program linear bilangan bulat hanya menganalisis apakah dengan adanya perubahan dari koefisien tujuan menyebabkan nilai koefisien kontrolnya menjadi negatif atau tidak. Jika hasil dari

nilai koefisien kontrol yang baru ini ada yang bernilai negatif, berarti adanya perubahan koefisien fungsi tujuan tersebut merubah penyelesaian optimal lama. Koefisien kontrol yang dianalisis adalah koefisien kontrol dari setiap  $x_j$  yang bukan merupakan variabel basis.

#### **B. Batas Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan pada Masalah Program Linear Bilangan Bulat Murni yang Masih Mempertahankan Penyelesaian Optimal Lama**

Batas perubahan koefisien fungsi tujuan merupakan interval atau selang sampai sejauh mana koefisien fungsi tujuan boleh berubah tanpa harus mempengaruhi penyelesaian optimal lama.

Misalnya koefisien ongkos ( $c_j$ ) soal lama berubah menjadi :

$$c_j^* = c_j + \Delta c_j.$$

Salah satu data dari tabel simpleks optimal yang dipengaruhi oleh perubahan ini adalah baris terakhir yaitu pada koefisien kontrol. Hal ini akan berpengaruh terhadap penyelesaian optimal. Jika nilai dari koefisien kontrol yang baru ada yang bernilai negatif, maka tabel simpleks tidak lagi optimal, sehingga perubahan koefisien fungsi tujuan merubah penyelesaian optimal lama.

Berdasarkan uraian di atas untuk mengetahui batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan agar perubahan tidak berpengaruh terhadap penyelesaian optimal, maka koefisien kontrolnya harus bernilai positif. Batas perubahan koefisien fungsi tujuan pada program linear bilangan bulat murni dapat dicari dengan memasukkan nilai-nilai dari koefisien kontrol lama, vektor perubahan koefisien fungsi tujuan pada variabel basis, matriks kolom yang bersesuaian

dengan  $x_j$  dan perubahan koefisien fungsi tujuan dari  $x_j$  ( $z_j - c_j, \Delta \bar{\mathbf{C}}, \mathbf{Y}_j$  dan  $\Delta c_j$ ) pada persamaan (2.2) pada bab sebelumnya. Jika menggunakan rumus ini koefisien kontrol yang dihitung hanya untuk variabel yang bukan merupakan variabel basis. Hal ini disebabkan karena koefisien kontrol untuk variabel basis pasti hasilnya sama dengan nol seperti yang telah dijelaskan di bab sebelumnya. Cara ini digunakan jika analisis tidak dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal soal lama. Jika perhitungan dilakukan secara langsung pada tabel simpleks optimal, maka tabel yang digunakan adalah tabel simpleks optimal dari program linear bilangan bulat murni yang diperoleh menggunakan metode *cutting plane* dengan merubah koefisien fungsi tujuannya.

### **B.1. Batas Perubahan Salah Satu Koefisien Fungsi Tujuan**

Untuk mencari batas perubahan salah satu koefisien fungsi tujuan selalu disertai anggapan bahwa parameter yang lain tetap. Hal ini bertujuan agar batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan dapat dicari dengan mudah.

#### **1. Batas Perubahan yang Terjadi pada Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Basis.**

Dari uraian di atas diketahui bahwa rumus untuk mencari koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan pada koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis adalah  $z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j$ .

Syarat agar penyelesaian optimal tidak berubah jika terjadi perubahan pada koefisien fungsi tujuan adalah nilai dari koefisien kontrol yang baru bernilai

positif, maka persamaan untuk mencari batas perubahan yang masih mempertahankan penyelesaian optimal jika terjadi perubahan pada koefisien fungsi tujuan adalah nilai koefisien kontrol yang baru harus lebih dari sama dengan nol. Karena rumus untuk mencari koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan pada koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis adalah

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{C}Y_j.$$

Maka persamaan untuk mencari batas perubahannya adalah :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{C}Y_j \geq 0$$

$$z_j - c_j + \Delta \bar{C}Y_j \geq 0.$$

Karena nilai  $z_j - c_j \geq 0$ , maka persamaan akan tetap dipenuhi jika  $\Delta \bar{C}Y_j \geq 0$ .

Dalam rumus ini  $\Delta c_j$  (perubahan koefisien fungsi tujuan) untuk  $x_j$  bukan basis tidak diikutsertakan dalam perhitungan karena untuk variabel bukan basis tidak mengalami perubahan koefisien fungsi tujuan sehingga nilai dari  $\Delta c_j = 0$ .

## 2. Batas Perubahan yang Terjadi pada Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Bukan Basis.

Dari uraian di atas diketahui bahwa rumus untuk mencari koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan pada koefisien fungsi tujuan untuk variabel bukan basis adalah  $z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j$ .

Syarat agar penyelesaian optimal tidak berubah jika terjadi perubahan pada koefisien fungsi tujuan adalah nilai dari koefisien kontrol yang baru bernilai positif, maka persamaan untuk mencari batas perubahan yang masih mempertahankan penyelesaian optimal jika terjadi perubahan pada koefisien

fungsi tujuan adalah nilai koefisien kontrol yang baru harus lebih dari sama dengan nol. Karena rumus untuk mencari koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan pada koefisien fungsi tujuan untuk variabel bukan basis adalah

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j.$$

Maka persamaan untuk mencari batas perubahannya adalah :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j \geq 0$$

$$z_j - c_j - \Delta c_j \geq 0$$

$$-\Delta c_j \geq -(z_j - c_j)$$

$$\Delta c_j \leq (z_j - c_j) \text{ untuk } x_j \text{ bukan basis.}$$

Jadi jika terjadi perubahan koefisien fungsi tujuan pada salah satu variabel bukan basis, maka penyelesaian optimal lama tidak berubah jika besarnya perubahan koefisien fungsi tujuan pada variabel tersebut kurang dari atau sama dengan nilai koefisien kontrol dari variabel tersebut. Artinya jika besarnya perubahan lebih dari nilai koefisien kontrol variabel tersebut maka koefisien kontrol yang baru bernilai negatif yang mengakibatkan tabel simpleks optimal lama tidak lagi optimal, sehingga akan merubah penyelesaian optimal soal lama.

Contoh di bawah ini akan diselidiki sampai sejauh mana perubahan dari  $c_1$ ,  $c_2$  dan  $c_3$  yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama dari Contoh 2.8.

### Contoh 3.7

Diberikan masalah program linear bilangan bulat seperti pada kasus perusahaan Sonic pada Contoh 2.8.

Akan dicari batas perubahan pada masing-masing koefisien fungsi tujuan agar tidak merubah penyelesaian optimal.

Dari persoalan program linear bilangan bulat murni dari Contoh 2.8 pada kasus perusahaan Sonic diperoleh tabel simpleks optimal sebagai berikut :

**Tabel 3.17. Tabel Simpleks Optimal Contoh 2.8**

	$c_j$	6	5	4	0	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$	$R_i$
5	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	<b>6</b>	
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6	
6	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	<b>1</b>	
	$z_j$	6	5	5	1	0	3	36	
	$z_j - c_j$	0	0	1	1	0	3	<b>36</b>	

Untuk mengetahui batas yang diperoleh menggunakan rumus di atas, ditentukan terlebih dahulu variabel mana yang merupakan variabel basis dan variabel yang bukan basis. Dari Contoh 2.8 pada bab sebelumnya, variabel yang merupakan variabel basis adalah  $x_1$  dan  $x_2$ , sedangkan untuk  $x_3$  bukan merupakan variabel basis.

Misalnya dari persoalan di atas terjadi perubahan untuk setiap koefisien fungsi tujuan, yaitu masing-masing mengalami perubahan sebesar  $\Delta c_1$ ,  $\Delta c_2$  dan  $\Delta c_3$ , sedangkan untuk variabel yang bukan merupakan variabel keputusan ( $y_1, y_2, s_1$ ) tidak mengalami perubahan. Seperti langkah-langkah analisis di atas akan diperoleh :

- a. Perubahan koefisien fungsi tujuan dari soal lama menjadi soal baru :

$$\Delta c_1 = \Delta c_1 \text{ (} x_1 \text{ variabel basis)} \quad \Delta c_4 = 0 \text{ (} y_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

$$\Delta c_2 = \Delta c_2 \text{ (} x_2 \text{ variabel basis)} \quad \Delta c_5 = 0 \text{ (} y_2 \text{ variabel basis)}$$

$$\Delta c_3 = \Delta c_3 \text{ (} x_3 \text{ variabel bukan basis)} \quad \Delta c_6 = 0 \text{ (} s_1 \text{ variabel bukan basis)}$$

- b.  $(z_j - c_j)$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari variabel bukan basis yaitu:

$$z_3 - c_3 = 1, z_4 - c_4 = 1 \text{ dan } z_6 - c_6 = 3$$

- c.  $Y_j$  untuk  $x_j$  variabel bukan basis yang diperoleh pada tabel simpleks optimal dari masalah lama.

Dari Tabel 2.6 diketahui nilai dari  $Y_j$  untuk variabel bukan basis yaitu:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dan } Y_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- d.  $(\Delta \bar{C})$

Dari Tabel 2.6 diketahui bahwa variabel yang merupakan variabel basis optimal adalah  $x_2, y_2, x_1$ . Karena terjadi perubahan dari masing-masing koefisien fungsi tujuan sebesar  $\Delta c_1, \Delta c_2$  dan  $\Delta c_3$ , maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \Delta \bar{C} &= (\Delta c_2, \Delta c_5, \Delta c_1) \\ &= (\Delta c_2, 0, \Delta c_1) \end{aligned}$$



**1. Batas Perubahan yang Terjadi pada Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Basis (Batas dari  $c_1$  dan  $c_2$ )**

Jika perubahan yang terjadi hanya pada variabel basis, maka persamaan untuk mencari batas perubahannya adalah :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j \geq 0.$$

Dengan data yang telah diketahui di atas diperoleh :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j \geq 0$$

untuk  $x_j$  bukan basis adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} z_3^* - c_3^* &= z_3 - c_3 + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_3 \geq 0 \\ 1 + (\Delta c_2, 0, \Delta c_1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} &\geq 0 \\ 1 + \Delta c_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} z_4^* - c_4^* &= z_4 - c_4 + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_4 \geq 0 \\ 1 + (\Delta c_2, 0, \Delta c_1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} &\geq 0 \\ 1 - \Delta c_2 + \Delta c_1 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} z_6^* - c_6^* &= z_6 - c_6 + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_6 \geq 0 \\ 3 + (\Delta c_2, 0, \Delta c_1) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} &\geq 0 \\ 3 + 3\Delta c_2 - 2\Delta c_1 &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nilai fungsi tujuan yang baru setelah adanya perubahan adalah :

$$\begin{aligned} f^* &= f_{\max} + \Delta f \\ &= f_{\max} + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{X}. \end{aligned}$$

$$= 36 + (\Delta c_2, 0, \Delta c_1) \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 36 + 6\Delta c_2 + \Delta c_1$$

**1) Batas  $c_1$  bila  $c_2$  konstan artinya  $\Delta c_2 = 0$**

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_1$  yaitu (3.3) dan (3.4) diperoleh :

$$\begin{aligned} 1 - \Delta c_2 + \Delta c_1 &\geq 0 \\ 1 + \Delta c_1 &\geq 0 \\ \Delta c_1 &\geq -1 \end{aligned} \tag{a.1}$$

$$\begin{aligned} 3 + 3\Delta c_2 - 2\Delta c_1 &\geq 0 \\ 3 - 2\Delta c_1 &\geq 0 \\ -2\Delta c_1 &\geq -3 \\ \Delta c_1 &\leq 3/2 \end{aligned} \tag{a.2}$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_1$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (a.1) dan (a.2) yaitu:

$$\Delta c_1 \geq -1 \text{ dan } \Delta c_1 \leq 3/2$$

Nilai yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah

$$-1 \leq \Delta c_1 \leq 3/2$$

Dengan besarnya nilai tujuan :  $f = 36 + \Delta c_1$

Jadi perubahan koefisien  $c_1$  tidak akan merubah penyelesaian optimal jika besarnya perubahan terjadi pada batas :-  $1 \leq \Delta c_1 \leq 3/2$  (3.5)

Misalnya  $c_1$  yang baru adalah  $c_1^*$ , berdasarkan persamaan (2.1) akan diperoleh:

$$c_1^* = c_1 + \Delta c_1 \quad (3.6)$$

Jika persamaan (3.5) ditambah dengan  $c_1$  akan diperoleh :

$$-1 + c_1 \leq \Delta c_1 + c_1 \leq 3/2 + c_1$$

Dari persamaan (3.6) diketahui bahwa :  $c_1^* = c_1 + \Delta c_1$

Dengan memasukkan nilai  $c_1$  pada kasus perusahaan Sonic yaitu 6 akan diperoleh batas dari nilai  $c_1$  yang baru ( $c_1^*$ ) agar tidak merubah penyelesaian optimal. Batas tersebut adalah :

$$-1 + 6 \leq c_1^* \leq 3/2 + 6$$

$$5 \leq c_1^* \leq 15/2$$

## 2) Batas $c_2$ bila $c_1$ konstan artinya $\Delta c_1 = 0$

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_2$  yaitu (3.2), (3.3) dan (3.4) diperoleh :

$$1 + \Delta c_2 \geq 0$$

$$\Delta c_2 \geq -1 \quad (a.3)$$

$$1 - \Delta c_2 + \Delta c_1 \geq 0$$

$$1 - \Delta c_2 \geq 0$$

$$-\Delta c_2 \geq -1$$

$$\Delta c_1 \leq 1 \quad (a.4)$$

$$3 + 3\Delta c_2 - 2\Delta c_1 \geq 0$$

$$3 + 3\Delta c_2 \geq 0$$

$$3\Delta c_2 \geq -3$$

$$\Delta c_1 \geq -1 \quad (a.5)$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_2$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (a.3), (a.4) dan (a.5) yaitu:

$$\Delta c_2 \geq -1, \Delta c_2 \leq 1 \text{ dan } \Delta c_2 \geq -1$$

Nilai yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah

$$-1 \leq \Delta c_2 \leq 1$$

Dengan besarnya nilai tujuan :  $f = 36 + 6\Delta c_2$

Jadi perubahan koefisien  $c_2$  tidak akan merubah penyelesaian optimal jika besarnya perubahan terjadi pada batas :  $-1 \leq \Delta c_2 \leq 1$  (3.7)

Misalnya  $c_2$  yang baru adalah  $c_2^*$ , berdasarkan persamaan (2.1)

akan diperoleh :

$$c_2^* = c_2 + \Delta c_2 \quad (3.8)$$

Jika persamaan (3.7) ditambah dengan  $c_2$  akan diperoleh :

$$-1 + c_2 \leq \Delta c_2 + c_2 \leq 1 + c_2$$

Dari persamaan (3.8) diketahui bahwa :  $c_2^* = c_2 + \Delta c_2$

Dengan memasukkan nilai  $c_2$  pada kasus perusahaan Sonic yaitu 5 akan diperoleh batas dari nilai  $c_2$  yang baru ( $c_2^*$ ) agar tidak merubah penyelesaian optimal. Batas tersebut adalah :

$$-1 + 5 \leq c_2^* \leq 1 + 5$$

$$4 \leq c_2^* \leq 6$$

## 2. Batas Perubahan yang Terjadi pada Koefisien Fungsi Tujuan untuk Variabel Bukan Basis (Batas $c_3$ )

Dari Contoh 2.8 diketahui bahwa  $c_3$  merupakan variabel bukan basis. Jika  $c_3$  mengalami perubahan, maka perubahan yang terjadi hanya pada variabel bukan basis, sehingga persamaan untuk mencari batas perubahannya adalah :  $z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j \geq 0$ .

Dengan data yang telah diketahui di atas diperoleh :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j - \Delta c_j \geq 0$$

untuk  $x_j$  bukan basis adalah sebagai berikut :

$$z_3^* - c_3^* = z_3 - c_3 - \Delta c_3 \geq 0$$

$$1 - \Delta c_3 \geq 0$$

(3.9)

$$z_4^* - c_4^* = z_4 - c_4 - \Delta c_4 \geq 0$$

$$1 - 0 \geq 0$$

$$z_6^* - c_6^* = z_6 - c_6 - \Delta c_6 \geq 0$$

$$3 - 0 \geq 0$$

$$f^* = f_{\max} + \Delta f$$

$$= f_{\max} + \Delta \overline{\mathbf{CX}}$$

$$= 36 + (\Delta c_2, 0, \Delta c_1) \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 36 + 6\Delta c_2 + \Delta c_1$$

**a) Batas  $c_3$**

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_3$  yaitu (3.9) diperoleh :

$$\begin{aligned} 1 - \Delta c_3 &\geq 0 \\ -\Delta c_3 &\geq -1 \\ \Delta c_3 &\leq 1 \end{aligned} \quad (a.6)$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_3$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (a.6) yaitu:  $\Delta c_3 \leq 1$ .

Dengan besarnya nilai tujuan :  $f = 36$ .

Jadi perubahan koefisien  $c_3$  tidak akan merubah penyelesaian optimal jika besarnya perubahan terjadi pada batas:  $\Delta c_3 \leq 1$  (3.10)

Misalnya  $c_3$  yang baru adalah  $c_3^*$ , berdasarkan persamaan (2.1) akan diperoleh :

$$c_3^* = c_3 + \Delta c_3 \quad (3.11)$$

Jika persamaan (3.10) ditambah dengan  $c_3$  akan diperoleh :

$$\Delta c_3 + c_3 \leq 1 + c_3$$

Dari persamaan (3.11) diketahui bahwa :  $c_3^* = c_3 + \Delta c_3$

Dengan memasukkan nilai  $c_3$  pada kasus perusahaan Sonic yaitu 4 akan diperoleh batas dari nilai  $c_3$  yang baru ( $c_3^*$ ) agar tidak merubah penyelesaian optimal. Batas tersebut adalah :

$$c_3^* \leq 1 + 4 \quad \text{atau} \quad c_3^* \leq 5$$

Selain menggunakan cara di atas, untuk mencari batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan, lebih mudah jika dilakukan analisis pada tabel simpleks optimal dari masalah program linear bilangan bulat secara langsung.

Misalnya dari persoalan di atas terjadi perubahan untuk setiap koefisien fungsi tujuan, yaitu masing-masing mengalami perubahan sebesar  $\Delta c_1$ ,  $\Delta c_2$  dan  $\Delta c_3$  maka tabel simpleks optimal di atas akan berubah menjadi :

**Tabel 3.18. Tabel 3.17 dengan Adanya Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan**

	$c_j$	$6+\Delta c_1$	$5+\Delta c_2$	$4+\Delta c_3$	0	0	0	
$\overline{c_i}$	$x_j$ $x_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$s_1$	$b_i$
$5+\Delta c_2$	$x_2$	0	1	1	-1	0	3	6
0	$y_2$	0	0	-1	-1	1	-2	6
$6+\Delta c_1$	$x_1$	1	0	0	1	0	-2	1
	$z_j$	$6+\Delta c_1$	$5+\Delta c_2$	$5+\Delta c_2$	$1-\Delta c_2+\Delta c_1$	0	$3+3\Delta c_2-2\Delta c_1$	$36+6\Delta c_2+\Delta c_1$
	$z_j - c_j$	0	0	$1+\Delta c_2-\Delta c_3$	$1+\Delta c_1-\Delta c_2$	0	$3-2\Delta c_1+3\Delta c_2$	$36+\Delta c_1+6\Delta c_2$

Agar perubahan koefisien fungsi tujuan dari masalah di atas tidak merubah penyelesaian optimal maka setiap perubahan harus memenuhi persamaan :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \overline{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \geq 0 \text{ untuk } x_j \text{ bukan basis, sehingga diperoleh}$$

persamaan :

$$1+\Delta c_2-\Delta c_3 \geq 0 \quad (3.12)$$

$$1+\Delta c_1-\Delta c_2 \geq 0 \quad (3.13)$$

$$3-2\Delta c_1+3\Delta c_2 \geq 0 \quad (3.14)$$

Kondisi di atas tidak memungkinkan untuk mengubah  $c_1$ ,  $c_2$  dan  $c_3$  sekaligus.

Hal ini disebabkan jika perubahan terjadi lebih dari satu koefisien, maka

persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14) tidak bisa digunakan untuk menentukan batas perubahan  $c_1$ ,  $c_2$  dan  $c_3$ , sehingga analisis yang akan dilakukan hanya untuk perubahan dari salah satu koefisien fungsi tujuan sehingga untuk perubahan koefisien yang lain harus konstan atau tetap.

**1) Batas  $c_1$  bila  $c_2$  dan  $c_3$  konstan artinya  $\Delta c_2 = 0$  dan  $\Delta c_3 = 0$**

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_1$  yaitu (3.13) dan (3.14) diperoleh :

$$\begin{aligned} 1 + \Delta c_1 - \Delta c_2 &\geq 0 \\ 1 + \Delta c_1 &\geq 0 \\ \Delta c_1 &\geq -1 \end{aligned} \tag{b.1}$$

$$\begin{aligned} 3 - 2\Delta c_1 + 3\Delta c_2 &\geq 0 \\ 3 - 2\Delta c_1 &\geq 0 \\ -2\Delta c_1 &\geq -3 \\ \Delta c_1 &\leq 3/2 \end{aligned} \tag{b.2}$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_1$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (b.1) dan (b.2) yaitu:

$$\Delta c_1 \geq -1 \text{ dan } \Delta c_1 \leq 3/2$$

Nilai yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah

$$-1 \leq \Delta c_1 \leq 3/2$$

Dengan besarnya nilai tujuan :  $f = 36 + \Delta c_1$

Jadi perubahan koefisien  $c_1$  tidak akan merubah penyelesaian optimal jika

besarnya perubahan terjadi pada batas :  $-1 \leq \Delta c_1 \leq 3/2$  (3.15)

Misalnya  $c_1$  yang baru adalah  $c_1^*$ , berdasarkan persamaan (2.1) akan diperoleh:

$$c_1^* = c_1 + \Delta c_1 \tag{3.16}$$



Jika persamaan (3.15) ditambah dengan  $c_1$  akan diperoleh :

$$-1+c_1 \leq \Delta c_1 + c_1 \leq 3/2 + c_1$$

Dari persamaan (3.16) diketahui bahwa :  $c_1^* = c_1 + \Delta c_1$

Dengan memasukkan nilai  $c_1$  pada kasus perusahaan Sonic yaitu 6 akan diperoleh batas dari nilai  $c_1$  yang baru ( $c_1^*$ ) agar tidak merubah penyelesaian optimal. Batas tersebut adalah :

$$-1+6 \leq c_1^* \leq 3/2+6$$

$$5 \leq c_1^* \leq 15/2$$

## 2) Batas $c_2$ bila $c_1$ dan $c_3$ konstan artinya $\Delta c_1 = 0$ dan $\Delta c_3 = 0$

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_2$  yaitu (3.12), (3.13) dan (3.14) diperoleh batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned} 1+\Delta c_2-\Delta c_3 &\geq 0 \\ 1+\Delta c_2 &\geq 0 \\ \Delta c_2 &\geq -1 \end{aligned} \tag{b.3}$$

$$\begin{aligned} 1+\Delta c_1-\Delta c_2 &\geq 0 \\ 1-\Delta c_2 &\geq 0 \\ -\Delta c_2 &\geq -1 \\ \Delta c_1 &\leq 1 \end{aligned} \tag{b.4}$$

$$\begin{aligned} 3-2\Delta c_1+3\Delta c_2 &\geq 0 \\ 3+3\Delta c_2 &\geq 0 \\ 3\Delta c_2 &\geq -3 \\ \Delta c_1 &\geq -1 \end{aligned} \tag{b.5}$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_2$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (b.3), (b.4) dan (b.5) yaitu:

$$\Delta c_2 \geq -1, \Delta c_2 \leq 1 \text{ dan } \Delta c_2 \geq -1$$

Nilai yang memenuhi ketiga persamaan tersebut adalah

$$-1 \leq \Delta c_2 \leq 1$$

Dengan besarnya nilai tujuan :  $f = 36 + 6\Delta c_2$ .

Jadi perubahan koefisien  $c_2$  tidak akan merubah penyelesaian optimal jika besarnya perubahan terjadi pada batas :  $-1 \leq \Delta c_2 \leq 1$  (3.17)

Misalnya  $c_2$  yang baru adalah  $c_2^*$ , berdasarkan persamaan (2.1) akan diperoleh :

$$c_2^* = c_2 + \Delta c_2 \quad (3.18)$$

Jika persamaan (3.17) ditambah dengan  $c_2$  akan diperoleh :

$$-1 + c_2 \leq \Delta c_2 + c_2 \leq 1 + c_2$$

Dari persamaan (3.18) diketahui bahwa :  $c_2^* = c_2 + \Delta c_2$

Dengan memasukkan nilai  $c_2$  pada kasus perusahaan Sonic yaitu 5 akan diperoleh batas dari nilai  $c_2$  yang baru ( $c_2^*$ ) agar tidak merubah penyelesaian optimal. Batas tersebut adalah :

$$-1 + 5 \leq c_2^* \leq 1 + 5$$

$$4 \leq c_2^* \leq 6$$

### 3) Batas $c_3$ bila $c_1$ dan $c_2$ konstan artinya $\Delta c_1 = 0$ dan $\Delta c_2 = 0$

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_3$  yaitu (3.11) diperoleh :

$$1 + \Delta c_2 - \Delta c_3 \geq 0$$

$$1 - \Delta c_3 \geq 0$$

$$-\Delta c_3 \geq -1$$

$$\Delta c_3 \leq 1 \quad (b.6)$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_3$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (b.6) yaitu:  $\Delta c_3 \leq 1$ .

Dengan besarnya nilai tujuan :  $f = 36$ .

Jadi perubahan koefisien  $c_3$  tidak akan merubah penyelesaian optimal jika besarnya perubahan terjadi pada batas:  $\Delta c_3 \leq 1$  (3.19)

Misalnya  $c_3$  yang baru adalah  $c_3^*$ , berdasarkan persamaan (2.1) akan diperoleh :

$$c_3^* = c_3 + \Delta c_3 \quad (3.20)$$

Jika persamaan (3.19) ditambah dengan  $c_3$  akan diperoleh :

$$\Delta c_3 + c_3 \leq 1 + c_3$$

Dari persamaan (3.20) diketahui bahwa :  $c_3^* = c_3 + \Delta c_3$

Dengan memasukkan nilai  $c_3$  pada kasus perusahaan Sonic yaitu 4 akan diperoleh batas dari nilai  $c_3$  yang baru ( $c_3^*$ ) agar tidak merubah penyelesaian optimal. Batas tersebut adalah :

$$c_3^* \leq 1 + 4 \quad \text{atau} \quad c_3^* \leq 5$$

Dari kedua cara tersebut diperoleh batas perubahan dari  $c_1$ ,  $c_2$  dan  $c_3$  yang hasilnya sama.

Hasil analisis sensitivitas dari perubahan koefisien fungsi tujuan untuk contoh masalah program linear bilangan bulat murni pada perusahaan Sonic dapat diringkas pada tabel sebagai berikut :

**Tabel 3.19. Analisis Sensitivitas Koefisien Fungsi Tujuan Kasus Perusahaan Sonic**

Parameter	Nilai $c_j$ soal lama	Penambahan yang diperbolehkan	pengurangan yang diperbolehkan	Nilai tujuan
$c_1$	6	$3/2$	1	$36+\Delta c_1$
$c_2$	5	1	1	$36+6\Delta c_2$
$c_3$	4	1	<i>infinity</i>	36

Penyelesaian optimal lama tetap dipertahankan jika perubahan yang terjadi masih memenuhi batas perubahan pada masalah program linear bilangan bulat tersebut. Besarnya nilai  $c_j$  yang tidak merubah penyelesaian optimal masalah lama adalah sebagai berikut:

**Tabel 3.20. Besarnya Batas  $c_j$  yang Tidak Merubah Penyelesaian Optimal**

Parameter	Nilai $c_j$ soal lama	Batas Atas	Batas bawah
$c_1$	6	$15/2$	5
$c_2$	5	6	4
$c_3$	4	5	<i>infinity</i>

Jadi besarnya keuntungan penjualan (dalam puluhan ribu rupiah) untuk televisi tidak akan merubah penyelesaian optimal soal lama jika besarnya keuntungan penjualan berada pada batas 5 sampai  $15/2$ , untuk radio jika besarnya keuntungan penjualan berada pada batas 4 sampai 6 dan untuk produk kipas angin jika besarnya keuntungan penjualan kurang dari atau sama dengan 5, untuk perubahan yang terjadi pada salah satu jenis produk yang dimaksud dan untuk produk yang lain besarnya dianggap tetap. Jika besarnya perubahan koefisien fungsi tujuan tidak memenuhi batas-batas tersebut, maka

perubahan koefisien fungsi tujuan akan merubah penyelesaian optimal dari masalah program linear bilangan bulat murni yang lama.

## B.2. Batas Perubahan yang Terjadi pada Beberapa Koefisien Fungsi Tujuan

Dari uraian di atas diketahui bahwa rumus untuk mencari koefisien kontrol yang baru dengan adanya perubahan pada beberapa koefisien fungsi tujuan adalah

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \geq 0.$$

Jadi karena penyelesaian optimal tidak berubah jika nilai dari koefisien kontrol yang baru bernilai positif, maka persamaan untuk mencari batas perubahan yang masih mempertahankan penyelesaian optimal adalah :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \geq 0$$

$$z_j - c_j + \Delta \bar{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j \geq 0.$$

Berikut ini akan diberikan contoh mencari batas perubahan yang terjadi pada beberapa koefisien fungsi tujuan untuk Contoh 2.8.

Dari Tabel 3.18 diperoleh persamaan (3.12), (3.13) dan (3.14) yaitu:

$$1 + \Delta c_2 - \Delta c_3 \geq 0$$

$$1 + \Delta c_1 - \Delta c_2 \geq 0$$

$$3 - 2\Delta c_1 + 3\Delta c_2 \geq 0$$

### 1) Batas $c_1$ bila $c_2$ dan $c_3$ tidak tetap artinya $\Delta c_2 \neq 0$ dan $\Delta c_3 \neq 0$

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_1$  yaitu (3.13) dan (3.14) diperoleh :

$$1 + \Delta c_1 - \Delta c_2 \geq 0$$

$$\Delta c_1 \geq \Delta c_2 - 1 \quad (c.1)$$

$$\begin{aligned}
3-2\Delta c_1+3\Delta c_2 &\geq 0 \\
2\Delta c_1 &\geq -3\Delta c_2-3 \\
\Delta c_1 &\geq -3/2\Delta c_2-3/2
\end{aligned} \tag{c.2}$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_1$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (c.1) dan (c.2) yaitu:

$$\Delta c_1 \geq \Delta c_2-1 \text{ dan } \Delta c_1 \geq -3/2\Delta c_2-3/2$$

Nilai yang memenuhi kedua persamaan tersebut adalah

$$\Delta c_1 \geq \Delta c_2-1 \tag{3.21}$$

Nilai yang memenuhi persamaan (3.21) tidak bisa diperoleh secara pasti, sebab dipengaruhi oleh nilai  $\Delta c_2$  yang bersifat bebas.

## 2) Batas $c_2$ bila $c_1$ dan $c_3$ tidak konstan artinya $\Delta c_1 \neq 0$ dan $\Delta c_3 \neq 0$

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_2$  yaitu (3.12), (3.13) dan (3.14) diperoleh batas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
1+\Delta c_2-\Delta c_3 &\geq 0 \\
\Delta c_2 &\geq \Delta c_3-1
\end{aligned} \tag{c.3}$$

$$\begin{aligned}
1+\Delta c_1-\Delta c_2 &\geq 0 \\
-\Delta c_2 &\geq -\Delta c_1-1 \\
\Delta c_2 &\leq \Delta c_1+1
\end{aligned} \tag{c.4}$$

$$\begin{aligned}
3-2\Delta c_1+3\Delta c_2 &\geq 0 \\
3\Delta c_2 &\geq 2\Delta c_1-3 \\
\Delta c_2 &\geq 2/3\Delta c_1-1
\end{aligned} \tag{c.5}$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_2$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (c.3), (c.4) dan (c.5) yaitu:

$$\Delta c_2 \geq \Delta c_3-1, \Delta c_2 \leq \Delta c_1+1 \text{ dan } \Delta c_2 \geq 2/3\Delta c_1-1$$

Nilai yang memenuhi ketiga persamaan tersebut tidak bisa dicari sebab  $\Delta c_2$  dipengaruhi oleh dua koefisien yang masih bebas atau dua variabel bebas, yaitu  $\Delta c_3$  dan  $\Delta c_1$ .

### 3) Batas $c_3$ bila $c_1$ dan $c_2$ konstan artinya $\Delta c_1 \neq 0$ dan $\Delta c_2 \neq 0$

Dari persamaan yang mengandung  $\Delta c_3$  yaitu (3.11) diperoleh :

$$\begin{aligned} 1 + \Delta c_2 - \Delta c_3 &\geq 0 \\ -\Delta c_3 &\geq -\Delta c_2 - 1 \\ \Delta c_3 &\leq \Delta c_2 + 1 \end{aligned} \quad (c.6)$$

Dari hasil di atas perubahan koefisien  $c_3$  tidak merubah penyelesaian optimal jika memenuhi persamaan (c.6) yaitu:

$$\Delta c_3 \leq \Delta c_2 + 1 \quad (3.22)$$

Nilai yang memenuhi persamaan (3.22) tidak bisa diperoleh secara pasti, sebab dipengaruhi oleh nilai  $\Delta c_2$  yang bersifat bebas.

Jadi untuk perubahan yang terjadi pada beberapa koefisien fungsi tujuan tidak bisa dicari batas perubahan yang masih mempertahankan penyelesaian optimalnya, sebab masing-masing perubahan koefisien fungsi tujuan dipengaruhi oleh perubahan dari koefisien fungsi tujuan yang lain.

Pengaruh bilangan bulat terhadap analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada program linear bilangan bulat menyebabkan berapapun perubahan koefisien fungsi tujuan dilakukan, nilai tujuan dari program linear bilangan bulat dengan pola memaksimalkan yang diperoleh tidak pernah melebihi nilai tujuan dari program linearnya dan adanya perbedaan batas perubahan antara analisis

perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bulat dengan program linear biasa. Pada analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada program linear bilangan bulat, diperoleh batas perubahan yang sama atau lebih sempit dibandingkan dengan batas perubahan pada analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear biasa. Hal ini dapat dilihat dengan membandingkan hasil analisis perubahan koefisien fungsi tujuan jika masalah tersebut merupakan masalah program linear biasa yang ada pada Lampiran 10 dengan hasil analisis pada Tabel 3.19.

Jika hasil batas perubahan dari analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat dengan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear dari Contoh 2.8 dibandingkan dalam tabel, akan diperoleh tabel perbandingan sebagai berikut :

**Tabel 3.21. Tabel Perbandingan Batas Perubahan Koefisien Fungsi Tujuan untuk Contoh 2.8**

Parameter	Nilai $c_j$ soal lama	Batas untuk Program Linear Bilangan Bulat Murni	Batas untuk Program Linearnya
$c_1$	6	$-1 \leq \Delta c_1 \leq 3/2$	$\infty \leq \Delta c_1 \leq 3/2$
$c_2$	5	$-1 \leq \Delta c_1 \leq 1$	$-1 \leq \Delta c_1 \leq \infty$
$c_3$	4	$\infty \leq \Delta c_1 \leq 1$	$\infty \leq \Delta c_1 \leq 1$

Jadi langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bulat hampir sama dengan langkah-langkah analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear biasa. Prinsip dari analisis perubahan koefisien pada masalah program linear sama dengan prinsip analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan



bulat, yaitu menganalisis koefisien kontrol yang baru. Perbedaan hanya terletak pada hasil penyelesaian optimal yang harus berupa bilangan bulat, sehingga jika adanya perubahan koefisien fungsi tujuan merubah penyelesaian optimal lama, perhitungan dilanjutkan dengan menggunakan tabel simpleks optimal lama dengan merubah koefisien fungsi tujuan sesuai perubahan soal. Jika dari perhitungan ini diperoleh penyelesaian optimal baru yang belum merupakan bilangan bulat, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* dengan menambah batasan *Gomory* sampai diperoleh penyelesaian optimal yang merupakan bilangan bulat.

Hal ini mengakibatkan dalam analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni diperoleh batas perubahan yang sama atau lebih sempit dibandingkan batas perubahan pada analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada program linearnya. Dengan kata lain, batas perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni yang diperoleh tidak melebihi batas perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linearnya.

## BAB IV

### PENUTUP

#### A. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan pada bab sebelumnya dapat diambil kesimpulan mengenai analisis perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat murni, yaitu sebagai berikut :

1. Prinsip dasar dalam melakukan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan adalah dengan menghitung nilai dari koefisien kontrol baru setelah mengalami perubahan. Langkah-langkah analisis dengan adanya perubahan pada koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni secara singkatnya yaitu :

- 1) Menghitung nilai dari koefisien kontrol yang baru dengan rumus umum :

$$z_j^* - c_j^* = z_j - c_j + \Delta \overline{\mathbf{C}} \mathbf{Y}_j - \Delta c_j.$$

- 2) Jika dari perhitungan di atas diperoleh :

- c.  $z_j^* - c_j^* \geq 0$  maka penyelesaian optimal soal lama masih menjadi penyelesaian optimal bagi soal baru, yang berarti adanya perubahan koefisien fungsi tujuan tidak mempengaruhi penyelesaian optimal lama. Perubahan hanya terjadi pada nilai tujuan dengan penambahan nilai tujuan :  $\Delta f = \Delta \overline{\mathbf{C}} \mathbf{X}$ .
    - d.  $z_j^* - c_j^* < 0$  berarti syarat tabel simpleks mencapai optimal belum dipenuhi sehingga tabel optimal soal lama belum menjadi tabel

optimal bagi soal yang baru, yang berarti adanya perubahan koefisien fungsi tujuan mempengaruhi penyelesaian optimal lama. Oleh karena itu, perlu dilanjutkan dengan memasukkan  $x_j$  yang menyebabkan  $z_j^* - c_j^* < 0$  menjadi variabel basis, kemudian dilanjutkan perhitungan menggunakan metode simpleks sampai diperoleh penyelesaian optimal yang baru.

- 3) Jika nilai penyelesaian optimal pada langkah 2.b layak yaitu variabel keputusan sudah bernilai bilangan bulat, maka masalah selesai. Namun jika hasil dari penyelesaian optimal yang baru untuk variabel keputusan belum merupakan bilangan bulat semua atau masih ada yang bernilai pecahan, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane* sampai diperoleh penyelesaian optimal baru yang berupa bilangan bulat.

2. Batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan yang masih mempertahankan penyelesaian optimal lama diperoleh dengan menggunakan persamaan umum  $z_j - c_j + \Delta \bar{C}Y_j - \Delta c_j \geq 0$  untuk  $x_j$  bukan variabel basis, dengan asumsi bahwa perubahan dari salah satu koefisien fungsi tujuan selalu disertai anggapan bahwa parameter yang lain tetap. Jika asumsi ini tidak berlaku maka batas perubahan koefisien fungsi tujuan tidak bisa diperoleh secara pasti, sebab masing-masing perubahan koefisien fungsi tujuan dipengaruhi oleh perubahan koefisien fungsi tujuan yang lain.

Langkah-langkah dari analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni hampir sama dengan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear biasa. Perbedaan antara analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear biasa dengan analisis perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni hanya terletak pada penyelesaian optimal dan batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan. Pada masalah program linear bilangan bulat murni penyelesaian optimalnya harus berupa bilangan bulat, sehingga jika penyelesaian optimal baru yang diperoleh dengan melanjutkan tabel simpleks optimal lama dengan merubah koefisien fungsi tujuan yang berubah belum merupakan bilangan bulat, maka perhitungan dilanjutkan menggunakan metode *cutting plane*.

Hasil penyelesaian optimal baru dengan adanya perubahan koefisien fungsi tujuan yang mempengaruhi penyelesaian optimal lama yang diperoleh dengan melanjutkan perhitungan pada tabel simpleks optimal lama sama dengan hasil yang diperoleh dengan menganggap adanya perubahan koefisien fungsi tujuan sebagai masalah baru.

Batas perubahan dari salah satu koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat murni yang diperoleh tidak melebihi batas perubahan dari koefisien fungsi tujuan pada masalah program linearnya. Hal ini disebabkan karena pada tabel simpleks optimal dari masalah program linear bilangan bulat murni yang dianalisis, terdapat tambahan batasan kendala yang

disebut batasan *Gomory*. Batasan ini ditambahkan untuk memperoleh penyelesaian optimal yang berupa bilangan bulat dari masalah awal.

Perubahan koefisien fungsi tujuan pada masalah program linear bilangan bulat tidak hanya terjadi pada salah satu koefisien fungsi tujuan, tetapi dapat terjadi pada beberapa koefisien fungsi tujuan. Namun untuk perubahan yang terjadi pada beberapa koefisien fungsi tujuan, batas perubahannya tidak bisa diperoleh secara pasti, sebab masing-masing perubahan koefisien fungsi tujuan dipengaruhi oleh perubahan koefisien fungsi tujuan yang lain.

## **B. Saran**

Permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini terbatas pada analisis sensitivitas dengan perubahan koefisien fungsi tujuan secara simpleks pada masalah program linear bilangan bulat yang merupakan masalah khusus dari program linear. Bagi pembaca yang tertarik, khususnya mahasiswa Program Studi Matematika dapat melanjutkan dan mengembangkan tulisan ini untuk analisis sensitivitas dengan perubahan yang lain, misalnya analisis sensitivitas dengan perubahan suku tetap ( $b_i$ ), perubahan pada koefisien teknis ( $a_{ij}$ ) dan lain sebagainya. Selain itu dapat dikembangkan juga untuk masalah program linear khusus lainnya, misalnya analisis sensitivitas pada masalah transportasi dengan berbagai perubahan yang mungkin terjadi.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ajie Wahyujati. 2009. *Operation Research 2*. Jakarta.
- Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linear* (Hari Suminto. Terjemahan). Batam : Interaksara. Buku asli diterbitkan tahun 1987.
- B. Susanta. 1994. *Program Linear*. Yogyakarta : Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Faigiziduhu Bu'lolo. 2005. “ Analisis Sensitivitas pada Program Integer Campuran”. *Jurnal Sistem Teknik Industri* (Nomor 4 tahun 2005). Hlm. 78-84.
- Hillier, Frederick S & Gerald J. Lieberman. 1990. *Introduction to Operations Research*. New York : McGraw-Hill.
- Jensen, Paul A & Jonathan F. Bard. 2003. *Operations Research Models and Methods*. Hoboken : John Wiley & Sons, Inc.
- Muhiddin Sirat. 2007. “ Metode Simpleks”. *Makalah*. Universitas Lampung.
- Pangestu Subagyo, Marwan Asri & T. Hani Handoko. 1984. *Dasar-Dasar Operations Research Edisi 2*. Yogyakarta : BPFE.
- Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linear dan Pemrograman Linear*. Bandung : Rekayasa Sains.
- Saprida Montaria. 2009. “ Analisis Sensitivitas dan Ketidakpastian dalam Program Linear.” *Tesis*. Sekolah Pascasarjana-USU.
- Siswanto. 2000. *Operations Research Jilid 1*. Jakarta : Erlangga.
- Taha, Hamdy A. (2007). *Operations Research An Introduction*. 8<sup>th</sup>. ed. United States: Pearson Education, Inc.
- Zulian Yamit. 1991. *Linear Programming*. Yogyakarta : Bagian Penerbitan FE UII.

## Lampiran 1

### Tabel Simpleks Contoh 2.8 dengan Mengabaikan Syarat Bulat

Tabel 1.1 Tabel Simpleks Contoh 2.8

	$c_j$	6	5	4	0	0		
$\overline{c_i}$	$\begin{array}{c} x_j \\ \hline x_i \end{array}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$b_i$	$R_i$
0	$y_1$	<b>3</b>	2	2	1	0	15	<b>5</b>
0	$y_2$	5	4	3	0	1	35	7
	$z_j$	0	0	0	0	0	0	
	$z_j - c_j$	<b>-6</b>	-5	-4	0	0	0	
6	$x_1$	1	<b>2/3</b>	2/3	1/3	0	5	<b>15/2</b>
0	$y_2$	0	2/3	-1/3	-5/3	1	10	15
	$z_j$	6	4	4	2	0	30	
	$z_j - c_j$	0	<b>-1</b>	0	2	0	30	
5	$x_2$	3/2	1	1	1/2	0	<b>15/2</b>	
0	$y_2$	-1	0	-1	-2	1	5	
	$z_j$	15/2	5	5	5/2	0	37,5	
	$z_j - c_j$	3/2	0	1	5/2	0	<b>37,5</b>	

Keterangan :

Dari hasil perhitungan menggunakan metode simpleks di atas, diperoleh penyelesaian optimal  $x_1=0$ ,  $x_2=15/2$  dan  $x_3=0$  dengan nilai tujuan 37,5.

## Lampiran 2

### Penyelesaian Masalah Program Linear Bilangan Bulat Contoh 2.8 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 6x1+5x2+4x3
subject to
3x1+2x2+2x3<=15
5x1+4x2+3x3<=35
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### b) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
OBJECTIVE VALUE =    37.5000000

FIX ALL VARS.(      1)  WITH RC >  0.000000E+00

NEW INTEGER SOLUTION OF  36.0000000  AT BRANCH    0 PIVOT   6
BOUND ON OPTIMUM:  36.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      6

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      36.00000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      1.000000      -6.000000
X2      6.000000      -5.000000
X3      0.000000      -4.000000

ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
2)      0.000000      0.000000
3)      6.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      6
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E      0
```



## Lampiran 3

### Penyelesaian Contoh 3.1 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 7x1+5x2+4x3
subject to
3x1+2x2+2x3<=15
5x1+4x2+3x3<=35
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### b) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
OBJECTIVE VALUE =    37.5000000

FIX ALL VARS.(      1)  WITH RC >  0.000000E+00

NEW INTEGER SOLUTION OF  37.0000000  AT BRANCH    0 PIVOT
8
BOUND ON OPTIMUM:  37.000000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      8

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      37.00000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      1.000000      -7.000000
X2      6.000000      -5.000000
X3      0.000000      -4.000000

ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
2)      0.000000      0.000000
3)      6.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      8
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E      0
```

## Lampiran 4

### Penyelesaian Contoh 3.2 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 6x1+5x2+7x3
subject to
3x1+2x2+2x3<=15
5x1+4x2+3x3<=35
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### b) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
OBJECTIVE VALUE =    52.5000000

FIX ALL VARS.(      1)  WITH RC >  0.000000E+00

NEW INTEGER SOLUTION OF    49.0000000    AT BRANCH      0 PIVOT
6
BOUND ON OPTIMUM:    49.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      6

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      49.00000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      0.000000      -6.000000
X2      0.000000      -5.000000
X3      7.000000      -7.000000

ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
2)      1.000000      0.000000
3)      14.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      6
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E      0
```

## Lampiran 5

### Penyelesaian Contoh 3.3 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 7x1+5.5x2+5x3
subject to
3x1+2x2+2x3<=15
5x1+4x2+3x3<=35
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### b) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      2
OBJECTIVE VALUE =    41.2500000

FIX ALL VARS.(      1)  WITH RC >  0.000000E+00

NEW INTEGER SOLUTION OF 40.0000000 AT BRANCH  0  PIVOT      7
BOUND ON OPTIMUM:  40.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      7

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      40.00000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      1.000000      -7.000000
X2      6.000000      -5.500000
X3      0.000000      -5.000000

ROW  SLACK OR SURPLUS  DUAL PRICES
2)      0.000000      0.000000
3)      6.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      7
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E      0
```

## Lampiran 6

### Penyelesaian Contoh 3.4 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 5x1+5.5x2+6x3
subject to
3x1+2x2+2x3<=15
5x1+4x2+3x3<=35
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### c) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
OBJECTIVE VALUE =    45.0000000

FIX ALL VARS.(      1)  WITH RC >  0.000000E+00

NEW INTEGER SOLUTION OF 42.0000000  AT BRANCH      0 PIVOT      5
BOUND ON OPTIMUM:  42.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      5

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      42.00000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      0.000000      -5.000000
X2      0.000000      -5.500000
X3      7.000000      -6.000000

ROW      SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
2)      1.000000      0.000000
3)      14.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      5
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E      0
```

## Lampiran 7

### Penyelesaian Contoh 3.5 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 5x1+7x2+3x3
subject to
3x1+4x2+2x3<=30
4x1+6x2+2x3<=40
x1<=7
x2<=5
x3<=9
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### b) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
OBJECTIVE VALUE =    50.0000000

NEW INTEGER SOLUTION OF  50.0000000  AT BRANCH 0 PIVOT    4
BOUND ON OPTIMUM:  50.00000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      4

LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)      50.00000

VARIABLE      VALUE      REDUCED COST
X1      6.000000      -5.000000
X2      2.000000      -7.000000
X3      2.000000      -3.000000

ROW    SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
2)      0.000000      0.000000
3)      0.000000      0.000000
4)      1.000000      0.000000
5)      3.000000      0.000000
6)      7.000000      0.000000

NO. ITERATIONS=      4
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E  0
```

## Lampiran 8

### Penyelesaian Contoh 3.6 dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 6x1+7x2+3x3
subject to
3x1+4x2+2x3<=30
4x1+6x2+2x3<=40
x1<=7
x2<=5
x3<=9
end
gin x1
gin x2
gin x3
```

#### b) Output

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
OBJECTIVE VALUE =    57.0000000
```

```
NEW INTEGER SOLUTION OF 56.0000000 AT BRANCH 0 PIVOT      4
BOUND ON OPTIMUM:    56.000000
ENUMERATION COMPLETE. BRANCHES=      0 PIVOTS=      4
```

```
LAST INTEGER SOLUTION IS THE BEST FOUND
RE-INSTALLING BEST SOLUTION...
```

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)            56.000000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	6.000000	-6.000000
X2	2.000000	-7.000000
X3	2.000000	-3.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.000000
3)	0.000000	0.000000
4)	1.000000	0.000000
5)	3.000000	0.000000
6)	7.000000	0.000000

```
NO. ITERATIONS=      4
BRANCHES=      0 DETERM.=  1.000E  0
```

## Lampiran 9

### Penyelesaian Contoh 3.6 dengan Program Lingo

#### a) Input

```
max=(6*A)+(7*B)+(3*C);  
(3*A)+(4*B)+(2*C)<=30;  
(4*A)+(6*B)+(2*C)<=40;  
A<=7;  
B<=5;  
C<=9;  
A>=0;  
B>=0;  
C>=0;  
@GIN(A);  
@GIN(B);  
@GIN(C);
```

#### b) Output

```
Global optimal solution found.  
Objective value:                    56.00000  
Objective bound:                    56.00000  
Infeasibilities:                    0.000000  
Extended solver steps:              0  
Total solver iterations:            3
```

Variable	Value	Reduced Cost
A	7.000000	-6.000000
B	2.000000	-7.000000
C	0.000000	-3.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	56.00000	1.000000
2	1.000000	0.000000
3	0.000000	0.000000
4	0.000000	0.000000
5	3.000000	0.000000
6	9.000000	0.000000
7	7.000000	0.000000
8	2.000000	0.000000
9	0.000000	0.000000

## Lampiran 10

### Hasil Penyelesaian dan Analisis Sensitivitas dari Contoh 2.8 Jika Merupakan Masalah Program Linear Biasa dengan Program Lindo

#### a) Input

```
max 6x1+5x2+4x3
subject to
3x1+2x2+2x3<=15
5x1+4x2+3x3<=35
end
```

#### b) Output

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1  
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 37.50000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.500000
X2	7.500000	0.000000
X3	0.000000	1.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	2.500000
3)	5.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 1  
RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

#### OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	6.000000	1.500000	INFINITY
X2	5.000000	INFINITY	1.000000
X3	4.000000	1.000000	INFINITY

#### RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	15.000000	2.500000	15.000000
3	35.000000	INFINITY	5.000000