

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA *MSIR* PADA
PENCEGAHAN PENYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B
DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI**

SKRIPSI

Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



**Oleh
Zakiya Latifah
NIM. 09305144018**

**PROGAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

2014

**ANALISIS KESTABILAN MODEL MATEMATIKA MSIR PADA
PENCEGAHAN PEYEBARAN PENYAKIT HEPATITIS B
DENGAN PEMBERIAN VAKSINASI**

Oleh
Zakiya Latifah
NIM. 09305144018

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan membentuk model matematika dari pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B dengan pemberian vaksinasi dan menganalisis model yang dihasilkan.

Pada penelitian ini, model endemik *MSIR* digunakan untuk memodelkan pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B dengan pemberian vaksinasi. Analisis dilakukan untuk mengetahui kestabilan dari titik ekuilibrium-titik ekuilibrium yang ada melalui pelinieran.

Berdasarkan hasil analisis, diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit (E_0) dan titik ekuilibrium endemik (E^*). Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil jika nilai *basic reproduction number* dengan vaksinasi (R_v) kurang dari 1 dan titik ekuilibrium endemik stabil jika nilai *basic reproduction number* dengan vaksinasi (R_v) lebih dari 1. Selain itu, didapatkan bahwa laju vaksinasi minimum (v_m) yang dibutuhkan adalah sebesar 0.324 persen dari jumlah populasi bayi yang ada, agar penyebaran penyakit dapat dicegah dan dikendalikan dalam populasi.

Kata kunci: hepatitis B, model *MSIR*, kestabilan, vaksinasi, *basic reproduction number*.

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Hepatitis secara umum adalah penyakit peradangan hati yang disebabkan oleh virus. Sampai saat ini, sudah ada tujuh jenis hepatitis yang ditemukan sesuai dengan nama virus yang menyerangnya, yaitu hepatitis A, hepatitis B, hepatitis C, hepatitis D, hepatitis E, hepatitis G dan hepatitis TTV (*transmition transfusion virus*). Dari tujuh jenis hepatitis tersebut, hepatitis B paling banyak dijumpai di dunia dan paling berbahaya. Hepatitis B menjadi penyakit yang berbahaya dibandingkan dengan jenis hepatitis lain karena hepatitis B dapat membunuh penderitanya secara pelan-pelan. Hal ini karena virus penyebab hepatitis B mampu bertahan dan menetap dalam tubuh. Selain itu, hepatitis B dapat berkembang menjadi sirosis hati (pengerasan hati) atau berakhir menjadi kanker hati (Cahyono, 2010: 20). Pada saat ini, diperkirakan lebih dari 350 juta orang menderita hepatitis B (Cahyono, 2010: 7). Dari keseluruhan penderita hepatitis B didunia tersebut, hampir 75% penderita berada di benua Asia termasuk di Indonesia.

Indonesia merupakan negara dengan pengidap hepatitis B terbanyak di benua Asia setelah Cina dan India. Pengidap Hepatitis B di Indonesia banyak yang tinggal di Papua dan Nusa Tenggara Timur. Diperkirakan sampai saat ini, 23 juta penduduk Indonesia mengidap hepatitis B (Forum Kompas, 2012). Oleh karena itu, untuk mencegah agar penyakit ini tidak semakin merebak pemerintah

mencanangkan program vaksinasi. Program ini merupakan salah satu upaya yang dapat dilakukan untuk mencegah penyebaran penyakit hepatitis B.

Program vaksinasi hepatitis B direkomendasikan oleh WHO untuk dilaksanakan secara serentak di semua negara sejak tahun 1991. Program ini diutamakan untuk bayi yang baru lahir. Berdasarkan penelitian WHO vaksinasi hepatitis B tersebut dapat menurunkan terjadinya infeksi VHB sebesar 95% pada tubuh seseorang. Jika tidak dilakukan vaksinasi, maka bayi yang tertular penyakit hepatitis B baik dari sang ibu atau dari orang lain berisiko besar tidak akan sembuh (Cahyono, 2010: 40-45). Kemudian, dalam jangka waktu 10-30 tahun, penyakit hepatitis B yang dialami bayi, akan berkembang menjadi sirosis hati (pengerasan hati) atau kanker hati (Wijayakusuma, 2008: 13). Oleh karena itu, penting dilakukan program vaksinasi tersebut untuk mencegah penyebaran penyakit hepatitis B.

Penelitian terhadap penyebaran penyakit hepatitis B telah banyak dilakukan, di antaranya adalah “*Analysis Stability of Mathematical Model of Hepatitis B*” oleh Momoh, Ibrahim, Madu dan Asogawa (2011). Pada penelitian ini, Momoh, Ibrahim, Madu dan Asogawa menggunakan model *MSIR* untuk menggambarkan penyebaran penyakit hepatitis B akan tetapi belum ada pemberian vaksinasi sebagai upaya pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B. Makalah lain berjudul “*Analisis Model Matematika untuk Penyebaran Virus Hepatitis B (HBV)*” oleh Larasati dan Tjahjana (2012). Pada penelitian ini, Larasati dan Tjahjana menggambarkan penyebaran penyakit hepatitis B dengan menggunakan model *SIR* dengan pemberian terapi. Kedua penelitian tersebut

dilakukan dengan menggunakan metematika sebagai alat untuk menganalisis penyebaran penyakit hepatitis B.

Pada skripsi ini, matematika akan digunakan sebagai alat bantu untuk mengetahui langkah dalam menentukan strategi pengendalian penyebaran virus hepatitis B dengan menggunakan vaksinasi. Penentuan strategi ini akan dilakukan melalui pemodelan matematika. Pemodelan yang dilakukan didasarkan pada model endemik *MSIR* (*M* menyatakan banyaknya individu dengan imun pasif, *S* menyatakan banyaknya individu rentan, *I* menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi dan *R* menyatakan banyaknya individu yang sembuh dan kebal dari penyakit). Digunakannya model endemik *MSIR* ini, karena pada kasus hepatitis B, bayi yang baru lahir tidak masuk dalam kelas rentan karena diasumsikan bayi kebal terhadap hepatitis B. Hal ini dikarenakan setiap bayi baru lahir mempunyai imun pasif yang melindunginya dari infeksi dan virus selama beberapa bulan yang diperoleh dari antibodi ibu. Setelah imun pasif menghilang, maka bayi akan masuk ke dalam kelas rentan. Sehingga model *MSIR* lebih cocok untuk kasus ini.

B. Pembatasan Masalah

Dalam pembahasan tugas akhir ini, pemberian vaksinasi hepatitis B hanya diberikan pada bayi dan tidak ada kematian yang disebabkan oleh penyakit hepatitis B.

C. Rumusan Masalah

1. Bagaimakah bentuk model metematika untuk pencegahan penyebaran penyakit hepatitis B dengan pemberian vaksinasi?

2. Bagaimana analisis kestabilan pada titik ekuilibrium yang diperoleh dari model?
3. Berapa batas minimal pemberian vaksinasi yang dibutuhkan agar penyebaran penyakit hepatitis B dapat dicegah dan dikendalikan?

D. Tujuan Penulisan

1. Membentuk model metematika untuk penyebaran pencegahan penyakit hepatitis B dengan pemberian vaksinasi.
2. Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dari model yang diperoleh.
3. Menentukan batas minimal pemberian vaksinasi yang dibutuhkan agar penyebaran penyakit dapat dicegah dan dikendalikan.

E. Manfaat Penulisan

1. Bagi mahasiswa

Menambah pengetahuan dan kemampuan dalam mengaplikasikan ilmu matematika dalam bidang pemodelan terutama model penyebaran hepatitis B.

2. Bagi universitas

Sebagai bahan acuan mahasiswa lain dalam menambah pengetahuan dan pengembangan terkait pemodelan matematika khususnya penyebaran hepatitis B.

BAB II **LANDASAN TEORI**

A. Sistem Dinamik

1. Pengertian Sistem Dinamik

Suatu keadaan selalu mengalami perubahan terhadap waktu. Hal-hal yang berubah terhadap waktu tersebut, secara matematis dinyatakan sebagai fungsi waktu. Tidak semua perubahan dapat dengan mudah ditulis sebagai fungsi waktu secara eksplisit. Beberapa di antaranya muncul dalam bentuk persamaan diferensial, yang secara matematis dapat ditulis sebagai $\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Jika perubahan dari suatu keadaan dapat dinyatakan dalam beberapa persamaan diferensial yang saling bergantung satu sama lain membentuk suatu sistem persamaan diferensial, maka sistem tersebut kemudian disebut sebagai sistem dinamik.

Jika sistem dinamik ini secara eksplisit bergantung terhadap waktu, maka sistem dinamik disebut sistem dinamik non-otonom dan apabila sistem tersebut tidak bergantung terhadap waktu secara eksplisit disebut sistem otonom (Wiggins, 2003: 2). Sistem dinamik otonom dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2. 1)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Jika f tidak memuat konstanta maka sistem (2.1) disebut sebagai sistem dinamik homogen (Perko, 2000: 2). Jika f menyatakan fungsi linier dan tidak memuat konstanta maka sistem (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.2)$$

dengan \mathbf{A} adalah suatu matriks konstan berukuran $n \times n$ dan \mathbf{x} adalah suatu matriks berukuran $n \times 1$.

Contoh:

- a. Sistem autonom dicontohkan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 12 & - \end{bmatrix}.$$

- b. Sistem non-autonom dicontohkan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}.$$

- c. Sistem non-linier homogen dicontohkan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3xy \\ y^2 - \end{bmatrix}.$$

- d. Sistem non-linier non-homogen dicontohkan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3xy \\ y^2 - \end{bmatrix}.$$

- e. Sistem linier homogen dicontohkan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 4x_1 \\ - \end{bmatrix}. \quad (\text{A. } 1)$$

Sistem (A. 1) dapat ditulis

$$[\dot{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [\mathbf{x}]$$

f. Sistem linier non-homogen dicontohkan sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 \\ 4x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A. 2})$$

Sistem (A. 2) dapat ditulis

$$[\dot{\mathbf{x}}] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

2. Titik Ekuilibrium dan Kestabilan

a. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium (titik kesetimbangan) merupakan titik yang tidak berubah terhadap waktu. Secara matematis, definisi titik ekuilibrium dapat dituliskan pada definisi 1.

Definisi 1: (Hale dan Kocak, 1991:11)

Titik $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut **titik ekuilibrium** dari $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, jika $f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Contoh:

Diberikan sebuah sistem dinamik sebagai berikut

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_2$$

Misalkan $f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$ maka titik ekulibrium diperoleh jika

$f(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, sehingga sistem tersebut menjadi

$$\begin{aligned}\hat{x}_1 + \hat{x}_2 &= 0 \\ -\hat{x}_2 &= 0\end{aligned}$$

Solusi yang memenuhi sistem adalah $\hat{x}_1 = 0$ dan $\hat{x}_2 = 0$. Jadi titik ekuilibrium sistem tersebut adalah $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (0, 0)$.

b. Kestabilan

Kestabilan sistem dinamik linier dapat diketahui dengan mengamati perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium. Definisi kestabilan dituliskan pada definisi 2.

Definisi 2: (Olsder dan Woude, 2004: 57)

Diberikan sistem dinamik orde satu $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ yang memiliki solusi memiliki $\mathbf{x}_{x_0}(t)$ pada waktu t memberikan kondisi awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

1. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan **stabil** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat

$\delta > 0$ sehingga, jika $\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta$, maka $\|\mathbf{x}_{x_0}(t) - \hat{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$, untuk semua

$t \geq 0$.

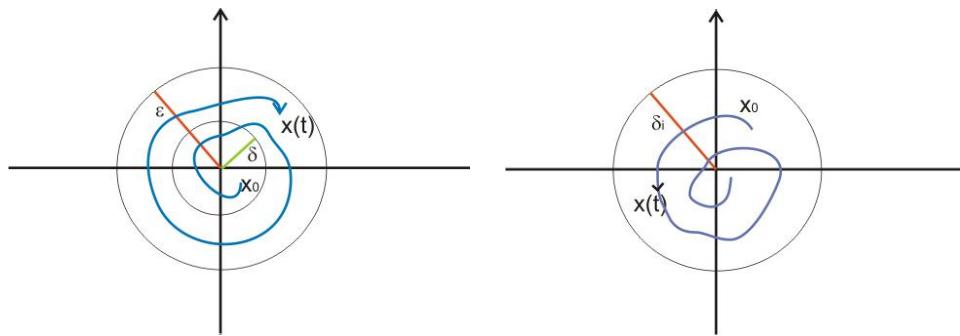
2. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan **stabil asimtotik** jika titik ekuilibrium itu

stabil dan terdapat $\delta_i > 0$ sedemikian sehingga jika $\|\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}\| < \delta_i$ maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{x_0}(t) - \hat{\mathbf{x}}\| = 0.$$

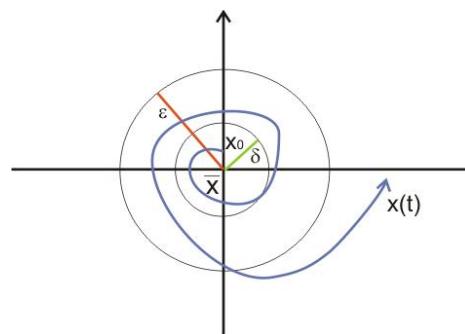
3. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan **tidak stabil** jika definisi 1 tidak terpenuhi.

Ilustrasi mengenai titik ekuilibrium stabil, stabil asimtotis dan tidak stabil dapat dilihat pada gambar 2.1, gambar 2.2 dan gambar 2.3.



Gambar 2.1 Titik ekuilibrium stabil

Gambar 2.2 Titik ekuilibrium stabil
asimtotis



Gambar 2.3 Titik ekuilibrium tidak stabil

Sebuah sistem linier $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil jika titik ekuilibriumnya stabil. Sistem linier dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibriumnya tidak stabil.

3. Sistem Dinamik Linier

Sitem dinamik linier homogen dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (2.3)$$

dengan A adalah matriks persegi berukuran $n \times n$ dan \mathbf{x} adalah matriks berukuran $n \times 1$.

Sebelum membahas lebih lanjut tentang sistem dinamik linier akan dibahas terlebih dahulu tentang nilai eigen.

a. Nilai Eigen

Definisi 3: (Howard Anton, 1998: 277)

Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ dan sistem persamaan diferensial biasa homogen $\dot{x} = Ax$, $x(0) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Suatu vektor taknol $x \in \mathbb{R}^n$ disebut **vektor eigen** dari A jika terdapat skalar λ sedemikian sehingga

$$Ax = \lambda x . \quad (2. 4)$$

Nilai skalar λ dinamakan **nilai eigen** dari A .

Untuk mencari nilai eigen dari A , persamaan (2. 4) dapat tulis sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0 ,$$

dengan I adalah matriks identitas. Sistem persamaan (2.4) mempunyai solusi taknol jika dan hanya jika

$$|A - \lambda I| = 0 . \quad (2. 5)$$

Persamaan (2. 5) merupakan persamaan karekteristik matriks A .

b. Solusi Sistem Dinamik Linier

Sistem (2. 3) dengan kondisi awal $x(0) = x_0$ mempunyai solusi

$$x(t) = e^{At} x_0 , \quad (2. 6)$$

dengan e^{At} adalah fungsi matriks berukuran $n \times n$ yang didefinisikan sebagai deret Taylor.

Definisi 4 : (Perko, 2001:1)

Bentuk e^{At} adalah fungsi matriks berukuran $n \times n$ yang dinyatakan

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}. \quad (2.7)$$

Jika deret (2.6) dideferensialkan suku demi suku diperoleh

$$\frac{d}{dt} \left[\dots \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!} \left[\dots \right] = A e^{At},$$

sehingga turunan pertama e^{At} adalah

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}.$$

Sebagai hasil dari intrepretasi fungsi matriks eksponensial e^{At} , dapat ditulis solusi dari masalah nilai awal

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0,$$

dalam bentuk

$$x(t) = e^{At} x_0.$$

Dalam hal ini terdapat tiga kasus yaitu:

1. Jika matriks A memiliki nilai eigen real dan berbeda maka bentuk

e^{At} menjadi

$$e^{At} = P \text{diag} \left[\dots \right] P^{-1},$$

sehingga persamaan (2.6) menjadi

$$x(t) = P \text{diag} \left[\dots \right] P^{-1} x_0. \quad (2.8)$$

2. Jika matriks A memiliki nilai eigen komplek maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = P \text{diag} e^{\lambda_i t} \left[\dots \right] P^{-1},$$

sehingga persamaan (2. 6) menjadi

$$\mathbf{x}(t) = P \operatorname{diag} e^{\lambda t} \begin{bmatrix} - & & \\ & \ddots & \\ & & - \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 . \quad (2. 9)$$

3. Jika A mempunyai sebanyak k nilai eigen kembar maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = P^{-1} \begin{bmatrix} - & & \\ & \ddots & \\ & & - \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} & & \\ & \cdots + \frac{N^i \cdot t}{(k-1)} & \\ & & \end{bmatrix},$$

sehingga persamaan (2. 6) menjadi

$$\mathbf{x}(t) = P^{-1} \begin{bmatrix} - & & \\ & \ddots & \\ & & - \end{bmatrix} P^{-1} \begin{bmatrix} & & \\ & \cdots + \frac{N^i \cdot t}{(k-1)} & \\ & & \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 , \quad (2. 10)$$

dengan $N = A - S$ dan $S = \operatorname{diag}[\lambda]$.

c. Kestabilan Sistem Dinamik Linier

Misalkan diberi sebarang sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dengan $\hat{\mathbf{x}}$ sebagai titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}}$ dapat ditentukan dengan memperhatikan nilai eigen-nilai eigennya, yaitu λ_i , untuk $i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristiknya.

Teorema 1: (Olsder dan Woude, 2004: 58)

Diberikan persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, dengan A adalah matriks $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, dengan $k \leq n$.

1. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = 0$ dikatakan **stabil asimtotis** jika dan hanya jika $\Re \lambda_i < 0$ untuk semua $i = 1, 2, \dots, n$.

2. Titik ekuilibrium $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ dikatakan **tidak stabil** jika $\Re \lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, \dots, n$.

Bukti :

Persamaan (2.8), (2.9) dan (2.10) merupakan solusi dari persamaan (2.3) untuk semua kemungkinan nilai eigen dari A . Setiap x_i mempunyai faktor $e^{a_j t}$, dengan $a_j = \Re \lambda_j$, $\forall j = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, sedangkan faktor lainnya bersifat terbatas sehingga

1. Jika $\Re \lambda_j < 0$ maka saat $t \rightarrow \infty$ akan mengakibatkan nilai $e^{\Re \lambda_j t} \rightarrow 0$.

Solusi dari sistem $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{0}$, artinya solusi menuju titik ekuilibrium maka sistem dapat dikatakan **stabil asimtotis**.

2. Jika ada j sehingga $\Re \lambda_j > 0$ maka saat $t \rightarrow \infty$ akan mengakibatkan nilai $e^{\Re \lambda_j t} \rightarrow \infty$ yang mengakibatkan $x_j \rightarrow \infty$. Solusinya menjauh dari titik ekuilibrium, maka sistem dapat dikatakan **tidak stabil**. \square

Untuk selanjutnya, suatu sistem linier $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dikatakan stabil atau tidak stabil jika titik ekuilibrium dari sistem tersebut stabil atau tidak stabil.

4. Sistem Dinamik Non-Linier: Linierisasi dan Kestabilan

a. Linierisasi

Diberikan sistem dinamik non-linier

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \quad (2.11)$$

dengan

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2).$$

Jika $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ adalah titik ekuilibrium sistem (2. 11) maka

$$f(\hat{\mathbf{x}}) = 0 \text{ sehingga } f_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = f_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = 0.$$

Pendekatan linier fungsi $f_1(x_1, x_2)$ dan $f_2(x_1, x_2)$ dapat ditentukan dengan menggunakan ekspansi Taylor disekitar $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ yaitu

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &\approx \hat{f}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_2 - \hat{x}_2) \\ &= \hat{f}_1(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_2 - \hat{x}_2), \\ f_2(x_1, x_2) &\approx \hat{f}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_2 - \hat{x}_2) \\ &= \hat{f}_2(\hat{x}_1, \hat{x}_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_1 - \hat{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2)(x_2 - \hat{x}_2). \end{aligned}$$

Sistem (2. 11) dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) \\ &= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} \quad & - & + & \quad & - & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & - & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2. 12}$$

Misal

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}.$$

Sistem (2. 11) dapat dituliskan

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) \\ &\approx \hat{f}(\hat{\mathbf{x}}) + J(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= J(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Matriks $J(\hat{\mathbf{x}})$ disebut dengan matriks Jacobian dari sistem (2. 11).

Secara umum untuk setiap sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (2. 13)$$

dengan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Matriks Jacobian dari sistem adalah

$$J(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \end{bmatrix},$$

sehingga

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) \\ &\approx J(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \\ &= J(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}).\end{aligned} \quad (2. 14)$$

Sistem (2. 14) kemudian disebut sebagai hasil pelinieran dari sistem (2. 13) (Boelkins, Goldberg dan Potter, 2009: 403).

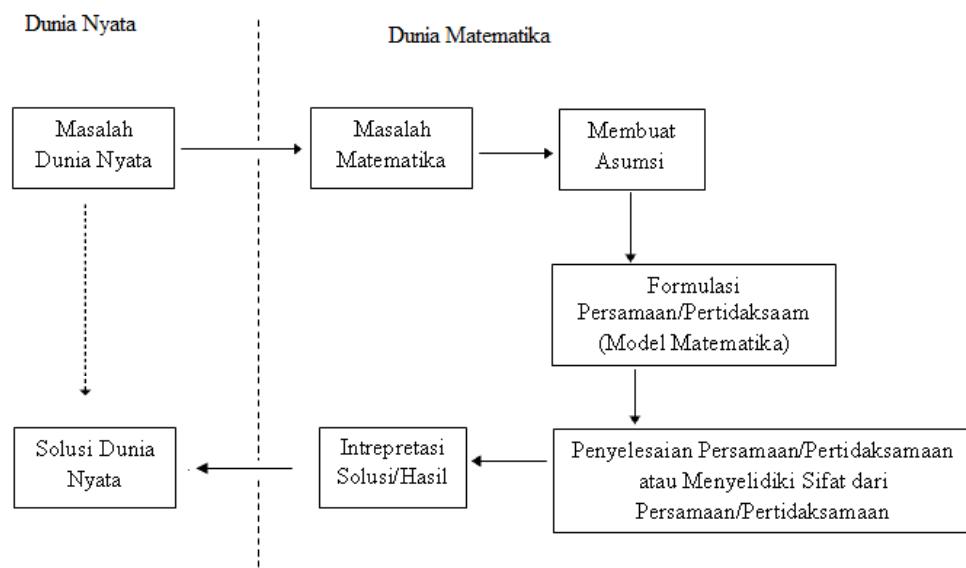
b. Kestabilan Sistem Dinamik Non-Linier

Sistem dinamik non-linier $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ dikatakan stabil atau tidak stabil jika hasil pelinieran dari sistem dinamik non-linier yaitu $\dot{\mathbf{x}} = J(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$ tersebut stabil atau tidak stabil.

B. Model Matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu proses atau langkah untuk menggambarkan masalah dunia nyata ke dalam suatu persamaan atau pertidaksamaan matematika agar mudah dicari solusinya atau sifat solusinya. Persamaan atau pertidaksamaan yang menggambarkan masalah. Hal ini kemudian disebut sebagai model matematika.

Proses pemodelan matematika dapat digambarkan dalam alur diagram sebagai berikut



Gambar 2.4 Proses pemodelan

(Widowati dan Sutimin, 2007, hal: 3)

Keterangan:

1. Masalah matematika

Masalah matematika diperoleh dari masalah yang ada di dunia nyata.

Masalah yang telah diperoleh kemudian diidentifikasi secara jelas mengenai variabel-variabel yang ada dalam masalah dan membentuk beberapa hubungan

antar variabel tersebut. Disamping itu, perlu memahami dan memperjelas permasalahan yang akan dirumuskan terutama mencari semua peubah kuantitatif dan antar relasinya sehingga dapat diterjemahkan ke dalam bahasa matematika.

2. Membuat asumsi

Asumsi yang dibuat pada dasarnya mencerminkan bagaimana proses berpikir sehingga model harus berjalan. Tujuan adanya asumsi adalah untuk memperoleh model yang lebih sederhana sehingga masalah yang ada dapat diselesaikan.

3. Memformulasikan persamaan/pertidaksamaan (model matematika)

Langkah terpenting selanjutnya adalah memformulasikan model dengan menggunakan variabel yang didapat dari dunia nyata serta hubungan antar variabel tersebut ditambah dengan asumsi yang telah dibuat dalam suatu persamaan/pertidaksamaan sehingga diperoleh suatu model matematika.

4. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan atau mengetahui sifat dari solusi

Setelah persamaan/pertidaksamaan diperoleh, selanjutnya diselesaikan secara matematis untuk memperoleh hasilnya atau menyelidiki sifat dari solusi model.

5. Interpretasi hasil

Intrepretasi hasil adalah salah satu langkah terakhir yang akan menghubungkan formulasi matematika kembali ke masalah dunia nyata. Hal ini dapat dilakukan dalam berbagai cara, salah satunya dengan menafsirkan grafik dari solusi suatu model matematika.

C. Model Penyakit

Dalam suatu model matematika epidemiologi atau penyebaran penyakit terdapat lima kelas populasi yang sering digunakan dalam pembuatan model yaitu kelas M , S , I , E dan R dengan M menyatakan banyaknya individu dengan pasif imun, S menyatakan banyaknya individu yang rentan, E menyatakan banyaknya individu terinfeksi dalam periode laten, I menyatakan banyaknya individu terinfeksi, dan R menyatakan banyaknya individu sembuh. Kelima kelas tersebut, merupakan fungsi waktu (Hethcote, 2000). Tidak semua kelas tersebut harus digunakan dalam memodelkan masalah ke dalam model matematika. Pilihan kelas untuk memodelkan menyesuaikan dengan masalah yang akan diteliti. Berikut ini diberikan dua contoh model penyakit dengan adanya kematian dan kelahiran.

1. *SIS*

Model *SIS* terdiri dari dua kelas yaitu kelas S yang menyatakan banyaknya populasi individu yang rentan dan I menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi. Dengan jumlah total populasi ($N(t)$) adalah jumlah dari dua kelas. Kelas individu rentan bertambah karena adanya kelahiran sebanyak $\beta N(t)$ dan individu terinfeksi yang sembuh dan kembali rentan sebanyak $\gamma I(t)$. Berkurangnya populasi individu rentan dipengaruhi oleh adanya kematian alami sebanyak $\mu S(t)$ dan individu rentan yang menjadi terinfeksi sebanyak $\alpha S(t)I(t)$.

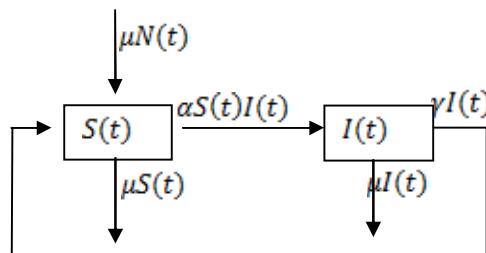
Kelas individu terinfeksi bertambah karena adanya individu rentan yang menjadi terinfeksi sebanyak $\alpha S(t)I(t)$. Berkurangnya populasi individu terinfeksi dipengaruhi oleh adanya kematian alami sebanyak $\mu I(t)$ dan individu yang sembuh dan kembali rentan sebanyak $\gamma I(t)$. Diasumsikan bahwa jumlah populasi

total adalah konstan sehingga antara kematian dan kelahiran sama ($\beta = \mu$).

Model *SIS* dapat digambarkan dengan sistem dinamik non-linier sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \beta N(t) - \alpha S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \alpha S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t).\end{aligned}$$

Transmisi penyebaran untuk model *SIS* dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.5 Tramisi penyebaran untuk model *SIS*.

2. *SIR*

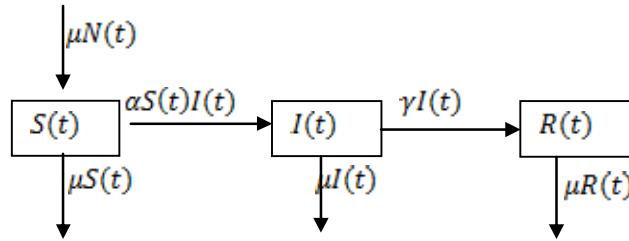
Model *SIR* terdiri dari tiga kelas yaitu kelas *S* yang menyatakan banyaknya populasi individu yang rentan, *I* menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi dan *R* menyatakan banyaknya individu sembuh. Dengan jumlah total populasi ($N(t)$) adalah jumlah dari ketiga kelas. Kelas individu rentan bertambah karena adanya kelahiran sebanyak $\beta N(t)$. Berkurangnya populasi individu rentan dipengaruhi oleh adanya kematian alami sebanyak $\mu S(t)$ dan individu rentan yang menjadi terinfeksi sebanyak $\alpha S(t)I(t)$.

Kelas individu terinfeksi bertambah karena adanya individu rentan yang menjadi terinfeksi sebanyak $\alpha S(t)I(t)$. Berkurangnya populasi individu terinfeksi dipengaruhi oleh adanya kematian alami sebanyak $\mu I(t)$ dan individu yang sembuh sebanyak $\gamma I(t)$.

Kelas individu sembuh bertambah karena adanya individu terinfeksi yang sembuh sebanyak $\gamma I(t)$ dan berkurangnya populasi individu sembuh karena adanya kematian alami sebanyak $\mu R(t)$. Diasumsikan bahwa jumlah populasi total adalah konstan sehingga antara kematian dan kelahiran sama ($\beta = \mu$). Model *SIR* dapat digambarkan dengan sistem dinamik non-linier sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \gamma S(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t).\end{aligned}$$

Transmisi penyebaran untuk model *SIR* dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.6 Transmisi penyebaran untuk model *SIR*.

D. Basic Reproduction Number (R_0)

Program vaksinasi hepatitis B dilakukan secara serentak disemua negara sejak tahun 1991. Program ini diharapkan dapat mencegah terjadinya peningkatan jumlah individu yang terkena penyakit hepatitis B. Salah satu keberhasilan vaksinasi dipengaruhi oleh *basic reproduction number*. *Basic reproduction number* didefinisikan sebagai bilangan yang menyatakan rata-rata individu baru yang dapat terinfeksi karena satu individu yang terinfeksi yang berlangsung dalam populasi individu yang rentan (Hercote , 2000). Menurut Chasnov (2009: 58)

untuk suatu model penyebaran penyakit dengan adanya vaksinasi, *basic reproduction number* dengan vaksinasi (R_v) dirumuskan sebagai berikut

$$R_0 = \frac{R_v}{(1-v)}$$

dengan v adalah laju pemberian vaksinasi dan R_0 adalah *basic reproduction number*.

Selanjutnya, nilai *basic reproduction number* digunakan untuk menentukan nilai batas minimal pemberian vaksinasi (v_m) yang diperlukan agar penyakit dapat dicegah, v_m dirumuskan sebagai berikut

$$v_m = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

Metode yang digunakan untuk menentukan *basic reproduction number* adalah dengan *next generation matrix*.

Misalkan x menyatakan kelas penyakit atau individu terinfeksi dan y menyatakan kelas tidak ada penyakit atau individu rentan (sehat) dan misalkan $x \in \mathbb{R}^n$ dan $y \in \mathbb{R}^m$ untuk $n, m \in \mathbb{N}$, sehingga

$$\mathbf{x}'_i = \mathcal{F}_i(x, y) - \mathcal{V}_i(x, y), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.15)$$

dengan \mathcal{F}_i menyatakan matriks dari koefisien rata-rata peningkatan infeksi sekunder dalam kelas individu terinfeksi dan \mathcal{V}_i menyatakan matriks dari koefisiennya rata-rata penurunan penyakit karena kematian dan kesembuhan dalam kelas individu terinfeksi.

Persamaan (2.15) didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Sehingga dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{x}' = (\mathcal{F} - \mathcal{V})\mathbf{x}$$

dengan

$$F = \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i}(0, y_0) \quad \text{dan} \quad V = \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i}(0, y_0)$$

Didefinisikan matriks K sebagai berikut

$$K = FV^{-1}.$$

Selanjutnya, matriks K disebut sebagai *next generation matrix* (Brauer dan Chavez, 2012: 393).

Selanjutnya *basic reproduction number* dari persamaan (2.15) adalah nilai eigen terbesar (modulus terbesar) dari matriks K (Driesshe dan Watmough, 2008: 4), sehingga

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1})$$

dengan $\rho(K)$ adalah nilai eigen terbesar dari matriks K .

Contoh

Diberikan model matematika sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \rho - \beta S I - \gamma I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S I - \gamma I(t) - \mu I(t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

dengan $S(t)$ menyatakan populasi individu rentan saat t dan $I(t)$ menyatakan populasi individu terinfeksi saat t . Sistem (2.16) mempunyai titik ekulibrium bebas penyakit yaitu $E_0 = \left(\begin{array}{c} S^* \\ I^* \end{array} \right)$. *Next generation matrix* dapat diperoleh

dari kelas I . Kelas I dapat dituliskan sebagai berikut

$$I'(t) = \mathcal{F}(S, I) - \mathcal{V}(S, I),$$

dengan

$$\mathcal{F} = [\alpha S(t)I(t)] \text{ dan } \mathcal{V} = [] ,$$

maka

$$F = [] \text{ dan } V = [] + \mu ,$$

sehingga

$$K = FV^{-1} = [] [] = \frac{\alpha S(t)}{\gamma + \mu} . \quad (2.17)$$

Pada titik ekuilibrium bebas penyakit, $S(t) = \frac{\beta}{\mu} N(t)$, dan $I(t) = 0$. Subtitusikan

nilai $S(t) = \frac{\beta}{\mu} N(t)$ ke persamaan (2.17) diperoleh

$$K = \frac{\alpha \beta N(t)}{(\gamma + \mu) \mu},$$

maka nilai R_0 dari sistem (2.16) adalah

$$R_0 = \frac{\alpha \beta N(t)}{(\gamma + \mu) \mu}.$$

E. Hepatitis B

Hepatitis B adalah penyakit peradangan hati yang disebabkan oleh virus hepatitis B. Hepatitis B dibagi menjadi dua hepatitis B akut yaitu periode pertama seseorang terinfeksi hepatitis B yang terjadi selama 3-6 bulan, hepatitis B akut akan sembuh dengan sendirinya karena respon imunitas yang dimiliki tubuh kuat sehingga virus dapat lawan dan virus menghilang dari tubuh (Cahyono dkk., 2010:59). Sedangkan jika dalam waktu lebih dari 6 bulan virus belum menghilang dari dalam tubuh, maka hepatitis B akut akan berkembang menjadi hepatitis B

kronis (Elizabeth, 2008: 155). Hepatitis B kronis ini tidak dapat disembuhkan dan lambat laun hepatitis B kronis dapat berkembang menjadi sirosis (pengerasan hati) dan kanker hati. Penularan Hepatitis B terjadi melalui tiga cara yaitu melalui kulit seperti transfusi darah, hubungan seksual, dan dari ibu ke bayi yang terjadi saat masa kehamilan, proses melahirkan atau setelah melahirkan (Cahyono, 2010: 31). Hepatitis B mempunyai daya tular 100 kali lebih kuat dari HIV, karena masa inkubasi hepatitis B relative lebih pendek yaitu 3 bulan jika dibandingkan dengan masa inkubasi HIV yaitu 5 - 10 tahun (Wening, Lili, dan Djing, 2008: 13).

Hepatitis B menjadi masalah global karena penyakit ini sudah tersebar di seluruh dunia dengan tingkat kejadian bervariasi di setiap negara. Tingkat kejadian infeksi hepatitis B di setiap negara dibagi menjadi tiga

1. Negara dengan tingkat kejadian hepatitis B tinggi

Negara dengan tingkat kejadian hepatitis B tinggi, angka kejadian infeksi virus hepatitis B sangat tinggi yaitu lebih dari 8% dari jumlah populasi dan sekitar 70-95% penduduknya pernah kontak dengan virus hepatitis B. Di negara yang tingkat kejadian hepatitis B tinggi, Hepatitis B kebanyakan dialami oleh bayi yang baru lahir dan anak-anak dibawah usia lima tahun.

2. Negara dengan tingkat kejadian hepatitis B sedang

Negara dengan tingkat kejadian hepatitis B sedang, angka kejadian infeksi virus hepatitis B berkisar antara 2-7% dari jumlah populasi dan sekitar 10-60% penduduknya pernah kontak dengan virus hepatitis B. Jumlah populasi bayi-anak dan dewasa yang terinfeksi hampir seimbang.

3. Negara dengan tingkat kejadian rendah

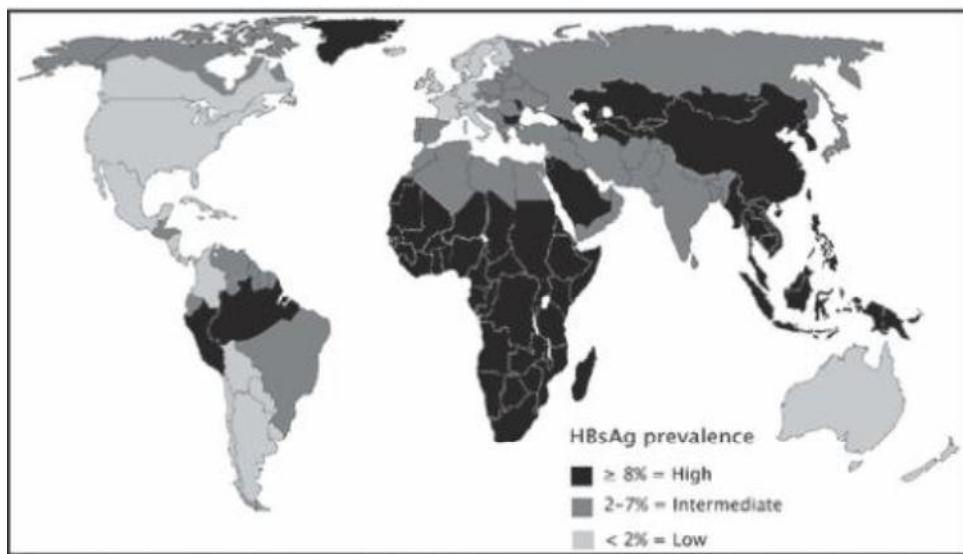
Negara dengan tingkat kejadian hepatitis B rendah, angka kejadian infeksi virus hepatitis B berkisar antara 0,5-2% dari jumlah populasi dan sekitar 5-7% penduduknya pernah kontak dengan virus hepatitis B. Di negara yang tingkat kejadian hepatitis B rendah, populasi yang terinfeksi lebih banyak pada kelompok dewasa.

Tingkat kejadian infeksi hepatitis B menurut Jinlin Hou, Zhihua Liu dan Fan Gu (2005) dapat disajikan dalam tabel 1.

Karakter	Tingkat Endemitas		
	Rendah (%)	Sedang (%)	Tinggi (%)
Infeksi kronis	0,5-2	2-7	>8
Pernah terpapar	5-7	10-60	70-95
Infeksi ibu ke anak	Jarang <10	Sedang 10-60	Sering >60
Infeksi pada anak-anak	Jarang <10	Sedang 10-60	Sering >60
Infeksi pada dewasa	Sering 70-60	Sedang 20-50	Jarang 10-20

Tabel 1. Tingkat kejadian infeksi hepatitis B.

Daerah penyebaran hepatitis B menurut tingkat kejadian infeksinya, disajikan dalam gambar 2.7.



Gambar 2.7 Daerah penyebaran penyakit hepatitis B berdasarkan tingkat kejadian infeksi.

Menurut Cahyono (2010: 39), sekitar 90-95% dari jumlah populasi dewasa yang terinfeksi hepatitis B akut akan mengalami kesembuhan sedangkan sisanya akan berlanjut menjadi hepatitis B kronis. Sementara, pada mereka yang terinfeksi pada usia bayi atau anak-anak, lebih dari 90% hepatitis B akut yang dialami akan berkembang menjadi hepatitis B dan sisanya akan sembuh.

Sekitar 350 milyar penduduk dunia sedang mengalami hepatitis B. Dari keseluruhan penderita, 75% berada di benua Asia dan diperkirakan 1,5 juta jiwa meninggal akibat kanker hati yang disebabkan oleh hepatitis B (Cahyono, 2010:7).