PERBANDINGAN METODE *BRANCH AND BOUND*
DENGAN METODE *CLARKE AND WRIGHT SAVINGS*
UNTUK PENYELESAIAN MASALAH DISTRIBUSI AQUA GALON
DI PT.TIRTA INVESTAMA YOGYAKARTA

SKRIPSI

Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh :
Sri Nurhayanti
08305144042

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2013

PERBANDINGAN METODE *BRANCH AND BOUND*
DENGAN METODE *CLARKE AND WRIGHT SAVINGS*
UNTUK PENYELESAIAN MASALAH DISTRIBUSI AQUA GALON
DI PT.TIRTA INVESTAMA YOGYAKARTA

Oleh
Sri Nurhayanti
NIM 08305144042

ABSTRAK

Secara matematis, masalah penentuan rute kendaraan dalam mendistribusikan barang dari depot ke sejumlah pelanggan yang tersebar di sejumlah tempat disebut *vehicle routing problem* (VRP). Penentuan VRP bertujuan untuk meminimumkan total jarak tempuh kendaraan sehingga dapat meminimumkan biaya distribusi dengan memperhatikan beberapa kendala atau batasan-batasan. Salah satu variasi *vehicle routing problem* (VRP) adalah *capacitated vehicle routing problem* (CVRP) yaitu dengan menambahkan kendala kapasitas kendaraan yang terbatas. Sehingga rute kendaraan distribusi dibatasi oleh kapasitas angkut kendaraan yang digunakan. Masalah optimisasi rute distribusi Aqua merupakan salah satu contoh masalah CVRP, sehingga akan dijadikan contoh kasus dalam skripsi ini.

Penelitian skripsi dilakukan di PT. Tirta Investama Yogyakarta dalam pendistribusian Aqua galon. Penentuan solusi dilakukan dengan dua cara penyelesaian yaitu menggunakan metode *branch & bound* dengan bantuan *software* Lingo dan penyelesaian menggunakan metode *clarke & wright savings*. Solusi yang diperoleh merupakan solusi optimal yang meminimumkan fungsi tujuan dan memenuhi semua kendala atau batasan-batasan yang dibuat. Data yang digunakan adalah jarak antar depot dengan pelanggan dan jarak antar pelanggan, jumlah permintaan masing-masing pelanggan, jumlah kendaraan yang dioperasikan dan kapasitas kendaraan.

Didapatkan perbandingan hasil yang diperoleh dengan rute distribusi saat ini, yaitu jarak tempuh dari perusahaan 198,9 km dan biaya transportasi Rp. 111.900 dengan menggunakan 8 kendaraan dibandingkan dengan hasil yang dibuat menggunakan metode *branch & bound* yaitu menghasilkan 147,5 km dan biaya transportasi Rp.85.000 dengan menggunakan 7 kendaraan dan menggunakan metode *clarke & wright savings* yaitu menghasilkan 175,7 km dan biaya transportasi Rp. 98.600 dengan menggunakan 7 kendaraan. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa model yang dibuat menggunakan metode *branch & bound* menghasilkan rute distribusi Aqua galon yang paling minimum.

***Kata kunci**: Capacitated vehicle routing problem* (CVRP), metode *branch & bound,* metode *clarke & wright savings.*

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Suatu sistem transportasi memegang peran penting dalam masalah pendistribusian, karena harus menjamin mobilitas produk di antara berbagai sistem dengan efisiensi tinggi dan ketepatan waktu serta pada saat yang sama harus dapat mengurangi biaya distribusi. Biaya distribusi tergantung pada rute kendaraan pengiriman dan kapasitas angkut kendaraan yang dikaitkan dengan total permintaan pelanggan yang akan dilayani pada suatu rute. Permasalahan rute ini termasuk dalam *vehicle routing problem* (VRP) yaitu permasalahan penentuan rute kendaraan untuk melayani beberapa pelanggan. Bentuk dasar VRP secara umum berkaitan dengan masalah penentuan suatu rute kendaraan (*vehicle*) yang melayani suatu pelanggan yang diasosiasikan dengan *node* dengan *demand* atau permintaan yang diketahui dan rute yang menghubungkan depot dengan pelanggan, dan antar pelanggan yang lainnya (Toth & Vigo, 2002).

VRP sering digunakan untuk menentukan pengiriman barang. VRP mempunyai beberapa variasi, antara lain yaitu *capacitated vehicle routing problem* (CVRP) dimana setiap kendaraan mempunyai kapasitas yang terbatas, adanya selang waktu tertentu bagi konsumen untuk menerima pelayanan maka masalahnya menjadi VRP *with time windows*(VRPTW), distributor memiliki banyak depot untuk menyuplai pelanggan maka dikenal dengan masalah *multiple depot* VRP(MDVRP),

pelanggan mungkin mengembalikan barang pada depot asal maka dikenal dengan masalah VRP *with pick-up and delivering*(VRPPD), *split delivery* VRP(SDVRP) dimana pelanggan dilayani dengan kendaraan berbeda, dan *periodic* VRP(PVRP) dimana pengantar hanya dilakukan dihari tertentu(Solomon, 1987).

Penelitian dalam skripsi ini akan dibahas tentang metode penyelesaian masalah *capacitated vehicle routing problem* (CVRP), dalam masalah ini setiap kendaraan mempunyai kapasitas yang terbatas. Melakukan pendistribusian dalam setiap kendaraan pengangkut hanya dapat dilaksanakan sebanyak satu kali pengiriman yaitu dari depot ke setiap wilayah pelayanan lalu kembali ke depot. Sehingga suatu sistem pelayanan pada penentuan rute distribusi menjadi lebih efektif, efisien dan bisa meningkatkan kemampuan perusahaan untuk dapat memenuhi permintaan produk secara lebih cepat agar kepercayaan dan kepuasan konsumen meningkat.

Salah satu contoh masalah CVRP adalah pengiriman air mineral dalam kemasan (AMDK), karena di masyarakat kebutuhan air mineral terus meningkat dan salah satu merk air minum yang sangat disukai konsumen adalah Aqua. Di Indonesia, Aqua menguasai 80% penjualan air minum dalam kemasan (AMDK) khususnya dalam kemasan galon. Banyaknya pesanan membuat distributor harus mendistribusikan Aqua setiap harinya untuk memenuhi kebutuhan minum konsumen secara efektif dan efisien supaya kebutuhan konsumen dapat terpenuhi dengan baik, khususnya kebutuhan Aqua galon di wilayah yogyakarta. Penelitian akan dilakukan di PT. Tirta Investama Yogyakarta dalam pendistribusian Aqua galon ke beberapa pelanggan.

Penelitian ini memberikan kontribusi dalam memecahkan persoalan rute pendistribusian agar dapat menentukan jumlah kendaraan yang akan dipakai sesuai dengan kapasitas kendaraan serta menentukan biaya distribusi yang minimum, sehingga dapat memenuhi permintaan produk secara lebih cepat agar kepercayaan dan kepuasan konsumen meningkat. Permasalahan ini termasuk ke dalam masalah *capacitated vehicle routing problem* (CVRP). Terdapat berbagai cara penyelesaian CVRP, antara lain dengan menggunakan metode *branch & bound* dan metode *clarke & wright savings*. Penelitian menggunakan metode ini sudah dilakukan oleh Rich (1999), Larsen (2001), dan iskandar (2010). Masing-masing metode mempunyai kelebihan dan kekurangannya masing-masing.

Metode *branch & bound* merupakan metode eksak, untuk masalah yang kompleks dan jumlah yang cukup besar metode ini membutuhkan kecepatan waktu komputasi yang relatif lama dalam menentukan solusi yang optimal, karena metode tersebut mengakomodasi semua solusi yang mungkin dari suatu permasalahan. Namun metode *branch & bound* menjamin solusi yang diperoleh merupakan solusi yang optimal dibandingkan dengan metode *clarke & wright savings*, karena metode ini merupakan metode heuristik yang lebih menekankan pada perolehan solusi *feasible* secara cepat dari segi kecepatan waktu komputasinya meskipun tidak menjamin solusi tersebut akan optimal.

Permasalahan dalam distribusi Aqua galon ini dibuat formulasi ke masalah model *capacitated vehicle routing problem* (CVRP) menggunakan metode *branch &

bound* dengan bantuan *software* Lingo, dan penyelesaian menggunakan metode *clarke & wright savings* dengan bantuan *macro excel*. Sehingga dari hasil kedua metode tersebut mana yang lebih baik untuk penyelesaian masalah distribusi Aqua.

B. Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam penulisan tugas akhir skripsi ini adalah masalah rute pengiriman Aqua galon khusus ke *minimarket (Indomaret, Alfamart, Circle K*) yang tersebar diseluruh wilayah kota madya yogyakarta.

C. Perumusan Masalah

Permasalahan mendasar terkait dengan pengiriman Aqua galon khusus ke *minimarket (Indomaret, Alfamart, Circle K*) yang tersebar diseluruh wilayah kota madya yogyakarta. Oleh karena itu perumusan masalah yang akan dibahas pada penulisan tugas akhir skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penyelesaian masalah rute distribusi Aqua galon menggunakan metode *branch & bound*?
2. Bagaimana penyelesaian masalah rute distribusi Aqua galon menggunakan metode *clarke & wright savings*?
3. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian masalah rute distribusi Aqua galon antara metode *branch & bound* dengan metode *clarke & wright savings*?

D. Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai pada penelitian penulisan tugas akhir skripsi ini adalah:

1. Bagaimana penyelesaian masalah rute distribusi Aqua galon menggunakan metode *branch & bound*
2. Bagaimana penyelesaian masalah distribusi Aqua galon menggunakan metode *clarke & wright savings*
3. Bagaimana perbandingan hasil penyelesaian masalah rute distribusi Aqua galon antara metode *branch & bound* dengan metode *clarke & wright savings*

E. Manfaat Penelitian

1. Menjadi alternatif solusi mengenai pengoptimalan rute pengiriman barang agar menjadi efektif dan efisien
2. Dijadikan salah satu referensi untuk memperluas pemahaman mengenai *vehicle routing problem* (VRP) bagi kalangan akademik khususnya Program Studi Matematika
3. Menambah pengetahuan penulis lebih dalam mengenai sistem pendistribusian dan pengoptimalan penjadwalan serta rute yang efektif dan efisien dengan menggunakan metode penyelesaian masalah *vehicle routing problem* (VRP).

BAB II

LANDASAN TEORI

Pengertian-pengertian dasar yang digunakan sebagai landasan pembahasan pada Bab II yaitu masalah distribusi Aqua di PT. Tirta Investama, masalah optimisasi, graf, *travelling salesman problem* (TSP), *vehicle routing problem* (VRP), *capacitated vehicle routing problem* (CVRP), metode *branch and bound*, metode *clarke and wright savings*.

A. Masalah Distribusi Aqua di PT. Tirta Investama

Menurut Standar Nasional Indonesia (SNI), definisi air minum dalam kemasan (AMDK) adalah air yang telah diolah dengan perlakuan khusus dan dikemas dalam botol atau kemasan lain. Keistimewaan dari Aqua adalah sumber bahan bakunya yang berasal dari sumber mata air pegunungan yang mengalir sendiri dan sudah mengandung mineral seimbang yang menjadi syarat bagi semua produk Aqua dimanapun diproduksi.

Aqua adalah salah satu merk air minum yang disukai banyak konsumen karena terjamin kualitasnya. Nama Aqua kini telah menjadi semacam nama generik dari produk air minum dalam kemasan (AMDK) serupa di Indonesia. Aqua adalah pemimpin pasar yang tidak dipertanyakan dalam industri air dalam botol. Sistem penyaluran, strategi pemasaran, dan kemasan yang istimewa menciptakan keunggulan bersaing. Aqua merupakan pelopor bisnis AMDK dan menjadi produsen AMDK terbesar di Indonesia. Bahkan pemasarannya saat ini sudah meliputi Singapura, Malaysia, Australia, Timur Tengah dan Afrika. Di Indonesia sendiri Aqua menguasai 80% penjualan AMDK dalam kemasan galon. Untuk keseluruhan *market share* AMDK di Indonesia, Aqua menguasai 50% pasar (Alfi Fadlan, 2011).

Produsen AMDK Aqua, PT. Golden Mississippi (kemudian bernama PT. Aqua Golden Mississippi) yang bernaung di bawah PT. Tirta Investama, didirikan pada tanggal 23 Februari 1973 oleh Tirto Utomo (1930-1994). Pabrik pertamanya didirikan di Bekasi. Sejak saat itu, orang Indonesia mulai mengubah salah satu kebiasaannya secara mendasar dengan membiasakan diri mengkonsumsi AMDK. Aqua menjadi bagian yang tidak terpisahkan dari hidup sehat masyarakat Indonesia. Volume penjualan Aqua merupakan volume penjualan terbesar untuk kategori air mineral, maka kebutuhan akan Aqua semakin meningkat dari waktu ke waktu, sehingga pendistribusian Aqua harus lebih efektif dan efisien agar dapat memenuhi permintaan konsumen tepat pada waktunya (Pandri, 2011).

PT Tirta Investama Yogyakarta adalah pabrik Aqua yang terbesar di daerah Yogyakarta, sehingga memiliki alokasi yang cukup besar dalam pendistribusian Aqua untuk daerah Yogyakarta dan sekitarnya. Masalah pendistribusian Aqua khususnya di daerah Yogyakarta, yaitu pada awalnya air minum Aqua yang berasal dari Mata air Sigedang Klaten yang sudah menjadi AMDK khususnya Aqua galon akan dikirim ke pabrik PT. Tirta Investama, Bantul, Yogyakarta. Setelah itu akan di distribusikan ke seluruh wilayah Yogyakarta dan sekitarnya sesuai permintaan konsumen. Pendistribusian Aqua di Yogyakarta ada tiga tempat pengiriman, yaitu pengiriman dari pabrik ke Agen/CV(*commanditaire vennootschap*), pengiriman ke kantor-kantor, dan pengiriman ke *minimarket* di wilayah Yogyakarta dan sekitarnya sesuai permintaan. Pendistribusian yang akan di ambil dalam skripsi ini yaitu permintaan Aqua galon yang akan di distribusikan ke *minimarket* (*Indomaret, Alfamart, Circle*). Sehingga dalam masalah ini bagaimana suatu sistem pelayanan menjadi lebih efektif dan efisien agar didapatkan rute pendistribusian yang paling optimum dengan tujuan untuk penghematan waktu dan jumlah kendaraan dalam pendistribusian Aqua galon ke setiap lokasi tujuan serta meningkatkan kemampuan perusahaan untuk dapat memenuhi permintaan Aqua galon kepada konsumen.

B. Masalah Optimisasi

Optimisasi ialah proses untuk mencapai hasil yang ideal atau optimal (nilai efektif yang dicapai). Optimisasi secara intuisi berarti melakukan pekerjaan dengan cara terbaik(Brogan, 1991: 501).

Masalah optimisasi merujuk pada studi permasalahan yang mencoba untuk mencari nilai minimal atau maksimal dari suatu fungsi nyata. Banyak masalah dalam dunia nyata yang dapat direpresentasikan dalam kerangka permasalahan ini, misal pendapatan yang maksimum, biaya yang minimum dan lain sebagainya. Apabila hal yang dioptimumkan ternyata kuantitatif, maka masalah optimum akan menjadi masalah maksimum dan minimum (Susanta, 1994).

Persoalan yang berkaitan dengan optimisasi sangat kompleks dalam kehidupan sehari-hari. Nilai optimal yang didapatkan dalam optimisasi dapat berupa besaran panjang, waktu, dan lain-lain. Optimisasi mempunyai beberapa persoalan diantaranya.

1. Menentukan lintasan terpendek dari suatu tempat ke tempat yang lain
2. Menentukan jumlah pekerja seminimal mungkin untuk melakukan suatu proses produksi agar pengeluaran biaya pekerja dapat diminimalkan dan hasil produksi tetap maksimal
3. Mengatur jalur kendaraan umum agar semua lokasi dapat dijangkau
4. Mengatur routing jaringan kabel telepon agar biaya pemasangan kabel tidak terlalu besar dan penggunaannya tidak boros.

C. Graf

1. Definisi Graf

Penggunaan graf dalam kehidupan sehari-hari, digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi objek-objek agar lebih mudah dimengerti. Graf merupakan pasangan himpunan (V, E), dan ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, V adalah himpunan tidak kosong dari verteks-verteks $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan E adalah himpunan *edge* $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ atau sisi yang menghubungkan sepasang verteks (Munir : 2009).

Untuk lebih memahami tentang penggunaan graf dalam penyelesaian masalah optimisasi, akan diberikan definisi mengenai graf.

Definisi 2.1 (Jong Jek Siang, 2004: 187)

Suatu graf terdiri dari dua himpunan yang berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong/ simpul ($V(G)$) dan himpunan garis-garis ($E(G)$).

Contoh 2.1:

Ada 7 kota ($A, \ldots, G$) beberapa kota dapat dihubungkan secara langsung dengan garis-garis/jalan. Hubungan-hubungan langsung yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut:

A dengan B dan D

B dengan D

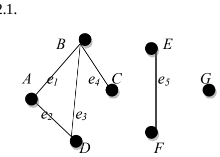
C dengan B

E dengan F

Buatlah graf yang menunjukkan keadaan 7 kota tersebut?

Penyelesaian:

Misalkan kota-kota dianggap sebagai titik-titik/simpul. Dua titik/simpul dihubungkan dengan garis bila dan hanya bila ada garis yang menghubungkan langsung kedua simpul tersebut. Dengan demikian, keadaan di 7 kota dapat dinyatakan dalam gambar 2.1.



Gambar 2.1. Graf

Dalam graf tersebut e_1 berhubungan dengan titik *A* dan *B* (keduanya disebut titik ujung e_1). Titik *A* dan *B* dikatakan berhubungan, sedangkan titik *A* dan *C* tidak berhubungan karena tidak ada garis yang menghubungkannya secara langsung.

Titik *G* adalah titik terasing karena tidak ada garis yang berhubungan dengan *G*. Dalam interpretasinya, kota *G* merupakan kota yang terasing karena tidak dapat dikunjungi dari kota-kota lain dengan jalan darat.

Definisi 2.2 (Taha, 2007: 272)

Jalur adalah urutan garis yang menghubungkan dua simpul. Sebagai contoh, pada gambar 2.1 di atas, rusuk e_1 dan e_4 mewakili jalur antara *A* dan *C*.

2. Jenis-jenis Graf

Menurut Sugeng Mardiyono(1996:32) sesuai dengan kekhasan strukturnya, graf dapat diklasifikasikan dalam beberapa jenis yaitu graf sederhana, tidak sederhana, berarah, teratur, berbobot, pohon dan sebagainya.

1) Jenis graf berdasarkan ada tidaknya gelang dan rusuk ganda

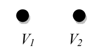
Berdasarkan ada tidaknya gelang dan rusuk ganda graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu graf sederhana dan tidak sederhana. Dalam sebuah graf ada kemungkinan dijumpai dua rusuk atau lebih yang menghubungkan dua simpul yang sama. Rusuk seperti ini disebut rusuk ganda. Ada pula rusuk yang menghubungkan simpul tertentu dengan dirinya sendiri yand disebut gelang(*Loop*). Dengan demikian, berdasar ada tidaknya gelang atau rusuk ganda, graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis.

a. Graf sederhana

Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat rusuk ganda dan gelang. Beberapa graf sederhana dapat ditunjukkan sebagai berikut:

a) Graf nol adalah graf yang tidak memiliki rusuk atau himpunan rusuknya merupakan himpunan kosong. Gambar berikut menunjukkan graf nol dengan 2 buah simpul.

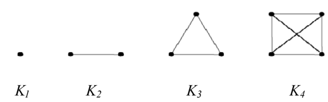
Contoh 2.2 :



Gambar 2.2. Graf nol dengan banyak simpul 2

b) Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap pasang simpulnya saling berikatan. Notasi graf lengkap n simpul adalah K_n.

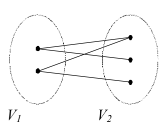
Contoh 2.3 :



Gambar 2.3 Graf lengkap

c) Graf bipartit adalah graf sederhana yang himpunan simpulnya dapat dipartisi menjadi 2 bagian.

Contoh 2.4:

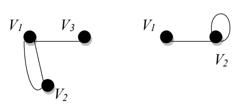


Gambar 2.4 Graf bipartit

b. Graf tidak sederhana

Graf tidak sederhana adalah graf yang memiliki gelang atau rusuk ganda.

Contoh 2.5 :



Gambar 2.5 Graf tidak sederhana

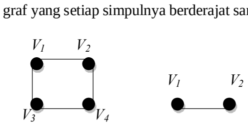
2) Jenis graf berdasarkan keteraturan derajat simpulnya

Berdasarkan keteraturan derajat dari simpulnya graf dapat dibedakan menjadi 2 jenis yaitu:

a. Graf teratur

Graf teratur adalah graf yang setiap simpulnya berderajat sama.

Contoh 2.6 :

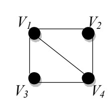


Gambar 2.6 Graf teratur

b. Graf tidak teratur

Graf tidak teratur adalah graf yang tidak setiap simpulnya mempunyai derajat yang sama.

Contoh 2.7 :

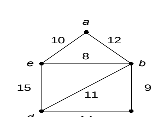


Gambar 2.7. Graf tidak teratur

3) Graf Berbobot(*weighted graph*)

Graf yang setiap sisinya diberi sebuah harga (bobot).

Contoh 2.8 :

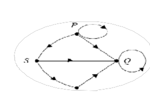


Gambar 2.8. Graf Berbobot

4) Graf berarah ((*directed graph* atau *digraph*)

Graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah.

Contoh 2.9 :

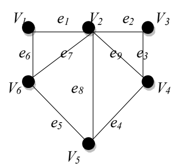


Gambar 2.9. Graf Berarah

5) Keterhubungan

a. Jalan, jejak, lintasan, sirkuit dan sikel

1. Jalan (walk) pada graf G didefinisikan sebagai barisan berhingga(tak kosong). w= $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$ dengan v_0 disebut simpul awal dan v_n simpul akhir, yang suku-sukunya bergantian simpul dan rusuk sedemikian hingga ujung e_i adalah v_{i-1} dan v_i adalah simpul-simpul akhir rusuk e_i untuk $1 \leq i \leq n$. Suatu jalan dosebut tertutup jika simpul awal dan simpul akhirnya berimpit.
2. Jejak (trail) merupakan jalan tanpa rusuk berulang
3. Lintasan (path) merupakan jalan tanpa simpul dan rusuk berulang
4. Sirkuit (circuit) merupakan jejak yang tertutup
5. Sikel (cycle) merupakan lintasan yang simpul awal dan simpul akhirnya berimpit. Jika sikel tersebut memuat semua simpul dalam graf G maka disebut sikel Hamilton dan graf yang memuat sikel Hamilton disebut graf Hamilton. Lebih jelasnya perhatikan gambar berikut:



Gambar 2.10. Graf G_1

i. $w_1 = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_3, v_3)$ adalah sebuah jalan di G_1 yang panjangnya 4, karena dalam barisan ini rusuk e_3 muncul lebih dari sekali maka w_1 bukan jejak.

ii. $w_2 = (v_1, e_1, v_2, e_9, v_4, e_4, v_5, e_8, v_2)$ adalah sebuah jejak di G_1 yang panjangnya 4, karena dalam barisan ini simpul v_2 muncul lebih dari sekali maka w_2 bukan lintasan

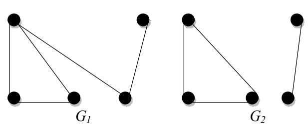
iii. $w_3 = (v_1, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4, e_3, v_3)$ adalah sebuah lintasan di $G1$ yang panjangnya 4, karena dalam barisan ini tidak ada rusuk dan simpul yang muncul lebih dari sekali

iv. $w_4 = (v_1, e_1, v_2, e_9, v_4, e_4, v_5, e_8, v_2, e_7, v_6, e_6, v_1)$ adalah sebuah sirkuit di $G1$ yang panjangnya 6, karena internal v_2 muncul lebih dari sekali maka w_4 bukan sikel

v. $w_5 = (v_1, e_1, v_2, e_8, v_5, e_5, v_6, e_6, v_1)$ adalah sebuah sikel di $G1$ yang panjangnya 4.

b. Keterhubungan graf

Suatu graf G dikatakan terhubung atau *connecte*d(Mahmudi, 2001:19). Jika untuk setiap dua simpul u dan v di G, terdapat lintasan yang menghubungkan simpul it, sebaliknya, graf dikatakan tidak terhubung(*disconnected*) jika tidak ada lintasan yang menghubungkannya. Jika suatu graf tidak terhubung maka graf G akan terdiri beberapa subgraf yang disebut komponen graf. Banyaknya komponen graf G dinotasikan dengan ω(G). Graf terhubung mempunyai satu komponen dan graf tidak terhubung mempunyai lebih dari satu komponen (Mardiyono, 1996:44). Contoh graf terhubung dan tidak terhubung pada gambar 2.11.



Gambar 2.11. Graf terhubung G_1 dengan satu komponen dan graf tidak terhubung G_2 dengan dua komponen

6) Pengertian jaringan

Suatu jaringan adalah himpunan yang dihubungkan oleh rusuk-rusuk dengan nilai dari rusuk menyatukan arus dari tipe suatu masalah. Menurut Kershenbaum(1993:112) sebuah graf dapat disebut sebagai sebuah jaringan jika simpul dan rusuknya dapat dikaitkan dengan bobot tertentu seperti panjang, kapasitas dan lain sebagainya.

D. *Travelling Salesman Problem (TSP)*

Travelling salesman problem (TSP) merupakan suatu permasalahan untuk mendapatkan rute terpendek yang harus melewati semua tujuan dengan setiap tujuan harus dilalui satu kali dari depot sampai kembali ke depot lagi, dengan jarak antara setiap tujuan satu dengan tujuan lainnya sudah diketahui. Sehingga harus meminimalkan pengeluaran biaya, dan jarak yang harus ditempuh untuk perjalanannya tersebut.

TSP merupakan permasalahan optimisasi klasik yang melibatkan seorang salesman untuk menjual produknya ke beberapa kota yang telah ditentukan.

Rangkaian kota yang dikunjungi akan membentuk suatu rute dengan ketentuan setiap kota hanya dapat dikunjungi tepat satu kali dan kembali ke kota awal perjalanan dimulai. Permasalahan ini akan menjadi semakin rumit seiring bertambahnya jumlah kota yang harus dikunjungi. Kemungkinan rute yang semakin bertambah akan menyulitkan di dalam pemilihan rute dengan jarak terpendek (Apul, dkk. 2010).

Travelling Salesman Problem mempunyai beberapa asumsi-asumsi(Taha 1987).

1. Terdapat sejumlah n lokasi/ tempat
2. Tersedia jalur dari satu lokasi ke $n - 1$ lokasi lainnya
3. Tersedia ongkos c_{ij} dari lokasi ke-i ke lokasi ke-j pada jalur $i \to j$
4. Pada umumnya $c_{ij} = c_{ji}$, tetapi bisa berbeda
5. Seseorang harus berangkat dari suatu lokasi dan mengunjungi $n - 1$ lokasi lainnya (masing – masing sekali) dan akhirnya kembali ke lokasi semula

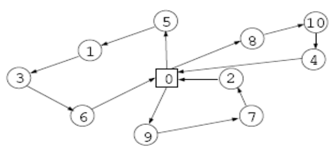
6. Tujuan TSP adalah menjadwalkan rute perjalanan yang meminimalkan ongkos total.

Jenis TSP memiliki beberapa variasi, sesuai dengan kendala-kendala yang ditambahkan dalam model. Salah satunya yaitu *m-Travelling Salesman Problem,* yaitu jenis TSP ini menambahkan kendala jumlah *salesman*, sehingga terdapat sejumlah *m salesman* untuk mengunjungi seluruh tujuan.

E. *Vehicle Routing Problem (VRP)*

Pertama kali *vehicle routing problem* (VRP) diperkenalkan oleh Dantzig dan Ramser pada tahun 1959 dan semenjak itu VRP telah dipelajari secara luas. Oleh Fisher pada tahun 1995, VRP didefinisikan sebagai sebuah pencarian atas cara penggunaan yang efisien dari sejumlah *vehicle* yang harus melakukan perjalanan untuk mengunjungi sejumlah tempat untuk mengantar dan/atau menjemput orang/barang. VRP berkaitan dengan permasalahan bagaimana mendatangi pelanggan dengan menggunakan kendaraan yang ada. Sehingga permasalahan ini erat kaitannya dengan permasalahan *travelling salesman problem* (TSP). VRP menjadi TSP pada saat hanya terdapat satu alat angkut yang kapasitasnya tak hingga. (Anita Christine Sembiring, 2008:81).

Sebagai contoh, penyelesaian masalah VRP dengan satu depot ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 2.12. Bentuk solusi *Vehicle Routing Problem* dasar

keterangan:

○ = Pelanggan

□ = Depot

→ = Rute

VRP mempunyai beberapa batasan-batasan yang bisa dimasukkan (Anita C.S:2008).

1. Setiap kendaraan/alat angkut berhenti di suatu tempat maka harus mengangkut barang dalam jumlah tertentu untuk dipindahkan/diantar
2. Beberapa kendaraan/alat angkut bisa digunakan namun dengan kapasitas yang terbatas
3. Pengangkutan atau pemindahan barang dibolehkan untuk tidak dilakukan hanya pada waktu tertentu (*disebut time windows*)
4. Pengangkutan barang diperbolehkan dalam sebuah rute jika pemindahan barang telah dilakukan
5. Pengemudi/sopir diperbolehkan untuk beristirahat atau makan pada saat-saat tertentu.

Penggunaan VRP dalam dunia nyata, banyak faktor sampingan yang muncul. Faktor-faktor tersebut berpengaruh pada munculnya variasi dari VRP(Solomon ,1987).

1. *Capacitated* VRP (CVRP), yaitu setiap kendaraan mempunyai kapasitas yang terbatas
2. VRP *with time windows* (VRPTW), yaitu setiap pelanggan harus disuplai dalam jangka waktu tertentu
3. *Multiple depot* VRP (MDVRP), yaitu distributor memiliki banyak depot untuk menyuplai pelanggan
4. VRP *with pick-up and delivering* (VRPPD), yaitu pelanggan mungkin mengembalikan barang pada depot asal
5. *Split delivery* VRP (SDVRP), yaitu pelanggan dilayani dengan kendaraan berbeda
6. *Stochastic* VRP (SVRP), yaitu munculnya 'random values' (seperti jumlah pelanggan, jumlah permintaan, waktu pelayanan atau waktu perjalanan)
7. *Periodic* VRP, yaitu pengantar hanya dilakukan dihari tertentu

F. *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP)

Permasalahan *capacitated vehicle routing problem* (CVRP) merupakan salah satu variasi dari masalah VRP, dimana terdapat penambahan kendala kapasitas kendaraan yang identik untuk mengunjungi sejumlah konsumen sesuai dengan permintaannya masing-masing. Permasalahan CVRP, total jumlah permintaan konsumen dalam suatu rute tidak melebihi kapasitas kendaraan yang melayani rute tersebut dan setiap konsumen dikunjungi hanya satu kali oleh satu kendaraan. Permasalahan CVRP bertujuan meminimumkan total jarak tempuh rute perjalanan kendaraan dan meminimumkan banyaknya kendaraan yang digunakan dalam mendistribusikan barang dari tempat pengiriman(depot) ke sejumlah konsumen.

Menurut Iskandar (2010:18) masalah CVRP adalah masalah pengoptimalan jarak tempuh perjalanan kendaraan dalam pendistribusian barang dari tempat pengiriman (depot) ke sejumlah agen pelanggan sehingga menghasilkan rute dengan total jarak tempuh yang minimum. Penentuan rute kendaraan tersebut harus memperhatikan beberapa batasan yaitu setiap kendaraan harus memulai rute perjalanan dari depot dan setelah melayani sejumlah konsumen juga harus kembali ke depot. Setiap konsumen hanya dilayani tepat satu kali oleh satu kendaraan. Kendaraan-kendaraan tersebut memiliki kapasitas tertentu sehingga panjang rute yang dilalui oleh setiap kendaraan dalam melayani setiap konsumen sesuai dengan kapasitasnya.

Tonci Caric and Hrvoje Gold, (2008:58) mendefinisikan CVRP sebagai suatu graf berarah $G = (V,A)$ dengan $V = \{v_0, v_1, v_2,...,v_n,v_{n+1}\}$ adalah himpunan simpul (verteks), v_0 menyatakan depot dengan v_{n+1} merupakan depot semu dari v_0 yaitu tempat kendaraan memulai dan mengakhiri rute perjalanan. Sedangkan A = $\{ vi,vj : vi,vj \in V,\ i \neq j\}$ adalah himpunan sisi berarah (arc) yang merupakan himpunan sisi yang menghubungkan antar simpul. Setiap simpul $vi \in V$ memiliki permintaan (*demand*) sebesar d_i dengan d_j adalah integer positif. Himpunan $K = \{ k_1, k_2,\dots, k_n\}$ merupakan kumpulan kendaraan yang homogen dengan kapasitas yang identik yaitu Q, sehingga panjang setiap rute dibatasi oleh kapasitas kendaraan. Setiap verteks (vi ,vj) memiliki jarak tempuh C_{ij} yaitu jarak dari simpul i ke simpul j. Jarak perjalanan ini diasumsikan simetrik yaitu $C_{ij}=C_{ji}$ dan $C_{ii}=0$.

Permasalahan tersebut kemudian diformulasikan ke dalam model matematika dengan tujuan meminimumkan total jarak tempuh perjalanan kendaraan.

Didefinisikan variable keputusannya.

$$x_{ij}^{k} = \begin{cases} 1 & \text{jika kendaraan k mengunjungi simpul } vi \text{ setelah simpul } vj \\ 0 & \text{jika selainnya} \end{cases}$$

$$u_i^k = \begin{cases} 1 & \text{jika simpul } vi \text{ dilayani oleh kendaraan k} \\ 0 & \text{jika tidak} \end{cases}$$

keterangan:

K = { $k_1, k_2, \ldots, k_n$} kendaraan yang digunakan

V= himpunan simpul

A = himpunan sisi berarah (arc), { (vi, vj): $vi, vj \in V$ $i \neq j$}

C_{ij} = jarak antara simpul v_i ke simpul v_j

d_i = jumlah permintaan pada simpul v_i

Q = kapasitas masing-masing kendaraan

u_i^k = kendaraan k melayani simpul v_i

Fungsi tujuannya meminimumkan total jarak tempuh perjalanan kendaraan. Jika z adalah fungsi tujuan, maka

$$\text{minimumkan } z = \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \, x_{ij}^{k} \qquad (2.1)$$

dengan kendala-kendala

1. Setiap simpul hanya dikunjungi tepat satu kali oleh satu kendaraan. Jika x_{ij}^k bernilai 1, artinya ada perjalanan dari simpul v_i ke v_j pada rute k atau $u_i^k = 1$.

Sebaliknya jika x_{ij}^k bernilai 0, artinya tidak ada perjalanan dari simpul v_i ke v_j pada rute k atau $u_i^k = 0$. Sehingga dapat dikatakan bahwa variabel x_{ij}^k dan variabel u_i^k saling berhubungan

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V, i \neq j} x_{ij}^{k} = 1, \forall i \in V \qquad (2.2)$$

2. Total jumlah permintaan konsumen dalam satu rute tidak melebihi kapasitas kendaraan yang melayani rute tersebut. Kapasitas kendaraan untuk memenuhi permintaan pelanggan harus dimaksimalkan namun tidak lebih dari kapasitas kendaraan tersebut

$$\sum_{i \in V} d_i \sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij}^{k} \leq Q, \forall k \in K \qquad (2.3)$$

3. Setiap rute perjalanan kendaraan berawal dari depot

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{0j}^{k} = 1 \qquad (2.4)$$

4. Setiap rute perjalanan kendaraan berakhir di depot

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V} x_{i,n+1}^{k} = 1 \qquad (2.5)$$

5. Kekontinuan rute, artinya kendaraan yang mengunjungi suatu simpul, setelah selesai melayani akan meninggalkan simpul tersebut

$$\sum_{i \in V} x_{i,i}^{k} - \sum_{j \in V} x_{j,i}^{k} = 0, \forall i, j \in V, \forall k \in K \qquad (2.6)$$

6. Batasan ini memastikan bahwa tidak terdapat subrute pada setiap rute yang terbentuk

$$x_{ij}^{k} = 1 \Rightarrow u_i^{k} - d_j = u_j^{k}, \forall i,j \in V; i \neq j, K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \qquad (2.7)$$

$$u_0 = Q, 0 \leq u_i, \forall i \in V, \qquad (2.8)$$

7. Variabel keputusan x_{ij}^k merupakan *integer biner*

$$x_{ij}^{k} \in \{0,1\}, \forall i, j \in V, i \neq j, K = \{k_1, k_2, \ldots, k_n\} \qquad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan 2.1-2.9, akan disajikan model matematika CVRP dalam tabel 2.1.

Tabel 2.1 Model Matematika capacitated vehicle routing problem(CVRP)

Fungsi Tujuan	Meminimumkan $Z = \sum_{k \in K} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} c_{ij} \, x_{ij}^{k}$
Kendala Tujuan	$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V, i \neq j} x_{ij}^{k} = 1, \forall i = \{1, 2, \ldots, N\}$
	$\sum_{i \in V} d_i (\sum_{j \in V, j \neq i} x_{ij}^{k}) \leq 144, \forall k = \{1, 2, \ldots, N\}$
	$\sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{0,j}^{k} = 1$
	$\sum_{k \in K} \sum_{i \in V} x_{i,n+1}^{k} = 1$
	$\sum_{i \in V} x_{i,j}^{k} - \sum_{j \in V} x_{j,i}^{k} = 0, \forall i, j = \{1, 2, \ldots, N\}, \forall k = \{1, 2, \ldots, K\}$
	$x_{ij}^{k} \in \{0,1\}, \forall i, j \in V, i \neq j, \forall k = \{1, \ldots, K\}$

Menggunakan formulasi model matematis CVRP tidak terdapat subrute pada rute-rute yang terbentuk yang dikaitkan dengan batasan kapasitas kendaraan. Variabel

keputusan hanya akan terdefinisi jika jumlah permintaan simpul v_i dan simpul v_j tidak melebihi kapasitas kendaraan.

G. Metode *Branch & Bound*

VRP pertama kali diperkenalkan oleh Dantzig dan Ramser pada tahun 1959, mereka meneliti bagaimana memperoleh rute yang optimal. Penelitian mereka menggunakan masalah *linear programming*(LP) untuk memperoleh pendekatan solusi yang optimal. Untuk menyelesaikan suatu masalah LP agar memperoleh hasil yang optimal dapat dilakukan dengan beberapa metode, salah satunya yaitu menggunakan metode simpleks yang dikembangkan oleh Dantzig tahun 1947. Metode ini merupakan metode iteratif dalam penyelesaian masalah *linear programming*. Secara sederhana model LP dengan pembatas tambahan berupa variabelnya yang bernilai bilangan bulat (*integer)* disebut sebagai *integer programming*(IP) (Iskandar,2010:6).

LP yang diperoleh dari *IP* tersebut dengan menghilangkan kendala bilangan bulat atau kendala 0-1 pada variabelnya disebut *linear programming* relaksasi (LP-relaksasi) (Winston, 1995).

Untuk memperoleh solusi optimal dalam masalah *integer programming* (IP) dapat dipecahkan dengan menggunakan metode *branch and bound*. Metode ini sering dipakai dalam program komputer untuk aplikasi perusahaan *software*, khususnya yaitu dalam *software* Lingo. Keunggulan metode *branch and bound* terletak pada tingkat keefektifitasnya dalam memecahkan masalah dengan hasil yang akurat.

Prinsip dasar dari metode *branch and bound* adalah memecah daerah *feasible* dari masalah LP dengan cara membuat *subproblem* baru sehingga IP dapat terpecahkan. Daerah *feasible* suatu LP adalah daerah yang memuat titik-titik yang dapat memenuhi semua kendala linear masalah LP (Taha 2007:272).

Setiap *subproblem* dibatasi dengan tiga cara.

1. Batas dari *subproblem* $\leq$ solusi optimum yang didapat (z*)
2. LP-relaksasi tidak memiliki solusi *feasible*
3. Solusi optimum dari LP-relaksasi berupa integer. Jika solusi ini lebih baik dari optimum yang didapat sebelumnya maka solusi ini menjadi solusi optimum yang baru dan cara pertama digunakan kembali untuk semua *subproblem* dengan nilai z* baru yang lebih besar.

Metode dasar yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan *IP* adalah dengan metode *branch and bound*. Metode ini disebut metode *branch* karena metode ini akan membagi permasalahan *IP* menjadi cabang-cabang permasalahan yang akan membentuk program linear. Metode ini juga membatasi (*bound*) pencarian pada percabangan yang pasti.

Metode *branch and bound* telah digunakan secara luas dalam beberapa dekade terakhir dalam memecahkan masalah CVRP yang merupakan perluasan masalah yang erat kaitannya dengan *traveling salesman problem* (TSP), untuk masalah penentuan pengoptimalan jarak tempuh perjalanan kendaraan (Toth & Vigo,2002).

Contoh berikut merupakan masalah metode *branch and bound* untuk memudahkan pemahaman secara umum.

Contoh 2.9: (Taha, 2007:272)

Misalkan diberikan masalah *integer*

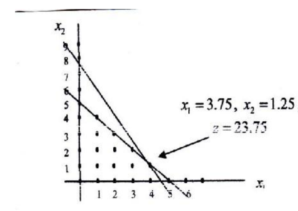
maksimumkan $z = 5x_1 + 4x_2$

dengan kendala $x_1 + x_2 \leq 5$

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1, x_2 \geq 0$

Solusi masalah integer diatas dapat dilihat pada gambar dibawah ini.

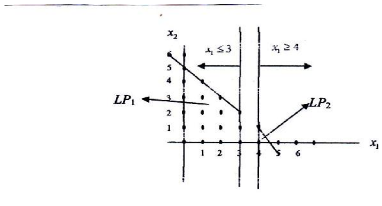


Gambar 2.13. Daerah *feasible* LP

Menggunakan *software* Lingo, solusi optimum untuk contoh 2.8 adalah z = 23.75, x_1 = 3.75, x_2 = 1.25 (hasil program dapat dilihat pada lampiran 1). Daerah *feasible* pada masalah contoh 2.9 dapat dilihat pada gambar 2.13. Menurut metode *branch and bound*, solusi optimum LP-relaksasi tersebut tidak memenuhi syarat *integer*, maka harus dibuat *subproblem* yang baru. Maka dipilih variable yang optimum secara sembarang yang tidak memenuhi persyaratan *integer*, misalnya x_1 = 3.75. Sehingga terlihat bidang 3< x_1 < 4 bukan daerah *feasible* bagi masalah IP. Selanjutnya dilakukan percabangan sampai diperoleh solusi optimum. Oleh karena itu, eliminasi bidang tersebut, ganti ruang LP_0 dengan dua ruang yaitu LP_1 dan LP_2 yang didefinisikan sebagai berikut

1. Ruang LP_1 = ruang LP_0 + ($x_1 \leq 3$)
2. Ruang LP_2 = ruang LP_0 + ($x_1 \geq 4$)

Gambar berikut memperlihatkan ruang LP_1 dan LP_2



Gambar 2.14. LP_1 dan LP_2 dalam grafik.

Masalah LP_1 dan LP_2 diselesaikan satu per satu menggunakan metode *branch and bound* dengan bantuan *software* Lingo.

- Penyelesaian masalah LP_1

maksimumkan $z = 5x_1 + 4x_2$

dengan kendala $x_1 + x_2 \leq 5$

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1 \leq 3$

$x_1, x_2 \geq 0$

Hasil solusi yang diperoleh yaitu x_1 = 3, x_2= 2 dan z = 23. Karena LP_1 sudah terukur dan telah memenuhi syarat *integer*, maka tidak perlu dilakukan pencabangan.

- Penyelesain masalah LP_2

maksimumkan $z = 5x_1 + 4x_2$

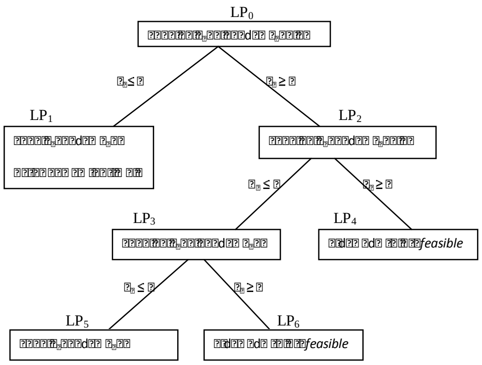
dengan kendala $x_1 + x_2 \leq 5$

$10x_1 + 6x_2 \leq 45$

$x_1 \geq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

Solusi yang diperoleh yaitu x_1 = 4, x_2= 0.83 dan z = 23.33. LP_2 tidak terukur dan tidak memenuhi syarat *integer*, maka harus dilakukan pencabangan lagi dengan menggunakan metode *branch and bound* untuk menyelesaikan masalah IP pada contoh 2.9 dapat dilihat pada Gambar 2.15. Perhitungan nilai-nilai variable dilakukan dengan menggunakan metode *branch and bound* dengan bantuan *software* Lingo. (hasil program dapat dilihat pada lampiran 1).



Gambar 2.15. Pencabangan dengan metode *branch and bound* untuk menemukan solusi IP (*Integer Programming*)

Pada gambar 2.15 terlihat solusi LP_1dan LP_5 adalah solusi optimal. Oleh karena nilai pada *z* LP_1 lebih besar dari LP_5, maka solusi LP_1 adalah solusi optimal.

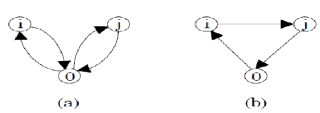
H. Metode *Clarke and Wright Savings*

Metode *clarke and wright savings* adalah salah satu yang dikembangkan pertama untuk masalah CVRP dan sering digunakan. Tujuan metode "*savings*" yaitu untuk meminimisasi total jarak perjalanan semua kendaraan dan untuk meminimisasi secara tidak langsung jumlah kendaraan yang diperlukan untuk melayani semua tempat perhentian (*Clarke G. & Wright J.W*, 1964).

Pada tahun 1964, *Clarke and Wright* mempublikasikan sebuah algoritma sebagai solusi permasalahan dari berbagai rute kendaraan, yang sering disebut sebagai permasalahan klasik dari rute kendaraan (*the classical vehicle routing problem*). Algoritma ini didasari pada suatu konsep yang disebut konsep *savings*. Algoritma ini dirancang untuk menyelesaikan masalah rute kendaraan dengan karakteristik sebagai berikut. Dari suatu depot barang harus diantarkan kepada pelanggan yang telah memesan. Untuk sarana transportasi dari barang-barang ini, sejumlah kendaraan telah disediakan, di mana masing-masing kendaraan dengan kapasitas tertentu sesuai dengan barang yang diangkut. Setiap kendaraan yang digunakan untuk memecahkan permasalahan ini, harus menempuh rute yang telah ditentukan, memulai dan mengakhiri di depot, di mana barang-barang diantarkan kepada satu atau lebih pelanggan.

Permasalahannya adalah untuk menetapkan alokasi untuk pelanggan diantara rute-rute yang ada, urutan rute yang dapat mengunjungi semua pelanggan dari rute yang ditetapkan dari kendaraan yang dapat melalui semua rute. Tujuannya adalah untuk menemukan suatu solusi yang meminimalkan total pembiayaan kendaraan. Lebih dari itu, solusi ini harus memuaskan batasan bahwa setiap pelanggan dikunjungi sekali, di mana jumlah yang diminta diantarkan, dan total permintaan pada setiap rute harus sesuai dengan kapasitas kendaraan.

Algoritma *clarke and wright savings* adalah sebuah algoritma heuristik, dan oleh karena itu tidak menyediakan sebuah solusi yang optimal. Tetapi bagaimanapun juga sering menghasilkan solusi yang baik, yang merupakan suatu solusi yang sedikit berbeda dari solusi optimal. Dasar dari konsep penghematan ini untuk mendapatkan penghematan biaya dengan menggabungkan dua rute menjadi satu rute yang digambarkan pada Gambar 2.16, titik 0 adalah depot.



Gambar 2.16. Ilustrasi Konsep Penghematan

Berdasarkan Gambar 2.16 (a) tujuan/pelanggan *i* dan *j* dikunjungi dengan rute yang terpisah. Untuk mendapatkan penghematan, tujuan/pelanggan *i* dan *j* akan dikunjungi dengan rute yang sama, contoh terlihat pada Gambar 2.16 (b). Rute kendaraan yang ditunjukkan diantara simpul *i* dan *j* oleh C_{ij}, rute kendaraan oleh Da pada Gambar 2.16(a).

$$D_a = C_{0i} + C_{i0} + C_{0j} + C_{j0}. \quad (2.10)$$

Ekivalen dengan rute kendaraan D_b pada gambar 2.16(b) adalah

$$D_b = C_{0i} + C_{ij} + C_{j0}. \quad (2.11)$$

Dengan menggabungkan kedua rute memperoleh penghematan S_{ij}:

$$S_{ij} = C_{0i} + C_{i0} + C_{0j} + C_{j0} - C_{0i} + C_{ij} + C_{j0}.$$

$$S_{ij} = C_{io} + C_{oj} - C_{ij}. \quad (2.12)$$

C_{io} = jarak dari simpul *i* ke depot.

C_{oj} = jarak dari depot ke simpul *j*.

C_{ij} = jarak dari simpul *i* ke simpul *j*.

S_{ij} = nilai penghematan jarak dari simpul *i* ke simpul *j*.

Nilai penghematan (S_{ij}) adalah jarak yang dapat dihemat jika rute *o-i-o* digabungkan dengan rute *o-j-o* menjadi rute tunggal *o-i-j-o* yang dilayani oleh satu kendaraan yang sama.

DAFTAR PUSTAKA

Agus Purnomo. (2010). Penentuan Rute Pengiriman dan Biaya Transportasi dengan Menggunakan Metode *Clark and Wright Saving Heuristik* (Studi Kasus di PT Teh Botol Sosro Bandung). Jurnal. Universitas Pasundan Bandung.

Alfi Fadlan. (2011). Sejarah Perusahaan Minuman Aqua. http://www.websejarah.com/2011/02/sejarah-perusahaan-minuman-aqua.html . Diakses tanggal 25 Desember 2012.

Anita Christine sembiring. (2008). Penentuan Rute Distribusi Produk yang Optimal dengan Menggunakan Algoritma Heuristik pada PT. Coca-cola Bottling Indonesia Medan. Tesis. Universitas Sumatra Utara.

Brogan, William. (1991). *Modern Control Theory*. New Jersey: Prentice Hall. Inc

Chartrand, Gary & Oellermann, Ortrud R. 1993, Applied and Algorithmic Graph Theory, McGraw-Hall. Inc.

Clarke, G. & Wright, J.W. (1964). *Scheduling of Vehicles from a Central Depot to a Number of Delivery Points, Operations Research*, Vol. 12, No. 4, 568-581.

Fisher, M.L. (1995). *Vehicle Routing in Operations Research and Management Science*, Vol.8. Amsterdam, New York, Elsevier.

Gautam Appa, Leonidas Pitsoulis and H. Paul Williams. (2006). *Handbook on Modelling for Discrete Optimization*. USA: Springer Science and Business Media, Inc.

Iskandar. (2010). Model Optimasi *Vehicle Routing Problem* dan Implementasinya. Tesis. Institut Pertanian Bogor

Jong Jek Siang. (2004). Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer. Yogyakarta: ANDI.

Joseph Christian S.(2011). Analisis Sistem Pengangkutan Sampah Kota Makassar dengan Metode Penyelesaian *Vehicle Routing Problem* (VRP). Skripsi. Universitas Hasanudin.

Kara I, Laporte G, Bektas T. (2004). *A Note on the lifted Miller-Tucker-Zemlin subtour elimination constraints for the capacitated vehicle routing problem*. *European Journal of Operational Research* 158: 793-795.

Kershenbaum, Aaron.(1993).*Telecommunication Network Design Algorithm*. New York:Mc Graw-Hill.

Larsen J.(2001). *Parallelization of the Vehicle Routing with Time Windows*. Thesis. Denmark: Department of Mathematical Modelling, University of Denmark.

Mahmudi. (2001). Matematika Diskret. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Mardiyono, S.(1996). Matematika Diskret. Yogyakarta: FMIPA IKIP Yogyakarta.

Munir, R. (2009). Matematika Diskrit, Informatika, Bandung.

Pandri. (2011). Sejarah Perusahaan Minuman Aqua, http://pandri-16.blogspot.com/. Diakses tanggal 24 Desember 2012.

Solomon, M. (1987). Algorithms for the Vehicle Routing and Scheduling Problems with Time Windows Constraints. *Operations Research*, Vol. 35, No. 2, 254-265.

Susanta, B. (1994). Program Linear. Jakarta: Depdikbud.

Taha. HA. (2007). *Operations Research*: *An Introduction*. Ed. Ke-8. Pearson Education International. Singapore..

Tonci Caric, Hrvoje Gold. (2008). *Vehicle Routing Problem*. University of Zagreb: In-teh Croatia.

Toth P, Vigo D. (2002). *An Overview of vehicle routing problems*. Di dalam Toth, P et al., editor. The Vehicle Routing Problem. Philadelphia: Siam. Hlm 1-26.

Winston WL. (1995). *Introduction to Mathematical Programming*. Ed. Ke-2. New York: Duxbury.