SISTEM *FLUTTER* PADA SAYAP PESAWAT TERBANG

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh

Andini Putri Ariyani

NIM 09305141016

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2014

SISTEM *FLUTTER* PADA SAYAP PESAWAT TERBANG

Oleh

Andini Putri Ariyani
NIM. 09305141016

ABSTRAK

Skripsi ini bertujuan untuk mengetahui model matematika dari sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang dan menganalisis sifat dinamik dari sistem *flutter* tersebut. Sistem *flutter* merupakan model matematika dari fenomena *flutter*. Fenomena *flutter* adalah fenomena ketidakstabilan dinamik suatu sistem yang diakibatkan oleh interaksi antara unsur inersia, redaman, dan fleksibilitas struktur, serta beban-beban aerodinamika yang bekerja pada struktur.

Sistem *flutter* berbentuk system persamaan diferensial orde 2 dengan dua persamaan. Transformasi dilakukan untuk mereduksi orde sehingga diperoleh empat persamaan diferensial orde pertama. Analisis terhadap sistem *flutter* hasil transformasi dilakukan dengan melakukan reduksi dimensi sistem menggunakan teori *Manifold Center.*

Berdasarkan hasil analisis, perubahan nilai parameter menyebabkan perubahan kestabilan sistem di titik ekuilibrium tertentu dan terjadinya penambahan titik ekuilibrium dengan nilai parameter tertentu. Dengan menggunakan Teori *Manifold Center*, dapat ditunjukkan bahwa sistem *flutter* ini dapat dibentuk menjadi bentuk normal dari bifurkasi *pitchfork*. Hal ini menunjukkan bahwa pada sistem *flutter* terjadi bifurkasi *pitchfork*.

Kata kunci: sistem *flutter*, *manifold center*, bifurkasi *pitchfork*

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Manusia memiliki banyak kebutuhan dalam hidupnya, antara lain kebutuhan sandang, papan, dan pangan. Seiring perkembangan jaman, transportasi juga merupakan kebutuhan yang pokok untuk menunjang aktivitas dalam kehidupannnya. Salah satu alat transportasi yang sering digunakan adalah pesawat terbang. Selain karena memiliki teknologi yang lebih canggih, transportasi udara juga merupakan alat transportasi tercepat jika dibandingkan dengan alat transportasi lainnya. Namun sayangnya, banyak terjadi kecelakaan di bidang transportasi, khususnya transportasi udara.

Menurut harian kompas (7 Juni 2013 pukul 09.35 WIB) ada tiga kecelakaan pesawat yang terjadi pada semester I tahun 2013. Pesawat yang mengalami kecelakaan tersebut antaralain Lion Air dengan nomor penerbangan 904 (JT 904,LNI 904). Pesawat ini terbang dari Bandung menuju Denpasar dan jatuh di perairan saat akan mendarat di Bandara Ngurah Rai pada tanggal 13 April 2013. Kecelakaan yang kedua adalah pesawat Nusantara Air Charter PK-YKC yang terbakar di Bandar Udara Wamena pada tanggal 8 Mei 2013. Kecelakaan ketiga adalah Pesawat Merpati Nusantara Airlines 6517, pesawat ini terbang dari Bajawa menuju Kupang dan mengalami *hard landing* saat mendarat di Kupang pada tanggal 10 Juni 2013.

Ada beberapa faktor yang menyebabkan kecelakaan pesawat terjadi, yaitu faktor manusia, faktor alam, dan juga faktor pesawat itu sendiri. Faktor alam banyak mengambil andil dalam kecelakaan pesawat disamping faktor kelalaian manusia. Salah satu faktor alam yang dapat menyebabkan kecelakaan pesawat adalah angin. Salah satu kecelakaan pesawat yang disebabkan oleh angin adalah pesawat jenis CASSA 212 tujuan Medan-Kutacane yang mengalami kecelakaan pada 29 September 2011. Menurut Informasi BMKG Polonia Medan, kecelakaan diprediksi karena pesawat CASSA 212 dihantam angin kencang dari arah depan yang menyebabkan pesawat tidak stabil, selain itu pada rute tersebut terdapat banyak gumpalan awan pada saat itu (Harian Kompas, 2 Oktober 2011). Faktor angin yang dapat membahayakan penerbangan dikenal dengan nama fenomena *flutter*.

Menurut Novi Andria (2011:107-114), *flutter* merupakan fenomena ketidakstabilan dinamik yang diakibatkan oleh interaksi antara unsur inersia, redaman, dan fleksibilitas struktur dari suatu sistem, serta beban-beban aerodinamika yang bekerja pada struktur tersebut. Apabila struktur dari sistem tersebut terkena aliran udara yang besar maka struktur tersebut akan bergetar dengan amplitudo yang semakin meningkat. Getaran ini terus menerus terjadi sehingga struktur tersebut mengalami kegagalan. Jika fenomena *flutter* ini timbul pada sayap pesawat terbang, maka pesawat terbang berada dalam bahaya dan dapat dipastikan akan jatuh (Fariduzzaman, 2002). Belum banyak diketahui kapan sayap pesawat mengalami fenomena *flutter*, perlu penelitian mendalam untuk mendapatkan informasi yang akurat terkait fenomena *flutter*.

Pada skripsi ini, penelitian terhadap fenomena *flutter* yang terjadi pada sayap pesawat terbang akan dilakukan secara matematis. Penelitian dilakukan dengan menganalisa model matematika dari suatu fenomena *flutter* pada sayap pesawat terbang. Model matematika dari fenomena *flutter* ini disebut sebagai sistem *flutter*. Beberapa penelitian telah dilakukan terhadap sistem *flutter* diantaranya adalah Yang (1995). Yang menunjukkan bahwa pada sistem *flutter* muncul Osilasi *limit Cycle*. Kemudian Liu, et al (2000), menggunakan teori *manifold center* untuk meneliti sistem *flutter* berdimensi 8 dan memberikan prediksi atas frekuensi dasar Osilasi *limit Cycle* yang terjadi. Choler dan Chamara (2004) melakukan reduksi orde terhadap sistem *flutter* sehingga didapatkan 6 persamaan diferensial berorde 1 dan menggunakan teori *manifold center* untuk meneliti sistem.

Penelitian lain terhadap sistem *flutter* pernah dilakukan oleh Hartono dan Krisnawan, K.P. (2012 dan 2013). Penelitian tersebut didasarkan pada model yang dihasilkan oleh Chen dan Liu (2008). Pada Penelitian Chen dan Liu ditunjukkan munculnya bifurkasi *Hopf* superkritikal dan subkritikal dengan hanya mempertimbangkan 1 parameter, sedangkan pada penelitian Hartono dan Krisnawan, K.P. (2012) menggunakan 2 parameter. Selain itu pada penelitian tersebut, Hartono dan Krisnawan, K.P. tidak hanya menunjukkan munculnya bifurkasi *Hopf* (baik superkritikal maupun subkritikal) tetapi juga munculnya bifurkasi *pitchfork* dan sebuah bifurkasi kodimensi 2. Hartono dan Krisnawan, K.P. melanjutkan penelitiannya pada tahun 2013 dan lebih memfokuskan pada munculnya bifurkasi kodimensi 2, yaitu bifurkasi *pitchfork-Hopf*.

Pada skripsi ini sistem *flutter* yang diselidiki juga mengarah ke model yang diberikan oleh Chen dan Liu (2008) yang terdiri dari 2 persamaan diferensial orde 2 yaitu

$$\begin{aligned} \ddot{h} + 0.25\ddot{\alpha} + 0.1\dot{h} + 0.2h + 0.1Q\alpha &= 0 \\ 0.25\ddot{h} + 0.5\ddot{\alpha} + 0.1\dot{\alpha} + (k_0 - 0.04Q)\alpha + e_2\alpha^3 &= 0 \end{aligned}$$

dengan h adalah defleksi akibat gerak bending (naik turun), α adalah defleksi akibat gerak torsional (gerak memutar), Q adalah kecepatan udara yang tergeneralisasi (kecepatan angin ditambah dengan kecepatan pesawat), k_0 adalah koefisien kekakuan linier, dan $e_2 > 0$ adalah koefisien kekakuan nonlinier. Kemudian akan diselidiki bagaimana mendapatkan model sistem *flutter* ini dengan menggunakan persamaan *Lagrange* dan kemungkinan terjadinya bifurkasi pada sistem *flutter* dengan menggunakan 1 parameter yaitu Q. Perbedaannya dengan yang dilakukan oleh Chen dan Liu adalah jenis bifurkasi yang diselidiki oleh Chen dan Liu merupakan bifurkasi *Hopf* sedangkan pada skripsi ini akan diselidiki terjadinya bifurkasi lain selain bifurkasi *Hopf.*

Bifurkasi adalah perubahan keadaan dinamik atau munculnya potretfase yang tidak ekuivalen yang disebabkan oleh perubahan nilai parameter (Kutnetsov, 1998:57). Bifurkasi terjadi ketika suatu sistem rentan terhadap perubahan nilai parameter. Nilai parameter ini sebanding dengan besarnya gangguan yang diterima oleh sistem. Sistem yang sebelumnya stabil dapat berubah menjadi tidak stabil hanya karena sedikit gangguan. Sebaliknya, sistem yang sebelumnya tidak stabil dapat menjadi stabil hanya dengan sedikit perubahan nilai parameter.

B. Rumusan Masalah

1. Bagaimana menurunkan model matematika dari sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang?
2. Bagaimana sifat dinamik dari sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang di sekitar titik ekuilibrium?

C. Tujuan Penelitian

1. Mengetahui dan menjelaskan pembentukan model matematika dari sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang
2. Mengetahui dan menganalisis sifat dinamik dari sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang

D. Manfaat Penelitian

1. Bagi pembaca, menambah pengetahuan tentang bifurkasi *pitchfork* dan mampu menganalisis sifat dinamik di sekitar titik ekuilibrium sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang .
2. Bagi universitas, menambah referensi mengenai sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada kajian teori ini akan dibahas mengenai Persamaan *Lagrange*, Nilai Eigen, Vektor Eigen, Diagonalisasi, Metode Cardano, Sistem Dinamik, Bifurkasi, dan Teori *Manifold Center*. Sebelum membahas Persamaan *Lagrange* terlebih dahulu akan dibahas mengenai energi-energi yang digunakan untuk persamaan Lagrange, yaitu energi kinetik, energi potensial, dan energi disipasi.

A. Energi

Kata Energi berasal dari bahasa Yunani, yaitu "*ergon*" yang berarti kerja. Energi didefinisikan sebagai kemampuan untuk melakukan kerja atau usaha. Usaha atau kerja dilakukan pada suatu benda oleh suatu gaya hanya bila titik tangkap gaya itu bergerak melewati suatu jarak dan ada komponen gaya sepanjang lintasannya (Tipler, P.A.1998:155).

Usaha dan energi merupakan besaran skalar, mempunyai besar tetapi tidak mempunyai arah. Berbeda dengan gaya yang merupakan vektor (mempunyai besar dan juga arah). Satuan dari energi adalah Joule. Ada banyak bentuk energi, antara lain adalah energi kinetik, energi potensial, dan energi karena redaman (energi disipasi).

1. Energi Kinetik

Energi kinetik dimiliki oleh setiap benda bergerak (Tipler, P.A.1998:158). Jika sebuah benda bermasssa m dan bergerak dengan kecepatan v mempunyai energi kinetik sebesar T, maka rumus umum energi kinetik adalah

$$T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (2.1)$$

dengan T adalah besarnya energi kinetik , m adalah massa benda, dan v adalah kecepatan benda.

2. Energi Potensial Pegas

Energi Potensial merupakan energi yang dimiliki benda karena kedudukannya (Tipler, P.A.1998:435). Energi ini mengukur potensi atau kemungkinan usaha yang dilakukan. Ketika suatu benda menekan pegas sampai pada jarak tertentu (misal Δx) , terdapat potensi untuk melakukan usaha yang dilakukan pegas kepada benda tersebut. Besar kecilnya usaha tersebut ditentukan oleh panjang pendeknya Δx.

Secara matematis rumus umum energi potensial pegas adalah

$$U = \frac{1}{2}k.\Delta x^2 \qquad (2.2)$$

dengan U adalah besarnya energi potensial pegas, k adalah konstanta pegas, dan Δx adalah simpangan atau jarak.

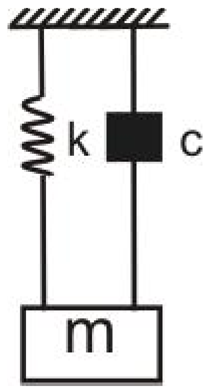
3. Energi Disipasi / Energi Akibat Redaman

Pada suatu gerak osilasi, kecepatan gerak osilasi dapat berkurang karena adanya suatu gesekan. Bila dibiarkan saja, gerak osilasi tersebut akhirnya akan berhenti. Bila gerak osilasi suatu benda berkurang terhadap waktu, maka gerak tersebut dikatakan teredam (Tipler, P.A.1998:447). Energi yang digunakan untuk meredam osilasi disebut sebagai **energi disipasi**. Pada model pegas dengan redaman, rumus umum energi disipasi adalah

$$D = -\frac{1}{2}c\dot{x}^2 \qquad (2.3)$$

dengan D adalah besarnya energi disipasi (energi akibat redaman), c adalah konstanta redaman, dan $\dot{x}$ menyatakan kecepatan benda.

Contoh 2.1



Gambar 2.1 Pegas Massa dengan Redaman

Sebuah benda $2\ kg$ berosilasi pada sebuah pegas yang mempunyai konstanta pegas $k = 400\ N/m$ dan konstanta redaman $c = 2\ Ns/m$. Sistem ditarik dengan amplitudo awal $3\ cm$ sehingga bergerak dengan kecepatan $2.2\frac{m}{s}$, dengan gaya luar yang bekerja sebesar $f(t)$. Sistem seperti pada gambar 2.1, maka besar energi yang ada pada sistem adalah

1. Energi kinetiknya adalah

   $T = \frac{1}{2}mv^2$

   $T = \frac{1}{2}2(2.2)^2$

   $T = 4.84\ joule$

   Jadi Energi kinetiknya adalah 4.84 Joule.

2. Energi Potensial Pegasnya adalah

$$U = \frac{1}{2}k.\Delta x^2$$

$$U = \frac{1}{2}(400).(0.03)^2$$

$$U = 0.18\, joule$$

Jadi Energi Potensialnya adalah 0.18 Joule.

3. Energi Disipasinya adalah

$$D = -\frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

$$D = -\frac{1}{2} \times 2 \times (2.2)^2$$

$$D = 4.84 \text{ Joule}$$

Jadi Energi disipasinya adalah 4.48 Joule. ■

B. Persamaan *Lagrange*

Persamaan *Lagrange* merupakan suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang menyatakan persamaan gerak suatu benda didasarkan pada energi yang bekerja pada benda tersebut. Persamaan *Lagrange* biasanya digunakan untuk menganalisis sistem yang tidak sederhana karena tidak harus mengidentifikasi gaya-gaya yang bekerja dalam sistem. Dalam persamaan Lagrange yang perlu diidentifikasi adalah energi-energi yang ada dalam sistem yang meliputi energi kinetik, energi potensial, dan energi disipasi. Pada penelitian Kusni, M.(2006) persamaan gerak sistem *flutter* didapatkan dengan menggunakan persamaan *Lagrange*. Bentuk umum persamaan *Lagrange* adalah

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad (2.4)$$

dengan

$T = T(\dot{q}_i, q_i, t)$ adalah energi kinetik dari sistem,

$U = U(\dot{q}_i, q_i, t)$ adalah energi potensial dari sistem,

$D = D(\dot{q}_i, q_i, t)$ adalah energi disipasi akibat peredaman sistem,

Q_i adalah gaya luar yang bekerja pada sistem, dan

q_i adalah koordinat rampat (koordinat yang menyatakan posisi obyek yang bergerak dalam sistem).

Contoh 2.2

Energi-energi pada sistem pegas massa seperti pada gambar 2.1 adalah energi kinetik, energi potensial, dan energi disipasi. Rumus-rumus energi tersebut adalah $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2}k.\Delta x^2$, $D = -\frac{1}{2}c\dot{x}^2$, dan gaya luar sebesar $f(t)$. Jika disubstitusikan terhadap persamaan *lagrange* (2.4) maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k.\Delta x^2)}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k.\Delta x^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\frac{1}{2}c\dot{x}^2\right)}{\partial \dot{x}} = f(t) \qquad \blacksquare$$

C. Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Diagonalisasi Matriks

1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.1 (Anton, H. 1998:277)

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor tak nol di dalam $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi persamaan

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{2.5}$$

dengan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah suatu skalar ($\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$). Skalar $\boldsymbol{\lambda}$ disebut dengan **nilai eigen** (***eigenvalue***) dari matriks A dan vektor $\boldsymbol{x}$ disebut **vektor eigen** yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}$.

Untuk mencari nilai eigen dari matriks A, maka persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{x} = 0 \tag{2.6}$$

dengan I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Persamaan (2.6) mempunyai penyelesaian tak nol jika dan hanya jika

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{2.7}$$

Persamaan (2.7) dinamakan persamaan karakteristik dari matriks A.

Contoh 2.3

Akan ditentukan nilai eigen dan vektor eigen matriks

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian

Nilai eigen ditentukan dari persamaan (2.6), yaitu

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-1)+2(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)\big((\lambda-4)(\lambda-1)+2\big)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$$

$$\lambda_1=1\,,\lambda_2=\ 2,\lambda_3=\ 3$$

Sehingga didapat nilai nilai eigennya adalah $\lambda_1=1\,,\lambda_2=\ 2,\lambda_3=\ 3$

Akan dicari vektor eigen dari matriks A

- Untuk $\lambda_1=1$

$$(\lambda I-A)x=0$$

$$\begin{vmatrix} 1-4 & 0 & -1 \\ 2 & 1-1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-1 \end{vmatrix} x=0$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=0$$

didapatkan persamaan $2x_1=0$ dan $-3x_1-1x_3=0$ sehingga $x_1=0$ dan $x_3=0$. Dimisalkan $x_2=s$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1=1$ adalah

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = 2$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-4 & 0 & -1 \\ 2 & 2-1 & 0 \\ 2 & 0 & 2-1 \end{vmatrix} x = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan $-2x_1 - 1x_3 = 0$, $2x_1 + x_2 = 0$, dan $2x_1 + x_3 = 0$ jika dimisalkan $x_1 = s$ maka didapat $x_2 = -2s$ dan $x_3 = -2s$, sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 2$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ -2s \\ -2s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_3 = 3$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-4 & 0 & -1 \\ 2 & 3-1 & 0 \\ 2 & 0 & 3-1 \end{vmatrix} x = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

didapatkan persamaan $-1x_1 - 1x_3 = 0$, $2x_1 + 2x_2 = 0$, dan $2x_1 + 2x_3 = 0$ Jika misalkan $x_1 = s$ didapat $x_2 = -s$ dan $x_3 = -s$, maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_3 = 3$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi didapat vektor-vektor eigen dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. ■

2. Diagonalisasi Matriks

Sebelum membahas diagonalisasi matriks, dijelaskan dahulu matriks diagonal. Matriks diagonal adalah matriks berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga semua entri di luar diagonal utama sama dengan nol. Bentuk umum dari matriks diagonal adalah:

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ii} \end{bmatrix}$$

dengan $a_{ii} \in \mathbb{R}$

Definisi 2.2 (Howard Anton,1998:284)

Matriks persegi A dinamakan dapat **didiagonalisasi** (***diagionalizable***) jika terdapat matriks P yang dapat dibalik sehingga $P^{-1}AP$ matriks diagonal. Matriks P dikatakan mendiagonalisasi matriks A

Contoh 2.4

Akan tunjukkan bahwa matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dapat didiagonalisasi

Penyelesaian

Matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mempunyai 3 vektor eigen yaitu $x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, dan $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Didefinisikan matriks $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$. Invers dari matriks P adalah $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriks D didefinisikan sebagai berikut

$$D = P^{-1}AP$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Matriks D merupakan matriks diagonal dengan nilai eigen matriks A sebagai entri-entri dari diagonal utamanya.

D. Metode Cardano

Metode Cardano digunakan untuk menyelesaikan persamaan kubik (pangkat tiga)

$$a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0 \tag{2.8}$$

dengan $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$

ada beberapa langkah untuk menyelesaikan persamaan pangkat tiga menggunakan metode Cardano, yaitu:

1. Mengubah persamaan pangkat tiga pada persamaan (2.8) ke bentuk

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.9}$$

2. Misalkan salah satu penyelesaian dari persamaan (2.9) adalah $x = y - \frac{a}{3}$, lalu substitusi bentuk ini ke persamaan (2.9) didapatkan

$$\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$$

$$y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^2}{27}\right) = 0 \tag{2.10}$$

atau dapat ditulis

$$y^3 + py + q = 0 \tag{2.11}$$

dengan $p = b - \frac{a^2}{3}$ dan $q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^2}{27}$

3. Misalkan $y = u + v$ dan $p = -3uv$, Subtitusikan bentuk ini ke persamaan (2.11) diperoleh

$$(u + v)^3 - 3(uv)(u + v) = -q$$

$$u^3 + v^3 = -q$$

4. Misalkan u^3 dan v^3 adalah akar akar dari suatu persamaan kuadrat dalam t, maka

$$t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3v^3 = 0 \tag{2.12}$$

disederhanakan menjadi

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{2.13}$$

Akar-akar dari persamaan (2.13) adalah

$$t_{1,2} = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4.1. -\frac{p^3}{27}}}{2.1}$$

$$t_{1,2} = \left(\frac{-q}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

5. Nilai u^3 dan v^3 adalah akar-akar dari persamaan (2.13) maka $u^3 = t_1$ dan $v^3 = t_2$, sehingga $u = \sqrt[3]{t_1}$ dan $v = \sqrt[3]{t_2}$.

Diketahui bahwa $y = u + v$ sehingga

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

Dengan demikian penyelesaian dari persamaan $y^3 + py + q = 0$ adalah

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{2.14}$$

Berdasarkan Langkah 2, nilai $x = y - \frac{a}{3}$, maka rumus penyelesaian x dari $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ adalah

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3} \quad (2.15)$$

6. Untuk mencari akar-akar yang lain, polinomial (2.9) dibagi dengan persamaan $\left(x - \left(\sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{-q}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \frac{a}{3}\right)\right)$ sehingga didapat bentuk persamaan kuadrat. Kemudian akar-akarnya dapat dicari dengan cara memfaktorkan.

Contoh 2.5

Akan ditentukan akar-akar dari polinomial

$$2x^3 - 12x^2 + 28x - 30 = 0 \quad (2.16)$$

Penyelesaian

- Langkah 1:

  Persamaan (2.16) dapat ditulis menjadi

$$x^3 - 6x^2 + 14x - 15 = 0 \quad (2.17)$$

- Langkah 2:

  Misalkan $x = y - \frac{-6}{3}$

$$x = y + 2 \quad (2.18)$$

  Substitusikan persamaan (2.18) ke persamaan (2.17), didapat

$$(y+2)^3 - 6(y+2)^2 + 14(y+2) - 15 = 0$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 14y + 28 - 15 = 0$$

$$y^3 + 2y - 3 = 0 \qquad (2.19)$$

didapat $p = 2$ dan $q = -3$

- Langkah 3

Misalkan $y = u + v$ dan $2 = -3uv$, Subtitusikan bentuk ini ke persamaan (2.19) diperoleh

$$(u + v)^3 - 3(uv)(u + v) = 3$$

$$u^3 + v^3 = 3$$

- Langkah 4

Misalkan u^3 dan v^3 adalah akar akar dari suatu persamaan kuadrat dalam t, maka

$$t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3v^3 = 0$$

disederhanakan menjadi

$$t^2 - 3t - \frac{8}{27} = 0 \qquad (2.20)$$

Akar-akar dari persamaan (2.20) adalah

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1. - \frac{8}{27}}}{2.1}$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{10.18518519}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 3.191423693}{2}$$

Sehingga didapatkan akar adari persamaan (2.20) adalah

$t_1 = 3.09574846$ atau $t_2 = -0.095711846$

- Langkah 5

  Didapatkan nilai u adalah sebagai berikut

  $u = \sqrt[3]{t_1}$

  $u = \sqrt[3]{3.09574846}$

  $u = 1.457427108$.

  dan nilai v adalah sebagai berikut

  $v = \sqrt[3]{t_2}$

  $v = \sqrt[3]{-0.095711846}$

  $v = -0.457427108$

  Diketahui $y = u + v$ sehingga didapat

$$y = 1.457427108 - 0.457427108$$

$$y = 1$$

  Didapat penyelesaian dari polinomial (2.16) adalah

$$x = y + 2$$

$$x = 3 \qquad (2.21)$$

Sebenarnya langkah 3 dan 4 dapat dihilangkan, dengan langsung menggunakan persamaan (2.15) untuk menentukan akar yang pertama. Berdasarkan persamaan tersebut diperoleh

$$x = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3}} - \frac{-6}{3}$$

$$x = \sqrt[3]{1.5 + \sqrt{2.546296296}} + \sqrt[3]{1.5 - \sqrt{2.546296296}} + 2$$

$$x = \sqrt[3]{1.5 + 1.595711846} + \sqrt[3]{1.5 - 1.595711846} + 2$$

$$x = \sqrt[3]{3.095711846} + \sqrt[3]{-0.095711846} + 2$$

$$x = 1.457427108 - 0.457427108 + 2$$

$$x = 3$$

Menggunakan persamaan (2.15) didapatkan akar yang pertama adalah $x = 3$ sama dengan persamaan (2.21).

- Langkah 6

Telah didapat salah satu akar dari polinomial (2.16) adalah 3. Untuk mencari akar akar yang lain, polinomial (2.16) dibagi dengan $(x - 3)$ didapat $x^2 - 3x + 5 = 0$ Selanjutnya akan dicari akar-akar dari persamaan $x^2 - 3x + 5 = 0$, yaitu

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$$

Didapat akar-akar dari dari polnomial (2.16) adalah $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3 + i\sqrt{11}}{2}$, dan $x_3 = \frac{3 - i\sqrt{11}}{2}$ ■