PENGUKURAN *VALUE AT RISK* PADA PORTOFOLIO SAHAM DENGAN METODE SIMULASI BOOTSTRAPPING

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

untuk memenuhi sebagian persyaratan

guna memperoleh gelar Sarjana Sains

Disusun oleh :

Ragil Intan Cahyani

09305144003

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2014

PENGUKURAN *VALUE AT RISK* PADA PORTOFOLIO SAHAM DENGAN METODE SIMULASI BOOTSTRAPPING

Oleh
Ragil Intan Cahyani
Universitas Negeri Yogyakarta

ABSTRAK

Value at Risk (*VaR*) adalah suatu alat ukur statistik risiko yang mengukur kerugian maksimum yang diharapkan dari sebuah investasi pada tingkat konfidensi (*confidence interval*) tertentu dan periode waktu (*time period*) tertentu dalam kondisi pasar normal. Perhitungan *VaR* dapat digunakan dalam sebuah aset maupun portofolio. Untuk menghitung *VaR* terdapat empat metode yaitu metode simulasi Historis, metode Varians Kovarians, metode simulasi Monte Carlo, dan metode simulasi Bootstrapping. Dalam skripsi ini akan dijelaskan tentang pengukuran *VaR* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping. Tujuan dari penulisan ini adalah menjelaskan penerapan pengukuran *VaR* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping pada harga penutupan saham harian PT. Gudang Garam Tbk, PT. Indofood Sukses Makmur Tbk, PT. Kalbe Farma Tbk, dan PT. Unilever Indonesia Tbk.

Portofolio merupakan gabungan dari dua atau lebih saham individual. Pengukuran *VaR* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping mengestimasi distribusi dari data empiris. Metode Bootstrapping bebas dari asumsi distribusi normal dan distribusi statistika lainnya. Pada intinya *VaR* dengan simulasi Bootstrapping adalah melakukan simulasi dengan membangkitkan indeks untuk mengestimasi nilai *VaR*-nya. Dalam pengukuran *VaR* pada portofolio langkah-langkah utama adalah menentukan tingkat kepercayaan (α), periode waktu yang dipilih, menentukan nilai parameter return aset serta korelasi antar aset, mensimulasikan indeks untuk mendapatkan return terendah dari masing-masing aset, menghitung return portofolio, mencari estimasi kerugian maksimum, menghitung nilai *VaR* yang dinotasikan dengan $Var_{(1-\alpha)}(t) = W_0 R^* \sqrt{t}$ dan menghitung rata-rata hasil pengukuran *VaR*.

Penerapan pengukuran *VaR* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping pada skripsi ini adalah harga penutupan saham harian PT. Gudang Garam Tbk, PT. Indofood Sukses Makmur, PT. Kalbe Farma, dan PT. Unilever Indonesia Tbk periode 2 Juli 2012 sampai dengan 1 Juli 2013. Dari hasil perhitungan *VaR* portofolio pada tingkat kepercayaan 95%, menghasilkan rata-rata nilai *VaR* sebesar -70606964 (tanda negatif menunjukkan kerugian). Hal ini dapat diartikan ada kemungkinan sebesar 95% bahwa kerugian yang mungkin akan diderita investor tidak akan melebihi $Rp\ 70.606.964{,}00$ dan dengan nilai keuntungan portofolio yang didapat sebesar $Rp\ 81.418.800{,}00$ dalam jangka waktu satu hari dari dana awal yang diinvestasikan pada portofolio sebesar $Rp\ 1.000.000.000{,}00$.

Kata Kunci: *Value at Risk*, Return, Bootstrapping

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Dalam dunia bisnis, hampir semua investasi mengandung risiko. Investor tidak mengetahui dengan pasti hasil yang akan diperolehnya dari investasi yang telah ditanamnya. Dengan kata lain, dalam melakukan suatu investasi, investor dihadapkan dengan masalah tentang penaksiran risiko. Investasi merupakan penempatan sejumlah dana pada saat ini dengan harapan untuk memperoleh keuntungan di masa mendatang (Halim, 2005:4). Seorang investor membeli sejumlah saham saat ini dengan harapan memperoleh keuntungan dari kenaikan harga saham ataupun sejumlah dividen (pengembalian laba) di masa yang akan datang, sebagai imbalan atas waktu dan risiko yang terkait dengan investasi tersebut (Tandelilin, 2007:3).

Investor pada umumnya merupakan pihak yang tidak menyukai adanya risiko tetapi menginginkan pengembalian yang maksimal. Sehingga investor yang rasional akan menginvestasikan dananya dengan memilih saham yang efisien, yang memberi return maksimal dengan risiko tertentu atau bisa dikatakan return tertentu dengan risiko minimal. Apabila investor mengharapkan tingkat keuntungan yang tinggi, maka harus menanggung risiko yang tinggi pula, begitu juga sebaliknya, apabila investor menginginkan risiko yang lebih rendah, maka tingkat keuntungan yang diharapkan juga akan semakin rendah. Maka dari itu, investor bisa memilih menginvestasikan dananya pada berbagai aset untuk mengurangi kerugian/risiko investasi. Pilihan aset-aset tersebut didasarkan pada pemahaman investor terhadap

risiko. Semakin enggan seorang investor terhadap risiko (*risk averse*), maka pilihan investasinya akan cenderung lebih banyak pada aset-aset yang bebas risiko (Tandelilin, 2007:76). Pengembalian atas investasi yang dilakukan dan risiko yang didapat memiliki hubungan yang sangat erat dimana semakin besar tingkat pengembalian yang diharapkan maka semakin besar pula tingkat risiko yang dihadapi, jadi antara pengembalian dan risiko tidak dapat dipisahkan.

Risiko dalam investasi adalah ketidakpastian yang dihadapi karena nilai uang atau harga suatu aset atau investasi menjadi lebih kecil daripada tingkat pengembalian investasi yang diharapkan. Risiko investasi dapat dihindari/dikurangi dengan melakukan diversifikasi. Diversifikasi dilakukan dengan cara memilih berbagai aset saham untuk diinvestasikan. Kumpulan berbagai macam aset saham inilah yang disebut sebagai sebuah portofolio. Pada umumnya, investor adalah *risk averse. Risk averse* adalah investor yang apabila dihadapkan pada dua pilihan investasi dengan tingkat pengembalian yang diharapkan sama dan dengan risiko yang berbeda, maka investor tersebut pasti akan memilih investasi dengan tingkat risiko yang lebih rendah dan jika mempunyai beberapa pilihan portofolio yang efisien, maka portofolio yang optimal yang dipilih.

Portofolio dikatakan efisien apabila portofolio tersebut ketika dibandingkan dengan portofolio lain mempunyai *expected* return terbesar dengan risiko yang sama atau memberikan risiko terkecil dengan *expected* return yang sama. Hakekatnya portofolio sebagai suatu bentuk investasi harus memperhatikan aspek yang dapat mempengaruhi keuntungan maupun kerugian di masa yang akan datang, karena harapan keuntungan di masa yang akan datang (return) dan kerugian (risiko) merupakan konsekuensi dari suatu pilihan investasi.

Dalam berinvestasi telah banyak dikembangkan perhitungan nilai risiko untuk mengurangi risiko, sehingga para investor dapat mengetahui nilai risiko lebih awal. Salah satu bentuk pengukuran nilai risiko yang sering digunakan adalah *Value at Risk (VaR)*.

Penerapan metode *Value at Risk* (*VaR*) merupakan bagian dari manajemen risiko. *VaR* pada saat ini banyak diterima, diaplikasikan dan dianggap sebagai metode standar dalam mengukur risiko. *VaR* dapat didefinisikan sebagai estimasi kerugian maksimum yang akan didapat selama periode waktu (*time period*) tertentu dalam kondisi pasar normal pada tingkat kepercayaan (*confidence level*) tertentu (Jorion, 2007:17).

Aspek terpenting dalam perhitungan *VaR* adalah menentukan jenis metodologi dan asumsi yang sesuai dengan distribusi return. Hal ini dikarenakan perhitungan *VaR* berdasarkan pada distribusi return sekuritas, dimana skuritas merupakan bukti uang atau pembayaran modal, misalkan saham, obligasi, wesel, sertifikat, dan deposito. Penerapan metode dan asumsi yang tepat akan menghasilkan perhitungan *VaR* yang akurat untuk digunakan sebagai ukuran risiko.

Ada empat metode utama untuk menghitung *VaR* yaitu metode varians-kovarians, simulasi Historis, simulasi Monte Carlo, dan simulasi Bootstrapping. Keempat metode tersebut mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Metode Varians-kovarians mengasumsikan bahwa return berdistribusi normal dan return portofolio bersifat linear terhadap return aset tunggalnya. Kedua faktor ini menyebabkan estimasi yang lebih rendah terhadap potensi volatilitas (standar deviasi) aset atau portofolio di masa depan. *VaR* dengan metode simulasi Monte Carlo mengasumsikan bahwa return berdistribusi normal yang disimulasikan dengan

menggunakan parameter yang sesuai dan tidak mengasumsikan bahwa return portofolio bersifat linear terhadap return aset tunggalnya. *VaR* dengan simulasi Historis adalah metode yang mengesampingkan asumsi return yang berdistribusi normal maupun sifat linear antara return portofolio terhadap return aset tunggalnya. *VaR* dengan metode simulasi Bootstrapping mengestimasi distribusi dari data empiris. Metode Bootstrapping bebas dari asumsi distribusi normal dan distribusi statistika lainnya. Nilai *VaR* digunakan untuk mengetahui perkiraan kerugian maksimum yang mungkin terjadi sehingga dapat mengurangi risiko.

Kelebihan dari *VaR* yaitu metode pengukuran ini dapat diaplikasikan ke seluruh produk-produk finansial yang diperdagangkan. Angka yang didapat merupakan hasil perhitungan secara menyeluruh terhadap risiko produk-produk sebagai suatu kesatuan. Selain itu *VaR* juga mengestimasi probabilitas atau kemungkinan mengenai timbulnya kerugian yang jumlahnya lebih besar daripada angka kerugian yang telah ditentukan. Kelebihan lainnya dari *VaR* ini adalah *VaR* memperhatikan perubahan harga aset-aset yang ada dan pengaruhnya terhadap berkurangnya risiko yang diakibatkan oleh diversifikasi gabungan saham atau portofolio.

Pada skripsi ini metode simulasi Bootstrapping digunakan untuk mengukur atau menganalisis *VaR* portofolio pada saham PT. Gudang Garam Tbk, PT. Indofood Sukses Makmur Tbk, PT. Kalbe Farma Tbk, dan PT. Unilever Indonesia Tbk yang terdaftar di Bursa Efek Indonesia. Metode ini merupakan metode yang paling banyak digunakan untuk mengukur *VaR* karena dapat menghitung bemacam-macam saham dan risiko.

B. Rumusan Masalah

Dari latar belakang tersebut, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana pengukuran *Value at Risk* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping?
2. Bagaimana penerapan pengukuran *Value at Risk* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping?

C. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian adalah :

1. Menjelaskan langkah-langkah pengukuran *Value at Risk* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping.
2. Menjelaskan penerapan pengukuran *Value at Risk* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping.

D. Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat :

1. Bagi mahasiswa

   Untuk mengembangkan ilmu pengetahuan secara teoritis sebagaimana yang telah dipelajari di dalam perkuliahan. Serta menambah ilmu pengetahuan tentang metode simulasi Bootstrapping dan penerapannya.
2. Bagi para peneliti

   Menambah informasi tentang pengukuran *Value at Risk* pada portofolio saham dengan metode simulasi Bootstrapping.

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas teori-teori dasar yang akan membantu pembaca dalam memahami materi bab-bab selanjutnya.

A. Matriks

Definisi 2.1 (Anton, 2004:26) *Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut disebut anggota dari matriks.*

Ukuran suatu matriks dinyatakan dalam banyaknya baris (arah horizontal) dan banyaknya kolom (arah vertikal) yang terdapat dalam matriks tersebut.

Jika $A_{m\times n}$ adalah sebuah matriks dengan jumlah baris m dan jumlah kolom n, maka a_{ij} menyatakan anggota yang terletak pada baris i dan kolom j di dalam matriks A. Jadi, suatu matriks A dengan ukuran $m \times n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

1. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

Definisi 2.2 (Anton, 2004:28) *Penjumlahan dan pengurangan matriks hanya dapat dilakukan jika kedua matriks tersebut memiliki ukuran yang sama. Sedangkan matriks yang ukurannya berbeda tidak dapat ditambahkan atau dikurangkan.*

Jika $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan anggota-anggota pada A dengan anggota-anggota yang bersesuaian pada B. Sedangkan selisih $A - B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan anggota-anggota pada A dengan anggota-anggota yang bersesuaian pada B.

$$A + B = (A)_{ij} + (B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}), \tag{2.2}$$

$$A - B = (A)_{ij} - (B)_{ij} = (a_{ij} - b_{ij}). \tag{2.3}$$

2. Perkalian Matriks

Definisi 2.3 (Anton, 2004:28) *Jika A adalah sebarang matriks dan c adalah sebarang skalar, maka cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap anggota pada matriks A dengan bilangan c.*

$$c(A)_{ij} = (cA)_{ij} = [ca_{ij}]. \tag{2.4}$$

Definisi 2.4 (Anton, 2004:30) *Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali AB adalah matriks $m \times n$ yang anggota-anggotanya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari anggota pada baris i dan kolom j dari AB, memilih baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kemudian mengalikan anggota-anggota yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian menjumlahkan hasilkali yang diperoleh. Sehingga anggota AB pada baris i dan kolom j diperoleh melalui:*

$$AB = [a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \cdots + a_{ir} \cdot b_{rj}]. \tag{2.5}$$

3. Transpose Matriks

Definisi 2.5 (Anton, 2004:36) *Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpose dari A dinyatakan dengan A^T dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$*

yang didapatkan dengan mempertukar baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T merupakan baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T merupakan baris kedua dari A, dan seterusnya.

$$\left(A^T\right)_{ij} = (A)_{ji}. \tag{2.6}$$

Beberapa sifat transpose matriks:

a. $\left(\left(A^T\right)\right)^T = A$,

b. $(A + B)^T = A^T + B^T$,

c. $(kA)^T = kA^T$, dengan k adalah sebarang skalar,

d. $(BA)^T = B^T A^T$.

4. Matriks Identitas

Definisi 2.6 (Anton, 2004:46) *Jika A adalah suatu matriks segiempat, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama, sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A dikatakan dapat dibalik (invertible) dan B dinamakan sebagai invers (inverse) dari A.*

Jika A dapat dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol A^{-1}. Jadi,

$$AA^{-1} = I \text{ dan } A^{-1}A = I. \tag{2.7}$$

B. Definisi Peluang

Definisi 2.7 (Bain, et al., 1992:9) *Diberikan suatu percobaan, S menyatakan ruang sampel, $K_1, K_2, K_3, \ldots$ menyatakan kejadian yang mungkin dengan $S = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup \ldots$. Suatu fungsi yang menghubungkan bilangan riil $P(K_i)$ dengan setiap*

kejadian K_i dikatakan sebagai fungsi peluang dan $P(K_i)$ dikatakan sebagai peluang K_i, jika sifat-sifat berikut ini terpenuhi:

i. $P(K_i) \geq 0$ *untuk semua* K_i, (2.8)

ii. $P(S) = 1$, *dan* (2.9)

iii. $P(\cup_{i=1}^{\infty} K_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(K_i)$ *jika* $K_1, K_2, K_3, \ldots$ *saling asing.* (2.10)

Definisi 2.8 (Bain, et al., 1992:18) *Diberikan suatu kejadian acak K_1 dan K_2 maka peluang K_2 dengan syarat K_1 adalah*

$$P(K_2|K_1) = \frac{P(K_1 = k_1, K_2 = k_2)}{P(K_1 = k_1)}. \tag{2.11}$$

Hasil dari setiap percobaan yang dilakukan bernilai numerik atau riil. Untuk menghubungkan setiap anggota dalam ruang sampel dengan nilai riil digunakan variabel random.

1. Variabel Random dan Distribusi Peluang

Dalam pembahasan pengukuran risiko, variabel random digunakan untuk mendefinisikan kerugian (*loss*), karena kerugian merupakan suatu variabel random.

Definisi 2.9 (Bain, et al., 1992:53) *Suatu variabel random (dinotasikan dengan X) adalah suatu fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S, yaitu $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ sehingga menghasilkan nilai $X(e) = x$, dengan $e \in S$ dan $x \in R$.*

Huruf besar seperti X, Y, Z digunakan untuk menotasikan variabel random random, sedangkan huruf kecil seperti x, y, z digunakan untuk menotasikan nilai yang mungkin dari setiap hasil observasi pada ruang sampel.

Ada dua jenis variabel random yaitu variabel random diskrit dan variabel random kontinu. Jika himpunan semua hasil yang mungkin dari variabel random X

berhingga atau tak berhingga tetapi masih dapat dihitung maka X disebut sebagai variabel random diskrit. Sedangkan jika semua hasil yang mungkin dari variabel random X merupakan nilai dalam suatu interval maka X disebut sebagai variabel random kontinu.

Definisi 2.10 (Bain, et al., 1992:56) *Misal X merupakan suatu variabel random. Variabel random X disebut variabel random diskrit jika himpunan nilai yang muncul dari X merupakan himpunan terhitung. Jika X variabel random diskrit, fungsi peluang variabel random X didefinisikan sebagai:*

$$f_X(x_i) = P(X = x_i) \qquad , i = 1, 2, \ldots$$

Distribusi probabilitas dari variabel random X adalah himpunan semua pasangan $\left(x, f_X(x)\right)$. Fungsi yang menunjukkan probabilitas masing-masing nilai X yang mungkin terjadi adalah $f_X(x)$.

Misalkan X adalah variabel random diskrit, maka fungsi densitas probabilitas f_X/pdf (*probability density function*) variabel random X jika dipenuhi:

i. $f_X(x_i) \geq 0$, (2.12)

ii. $\sum_{x_i} f_X(x_i) = 1$, (2.13)

iii. $f_X(x_i) = P(X = x_i)$. (2.14)

Misalkan X adalah variabel random kontinu, maka fungsi densitas probabilitas/pdf (*probability density function*) variabel random X jika dipenuhi:

i. $f_X(x_i) \geq 0$, (2.15)

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$, (2.16)

iii. $\int_a^b f_X(x)dx = P(a < X < b)$. (2.17)

Definisi 2.11 (Bain, et al., 1992:64) *Fungsi distribusi kumulatif/cdf (cumulative distribution function) menggambarkan probabilitas suatu variabel random yang bernilai riil. Misal X merupakan suatu variabel random, maka untuk semua nilai X, cdf-nya adalah:*

$$F_X(x) = P(X \leq x), \textit{untuk } -\infty < x < \infty. \quad (2.18)$$

Probabilitas variabel random X yang kurang dari atau sama dengan x digambarkan dengan $P(X \leq x)$.

Untuk X suatu variabel random diskrit, cdf X adalah:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f_X(t). \quad (2.19)$$

Untuk X suatu variabel random kontinu, cdf X adalah:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-x}^{x} f_X(t)dt. \quad (2.20)$$

2. Nilai Harapan (*Expected Value*)

Definisi 2.12 (Bain, et al., 1992:61) *Jika X adalah variabel random diskrit dengan pdf $f_X(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:*

$$E(X) = \sum_x x f_X(x). \quad (2.21)$$

Jika X adalah variabel random kontinu dengan pdf $f_X(x)$, maka nilai ekspektasi dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx. \quad (2.22)$$

$E(X)$ sering kali ditulis dengan μ atau μ_x.

Sifat-sifat ekspektasi adalah sebagai berikut:

a. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Bukti:

Misal X dan Y adalah variabel kontinu

$$E(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x+y) f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y) dx dy$$

$$= E(X) + E(Y). \quad (2.23)$$

b. $E(aX+b) = aE(X) + b, a$ dan b adalah konstan.

Bukti:

Misal X adalah variabel random kontinu dengan pdf $f(x)$

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b) f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= aE(X) + b. \quad (2.24)$$

c. $E(XY) = E(X)E(Y)$, jika X dan Y independen.

Bukti:

Misal X dan Y variabel random kontinu independen

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (xy) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (xy) f(x,y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy$$

$$= E(X)E(Y). \quad (2.25)$$

3. Varians

Definisi 2.13 (Bain, et al., 1992:73) *Varians dari variabel random X didefinisikan sebagai berikut:*

$$var(X) = E(X-\mu)^2. \quad (2.26)$$

Teorema 2.1 (Bain, et al., 1992:74) *Jika X adalah variabel random, maka*

$$var(X) = E(X^2) - \mu^2. \quad (2.27)$$

Bukti:

$$var(X) = E[(X-\mu)^2]$$

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2.$$

Sehingga didapat

$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$.

Ukuran sebaran yang sering digunakan selain varians adalah standar deviasi yang merupakan akar kuadrat dari varians.

$$\sigma = \sqrt{var(X)}. \quad (2.28)$$

Teorema 2.2 (Bain, et al., 1992:74) *Jika X adalah variabel random, a dan b adalah konstan, maka*

$$var(aX+b) = a^2 var(X). \quad (2.29)$$

Bukti:

$$var(aX+b) = E[(aX+b-a\mu-b)^2]$$

$$= E[a^2(X-\mu)^2]$$

$$= a^2 var(X).$$

4. Kovarians dan Korelasi

Definisi 2.14 (Bain, et al., 1992:174) *Kovarians dari pasangan variabel random X dan Y didefinisikan sebagai berikut:*

$$cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]. \quad (2.30)$$

Dimana untuk variabel random diskrit:

$$E(XY) = \sum\sum xyf(x,y). \quad (2.31)$$

Dan untuk variabel random kontinu:

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\, dx dy. \quad (2.32)$$

Jika X dan Y independen, didapat:

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0. \quad (2.33)$$

Notasi lain untuk kovarians adalah σ_{XY}.

Kovarians digunakan untuk melihat varians antara dua variabel yang berbeda.

Sifat-sifat kovarians (dengan a, b adalah konstanta) didefinisikan sebagai berikut:

a. $cov(aX, bY) = ab\, cov(X,Y)$

Bukti:

Menjabarkan $cov(X,Y)$ terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (2.30) yaitu:

$$cov(X,Y) = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$$

$$= E\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)$$

$$= E\left(XY - X\left(E(Y)\right) - Y\left(E(X)\right) + E(X)E(Y)\right)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y). \quad (2.34)$$

Dan untuk menghitung $E(aX)$ dan $E(bY)$ menggunakan persamaan (2.22) yaitu:

$$E(aX) = \int aXf(x)dx$$

$$= a\int Xf(x)\,dx$$

$$= aE(X). \quad (2.35)$$

$$E(bY) = \int bYf(y)dy$$

$$= b\int Yf(y)$$

$$= bE(Y). \quad (2.36)$$

Sehingga untuk membuktikan $cov(aX, bY) = ab\ cov(X, Y)$ digunakan persamaan (2.34), (2.35), dan (2.36) yaitu:

$$cov(aX, bY) = E\left[\left(aX - E(aX)\right)\left(bY - E(bY)\right)\right]$$

$$= E\left[\left(aX - aE(X)\right)\left(bY - bE(Y)\right)\right]$$

$$= E\left[(aXbY) - aX\left(bE(Y)\right) - bY\left(aE(X)\right) + aE(X)bE(Y)\right]$$

$$= abE(XY) - \left(aE(X)bE(Y)\right) - \left(aE(X)bE(Y)\right) + \left(aE(X)bE(Y)\right)$$

$$= abE(XY) - aE(X)bE(Y)$$

$$= ab[E(XY) - E(X)E(Y)]$$

$$= ab\ cov(X, Y). \quad (2.37)$$

b. $cov(X + a, Y + b) = cov\ (X, Y)$

Bukti:

Menghitung $E(X + a)$ dan $E(Y + b)$ dengan menggunakan persamaan (2.22) yaitu:

$$E(X + a) = \int (X + a)f(x)dx$$

$$= \int Xf(x)dx + \int af(x)dx$$

$$= E(X) + a\int f(x)\,dx$$

$$= E(X) + a. \quad (2.38)$$

$$E(Y + b) = \int (Y + b)f(y)dy$$

$$= \int Yf(y)dy + \int bf(y)dy$$

$$= E(Y) + b\int f(y)dy$$

$$= E(Y) + b. \quad (2.39)$$

Sehingga untuk membuktikan $cov(X + a, Y + b) = cov\ (X, Y)$ digunakan persamaan (2.34), (2.38), dan (2.39) yaitu:

$$cov(X + a, Y + b) = E\left[\left((X + a) - E(X + a)\right)\left((Y + b) - E(Y + b)\right)\right]$$

$$= E\left[\left((X + a) - (E(X) + a)\right)\left((Y + b) - (E(Y) + b)\right)\right]$$

$$= E[(X + a)(Y + b) - (E(X) + a)(Y + b)$$

$$-(E(Y) + b)(X + a) + (E(X) + a)(E(Y) + b)]$$

$$= E[(XY + bX + aY + ab) - (YE(X) + bE(X) + aY + ab)$$

$$-(XE(Y) + aE(Y) + bX + ab)$$

$$+(E(X)E(Y) + bE(X) + aE(Y) + ab)]$$

$$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y) - bE(X) + bE(X)$$

$$-aE(Y) + aE(Y) + bX - bX + aY - aY + ab - ab - ab$$

$$+ab]$$

$$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= cov(X, Y). \quad (2.40)$$

c. $cov(X, aX + b) = a\ var(X)$

Bukti:

Menjabarkan $var(X)$ terlebih dahulu dengan menggunakan persamaan (2.26) yaitu:

$$var(X) = E[(X - \mu)^2]$$

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

$$= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2. \quad (2.41)$$

dan untuk menghitung $E(aX + b)$ dengan menggunakan persamaan (2.22) yaitu:

$$E(aX + b) = \int (aX + b)f(x)dx$$

$$= \int aXf(x)dx + \int bf(x)dx$$

$$= a\int Xf(x)dx + b\int f(x)dx$$

$$= aE(X) + b. \quad (2.42)$$

Sehingga untuk membuktikan $cov(X, aX + b) = a\ var(X)$ digunakan persamaan (2.41) dan (2.42) yaitu:

$$cov(X, aX + b) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left((aX + b) - E(aX + b)\right)\right]$$

$$= E[X(aX + b) - \left(E(X)\cdot(aX + b)\right) - \left(XE(aX + b)\right)$$

$$+\left(E(X)\cdot E(aX + b)\right)]$$

$$= E(aX^2 + bX) - E\left(E(X)\cdot(aX + b)\right) - E\left(X(aE(X) + b)\right)$$

$$+E\left(E(X)\cdot(aE(X) + b)\right)$$

$$= aE(X^2) + bE(X) - E(X)\cdot E(aX + b) - aE(X)\cdot E(X)$$

$$-bE(X) + E(X)\cdot aE(X) + bE(X)$$

$$= aE(X^2) - E(X)\cdot(aE(X) + b) - a\left(E(X)\right)^2 + a\left(E(X)\right)^2$$

$$+bE(X)$$

$$= aE(X^2) - a\left(E(X)\right)^2 - bE(X) - a\left(E(X)\right)^2 + a\left(E(X)\right)^2$$

$$+bE(X)$$

$$= aE(X^2) - a\left(E(X)\right)^2$$

$$= a\left[E(X^2) - \left(E(X)\right)^2\right]$$

$$= a\ var(X). \quad (2.43)$$

Teorema 2.3 (Bain, et al., 1992:178) *Jika X_1 dan X_2 adalah variabel random dengan fungsi densitas probabilitas gabungan $f(x_1, x_2)$ maka*

$$var(X_1 + X_2) = var(X_1) + var(X_2) + 2cov(X_1, X_2). \quad (2.44)$$

Bukti:

Jika nilai ekspektasi X_1 dan X_2 dinyatakan dengan $\mu_i = E(X); i = 1{,}2$ maka

$$var(X_1 + X_2) = E[(X_1 + X_2) - (\mu_1 + \mu_2)]^2$$

$$= E[(X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2)]^2$$

$$= E[(X_1 - \mu_1)^2] + E\left[\left(X_2 - \mu_2\right)^2\right] + 2E[(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2)]$$

$$= var(X_1) + var(X_2) + 2cov(X_1, X_2).$$

Definisi 2.15 (Johnson, 2002:69) *Jika X adalah variabel random dengan mean μ dan kovarian $\sum$, vektor random X dengan ordo $p \times 1$ maka ditulis sebagai matriks yaitu*

$$E(X) = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu. \quad (2.45)$$

$$\sum = E(X-\mu)(X-\mu)^T$$

$$= E\left[\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ \vdots \\ X_p-\mu_p \end{bmatrix} 1(X_1-\mu_1 \quad \cdots \quad X_p-\mu_p)\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(X_1-\mu_1)^2 & E(X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ E(X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & E(X_2-\mu_2)^2 & \cdots & E(X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & E(X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & E(X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$\sum = cov(X) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

dengan $\sigma_{ii}, i = 1, \dots, p$ adalah varians ke- p.

$\sum$ menunjukkan matriks varians kovarians.

Definisi 2.16 (Bain, et al., 1992:178) *Jika X dan Y adalah variabel random dengan varians σ_X^2 dan σ_Y^2 dan kovarians $\sigma_{XY} = cov(X,Y)$, maka koefisien korelasi antara X dan Y adalah*

$$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}. \quad (2.47)$$

Variabel random X dan Y dinyatakan tidak berkorelasi jika $\rho = 0$.

Teorema 2.4 (Bain, et al., 1992:178) *Jika ρ adalah koefisien korelasi dari X dan Y, maka*

$$-1 \le \rho \le 1. \quad (2.48)$$

Bukti:

Misalkan

$$Z = \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)X - \left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)Y$$

maka,

$$var(Z) = E[(Z-\mu)^2]$$

$$= E\left[\left(\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)X - \left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)Y\right) - \left(\mu_{\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)X} - \mu_{\left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)Y}\right)\right]^2$$

$$= E\left[\left(\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)X - \mu_{\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)X}\right) - \left(\left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)Y - \mu_{\left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)Y}\right)\right]^2$$

$$= E\left[\left(\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)(X-\mu_X)\right) - \left(\left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)(Y-\mu_Y)\right)\right]^2$$

$$= E\left(\left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 (X-\mu_X)^2\right) + E\left(\left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)^2 (Y-\mu_Y)^2\right)$$

$$-2E\left(\frac{1}{\sigma_X}\frac{\rho}{\sigma_Y}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 E(X-\mu_X)^2 + \left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)^2 E(Y-\mu_Y)^2$$

$$-2\rho\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}E\big((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big)$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_X}\right)^2 \sigma_X^2 + \left(\frac{\rho}{\sigma_Y}\right)^2 \sigma_Y^2 - 2\rho\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$$

$$= 1 + \rho^2 - 2\rho^2$$

$$= 1 - \rho^2$$

Karena $var(Z) \ge 0$

$$1 - \rho^2 \ge 0$$

$$\rho^2 - 1 \le 0$$

$$(\rho+1)(\rho-1) \le 0$$

maka $-1 \le \rho \le 1$.

Definisi 2.17 (Johnson, 2002:72) *Dalam bentuk matriks*

$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$*, anggota pada diagonal di dalam matriks tersebut adalah 1, karena* $\rho_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{\sigma_i \sigma_i} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_1^2} = 1$.

C. Fungsi Lagrange

Definisi 2.18 (Purcell, 2010:456) *Untuk memaksimumkan atau meminimumkan $f(\boldsymbol{p})$ terhadap kendala $g(\boldsymbol{p}) = 0$ dengan menyelesaikan persamaan*

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) = \lambda \nabla g(\boldsymbol{p}) \text{ dan } g(\boldsymbol{p}) = 0 \quad (2.49)$$

untuk $\boldsymbol{p}$ dan λ. Tiap titik $\boldsymbol{p}$ adalah suatu titik kritis untuk masalah nilai ekstrim terkendala dan λ yang berpadanan disebut pengali Lagrange, dengan $\nabla f(\boldsymbol{p})$ merupakan vektor gradien dari $f(\boldsymbol{p})$ dan $\nabla(\boldsymbol{p})$ merupakan vektor gradien dari $g(\boldsymbol{p})$.

Definisi 2.19 (Purcell, 2010:456) *Jika ada lebih dari satu kendala yang diberlakukan pada variabel-variabel suatu fungsi yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan, maka digunakan pengali-pengali Lagrange tambahan (satu untuk setiap kendala).*

Misalkan untuk memperoleh nilai ekstrim *f(x,y,z)* dengan *constraint g(x,y,z)* = 0 dan *h(x,y,z)* maka fungsi Lagrange untuk memperoleh nilai ekstrim *f(x,y,z)* adalah

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z). \quad (2.50)$$

Cara penyelesaiannya adalah $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$ dan $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0$.

Metode ini dapat diperluas untuk *n* variabel $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dengan *k* kendala

$$\Phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \Phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \Phi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.51)$$

serta fungsi Lagrangenya adalah

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) = f + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \cdots + \lambda_k\Phi_k\,. \quad (2.52)$$

Sehingga cara penyelesaiannya adalah

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 0, \frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 0, \dots, \frac{\partial F}{\partial \lambda_k} = 0, \quad (2.53)$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ merupakan pengali Lagrange.

Contoh 2.1 (Satu pengali Lagrange)

Sebuah perusahaan memproduksi dua macam barang x dan y, dengan biaya produksi yang dirumuskan oleh $C(x,y) = x^2 + 3xy - 6y$. Untuk meminimumkan biaya, berapa banyaknya tiap macam barang yang harus diproduksi jika diketahui jumlah kedua barang adalah 42 ?

Jawab:

Masalah tersebut dapat diformulasikan sebagai berikut, $C(x,y) = x^2 + 3xy - 6y$ dengan *constrains* $x + y = 42$ atau dapat ditulis, *constrains* $g(x,y) = x + y - 42 = 0$. Selanjutnya dapat dibentuk fungsi Lagrange yaitu:

$F(x, y, \lambda) = C(x, y) + \lambda g(x, y)$

$= (x^2 + 3xy - 6y) + \lambda(x + y - 42) = 0$

$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + \lambda = 0$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x - 6 + \lambda = 0$; $\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 42 = 0$.

Maka diperoleh solusi nilai $x = 33, y = 9$ dan $\lambda = -93$.

Jadi biaya produksi minimum apabila jumlah produksi nilai $x = 33$ dan $y = 9$. Sedangkan biaya minimumnya adalah $C = 33^2 + 3(33)(9) - 6(9) = 1926$.

D. Distribusi Empiris

Definisi 2.20 (Efron, 1993 :31) *Sampel random berukuran n dari distribusi probabilitas F didefinisikan:*

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim F. \tag{2.54}$$

Fungsi distribusi empiris $\hat{F}$ didefinisikan sebagai distribusi diskrit dengan probabilitas $1/n$ untuk setiap x_i , $i = 1, 2, \ldots, n$. Dengan kata lain, $\hat{F}$ membentuk himpunan A pada ruang sampel S dengan probabilitas empiris:

$$\hat{P} = \frac{banyaknya\ (x_i \in A)}{n}. \tag{2.55}$$

A dapat dipandang sebagai proporsi dari sampel $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Distribusi empiris $\hat{F}$ memberikan probabilitas $1/n$ dalam setiap hasil pelemparan. Dimana terdapat hasil pelemparan yang muncul berulang-ulang yang dinyatakan sebagai vektor dari peluang hasil percobaan yaitu $\hat{f}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, maka

$$\hat{f}_k = \frac{banyaknya\ (x_i = x_k)}{n}. \tag{2.56}$$

Distribusi empiris adalah daftar nilai-nilai yang diperoleh dari sampel $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dengan proporsi waktu pada masing-masing kejadian.

$$\hat{F} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \ldots). \tag{2.57}$$

Sehingga nilai dari μ adalah $\mu = E_F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ dengan $\hat{F} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \ldots)$ maka diperoleh

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i . \hat{f}_i = x_1 . \hat{f}_1 + x_2 . \hat{f}_2 + x_3 . \hat{f}_3 + \cdots \tag{2.58}$$

Contoh 2.2

Diketahui keuntungan suatu investasi selama 6 periode. Disajikan dalam tabel:

Periode	Tingkat keuntungan
1	0.20
2	0.25
3	0.30
4	0.20
5	0.30
6	0.20

Sehingga diperoleh

$x_1 = 0.20$ dengan $\hat{f}_1 = \frac{3}{6}$

$x_2 = 0.25$ dengan $\hat{f}_2 = \frac{1}{6}$

$x_3 = 0.30$ dengan $\hat{f}_3 = \frac{2}{6}$

maka nilai dari $\mu = 0.20\left(\frac{3}{6}\right) + 0.25\left(\frac{1}{6}\right) + 0.30\left(\frac{2}{6}\right) = 0.24$.

E. Metode Bootstrapping

Metode simulasi Bootstraping bebas dari asumsi distribusi normal dan distribusi statistika lainnya (Efron, 1993:5). Teknik penarikan sampel metode Bootstrapping adalah dengan pengembalian dari sebuah sampel asli. Sampel asli merupakan sampel yang diperoleh dari hasil observasi yang diperlakukan seolah-olah sebagai populasi. Nama Bootstrap sendiri diambil dari sebuah frase "*Pull up by your own Bootstrap*" yang artinya bergantunglah pada sumbermu sendiri. Dalam hal ini, metode Bootstrapping bergantung pada sampel yang merupakan satu-satunya

sumber yang dimiliki seorang peneliti. Dalam kasus dimana serangkaian pengamatan dapat diasumsikan dari independen dan terdistribusi secara identik, hal ini dapat diimplementasikan dengan membangun sejumlah *resamples* dari data set yang diamati (dan ukuran sama dengan data set yang diamati), yang masing-masing diperoleh random sampling dengan penggantian dari data set asli.

F. Investasi

Investasi adalah komitmen atas sejumlah dana atau sumber daya lainnya yang dilakukan pada saat ini, dengan tujuan memperoleh sejumlah keuntungan di masa datang. Seorang investor membeli sejumlah saham saat ini dengan harapan memperoleh keuntungan dari kenaikan harga saham ataupun sejumlah dividen di masa yang akan datang, sebagai imbalan atas waktu dan risiko yang terkait dengan investasi tersebut (Tandelilin, 2001:3).

Proses keputusan investasi merupakan proses keputusan yang berkesinambungan (*on going process*). Proses keputusan investasi terdiri dari lima tahap keputusan yang berjalan terus menerus sampai tercapai keputusan investasi terbaik. Tahap-tahap keputusan investasi meliputi lima tahap keputusan, yaitu:

1. Penentuan tujuan investasi

Tahap pertama dalam proses keputusan investasi adalah menentukan tujuan investasi yang akan dilakukan. Tujuan investasi masing-masing investor bisa berbeda-beda tergantung pada investor yang membuat keputusan tersebut. Misalnya, lembaga dana pensiun yang bertujuan untuk memperoleh dana untuk membayar dana pensiun nasabahnya di masa depan mungkin akan memilih investasi pada portofolio reksadana karena merupakan investasi bersama dalam bentuk suatu efek portofolio yang terdiversifikasi. Sedangkan bagi institusi penyimpanan dana seperti

bank misalnya, mempunyai tujuan untuk memperoleh return yang lebih tinggi di atas biaya investasi yang dikeluarkan. Mereka biasanya lebih menyukai investasi pada aset yang mudah diperdagangkan ataupun pada penyaluran kredit yang lebih berisiko tetapi memberikan harapan return yang tinggi.

2. Penentuan kebijakan investasi

Tahap kedua ini merupakan tahap penentuan kebijakan untuk memenuhi tujuan investasi yang telah ditetapkan. Tahap ini dimulai dengan penentuan keputusan alokasi aset (*aset allocation decision*). Keputusan ini menyangkut pendistribusian dana yang dimiliki pada berbagai klas-klas aset yang tersedia (saham, obligasi, real estat ataupun aset luar negeri). Investor juga harus memperhatikan berbagai batasan yang mempengaruhi kebijakan investasi seperti seberapa besar dana yang dimiliki dan porsi pendistribusian dana tersebut serta beban pajak dan pelaporan yang harus ditanggung.

3. Pemilihan strategi portofolio

Strategi portofolio yang dipilih harus konsisten dengan dua tahap sebelumnya. Ada dua strategi portofolio yang bisa dipilih, yaitu strategi portofolio aktif dan strategi portofolio pasif. Strategi portofolio aktif meliputi kegiatan penggunaan informasi yang tersedia dan teknik-teknik peramalan secara aktif untuk mencari kombinasi portofolio yang lebih baik. Strategi portofolio pasif meliputi aktifitas investasi pada portofolio yang seiring dengan kinerja indeks pasar. Asumsi strategi pasif ini adalah bahwa semua informasi yang tersedia akan diserap pasar dan direfleksikan pada harga saham.

4. Pemilihan aset

Setelah stategi portofolio ditentukan, tahap selanjutnya adalah pemilihan aset-aset yang akan dimasukkan dalam portofolio. Tahap ini memerlukan pengevaluasian setiap aset yang ingin dimasukkan dalam portofolio. Tujuan tahap ini adalah untuk mencari kombinasi portofolio yang efisien, yaitu portofolio yang menawarkan return yang diharapkan yang tertinggi dengan tingkat risiko tertentu atau sebaliknya menawarkan return yang diharapkan tertentu dengan tingkat risiko terendah.

5. Pengukuran dan evaluasi kinerja portofolio

Tahap ini merupakan tahap paling akhir dari proses keputusan investasi. Meskipun demikian, adalah salah kaprah jika kita langsung mengatakan bahwa tahap ini adalah tahap terakhir, karena sekali lagi, proses keputusan investasi merupakan proses berkesinambungan dan terus menerus. Artinya, jika tahap pengukuran dan evaluasi kinerja telah dilewati dan ternyata hasilnya kurang baik, maka proses keputusan investasi harus dimulai lagi dari tahap pertama, demikian seterusnya sampai dicapai keputusan investasi yang paling optimal. Tahap pengukuran dan evaluasi ini meliputi pengukuran kinerja portofolio dan pembandingan hasil pengukuran tersebut dengan kinerja portofolio lainnya melalui proses *benchmarking*. Proses *benchmarking* ini biasanya dilakukan terhadap indeks portofolio pasar, untuk mengetahui seberapa baik kinerja portofolio yang telah ditentukan dibanding kinerja portofolio lainnya (portofolio pasar) (Tandelilin, 2001:3).

G. Return

Tujuan dari investor dalam melakukan investasi adalah untuk memperoleh pendapatan di masa mendatang. Pendapatan atau kerugian yang didapat dalam berinvestasi tergantung pada perubahan harga dari jumlah aset yang dimiliki. Para investor tertarik dengan pendapatan yang relatif besar terhadap besar investasi awal. Return mengukur pendapatan itu, karena return dari suatu aset adalah perubahan

harga dari harga awal dan return merupakan salah satu faktor yang memotivasi investor dalam berinvestasi (Ruppert, 2001:23).

1. *Net Return*

Jika seseorang menginvestasikan dananya pada waktu t_1 pada suatu aset dengan harga P_{t_1} dan harga pada waktu selanjutnya (misalnya periode satu hari atau satu minggu atau satu bulan) t_2 adalah P_{t_2}, maka *net return* pada periode t_1 dan t_2 adalah $\left(P_{t_2} - P_{t_1}\right)/P_{t_1}$. *Net return* dapat digambarkan sebagai pendapatan relatif atau tingkat keuntungan (*profit rate*).

Secara umum, *net return* antara periode $t-1$ sampai t adalah sebagai berikut:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}. \tag{2.59}$$

dimana R_t = *net return*

P_t = harga investasi pada saat t

P_{t-1} = harga investasi pada saat $t-1$

Pendapatan dari kepemilikan suatu aset adalah

$$Pendapatan = investasi\ awal \times net\ return$$

Misalnya, suatu investasi awal bernilai Rp 10.000.000,00 dan suatu *net return* adalah 0.07, maka pendapatan yang diperoleh adalah Rp 10.000.000,00 $\times$ 0.07 = Rp 700.000,00.

2. *Gross Return*

Pada *net return*, return dapat bernilai positif maupun negatif tetapi pada *gross return* nilainya positif. *Gross return*, $1 + R_t$, didefinisikan sebagai berikut:

$$1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{2.60}$$

Misalnya, $P_t = 2$ dan $P_{t-1} = 2.1$, maka $1 + R_t = 1.05$ dan $R_t = 0.05$ atau 5%.

3. *Log Return*

Log return atau disebut juga sebagai *continuously compounded returns*, dinotasikan dengan r_t, dan didefinisikan sebagai berikut:

$$r_t = log(1 + R_t) = log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = log(P_t) - log(P_{t-1}). \tag{2.61}$$

dengan $P_t = log(P_t)$

pada pembahasan *log return* ini, $log(1 + R_t)$ berarti logaritma natural dari $(1 + R_t)$, sehingga return dapat juga dinotasikan sebagai berikut:

$$r_t = ln(1 + R_t) = ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = ln(P_t) - ln(P_{t-1}). \tag{2.62}$$

H. Risiko

Secara umum, risiko adalah tingkat ketidakpastian akan terjadinya sesuatu atau tidak terwujudnya sesuatu tujuan, pada suatu kurun atau periode waktu tertentu (*time period*).

Dalam konteks manajemen investasi, risiko merupakan besarnya penyimpangan antara tingkat pengembalian yang diharapkan (*expected return*/ER) dengan tingkat pengembalian actual (*actual return*). Semakin besar penyimpangannya berarti semakin besar tingkat risikonya.

Apabila risiko dinyatakan sebagai seberapa jauh hasil yang diperoleh dapat menyimpang dari hasil yang diharapkan, maka digunakan ukuran penyebaran untuk mengukur risiko. Alat statistik yang digunakan untuk sebagai ukuran penyebaran tersebut adalah varians atau standar deviasi. Semakin besar nilainya, berarti semakin besar penyimpangannya (berarti risikonya semakin tinggi) (Halim, 2005:42).

Jika terdapat n (banyak observasi) return, maka ekspektasi return dapat diestimasi dengan menghitung rata-rata sampel (mean) return yaitu:

$$\overline{R}_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} R_t. \tag{2.63}$$

Return rata-rata kemudian digunakan untuk mengestimasi varians tiap periode yaitu kuadrat standar deviasi per periode yaitu sebagai beikut:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \overline{R_t}\right)^2, \tag{2.64}$$

disebut varians per periode karena besarnya tergantung waktu ketika return diukur. Akar dari varians (standar deviasi) merupakan estimasi risiko dari harga saham yaitu:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \overline{R_t}\right)^2}{\boldsymbol{n-1}}}. \tag{2.65}$$

Standar deviasi tahunan (volatilitas tahunan) dapat diestimasi sebagai berikut:

$$S_T = \sqrt{T\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(R_t - \overline{R_t}\right)^2}{n-1}}. \tag{2.66}$$

dimana:

S_T = standar deviasi tahunan

T = jumlah hari perdagangan.

I. Portofolio

Portofolio merupakan kombinasi atau gabungan atau sekumpulan aset, baik berupa aset riil maupun aset finansial yang dimiliki oleh investor. Hakikat pembentukan portofolio adalah untuk mengurangi risiko dengan cara diversifikasi, yaitu mengalokasikan sejumlah dana pada berbagai alternatif investasi yang berkorelasi negatif.

Suatu portofolio dikatakan efisien apabila portofolio tersebut ketika dibandingkan dengan portofolio lain memenuhi kondisi berikut:

1. Memberikan ER (*Expected Return*) terbesar dengan risiko yang sama, atau

2. Memberikan risiko terkecil dengan ER yang sama (Halim, 2005:54).

Untuk membentuk portofolio yang efisien, asumsi perilaku investor yang wajar cenderung menghindari risiko (*risk averse*). Investor yang *risk averse* adalah investor yang jika dihadapkan pada dua investasi dengan *expected return* yang sama dan risiko yang berbeda, maka ia akan memilih investasi dengan tingkat risiko yang lebih rendah. Jika seorang investor memiliki beberapa pilihan portofolio efisien, maka portofolio optimal-lah yang akan dipilihnya (Abdurrakhman, 2007:42).

J. Diversifikasi Portofolio

Untuk menurunkan risiko portofolio, investor perlu melakukan diversifikasi. Diversifikasi dalam pernyataan tersebut bisa bermakna bahwa investor perlu membentuk portofolio sedemikian rupa hingga risiko portofolio dapat diminimalkan tanpa mengurangi return yang diharapkan. Mengurangi risiko tanpa mengurangi return adalah tujuan investor dalam berinvestasi (Tandelilin, 2001:60).

Namun, ketika investor memutuskan untuk melakukan diversifikasi ada beberapa permasalahan yang perlu diperhatikan. Salah satu permasalahan yang sering terjadi ketika melakukan diversifikasi adalah penentuan atau pemilihan sejumlah aset-aset spesifik tertentu dan penentuan proporsi dana yang akan diinvestasikan untuk masing-masing aset tersebut dalam portofolio. Untuk menghindari permasalahan tersebut investor harus bisa memilih cara melakukan diversifikasi yang tepat, antara lain (Jogiyanto, 2010:279)

1. Diversifikasi dengan banyak aktiva

Sesuai hukum statistik bahwa semakin besar ukuran sampel, semakin dekat nilai rata-rata sampel dengan nilai ekspektasi dari populasi. Asumsi yang digunakan adalah bahwa tingkat hasil (*rate of return*) untuk masing-masing aset secara statistik

adalah independen. Ini berarti bahwa *rate of return* untuk satu aset tidak terpengaruhi oleh *rate of return* aset yang lainnya, maka standar deviasi yang mewakili risiko dari portofolio dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}. \tag{2.67}$$

dengan σ_ρ = risiko portofolio

σ_i = standar deviasi aset i

n = jumlah aset

2. Diversifikasi secara random

Diversifikasi secara random (random atau *naive diversification*) merupakan pembentukan portofolio dengan memilih aset-aset secara acak tanpa memperhatikan karakteristik dari investasi yang relevan seperti misalnya return dari aset itu sendiri. Investor hanya memilih secara acak.

3. Diversifikasi secara Markowitz

Dengan menggunakan metode *mean-variance* dari Markowitz, aset-aset yang mempunyai korelasi lebih kecil dari +1 akan menurunkan risiko portofolio, sehinggan semakin banyak aset yang dimasukkan ke dalam portofolio, semakin kecil risiko portofolio. Untuk n sejumlah aset mendekati tak berhingga, risiko dari portofolio adalah:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_\rho^2 = \sigma_{ij}. \tag{2.68}$$

dimana n = jumlah aset

σ_ρ^2 = variansi dari tingkat keuntungan portofolio

σ_{ij} = standar deviasi masing-masing aset

DAFTAR PUSTAKA

Abdurrakhman. 2007. *Buku Ajar Pengantar Statistika Keuangan*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.

Anton, H & Rosses, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Versi Aplikasi. Edisi kedelapan. Jakarta: Erlangga.

Bain, L J & Engelhardt, M. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*. Second Edition. California: Duxbury Press.

Efron, B & Tibshirani, J R. 1993. *An Intoduction to the Bootstrap*. New York: Chapman & Hall, Inc.

Halim, A. 2005. *Analisis Investasi*. Edisi kedua. Jakarta: Salemba Empat.

Jogiyanto. 2010. *Teori Portofolio dan Analisis Investasi*. Edisi ketujuh. Yogyakarta: BPFE.

Johnson, R A & Wichern, D W. 2002. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Fifth Edition. New Jersey. Prentice-Hall Inc.

Jorion, P. 2007. *Value at Risk: The New Benchmark Managing Financial Risk*. Third Edition. New York: The Mc Graw-Hill Companies.

Purcell, E J & Varberg, D. 2010. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.

Ruppert, D. 2001. *Empirical Methods in Financial Engineering*. New York: Springer.

Tandelilin, E. 2007. *Analisis Investasi dan Manajemen Portofolio*. Edisi Pertama. Yogyakarta: BPFE.

Historycal Price PT. Gudang Garam Tbk tahun 2012, URL: www.yahoofinance.com, diakses pada 24 Oktober 2013.

Historycal Price PT. Indofood Sukses Makmur Tbk tahun 2012, URL: www.yahoofinance.com, diakses pada 24 Oktober 2013.