

**PENGENDALIAN GERAK SATELIT DENGAN MENGGUNAKAN
METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR* (LQR)**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan guna
Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh
Rizal Arrosyid
NIM 10305141019

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2014**

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

**"PENGENDALIAN GERAK SATELIT DENGAN MENGGUNAKAN
METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR (LQR)*"**

yang disusun oleh :

Rizal Arrosyid

NIM 10305141019

telah disetujui oleh dosen pembimbing pada tanggal 2 Juni 2014

untuk diujikan dihadapan dewan penguji Skripsi

Menyetujui,

Dosen Pembimbing



Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si.

NIP. 19790406 200501 1 005

PENGESAHAN

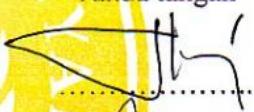
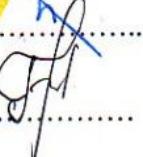
SKRIPSI DENGAN JUDUL

"PENGENDALIAN GERAK SATELIT DENGAN MENGGUNAKAN METODE *LINEAR QUADRATIC REGULATOR (LQR)*"

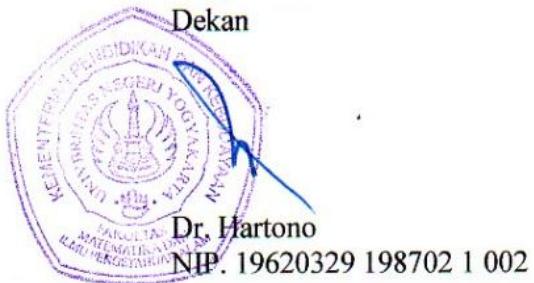
Yang Disusun Oleh

Nama : Rizal Arrosyid
NIM : 10305141019
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah dipertahankan di Depan Dewan Pengaji pada tanggal 12 Juni 2014 dan dinyatakan lulus

Nama	Jabatan	Tanda tangan	Tanggal
Kus Prihatoso Krisnawan, M.Si NIP. 19790406 200501 1 005	Ketua Pengaji		23/6/14
Fitriana Yuli, S., M.Si NIP. 19840707 200801 2 003	Sekertaris Pengaji		23/6/14
Dr. Hartono NIP. 19620329 198702 1 002	Pengaji Utama		20/6/14
Tuharto, M.Si. NIP. 19641190 199001 1 001	Pengaji Pendamping		23/6/14

Yogyakarta, 24 Juni 2014
Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam
Dekan



SURAT PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya :

Nama : Rizal Arrosyid
NIM : 10305141019
Prodi : Matematika
Jurusan : Pendidikan Matematika
Fakultas : MIPA
Judul TAS : Pengendalian Gerak Satelit dengan Menggunakan Metode *Linear Quadratic Regulator (LQR)*

dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang atau institusi lain kecuali pada bagian tertentu yang memang diambil sebagai pedoman, acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim. Apabila ternyata terbukti pernyataan diatas tidak benar maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya sebagai penulis dan sanggup diberi sanksi sebagaimana yang berlaku.

Yogyakarta, 2 Juni 2014

Yang menyatakan,



Rizal Arrosyid

NIM. 10305141019

"Penyesalan bukanlah ketika kita gagal mewujudkan impian namun ketika kita tidak mencoba untuk mewujudkannya, karena awalan adalah sebuah paksaan"

"Bila kerja keras adalah pintu kesuksesan maka do'a adalah kuncinya. Kuasa Tuhan lebih besar dari segala macam masalahmu maka percayalah bahwa kekuatan do'a itu Nyata"

"Manusia hidup bukan tentang bagaimana menikmati kebahagiaan namun bagaimana ia mampu membagi kebahagiaan itu untuk orang lain, karena sebaik-baik manusia adalah yang memberi manfaat bagi sesama"

Rizal Arrosyid

Karya kecil ini aku persembahkan untuk

“Kedua orang tuaku, Syafii dan Sri Wuryanti”

“Kedua saudaraku Fuad Febrían Ahmad dan Riza Noor Annisa”

“Risti, Ama, Eriko, Lidya dan rekan-rekan ME(g) seperjuangan”

“Almamaterku”

Serta

“Semua orang yang aku sayangi”

“Pengendalian Gerak Satelit dengan Menggunakan Metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR)”

Oleh:
Rizal Arrosyid
10305141019

ABSTRAK

Skripsi ini bertujuan untuk mengetahui model matematika dari sistem gerak satelit, mengetahui kestabilan, keterkontrolan sistem gerak satelit, dan mengetahui keadaan dinamik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol dengan metode *Linear Quadratic Regulator*.

Berdasarkan pembentukan model gerak satelit diperoleh model matematika yang merupakan sistem persamaan diferensial linear, model tersebut kemudian dianalisa dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR) untuk memperoleh sistem kontrol yang mampu menstabilkan sistem. Metode LQR dipilih karena memiliki keunggulan untuk mengatasi gangguan yang besar dan meminimumkan energi yang dibutuhkan. Dalam mendesain kontrol satelit dengan menggunakan metode LQR perlu ditunjukkan bahwa sistem dinamika satelit tersebut terkontrol. Kemudian dengan menentukan matriks bobot sistem (Q), matriks bobot input (\hat{R}), dan matriks solusi dari persamaan *Aljabar Riccati* (P) maka dapat ditentukan matriks kontrol (K) yang dapat menstabilkan sistem.

Analisis sistem gerak satelit tanpa kontrol memiliki matriks Jacobian berdimensi 4×4 dengan bagian real nilai eigennya adalah nol dengan keadaan sistem terkontrol pada saat input radialnya tidak bekerja. Dengan menggunakan metode LQR diperoleh matriks kontrol yang bekerja pada input sistem sedemikian sehingga sistem gerak satelit memiliki matriks Jacobian dengan bagian real nilai eigennya kurang dari nol, sehingga sistem gerak satelit dengan kontrol merupakan sistem yang stabil asimtotik.

Kata kunci: gerak satelit, sistem kontrol, *Linear Quadratic Regulator* (LQR)

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan segala karunia, rahmat, hidayah-Nya dan memberikan kekuatan serta kemudahan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi yang berjudul “*Pengendalian Gerak Satelit dengan Menggunakan Metode Linear Quadratic Regulator (LQR)*” ini dengan sebaik mungkin. Penyusunan tugas akhir skripsi ini ditujukan untuk memenuhi sebagian syarat kelulusan guna meraih gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta. Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis mendapat bimbingan dan bantuan dari banyak pihak. Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dari berbagai pihak tersebut tugas akhir skripsi ini tidak akan selesai dengan baik. Oleh karena itu pada kesempatan kali ini perkenankanlah penulis menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi, M.Si selaku Koordinator Program Studi Matematika FMIPA UNY dan selaku Pembimbing Akademik.
4. Bapak Kus Prihantoso Krisnawan, M.Si selaku dosen pembimbing tugas akhir skripsi yang telah dengan sabar memberikan bimbingan, pengarahan dan motivasi dalam penyusunan proposal tugas akhir ini.

5. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY dan guru-guru almamater yang selama masa studi ini telah memberikan banyak ilmu, motivasi dan pengalaman hidup yang berharga kepada penulis.
6. Semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung sehingga tugas akhir skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik.

Penulis menyadari bahwa dalam pembuatan tugas akhir ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat diharapkan sebagai koreksi demi kesempurnaan skripsi ini. Terakhir penulis berharap semoga tugas akhir skripsi ini dapat memberi manfaat dan guna bagi penulis dan bagi pembacanya.

Yogyakarta, 2 Juni 2014

Penulis,

Rizal Arrosyid

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI.....	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
DAFTAR SIMBOL.....	xv
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Batasan Masalah	5
C. Rumusan Masalah KKL.....	5
D. Tujuan	6
E. Manfaat	6
BAB II KAJIAN TEORI	
A. Satelit	
1. Pengertian Satelit	7
2. Orbit Satelit	8
B. Komponen dalam Dinamika Satelit	
1. Gaya	10
2. Vektor	11
3. Koordinat Kutub	12
C. Sistem Dinamik.....	12

D. Nilai Eigen, Vektor Eigen, Determinan, Rank Matriks, Operasi Baris Elementer (OBE).	14
E. Linearisasi	19
F. Kestabilan Sistem Dinamik.....	25
G. Keterkontrolan Sistem Dinamik.	33
H. Desain Kontrol Sistem dengan Linear Quadratic Regulator (LQR).	38
BAB III PEMBAHASAN	
A. Formulasi Model Gerak Satelit Buatan	
1. Masalah Nyata	44
2. Asumsi	45
3. Pembentukan Model Gerak Satelit	46
B. Transformasi Model Gerak Satelit pada Solusi Khusus	50
C. Kestabilan Model Dinamika Satelit.....	53
D. Keterkontrolan Model Dinamika Satelit.....	54
E. Desain Kontrol LQR untuk Model Dinamika Satelit	57
F. Simulasi Model Dinamika Satelit	64
G. Interpretasi Kontrol LQR pada Pengendalian Gerak Satelit.....	74
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	
A. Kesimpulan	76
B. Saran.....	77
DAFTAR PUSTAKA	79
LAMPIRAN	81

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Ilustrasi gerak satelit pada koordinat kutub.....	12
Gambar 2.2. Ilustrasi kestabilan sistem (2.48A)	30
Gambar 2.3. Ilustrasi kestabilan sistem (2.48B)	31
Gambar 2.4. Diagram alir sistem 2.52 dengan kontrol K	39
Gambar 3.1. Simulasi sistem dinamika satelit nonlinear tanpa kontrol.....	66
Gambar 3.2. Simulasi pengaruh gangguan pada jarak satelit dan bumi tanpa kontrol.....	67
Gambar 3.3. Simulasi pengaruh gangguan pada jarak satelit dan bumi dengan kontrol.....	68
Gambar 3.4. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan radial satelit tanpa kontrol	69
Gambar 3.5. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan radial satelit dengan kontrol	70
Gambar 3.6. Simulasi pengaruh gangguan pada sudut satelit tanpa kontrol.	71
Gambar 3.7. Simulasi pengaruh gangguan pada sudut satelit dengan kontrol.....	72
Gambar 3.8. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan tangensial satelit tanpa kontrol	73
Gambar 3.9. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan tangensial satelit dengan menggunakan kontrol	74

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. tabel <i>Routh-Hurwitz</i>	32
Tabel 2.2. tabel <i>Routh-Hurwitz</i> untuk sistem (2.51)	33
Tabel 3.1. tabel <i>Routh-Hurwitz</i> untuk sistem (3.38)	63

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Perintah MAPLE 15 untuk mengilustrasikan kestabilan sistem (2.48A)	81
Lampiran 2. Perintah MAPLE 15 untuk mengilustrasikan kestabilan sistem (2.48B)	82
Lampiran 3. Perintah MATLAB R2010a untuk menentukan matriks P yang merupakan solusi dari persamaan aljabar riccati (3.33)	83
Lampiran 4. Perintah MAPLE 15 untuk mencari nilai eigen dari sistem (3.37)	83
Lampiran 5. Perintah MATLAB R2010a untuk mensimulasikan pergerakan satelit non linear	84
Lampiran 6. Perintah MATLAB R2010a untuk mensimulasikan pergerakan satelit tanpa menggunakan kontrol	85
Lampiran 7. Perintah MATLAB R2010a untuk mensimulasikan pergerakan satelit dengan menggunakan kontrol	86

DAFTAR SIMBOL

ε	: epsilon
δ	: delta
\in	: elemen/anggota himpunan
\Rightarrow	: implikasi (jika ... maka ...)
\Leftrightarrow	: biimplikasi (... jika dan hanya jika ...)
σ	: sigma (konstantan jarak)
ω	: omega (konstanta kecepatan sudut)
∞	: tak hingga
$=$: sama dengan
\neq	: tidak sama dengan
\approx	: pembulatan
\subset	: himpunan bagian
F	: gaya
F_g	: gaya gravitasi bumi
F_r	: gaya dorong (radial) satelit
F_θ	: gaya dorong (tangensial) satelit
m	: massa satelit (kg)
M	: massa bumi (kg)
a	: percepatan
G	: konstanta gravitasi bumi (Nm/kg^2)
r	: jarak antara pusat bumi dan satelit (km)
\vec{r}	: vektor posisi pada keadaan radial
\hat{r}	: unit vektor pada posisi radial
\dot{r}	: kecepatan radial satelit (km/s)
\ddot{r}	: percepatan radial satelit (km/s^2)
v	: kecepatan linear (m/s)

t	: waktu
t_0	: waktu awal
$\frac{d}{dt}$: turunan pertama terhadap waktu
$\frac{d^2}{dt^2}$: turunan kedua terhadap waktu
θ	: sudut yang dibentuk dari pergerak satelit (<i>derajat</i>)
$\hat{\theta}$: unit vektor pada posisi tangensial
$\dot{\theta}$: kecepatan tangensial satelit $(\text{derajat}/s)$
$\ddot{\theta}$: percepatan tangensial satelit $(\text{derajat}/s^2)$
\emptyset	: fungsi pemetaan yang turunan pertamanya kontinu
E	: himpunan subset dari \mathbb{R}^n
\mathbb{R}	: himpunan bilangan real
\forall	: untuk setiap
\dot{x}	: sistem persamaan diferensial
\dot{x}^*	: sistem gerak satelit dengan kontrol
\bar{x}	: solusi dari x
λ	: lamda (nilai eigen)
v_i	: vektor eigen
\therefore	: kesimpulan
$ \quad $: determinan
$D^n f$: turunan parsial ke n dari fungsi f
$Re \lambda$: bagian real dari nilai eigen
u	: input dari sistem
R	: matriks keterkontrolan
R^*	: penyederhanaan matriks keterkontrolan dengan OBE
K	: matriks kontrol
H	: persamaan hamiltonian
Q	: matriks bobot keadaan

\hat{R}	: matriks bobot input/kontrol
P	: solusi dari persamaan aljabar riccati
J	: persamaan indeks performansi
A^T	: transpose dari A
I	: matriks identitas
I_4	: matriks identitas 4×4

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Dewasa ini perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi dalam dunia sains sangatlah pesat sehingga membuka peluang ditemukannya hal-hal baru. Salah satunya adalah perkembangan ilmu matematika sebagai sarana pembentuk pola fikir manusia (PPPPTK Matematika, 2011). Matematika sebagai pembentuk pola fikir analisis dan sistematis dalam kehidupan nyata merupakan alat untuk mengungkap atau menganalisa fenomena-fenomena alam sehingga dapat diterima oleh nalar manusia. Fenomena-fenomena tersebut seringkali dimodelkan dalam bahasa matematika kemudian dilakukan analisa secara matematis sehingga dapat diketahui solusi atau sifat dari solusi yang kemudian dibawa kembali atau diinterpretasikan kedalam kehidupan nyata, hal inilah yang dinamakan pemodelan matematika (Djoko Luknanto, 2003: 2). Salah satu contoh pemodelan matematika adalah penggunaan sistem dinamik untuk merepresentasikan gerak satelit.

Satelit adalah benda yang mengorbit planet atau benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yakni satelit alami dan satelit buatan. Satelit alami adalah benda-benda luar angkasa bukan buatan manusia yang mengorbit sebuah planet atau benda lain yang lebih besar daripada dirinya, seperti *Ganymede* (Jupiter), *Titan* (Saturnus),

Callisto (Jupiter), *Io* (Jupiter), serta *Bulan* (Bumi). Sedangkan **satelit buatan** adalah benda buatan manusia yang diluncurkan ke Luar angkasa dengan guna tertentu dan beredar mengelilingi benda lain yang lebih besar misalnya satelit Palapa yang mengelilingi Bumi (Lapan, 2012).

Satelit buatan terdiri dari bermacam-macam jenis tergantung dari fungsinya antara lain satelit astronomi untuk mengamati benda-benda luar angkasa, satelit komunikasi untuk membantu arus komunikasi dan informasi di Bumi, satelit pengamat bumi untuk mengamati kondisi bumi dan orbitnya, satelit navigasi untuk menentukan lokasi sebuah titik dipermukaan bumi, satelit mata-mata untuk keperluan perang, dan satelit cuaca untuk mengamati cuaca dan iklim bumi. Satelit-satelit buatan tersebut diluncurkan dari bumi dan diletakkan pada posisi tertentu yang tidak terpengaruh oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Posisi ini disebut sebagai posisi geostasioner (Lapan, 2012).

Kondisi bumi yang terus berotasi (berputar sendiri dalam posisinya) maupun berevolusi (mengelilingi matahari sesuai dengan jalurnya) dan adanya beberapa pengaruh dari luar seperti badai matahari menyebabkan satelit dapat berpindah dari tempat yang semestinya berada sehingga berimplikasi pada kinerja satelit tersebut. Hal inilah yang kemudian menjadi bahan kajian untuk membuat sistem pada satelit sedemikian sehingga kedudukan satelit tetap berada pada posisi yang

diinginkan. Sistem tersebut dikenal sebagai sistem kontrol (Aris Triwiyanto, 2011: 1-2).

Sistem kontrol pada gerak satelit pernah dibahas sebelumnya oleh Olsder dan Van der Woude (2004) dalam buku *Mathematical Sistem Theory intermediate third edition*. Dalam buku tersebut dijelaskan mengenai pembentukan model gerak satelit dengan menggunakan gaya-gaya yang terjadi pada satelit. Swesti Yunita Purwanti (2009) dalam skripsi berjudul *Aplikasi Teori Kontrol dalam Linearisasi Model Persamaan Gerak Satelit* menjelaskan tentang pembentukan model gerak satelit dengan menggunakan vektor-vektor dan proses linearisasi model gerak satelit untuk menyelidiki keterkontrolan dan keteramatatan satelit. Skripsi tersebut kemudian dikembangkan oleh Fredy Haryanto (2012) dalam skripsi yang berjudul *Penerapan Teori Kontrol pada Model Dinamik Satelit Tanpa Gangguan*. Dalam skripsi ini telah dibahas tentang interfensi pengamat yang mendesain suatu kontrol dengan menggunakan metode *Pole Placement* untuk memanipulasi sistem gerak satelit sedemikian sehingga sistem menjadi stabil.

Metode *Pole Placement* merupakan metode yang sangat sering digunakan dalam sistem kontrol karena algoritmanya cukup sederhana, namun metode ini memiliki kekurangan yaitu pendesain diharuskan menentukan suatu pole tertentu yang berimplikasi pada interpretasi hasil yang kurang real (Ogata, 2010: 723-732). Oleh sebab itu pada penulisan skripsi ini akan dibahas mengenai pengendalian gerak satelit dengan

menggunakan metode yang mampu mengatasi kekurangan dari metode *Pole Placement* tersebut. Metode yang dipilih penulis dalam skripsi ini adalah metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR).

Metode *Linear Quadratic Regulator* (LQR) dipilih karena memiliki algoritma yang hampir sama dengan metode *Pole Placement*. Metode ini diaplikasikan pada model linear dan menghasilkan kontrol linear, dengan fungsi energi (indeks performansi) berupa fungsi kuadrat dan bertujuan menstabilkan sistem (Ogata, 2010: 793-795).

Beberapa kajian mengenai metode LQR yang pernah dibahas sebelumnya antara lain oleh Muhammad Wakhid Musthofa (2009) dalam Prosiding Seminar Nasional yang berjudul *Desain Linear Quadratic Regulator pada Sistem Inverted Pendulum* yang membahas tentang bagaimana pengaplikasian metode LQR untuk mengontrol sistem pendulum terbalik sehingga sistem menjadi stabil, dalam prosiding ini juga diberikan simulasi sistem pendulum terbalik sebelum dan sesudah diberikan kontrol. Tony Yulianto (2012) dalam jurnal yang berjudul *Aplikasi Metode LQR Pada Kendali Attitude Rotor Spacecraft yang Berada di Sumbu Tetap* menjelaskan mengenai keunggulan-keunggulan LQR seperti mampu mengatasi gangguan-gangguan besar yang terjadi pada kestabilan sistem dengan tanpa mengurangi performansi kerja serta dapat mengatasi gangguan yang terjadi sebelumnya dalam waktu yang lebih singkat.

Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dibahas mengenai pembentukan dan analisa model matematika tentang pergerakan satelit. Model yang dibentuk difokuskan pada pergerakan satelit geostasioner yang mengelilingi bumi, dan dari model yang terbentuk akan dilakukan analisa mengenai kestabilan dan keterkontrolan sistem sebelum diberi kontrol dan pengaruh kontrol *Linear Quadratic Regulator* (LQR) pada keadaan dinamik sistem gerak satelit.

B. Batasan Masalah

Beberapa pembatasan ruang lingkup permasalahan yang perlu diperhatikan dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Pergerakan satelit yang diamati adalah pergerakan satelit buatan yang mengorbit bumi,
2. Sistem satelit yang digunakan dalam tugas akhir ini diamati dalam koordinat kutub dimensi dua yakni secara radial dan tangensial,

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika dari sistem gerak satelit?
2. Bagaimana kestabilan, keterkontrolan sistem gerak satelit?
3. Bagaimana keadaan dinamik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol dengan metode *Linear Quadratic Regulator*?

D. Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Mengetahui model matematika dari sistem gerak satelit.
2. Mengetahui kestabilan, keterkontrolan sistem gerak satelit.
3. Mengetahui keadaan dinamik sistem gerak satelit setelah diberikan kontrol dengan metode *Linear Quadratic Regulator*.

E. Manfaat Penulisan

Adapun manfaat yang dapat diperoleh dari tugas akhir ini adalah :

1. Bagi penulis
Menambah dan memperkaya pengetahuan mengenai aplikasi matematika terapan khususnya mengenai sistem kontrol satelit dengan menggunakan metode *Linear Quadratic Regulator*.
2. Bagi mahasiswa matematika dan pembaca
 - a) Menjadi acuan bagi mahasiswa lain untuk menambah referensi penulisan tugas akhir mengenai analisa sistem kontrol dan sistem dinamik.
 - b) Memberikan pandangan baru mengenai matematika sebagai pembentuk pola fikir dan problem solving.
3. Bagi universitas
Menambah koleksi buku referensi yang ada di Perpustakaan jurusan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta.

BAB II

KAJIAN TEORI

Bab ini berisi penjelasan mengenai pengertian satelit, orbit satelit, komponen-komponen yang menyusun sistem dinamika satelit seperti gaya, vektor, koordinat kutub, linearisasi, definisi dan teorema tentang kestabilan, keterkontrolan dan penentuan matriks kontrol K yang mampu menstabilkan sistem dengan menggunakan metode Linear Quadratic Regulator (LQR).

A. Satelit

1. Pengertian Satelit

Satelit adalah benda yang mengorbit benda lain dengan periode revolusi dan rotasi tertentu. Ada dua jenis satelit yakni satelit alami dan satelit buatan. Satelit alami adalah benda-benda luar angkasa bukan buatan manusia yang mengorbit sebuah planet atau benda lain yang lebih besar daripada dirinya, seperti *Ganymede* (Jupiter), *Titan* (Saturnus), *Callisto* (Jupiter), *Io* (Jupiter), serta *Bulan* (Bumi). Sedangkan satelit buatan adalah benda buatan manusia yang diluncurkan ke Luar angkasa dengan guna tertentu dan beredar mengelilingi benda lain yang lebih besar misalnya satelit Palapa yang mengelilingi Bumi (Lapan, 2012).

Pada dasarnya, Satelit memiliki fungsi yang beragam berdasarkan misi dibuatnya satelit tersebut. Antara lain, satelit astronomi untuk mengamati benda-benda luar angkasa, satelit komunikasi untuk membantu

arus komunikasi dan informasi di Bumi, satelit pengamat bumi untuk mengamati kondisi bumi dan orbitnya, satelit navigasi untuk menentukan lokasi sebuah titik diperlukaan bumi, satelit mata-mata untuk keperluan perang, dan satelit cuaca untuk mengamati cuaca dan iklim bumi. (Lapan, 2012).

2. Orbit Satelit

Orbit merupakan jenis-jenis tempat beredarnya satelit mengelilingi permukaan bumi. Dilihat dari jarak suatu satelit di dalam orbit untuk berputar mengelilingi bumi didalam pola lingkaran, dengan kecepatan sudut yang paling besar disebut *prograde*, sedangkan yang tekelcil disebut *retrograde*. Jarak maksimum orbit satelit dengan permukaan bumi disebut dengan *apogee*, sedangkan jarak minimum dari orbit satelit disebut dengan *perigee* (Sigit Kusmaryanto, 2013)

Menurut Lapan (2013) jika diklasifikasikan berdasarkan ketinggiannya maka satelit-satelit buatan dibedakan menjadi 3 ketinggian yang berbeda, antara lain :

- a. *Low Earth Orbit* (LEO).

Low Earth Orbit (LEO) yakni satelit yang ditempatkan pada ketinggian antara 0 – 2000 km atau berada pada ketinggian 320 – 800 km di atas permukaan bumi. Satelit ini berada di luar atmosfer Bumi namun masih cukup dekat sehingga satelit-satelit di LEO masih bisa memotret permukaan Bumi dari luar angkasa ataupun memfasilitasi komunikasi. Karena orbitnya yang cukup dekat dengan bumi, satelit

LEO harus mempunyai kecepatan yang sangat tinggi agar tidak terlempar ke atmosfer. Kecepatan edar satelit LEO mencapai 27.359 Km/h untuk mengitari bumi dalam waktu 90 menit. Delay Time LEO sebesar 10 ms (Waktu perambatan gelombang dari stasiun bumi ke satelit dan kembali lagi ke stasiun bumi).

b. *Medium Earth Orbit* (MEO)

Medium Earth Orbit (MEO) yakni satelit yang ditempatkan pada ketinggian antara 9656 km hingga 19312 km dari permukaan bumi. Satelit jenis MEO mempunyai delay sebesar 60 – 80 ms. Pada orbit ini satelit dapat terlihat oleh stasiun bumi lebih lama sekitar 2 jam atau lebih. Dan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan satu putaran mengitari bumi adalah 2 jam hingga 4 jam. Adapun fungsi dari satelit MEO adalah sebagai satelit citra, satelit Cuaca, mata-mata, sistem telekomunikasi bergerak (mobile) dengan contoh misalnya satelit Oddysey dan ICO.

c. *High Earth Orbit* (HEO)

High Earth Orbit (HEO) yakni satelit yang berada pada ketinggian lebih dari 35786 km dari permukaan bumi, Satelit yang berada pada ketinggian ini juga disebut Satelit GEO (*Geostationery Earth Orbit*) atau *Geostationary Satellites* atau Satelit *Geosynchronous*. Satelit GEO merupakan sebuah satelit yang ditempatkan dalam orbit yang posisinya tetap dengan posisi suatu titik di bumi, umumnya ditempatkan sejajar dengan equator bumi (garis khatulistiwa atau titik lintang nol derajat).

Karena relative diam terhadap bumi maka spot (wilayah radiasi sinyal) juga tidak berubah. Sehingga waktu edarnyapun sama dengan waktu rotasi bumi.

Pada skripsi ini model gerak satelit yang dibahas adalah sistem gerak satelit yang dibawa kedalam koordinat kutub berdimensi dua, pergerakan satelit tersebut diamati secara radial/searah dengan pengamat (menjauhi atau mendekati pengamat) dan searah tangensial (gerak melingkari bumi).

B. Komponen dalam Dinamika Satelit

1. Gaya

Gaya adalah suatu sebab yang mengubah sesuatu benda dari keadaan diam menjadi bergerak atau dari keadaan bergerak menjadi diam. Dalam mekanika teknik, gaya dapat diartikan sebagai muatan yang bekerja pada struktur (Kamajaya, 2008)

a. Hukum II Newton

Besar gaya yang dialami suatu benda sebanding dengan massa benda (m) dan percepatan (a), atau dapat dituliskan

$$F = m \cdot a \quad (2.1)$$

b. Gaya Gravitasi Bumi

Gravitasi adalah gejala yang muncul pada interaksi dua benda bermassa, yaitu berupa gaya tarik-menarik (Kamajaya, 2008:57).

Seperti dijelaskan oleh Hukum Newton mengenai gravitasi bahwa

“Setiap partikel di Alam semesta akan menarik partikel lain dengan gaya yang besarnya berbanding lurus dengan massa partikel itu dan berbanding terbalik dengan kuadrat jarak keduanya”.

Pernyataan Newton tersebut maka diperoleh besar gaya gravitasi antara satelit dan bumi adalah

$$F_g = G \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (2.2)$$

dengan M adalah massa Bumi, m adalah massa satelit, r adalah jarak antara bumi dan satelit dan G adalah konstanta gravitasi yang besarnya

$$G = \left(6,670 \times 10^{-8} N \cdot m^2 / kg^2 \right) \quad (2.3)$$

c. Gaya Dorong Satelit (Radial) dinotasikan F_r

Gaya dorong yang digunakan untuk mengontrol satelit agar tetap berada pada posisi stabil pada posisi geostasionernya dalam arah radial.

d. Gaya Dorong Satelit (Tangensial) dinotasikan F_θ

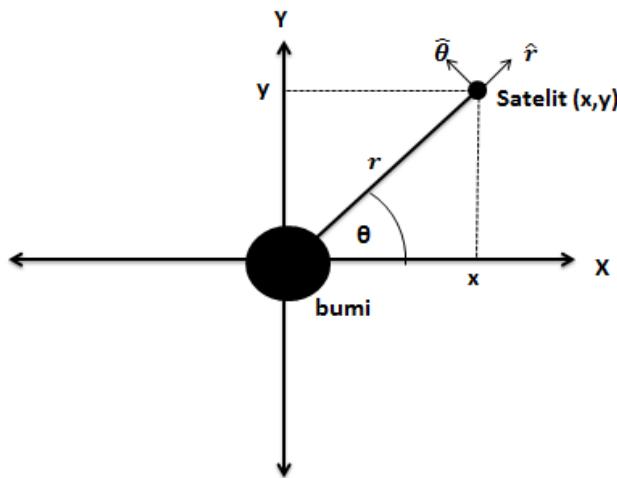
Gaya dorong yang digunakan untuk mengontrol satelit agar tetap berada pada posisi stabil pada posisi geostasionernya dalam arah tangensial.

2. Vektor

Vektor merupakan kuantitas yang memiliki panjang dan arah. Vektor-vektor dapat dinyatakan secara geometris sebagai segmen-segmen garis terarah atau panah-panah di ruang-2 atau ruang-3, arah panah menentukan arah vektor dan panjang panah menyatakan besarnya. Ekor panah menyatakan *initial point* dan ujung panah menyatakan *terminal point* (Howard Anton, 1998:91)

3. Koordinat Kutub

Koordinat kutub adalah letak suatu titik yang diidentifikasi berdasarkan jarak r dan sudut θ (Parcel dan Vanberg, 1987:105). Dalam skripsi ini akan diilustrasikan pergerakan satelit dalam koordinat kutub sebagai berikut :



Gambar 2.1. ilustrasi gerak satelit pada koordinat kutub

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dan $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dengan r adalah jarak antara pusat bumi dan satelit sedangkan θ adalah besar sudut yang terbentuk dari pergeseran posisi satelit dari posisi awal diluncurkan. Dalam kasus ini \hat{r} dan $\hat{\theta}$ menunjukkan unit vektor satelit pada posisi radial dan unit vektor satelit pada posisi tangensial.

C. Sistem Dinamik

Definisi 2.1 Sistem Dinamik (Perko, 2001:182)

Sistem dinamik pada E adalah pemetaan $\phi \in C^1$ (ϕ anggota himpunan fungsi yang turunan pertamanya kontinu)

$$\phi: \mathbb{R} \times E \rightarrow E$$

dengan E adalah himpunan subset terbuka dari \mathbb{R}^n dan jika $\phi_t(x) = \phi(t, x)$, maka ϕ_t memenuhi

1. $\phi_t(x) = x \quad \forall x \in E$ dan
2. $\phi_t(x) \circ \phi_s(x) = \phi_{t+s}(x) \forall x \in E$ dan $t, s \in \mathbb{R}$.

Definisi 2.2 Trajectories (Campbell dan Haberman, 2008: 287)

Orbit adalah kurva solusi $\phi_t(x)$ dari sistem persamaan diferensial yang dilengkapi dengan arah. Orbit juga disebut sebagai *trajectories* (kurva solusi).

Definisi 2.3 Potret Fase (Campbell dan Haberman, 2008: 287)

Gabungan beberapa *trajectories* disertai nilai awal yang ditampilkan dalam sebuah bidang disebut *Phase Portrait*.

Menurut Kuznetsov (1998:8) *Trajectories* sederhana disebut titik ekuilibrium.

Definisi 2.4 Titik Ekuilibrium (Wiggins, 1990:6)

Misalkan diberikan sistem persamaan diferensial (sistem dinamik kontinu) autonomous (secara eksplisit tidak bergantung waktu) berikut :

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.4)$$

Titik ekuilibrium dari sistem (2.4) adalah suatu solusi $x = \bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$.

Contoh 2.1 Diberikan sebuah sistem dinamik

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= -3\mathbf{x}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\frac{5}{3}\mathbf{x}_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Trajectories dari sistem (2.5) adalah $\phi_t(x) = \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{5}{3}t} \end{bmatrix}$

dan $x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$, sedangkan titik ekuilibrium dari sistem (2.5) dapat diperoleh saat $\dot{\mathbf{x}}_i = 0$ dengan $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sehingga,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\mathbf{x}_1 \\ -\frac{5}{3}\mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

dan solusi yang memenuhi sistem (2.6) adalah $\mathbf{x}_1 = 0$ dan $\mathbf{x}_2 = 0$, sehingga diperoleh titik ekuilibrium dari sistem (2.5) adalah $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Untuk melakukan analisa keadaan suatu sistem dinamik maka harus ditentukan nilai eigen dari sistem dinamik tersebut, hal ini dapat dilakukan dengan merubah persamaan sistem dinamik kedalam bentuk matriks.

Persamaan (2.5) dapat dilihat dalam bentuk matriks $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$.

D. Nilai eigen, Vektor eigen, Determinan, Rank Matriks, Operasi Baris Elementer.

Definisi 2.5 Nilai eigen dan Vektor eigen (Howard Anton, 1991: 277)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor taknol \mathbf{x} di dalam R^n dinamakan *vektor eigen (eigenvector)* dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah kelipatan skalar dari \mathbf{x} ; yakni,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (2.7)$$

Dengan suatu skalar λ . Skalar λ dinamakan *nilai eigen (eigenvalue)* dari A dan \mathbf{x} dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Nilai eigen dari

matriks $A_{n \times n}$ dapat dicari dengan menuliskan persamaan (2.7) dalam bentuk lain

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0 \quad (2.8)$$

dengan $I_{n \times n}$ adalah matriks indentitas. Matriks A yang merupakan matriks dari suatu sistem dinamik akan mempunyai solusi *non-trivial* (tak tunggal) jika dan jika

$$|A - \lambda I| = 0 \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) inilah yang kemudian disebut persamaan karakteristik.

Definisi 2.6 Determinan Matriks (Howard Anton, 1991: 63)

Misalkan A adalah matriks persegi, *Fungsi determinan* dinyatakan oleh **det**, dan didefinisikan $\det(A)$ sebagai jumlahan semua hasil kali elementer bertanda dari A . Jumlah $\det(A)$ kemudian dinamakan **determinan A**.

Menentukan determinan dari matriks persegi

$$1. \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$2. \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Contoh 2.2 Diberikan sistem $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$,

dengan matriks $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ maka nilai eigen dan vektor eigen $\dot{\mathbf{x}}$ dapat dicari sebagai berikut :

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&= (-2 - \lambda)(-3 - \lambda) - (2)(1) = 0 \\
&= \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \\
&= (\lambda + 1)(\lambda + 4) = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Dari persamaan (2.10) diperoleh nilai eigen sama dengan $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -4$.

Selanjutnya dengan menggunakan nilai eigen tersebut akan dicari vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan masing-masing nilai eigen tersebut menggunakan persamaan (2.8). Sehingga diperoleh

$$\begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 2 & -3 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.11}$$

- Untuk $\lambda_1 = -1$ maka matriks (2.11) menjadi $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = 0$,

sehingga menghasilkan persamaan

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 &= 0 \\
2x_1 - 2x_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Solusi dari sistem (2.12) adalah $x_1 = x_2$, misalkan $x_1 = t$ maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = -1$ adalah

$$v_1 = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Untuk $\lambda_2 = -4$ maka matriks (2.11) menjadi $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = 0$, sehingga menghasilkan persamaan

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &= 0 \\
2x_1 + x_2 &= 0
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Solusi dari sistem (2.13) adalah $x_2 = -2x_1$, misalkan $x_1 = t$ maka vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = -4$ adalah

$$v_2 = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh vektor eigen dari matriks A adalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Definisi 2.7 Kofaktor (Howard Anton, 1991: 77)

Jika A adalah matriks persegi, maka *minor entri* a_{ij} dinyatakan oleh

M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A . Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan oleh C_{ij} dan dinamakan *kofaktor entri* a_{ij} .

Contoh 2.3 Kofaktor entri dan minor entri

misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$,

Maka minor entri a_{11} adalah $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 16$

Kofaktor a_{11} adalah $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 16$

Berdasarkan definisi 2.6 bagian (2) diketahui bahwa

misalkan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ maka

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$, atau dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} \det(A) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + \\ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned} \quad (2.14)$$

karena $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} = C_{11}$, $a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} = C_{12}$ dan $a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} = C_{13}$ maka persamaan (2.14) dapat ditulis menjadi

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \quad (2.15)$$

persamaan (2.15) inilah yang kemudian disebut sebagai **Ekspansi Kofaktor**.

Contoh 2.4 Untuk $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ maka $\det(A)$ dengan menggunakan

ekspansi kofaktor dapat dicari sebagai berikut :

diambil ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama maka

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3(-4) - (1)(-11) = -1 \end{aligned}$$

$$\text{minor entri } a_{11} \text{ adalah } M_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 16$$

$$\text{Kofaktor } a_{11} \text{ adalah } C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 16$$

Definisi 2.8 Rank Matriks (Howard Anton, 1991: 169)

Dimensi ruang baris dan ruang kolom tak nol dari matriks A disebut rank dari A dan dilambangkan dengan $\text{Rank}(A)$. Dimensi ruang nol di A disebut *nullitas* A dan dilambangkan $\text{null}(A)$.

Contoh 2.5 Untuk $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$ maka $\text{Rank}(A)$

dan $\text{Rank}(B)$ dapat dicari sebagai berikut:

$\text{Rank}(A) = 3$ karena tiap baris pada matriks A saling bebas linear sehingga tidak terjadi kombinasi linear antar barisnya

$\text{Rank } (B) = 2$ karena baris ke 3 pada matriks B merupakan kombinasi linear dari baris ke 2 dari matriks B .

Definisi 2.9 Operasi Baris Elementer (W.S. Budhi, 1995: 18)

Operasi Baris Elementer (OBE) pada suatu matriks adalah salah satu operasi yang berupa:

1. Menukar letak baris ke i dan ke j , dinotasikan dengan $R_i \leftrightarrow R_j$.
2. Mengalikan baris ke i dengan bilangan $c, c \neq 0$, dinotasikan dengan cR_i .
3. Mengganti baris ke i dengan baris ke i ditambah c kali baris ke j , dinotasikan dengan $R_i + cR_j$.

Contoh 2.6 Untuk $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ maka matriks A dapat disederhanakan dengan

menggunakan OBE sebagai berikut

dengan mengambil $c = -2$ dan melakukan operasi $R_1 + (-2)R_2$ maka

diperoleh $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$, kemudian dengan mengambil $c = -6$ dan

melakukan operasi $(-6)R_1 + R_2$ maka diperoleh $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, selanjutnya

dilakukan perkalian baris pertama dengan $c = \frac{1}{6}$ dan perkalian baris kedua

dengan $c = -\frac{1}{2}$ maka diperoleh $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, terakhir dilakukan operasi

penukaran baris $R_1 \leftrightarrow R_2$ sehingga diperoleh $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

E. Linearisasi.

Definisi 2.10 Sistem Nonlinear (Perko, 2001: 65)

Sistem *Non Linear* didefinisikan sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

dengan $f: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $E \subset \mathbb{R}^n$.

Definisi 2.11 Linearisasi Sistem Nonlinear (Olsder, 2004: 30)

Diberikan sistem *Non Linear* sebagai berikut

$$\dot{\tilde{x}}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (2.17)$$

$$\text{dengan syarat awal } \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0 \quad (2.18)$$

diketahui $\tilde{x}(t)$ adalah solusi dari sistem (2.17) dengan fungsi input $\tilde{u}(t)$,

Misalkan $\tilde{x}(t) + z(t)$ merupakan solusi lain dari (2.17),(2.18)

dengan nilai awal $\tilde{x}_0 + z_0$ dan fungsi input $\tilde{u}(t) + v(t)$, dimana $\tilde{x} + z$ berada dalam persekitaran \tilde{x} dan $\tilde{u} + v$ berada dalam persekitaran \tilde{u} , dengan mengasumsikan z, v cukup kecil.

Sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt} \tilde{x} = f(\tilde{x}, \tilde{u}) \quad (2.19)$$

$$\text{dengan } \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$$

$$\frac{d}{dt} (\tilde{x} + z) = f(\tilde{x} + z, \tilde{u} + v) \quad (2.20)$$

$$\text{dan } \tilde{x}(t_0) + z(t_0) = \tilde{x}_0 + z_0 \quad (2.21)$$

dengan melakukan ekspansi deret Taylor pada persamaan (2.20) maka

$$f(\tilde{x} + z, \tilde{u} + v) = f(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} f(\tilde{x}, \tilde{u})z + \frac{\partial}{\partial u} f(\tilde{x}, \tilde{u})v + \text{suku}$$

$$\text{dengan orde yang lebih tinggi,} \quad (2.22)$$

dengan

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \ddots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_{n-1} & \frac{\partial}{\partial x_2} f_{n-1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_{n-1} & \frac{\partial}{\partial x_n} f_{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_n & \frac{\partial}{\partial x_2} f_n & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f_n & \frac{\partial}{\partial x_n} f_n \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Matriks (2.23) disebut jacobian fungsi $f(\tilde{x}, \tilde{u})$ terhadap variabel x , dan

$$\frac{\partial}{\partial u} f(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial u_2} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} f_1 & \frac{\partial}{\partial u_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial u_2} f_2 & \ddots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} f_2 & \frac{\partial}{\partial u_n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} f_{n-1} & \frac{\partial}{\partial u_2} f_{n-1} & \dots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} f_{n-1} & \frac{\partial}{\partial u_n} f_{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} f_n & \frac{\partial}{\partial u_2} f_n & \dots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} f_n & \frac{\partial}{\partial u_n} f_n \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Matriks (2.24) disebut jacobian fungsi $f(\tilde{x}, \tilde{u})$ terhadap variabel u ,

Jika persamaan (2.22) dikurangi dengan persamaan (2.19) dan jika z, v cukup kecil maka suku dengan orde yang lebih tinggi dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$\frac{d}{dt}(\tilde{x} + z) - \frac{d}{dt}(\tilde{x}) = f(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} f(\tilde{x}, \tilde{u})z + \frac{\partial}{\partial u} f(\tilde{x}, \tilde{u})v + \text{suku}$$

dengan orde yang lebih tinggi $-f(\tilde{x}, \tilde{u})$

$$\dot{z}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\tilde{x}, \tilde{u})z + \frac{\partial}{\partial u} f(\tilde{x}, \tilde{u})v \quad (2.25)$$

dengan memisalkan $A(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(\tilde{x}, \tilde{u})$ dan $B(t) = \frac{\partial}{\partial u} f(\tilde{x}, \tilde{u})$ maka persamaan (2.25) dapat ditulis menjadi

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + B(t)v(t) \quad (2.26)$$

Persamaan (2.26) merupakan hasil linearisasi dari persamaan (2.17) dan (2.18).

Definisi 2.12 Linearisasi Persamaan Output (Olsder, 2004: 31)

Diberikan persamaan output

$$y(t) = g(x, u) \quad (2.27)$$

dengan $g(x, u) = \begin{bmatrix} g_1(x, u) \\ g_2(x, u) \\ \vdots \\ g_n(x, u) \end{bmatrix}$, dengan $g_i(x, u)$ adalah fungsi bernilai real,

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Misalkan solusi dari persamaan (2.27) adalah

$$\tilde{y}(t) = g(\tilde{x}, \tilde{u}) \quad (2.28)$$

maka penyelesaian dari $y(t)$ berbentuk

$$y(t) = \tilde{y}(t) + w(t) \quad (2.29)$$

Karena persamaan (2.29) adalah solusi dari persamaan output (2.27) maka persamaan (2.29) memenuhi

$$y(t) = \tilde{y}(t) + w(t)$$

$$\tilde{y}(t) + w(t) = g(\tilde{x} + z, \tilde{u} + v) \quad (2.30)$$

$$\tilde{y}(t_0) = y_0 + z_0 \quad (2.31)$$

dengan melakukan ekspansi Taylor pada persamaan (2.30) maka diperoleh

$$g(\tilde{x} + z, \tilde{u} + v) = g(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} g(\tilde{x}, \tilde{u})z + \frac{\partial}{\partial u} g(\tilde{x}, \tilde{u})v + \text{suku dengan orde}$$

$$\text{yang lebih tinggi,} \quad (2.32)$$

dengan

$$\frac{\partial}{\partial x} g(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_n} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 & \ddots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_n} g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_{n-1} & \frac{\partial}{\partial x_2} g_{n-1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} g_{n-1} & \frac{\partial}{\partial x_n} g_{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_n & \frac{\partial}{\partial x_2} g_n & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} g_n & \frac{\partial}{\partial x_n} g_n \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Matriks (2.33) disebut jacobian fungsi $g(\tilde{x}, \tilde{u})$ terhadap variabel x ,

$$\frac{\partial}{\partial u} g(\tilde{x}, \tilde{u}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial u_2} g_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} g_1 & \frac{\partial}{\partial u_n} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial u_2} g_2 & \ddots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} g_2 & \frac{\partial}{\partial u_n} g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u_1} g_{n-1} & \frac{\partial}{\partial u_2} g_{n-1} & \dots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} g_{n-1} & \frac{\partial}{\partial u_n} g_{n-1} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} g_n & \frac{\partial}{\partial u_2} g_n & \dots & \frac{\partial}{\partial u_{n-1}} g_n & \frac{\partial}{\partial u_n} g_n \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Matriks (2.34) disebut jacobian fungsi $g(\tilde{x}, \tilde{u})$ terhadap variabel u .

Jika persamaan (2.32) dikurangi dengan persamaan (2.28) dan jika z, v cukup kecil maka orde yang lebih tinggi dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$\tilde{y} + w - \tilde{y} = g(\tilde{x}, \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial x} g(\tilde{x}, \tilde{u})z + \frac{\partial}{\partial x} g(\tilde{x}, \tilde{u})v + \text{suku dengan orde yang lebih tinggi } - g(\tilde{x}, \tilde{u}),$

$$w(t) = \frac{\partial}{\partial x} g(\tilde{x}, \tilde{u})z + \frac{\partial}{\partial u} g(\tilde{x}, \tilde{u})v \quad (2.35)$$

dengan memisalkan

$C(t) = \frac{\partial}{\partial x} g(\tilde{x}, \tilde{u})$ dan $D(t) = \frac{\partial}{\partial u} g(\tilde{x}, \tilde{u})$ maka persamaan (2.35) dapat ditulis menjadi

$$w(t) = C(t)z(t) + D(t)v(t) \quad (2.36)$$

Persamaan (2.36) merupakan hasil linearisasi dari persamaan output (2.27).

Contoh 2.7 Misal diberikan sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -tx_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{1}{t}x_1(t) \\ y(t) &= \frac{1}{t^2}x_1^2(t) + x_2^2(t)t\end{aligned}\quad (2.37)$$

Akan ditunjukkan jika $u = \sin t$ maka $x_1 = t \sin t$ dan $x_2 = -\cos t$ adalah solusi dari sistem (2.37) dan hasil dari linearisasi dari sistem (2.37).

Diketahui $x_1 = t \sin t$ maka $\dot{x}_1 = \sin t + t \cos t$ atau dapat ditulis menjadi $\dot{x}_1(t) = -tx_2(t) + u(t)$. $x_2 = -\cos t$ maka $\dot{x}_2 = \sin t$ atau dapat ditulis menjadi $\dot{x}_2(t) = \frac{1}{t}x_1(t)$.

\therefore jika $u = \sin t$ maka $x_1 = t \sin t$ dan $x_2 = -\cos t$ adalah solusi dari sistem (2.37).

Diketahui $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -tx_2(t) + u(t) \\ \frac{1}{t}x_1(t) \end{bmatrix}$ dan $y(t) = g(x, u) = \frac{1}{t^2}x_1^2(t) + x_2^2(t)t$

maka berdasarkan persamaan (2.23), (2.24), (2.33) dan (2.34) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2}f_2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1}f_1 \\ \frac{\partial}{\partial u_1}f_2 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{t} & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2}g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1}g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2}g_2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial u} = [0] \\ \frac{\partial g}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 2 & 2x_2 \\ \frac{2}{t^2}x_1 & 2 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial g}{\partial u} = [0]\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial u}$ diatas maka dapat disusun matriks linearisasi dari sistem (2.37) sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \begin{bmatrix} 0 & -t \\ \frac{1}{t} & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \\ w &= \begin{bmatrix} 2 \sin t & -2 \cos t \end{bmatrix} z(t)\end{aligned}$$

F. Kestabilan Sistem Dinamik.

Definisi 2.12 kestabilan sistem berdasarkan nilai eigen (Olsder, 2004: 57)

Sistem dinamik didefinisikan sesuai persamaan $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ pada waktu t memberikan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Titik ekuilibrium \bar{x} disebut stabil jika setiap $\forall \varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$,
2. Titik ekuilibrium \bar{x} disebut stabil asimtotik jika titik ekuilibrium stabil dan jika ada $\delta_1 > 0$ sedemikian hingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ bila $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$,
3. Titik ekuilibrium \bar{x} disebut *tidak stabil* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga terdapat $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ dan $\|x_{x_0}(t) - \bar{x}\| > \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.

Untuk sistem persamaan diferensial linear $\dot{x} = Ax$ dengan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$. Sistem $\dot{x} = Ax$ dikatakan stabil asimtotik jika titik ekuilibriumnya stabil asimtotik, dikatakan stabil jika titik ekuilibriumnya stabil, dan dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibriumnya tidak stabil.

Teorema 2.1 kestabilan sistem (Olsder, 2004: 58)

Diberikan sistem persamaan diferensial linear $\dot{x} = Ax$ dengan matriks $A_{n \times n}$ dan memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, dengan $k \leq n$.

1. Jika $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ maka kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah stabil asimtotik,
2. jika ada $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ untuk beberapa $i = 1, 2, \dots, k$ maka kestabilan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ adalah tidak stabil.

Deret Taylor (Purcel dan Vanberg, 1987: 56)

Misalkan $f(x)$ dapat diturunkan sebanyak n kali pada $x = a$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret kuasa

$$f(x) = f(a)(x - a)^0 + f'(a)(x - a)^1 + \frac{1}{2!}f''(a)(x - a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(a)(x - a)^n \quad (2.39)$$

Deret diatas yang disebut *deret Taylor* dengan pusat $x = a$. Dan apabila $a = 0$ maka deret diatas menjadi

$$f(x) = f(0)x + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(0)x^n \quad (2.40)$$

Persamaan (2.41) disebut *deret Mac Laurin*.

Bentuk e^{At} dapat dituliskan dalam bentuk deret Taylor sebagai berikut

$$e^{At} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \quad (2.41)$$

Dengan mendiferensialkan e^{At} maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[e^{At}] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \frac{A^3 h}{3!} + \cdots \right) \\ &= Ae^{At} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Sehingga e^{At} memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{d}{dt}[e^{At}] = Ae^{At} \quad (2.43)$$

Selanjutnya ketika diambil kondisi awal $t = 0$ maka $e^{At}|_{t=0} = I$

Jadi dapat diidentifikasi e^{At} dengan matriks dasar Φ , yang memenuhi masalah nilai awal yang sama dengan e^{At} yaitu :

$$\Phi' = A\Phi, \quad \Phi(0) = I$$

Sebagai hasil dari interpretasi fungsi matriks eksponensial e^{At} , maka dapat ditulis solusi dari masalah nilai awal

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad x(0) = 0$$

dalam bentuk

$$x(t) = e^{At}x_0$$

Solusi sistem linear (Perko, 2001:1)

Apabila diberikan sistem linear $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, matriks $A_{n \times n}$ dan kondisi awal $x(0) = x_0$ maka solusi dari sistem linear tersebut adalah

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad (2.44)$$

Solusi sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan nilai awal $x(0) = x_0$ akan sangat dipengaruhi oleh nilai eigen dari matriks A , sehingga solusi yang dibentuk kemudian dibedakan menjadi tiga kasus yaitu:

1. Jika matriks $A_{n \times n}$ memiliki nilai eigen real dan berbeda maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1}$$

dengan $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ adalah matriks invertible, dan λ adalah nilai eigen dari matriks A , dengan $1 \leq j \leq n, j \in \mathbb{N}$ dan $\text{diag}[e^{\lambda_j t}] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$,

Sehingga solusi sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan nilai awal $x(0) = x_0$ menjadi

$$x(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1} x_0 \quad (2.45)$$

2. Jika matriks $A_{2n \times 2n}$ memiliki sebanyak $2n$ nilai eigen kompleks maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = P \text{diag} \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1}$$

dengan $P = [v_1 u_1 \ v_2 u_2 \ \dots \ v_n u_n]$ adalah matriks invertible, dan $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ adalah nilai eigen dari matriks A , dengan $1 \leq j \leq \frac{n}{2}, j \in \mathbb{N}$.

Sehingga solusi sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan nilai awal $x(0) = x_0$ menjadi

$$x(t) = P \text{diag} \left\{ e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix} \right\} P^{-1} x_0 \quad (2.46)$$

3. Jika matriks $A_{n \times n}$ memiliki nilai eigen kembar maka bentuk e^{At} menjadi

$$e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right] P^{-1}$$

dengan $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ adalah matriks invertible dan λ adalah nilai eigen dari matriks A , N adalah matriks nilpoten $N = A - S, S = \text{diag}[e^{\lambda_j}]$, dengan syarat $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$ untuk $k \leq n$.

Sehingga solusi sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan nilai awal $x(0) = x_0$ menjadi

$$x(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] \left[I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right] P^{-1} x_0 \quad (2.47)$$

Persamaan (2.45), (2.46) dan (2.47) merupakan bentuk-bentuk dari solusi sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ dengan nilai awal $x(0) = x_0$ untuk semua kemungkinan nilai eigen A . Bentuk-bentuk inilah yang akan digunakan untuk membuktikan teorema 2.1.

Bukti teorema 2.1

Perhatikan persamaan (2.45), (2.46) dan (2.47), setiap x_i mempunyai faktor $e^{a_j t}$ dengan $a_j = \operatorname{Re}\{\lambda_j\}$, $\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, sehingga:

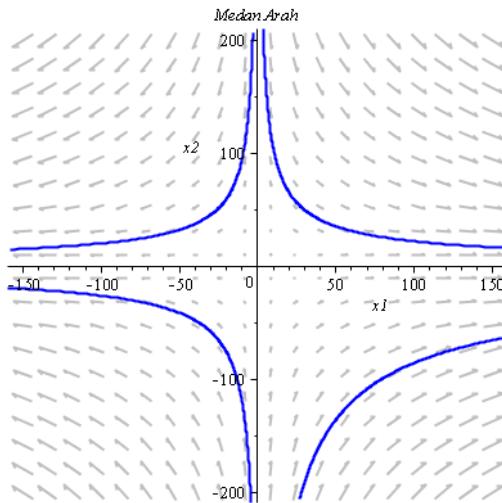
1. Jika $\operatorname{Re}\{\lambda_j\} < 0$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$ maka saat $t \rightarrow \infty$ akan mengakibatkan $e^{\operatorname{Re}\{\lambda_j\}t} \rightarrow 0$, sehingga solusi sistem $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (0, 0, \dots, 0)$, dengan kata lain solusinya menuju ke titik ekuilibriumnya, artinya sistem stabil asimtotik ke 0.
2. Jika ada j sehingga $\operatorname{Re}\{\lambda_j\} > 0$, maka saat $t \rightarrow \infty$ nilai $e^{\operatorname{Re}\{\lambda_j\}t} \rightarrow \infty$, yang mengakibatkan ada i sedemikian sehingga $x_i \rightarrow \infty$, dengan kata lain solusinya menjauhi dari titik ekuilibriumnya, artinya sistem tidak stabil.

Contoh 2.8

$$\text{misalkan diberikan sistem } \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.48)$$

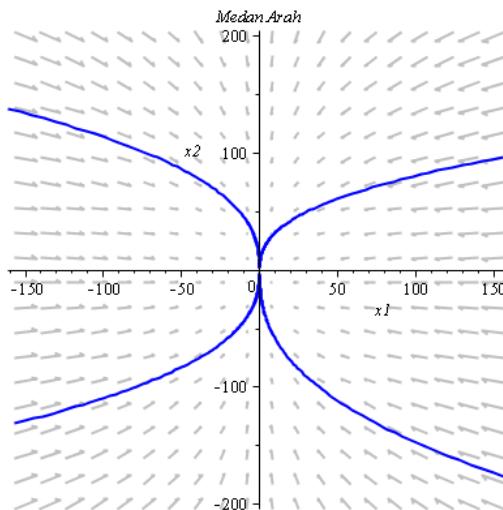
maka tipe kestabilan sistem (2.48) dapat ditentukan sebagai berikut :

1. Untuk $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, sistem tersebut memiliki titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$. Bedasarkan definisi 2.5 dan persamaan (2.9) maka diperoleh nilai eigen dari sistem (2.48) A adalah $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -2$. Berdasarkan teorema (2.1) karena ada $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0$ maka titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = 0$ dikatakan tidak stabil. Tipe kestabilan sistem (2.48) A akan diilustrasikan pada gambar 2.2



Gambar 2.2. Ilustrasi kestabilan sistem (2.48) A. Terlihat bahwa medan arah (kumpulan segmen garis yang menyinggung kurva solusi dari sistem) dari sistem menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = (0,0)$, maka tipe kestabilan sistem (2.48)A adalah tidak stabil

2. Untuk $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, sistem tersebut memiliki titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = (0,0)$. Berdasarkan definisi 2.5 dan persamaan (2.9) maka diperoleh nilai eigen dari sistem (2.48)B adalah $\lambda_1 = -5$ dan $\lambda_2 = -2$. Berdasarkan teorema (2.1) karena semua $Re \lambda_i < 0, i = 1,2$ maka titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = 0$ dikatakan stabil. Tipe kestabilan sistem (2.48)B akan diilustrasikan pada gambar 2.3 berikut



Gambar 2.3. Ilustrasi kestabilan sistem (2.48) B. Terlihat bahwa medan arah (kumpulan segmen garis yang menyinggung kurva solusi dari sistem) dari sistem menuju titik ekuilibrium $\bar{x} = (0,0)$, maka tipe kestabilan sistem (2.48)B adalah stabil

Definisi 2.13 Kriteria Routh-Hurwitz (Olsder, 2004: 60)

Permasalahan yang sering timbul dalam penentuan tipe kestabilan dengan menggunakan nilai eigen adalah ketika mencari akar dari persamaan karakteristik berorde tinggi, oleh sebab itu diperlukan suatu kriteria yang mampu menjamin nilai dari akar suatu persamaan karakteristik tersebut negatif atau ada yang bernilai positif. Salah satu kriteria yang efektif untuk menguji kestabilan sistem adalah kriteria Routh-Hurwitz.

Kriteria Routh-Hurwitz didasarkan pada pengurutan koefisien persamaan karakteristik sistem orde yang dituangkan ke dalam bentuk array. Misal diberikan suatu persamaan karakteristik dari akar-akar karakteristik matriks $A_{n \times n}$ sebagai berikut

$$|\lambda I - A| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.49)$$

dengan $a_i, i = 0, 1, 2 \dots, n$ dan $a_0 \neq 0$ merupakan koefisien karakteristik dari matriks A ,

Tabel Routh-Hurwitz adalah tabel yang disusun berdasarkan pengurutan koefisien-koefisien karakteristik dari matriks A tersebut sedemikian sehingga didapat susunan tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut

Tabel 2.1. tabel Routh-Hurwitz

a_0	a_2	a_4	...
a_1	a_3	a_5	...
b_1	b_2	b_3	...
c_1	c_2	c_3	...
:	:	:	

dengan $b_i, c_i, i = 1, 2, \dots, n$ didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \\ c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Matriks $A_{n \times n}$ dikatakan stabil menurut teorema 2.1 apabila semua bagian real dari nilai eigen nya bernilai negatif, dalam kriteria Routh-Hurwitz hal ini dapat ditunjukkan dengan tidak adanya perubahan tanda pada kolom pertama tabel 2.1. Artinya berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz suatu sistem dinamik dikatakan stabil jika dan hanya jika setiap elemen di kolom pertama tabel Routh-Hurwitznya memiliki tanda yang sama.

Contoh 2.9 Misalkan diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (2.51)$$

Maka tipe kestabilan dari sistem (2.51) dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Berdasarkan definisi 2.5 dan persamaan (2.9) maka diperoleh persamaan karakteristik dari matriks A adalah

$$|A - \lambda I| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

Berdasarkan tabel 2.1 maka dapat disusun tabel Routh-Hurwitz untuk sistem (2.51)

Tabel 2.2. tabel Routh-Hurwitz sistem 2.51

1	-1	0
-2	2	0
0	0	0

dari tabel 2.2 dapat dilihat bahwa pada kolom pertama mengalami perubahan tanda dari positif ke negatif artinya berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz maka sistem 2.51 memiliki $\lambda > 0$, sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem 2.51 tidak stabil.

G. Keterkontrolan Sistem Dinamik.

Definisi 2.14 keterkontrolan/*Controllability* (Olsder, 2004: 66)

Diberikan sistem dinamik linear time invariant (sistem linear yang input dan outputnya secara eksplisit tidak bergantung terhadap waktu)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (2.52)$$

Sistem (2.52) dikatakan terkontrol (*controllable*) jika untuk setiap nilai awal $x(t_0) = x_0$, terdapat input $u(t)$ yang kontinu dan mentransfer x_0 kekeadaan akhir $x(t_1) = x_1$, dengan t_1 adalah waktu akhir.

Matriks keterkontrolan (Olsder, 2004: 67)

Diberikan sistem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (2.52)$$

Matriks $R_{n \times nm} = [B \ AB \ A^2B \ A^3B \cdots A^{n-1}B]$ disebut matriks keterkontrolan (*controllability matrix*) dari (2.52), dengan $A_{n \times n}$, $B_{n \times m}$.

Teorema 2.2 keterkontrolan sistem (Olsder, 2004: 68)

Diberikan sistem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (2.52)$$

Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

1. Sistem (2.52) terkontrol/*controllable*.
2. $\text{Rank}(R) = \text{Rank}([B \ AB \ A^2B \ A^3B \cdots A^{n-1}B]) = n$

Bukti:

Akan dibuktikan jika sistem (2.52) terkontrol maka $\text{Rank}(R) = n$

Pembuktian ini dilakukan dengan kontraposisi dari $1 \Rightarrow 2$ yaitu andaikan $\text{Rank}(R) \neq n$, akan ditunjukkan (2.52) tidak terkontrol

Untuk sembarang $u(t)$, $0 < t < t_1$ maka

$$x(t_1, 0, u) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} Bu(s) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{t_1} \left(I + A(t_1 - s) + \frac{A^2}{2!}(t_1 - s)^2 + \dots \right) Bu(s) ds \\
&= B \int_0^{t_1} u(s) ds + AB \int_0^{t_1} (t_1 - s)u(s) ds + \\
&\quad A^2 B \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - s)^2}{2!} u(s) ds + \dots
\end{aligned}$$

jadi $x(t_1, 0, u)$ merupakan kombinasi linear dari B, AB, A^2B, \dots

jika $\text{Rank}(R) < n$ maka ada $Im(R) \neq \mathbb{R}^n$ sehingga ada titik di \mathbb{R}^n yang tidak dapat dicapai, sehingga (2.52) tidak terkontrol.

Akan dibuktikan jika $\text{Rank}(R) = n$ maka sistem (2.52) terkontrol

Misalkan $\text{Rank}(R) = n$. Akan dibuktikan bahwa dimulai dari titik $x_0 = 0$ maka sembarang titik $x_1 \in \mathbb{R}^n$ dapat dicapai dalam waktu $t_1 > 0$.

Didefinisikan matriks

$$K = \int_0^{t_1} e^{-As} BB^T e^{-A^T s} ds$$

Selanjutnya akan dibuktikan K mempunyai invers. Andaikan K tidak mempunyai invers maka $K \cdot a = 0, \forall a \neq 0$, sehingga

$$\begin{aligned}
&a^T K a = 0 \\
&\Leftrightarrow \int_0^{t_1} a^T e^{-As} BB^T e^{-A^T s} a ds = 0 \\
&\Leftrightarrow \int_0^{t_1} \|a^T e^{-As} B\|^2 ds = 0 \\
&\Leftrightarrow a^T e^{-As} B = 0, \forall s \in [0, t_1] \tag{2.53}
\end{aligned}$$

dengan mendiferensialkan persamaan (2.53) sebanyak $n - 1$ kali terhadap s maka didapat

$$a^T e^{-As} B = 0$$

$$a^T A e^{-As} B = 0$$

⋮

$$a^T A^{n-1} e^{-As} B = 0$$

dan dengan mensubstitusikan $s = 0$ maka diperoleh

$$a^T B = 0$$

$$a^T AB = 0$$

⋮

$$a^T A^{n-1} B = 0$$

atau dapat ditulis $a^T R = 0$. Hal tersebut tidak mungkin karena bertentangan dengan yang diketahui yaitu $\text{Rank}(R) = n$. Jadi matriks K mempunyai invers untuk sembarang titik $x_i \in \mathbb{R}^n$ dan $t_1 > 0$.

Didefinisikan

$$\tilde{u}(t) = B^T e^{-A^T t} K^{-1} e^{-At_1} x_1 \quad (2.54)$$

Apabila input (2.54) adalah aplikasi dari sistem dengan kondisi awal $x_0 = 0$ maka

$$\begin{aligned} x(t_1, 0, u) &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B \tilde{u}(s) ds \\ &= \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B B^T e^{-A^T t} K^{-1} e^{-At_1} x_1 ds \\ &= e^{At_1} \left(\int_0^{t_1} e^{-As} B B^T e^{-A^T t} ds \right) K^{-1} e^{-At_1} x_1 \\ &= e^{At_1} K K^{-1} e^{-At_1} x_1 \\ &= x_1 \end{aligned}$$

Untuk sembarang x_0 lihat state $x_1 - e^{At_1} x_0$. Maka terdapat $\tilde{u}(t)$ sedemikian sehingga

$$x(t_1, 0, \tilde{u}(t)) = \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)} B \tilde{u}(s) ds$$

$$= x_1 - e^{At_1}x_0$$

Sehingga

$$x_1 = e^{At_1}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-s)}B\tilde{u}(s) ds.$$

Terbukti bahwa dimulai dari titik $x_0 = 0$ maka sembarang titik $x_1 \in \mathbb{R}^n$ dapat dicapai dalam waktu $t_1 > 0$. Artinya sistem terkendali.

Definisi 2.15 Keterkontrolan dan Kestabilan (Olsder, 2004: 95)

Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \quad (2.52)$$

Sistem (2.52) dapat distabilkan bila ada matriks $K_{m \times n}$ sedemikian sehingga $Re(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n$, dengan λ adalah nilai eigen dari $A + BK$.

Selanjutnya akan ditunjukkan suatu teorema yang memberikan syarat suatu sistem dapat distabilkan.

Teorema 2.2 (Olsder, 2004: 95)

Diberikan sistem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \quad (2.52)$$

Sistem (2.52) terkонтrol jika untuk setiap polinomial

$$a(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

terdapat matriks $K_{m \times n}$ sedemikian sehingga $\det(\lambda I - (A + BK)) = a(\lambda)$.

Bukti:

Sistem (2.52) terkонтrol sehingga dapat ditransformasi kedalam bentuk kanonik terkонтrol sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-1} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan memilih $K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \cdots \alpha_1 - a_1]$, maka diperoleh matriks $A + BK$ sebagai berikut

$$(A + BK) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_n & -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix}$$

selanjutnya akan dicari $\det(\lambda I - (A + BK))$.

$$|\lambda I - (A + BK)| = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = a(\lambda) \blacksquare$$

Berdasarkan teorema 3.2 jika sistem (2.52) terkontrol, polinomial karakteristik dari $(A + BK)$ dapat dipilih sembarang untuk suatu nilai K yang sesuai, maka dari itu polinomial karakteristik yang identik dengan nilai karakteristik dari $(A + BK)$ dapat diletakkan pada setiap lokasi yang diinginkan, dengan mengambil suatu lokasi khusus pada sebelah kiri bidang kompleks maka akan diperoleh $R(\lambda) < 0$ sedemikian sehingga $\dot{\mathbf{x}} = (A + BK)\mathbf{x}$ memiliki tipe kestabilan stabil asimtotik, sehingga dapat disimpulkan jika sistem (2.52) terkontrol maka sistem tersebut juga akan dapat distabilkan.

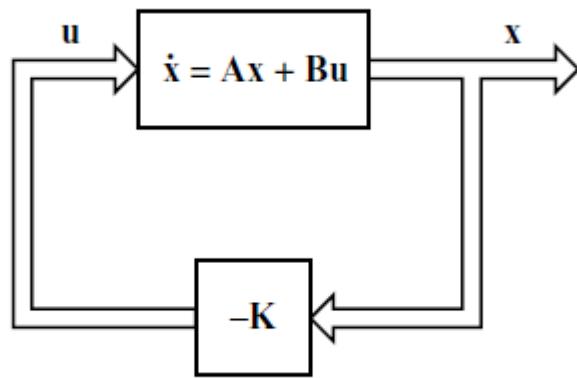
H. Desain Kontrol Sistem dengan Linear Quadratic Regulator (LQR).

Definisi 2.16 LQR (Ogata, 2010: 793)

Tujuan utama pemberian kontrol pada suatu sistem adalah untuk membuat keadaan sistem sesuai dengan yang diinginkan pendesain (dalam hal ini keadaan yang dinginkan adalah keadaan yang stabil). LQR adalah

salah satu metode kontrol dengan algoritma desain kontrol LQR merupakan pengembangan dari metode *pole-placement*, yang secara garis besar fungsi LQR adalah menentukan matriks feedback K yang dipasangkan pada sistem sedemikian sehingga mampu menstabilkan sistem dengan meminimalkan energi (indeks performansi) yang diperlukan.

Diagram alir sistem (2.52) ketika diberikan kontrol dengan menggunakan metode LQR adalah sebagai berikut :



Gambar 2.4. diagram alir sistem (2.52) dengan matriks kontrol K .

Matriks input $u(t)$ pada sistem (2.52) akan dirubah menjadi $u(t) = -Kx$ sedemikian sehingga akan diperoleh sistem baru yaitu

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \\
 &= A\mathbf{x} + B(-K\mathbf{x}) \\
 &= (A - BK)\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{2.55}$$

Definisi 2.17 Persamaan Aljabar Riccati (Subiono, 2013:206)

Untuk menyelesaikan masalah LQR diperlukan solusi dari persamaan aljabar Riccati. Untuk mencari penyelesaian tersebut diberikan persamaan Hamiltonian sebagai berikut:

$$H = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{1}{2} u^T \hat{R} u + \lambda^T [A \mathbf{x} + B u] \quad (2.56)$$

dengan $\lambda \in \mathbb{R}^n$ adalah suatu pengali yang tak diketahui.

Persamaan (2.56) dapat diturunkan menjadi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\ \dot{\lambda}(t) &= -Q\mathbf{x}(t) - A^T\lambda(t) \end{aligned} \quad (2.57)$$

dan kondisi stasioner

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \hat{R}u(t) + B^T\lambda = 0 \quad (2.58)$$

Berdasarkan persamaan (2.58) diperoleh persamaan kontrol

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \hat{R}u(t) + B^T\lambda = 0 \quad (2.58)$$

$$\Leftrightarrow \hat{R}u(t) = -B^T\lambda$$

$$\Leftrightarrow u(t) = -\hat{R}^{-1}B^T\lambda \quad (2.59)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.59) kedalam sistem (2.52) sehingga diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} &= A\mathbf{x}(t) + B(-\hat{R}^{-1}B^T\lambda) \\ &= A\mathbf{x}(t) - B\hat{R}^{-1}B^T\lambda \end{aligned} \quad (2.60)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (2.60) kedalam persamaan Hamiltonian (2.57) maka diperoleh

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B\hat{R}^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Persamaan (2.61) merupakan persamaan linear dengan $\lambda(t)$ secara linear bergantung pada $x(t)$, oleh karena itu akan dicari penyelesaian $\lambda(t)$ yang mempunyai bentuk $\lambda(t) = P(t)\mathbf{x}(t)$ (2.62)

dengan $P(t)$ adalah matriks yang belum diketahui dan berukuran $n \times n$.

Untuk memperoleh matriks $P(t)$ maka persamaan (2.62) didiferensialkan dan dengan menggunakan persamaan (2.60) sehingga diperoleh

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x} - B\hat{R}^{-1}B^T\lambda \quad (2.60)$$

$$\lambda(t) = P(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.62)$$

$$\Rightarrow \dot{\lambda}(t) = \dot{P}\mathbf{x} + P\dot{\mathbf{x}}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\lambda}(t) = \dot{P}\mathbf{x} + P(A\mathbf{x} - B\hat{R}^{-1}B^T\lambda) \quad (2.63)$$

dengan mensubtitusikan persamaan (2.63) kedalam persamaan (2.57) maka diperoleh

$$\dot{\lambda}(t) = \dot{P}\mathbf{x} + P(A\mathbf{x} - B\hat{R}^{-1}B^T\lambda) \quad (2.63)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -Q\mathbf{x} - A^T\lambda \quad (2.57)$$

$$\Rightarrow -Q\mathbf{x} - A^T\lambda = \dot{P}\mathbf{x} + P(A\mathbf{x} - B\hat{R}^{-1}B^T\lambda)$$

$$\Leftrightarrow -\dot{P}\mathbf{x} = (A^T\lambda + PA + Q - PB\hat{R}^{-1}B^T\lambda)\mathbf{x}$$

$$\Leftrightarrow -\dot{P} = (A^T\lambda + PA + Q - PB\hat{R}^{-1}B^T\lambda) \quad (2.64)$$

Persamaan (2.64) inilah yang kemudian dinamakan persamaan *Aljabar Riccati* yang merupakan persamaan linear dalam $P(t)$.

Berdasarkan persamaan (2.59) dan (2.62) maka diperoleh matriks kontrol sebagai berikut

$$u(t) = -\hat{R}^{-1}B^T\lambda \quad (2.59)$$

$$= -K\mathbf{x} = -\hat{R}^{-1}B^TP\mathbf{x} \quad (2.65)$$

dengan Matriks $P(t)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan aljabar riccati (2.64).

Definisi 2.18 Matriks semi-definit positif dan definit positif (Subiono, 2013:198)

Matriks A berukuran $n \times n$ dikatakan semi-definit positif jika untuk setiap vektor \mathbf{x} dengan n komponen berlaku $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} \geq 0$, dan dikatakan definit positif jika $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$.

Meminimumkan indeks performansi (Subiono, 2013:206)

Indeks performansi adalah energi yang dibutuhkan untuk melakukan suatu kerja. Indeks performansi digunakan untuk membuat energi yang dilakukan sistem menjadi optimum (maksimal/minimal).

Diberikan sistem linear (2.52)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \quad (2.52)$$

dengan kondisi awal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ dan keadaan akhir $\mathbf{x}(t_i)$ yang dibutuhkan mendekati nol pada saat waktu akhir yang ditentukan t_i . Jadi dalam hal ini keadaan akhir bebas yang diinginkan untuk memilih pengontrol $u(t)$ yang memenuhi persamaan (2.52) serta meminimumkan indeks performansi yang berbentuk

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T \hat{R} u) dt \quad (2.66)$$

dengan matriks bobot input/kontrol (\hat{R}) dan matriks bobot sistem (Q) adalah matriks-matriks simetri yang dipilih oleh pendesain yang bergantung pada tujuan pengontrolan.

Algortitma desain kontrol LQR (Muhammad Wakhid, 2009)

Untuk mendesain kontroler LQR yang menstabilkan sistem diperlukan beberapa langkah, antara lain:

1. Mengubah persamaan nonlinear menjadi bentuk linear melalui proses linearisasi pada solusi khusus tertentu sehingga diperoleh bentuk $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$.
2. Menentukan matriks pembobot Q dan \hat{R} yang meminimumkan indeks performansi kuadratik berikut

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T \hat{R} u) dt \quad (2.66)$$

dengan \hat{R} adalah matriks simetris definit positif dan Q adalah matriks simetris.

3. Menentukan matriks P yang merupakan solusi dari persamaan aljabar Riccati berikut

$$A^T P + PA - P B \hat{R}^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (2.64)$$

dengan matriks P adalah matriks simetris

4. Menghitung nilai gain feedback K untuk mendapatkan matriks kontrol atas sistem

$$u = -\hat{R}^{-1} B^T P \mathbf{x} = -K \mathbf{x} \quad (2.65)$$

5. Menentukan tipe kestabilan sistem $\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x}$.

BAB III

PEMBAHASAN

A. Formulasi Model Gerak Satelit Buatan

1. Masalah Nyata

Dalam skripsi ini pembahasan akan difokuskan mengenai gerak satelit buatan yang mengorbit bumi. Satelit buatan diluncurkan dari bumi untuk tugas tertentu seperti mengamati benda-benda luar angkasa, membantu informasi komunikasi, alat bantu navigasi dan mengamati perubahan cuaca. Satelit buatan diletakkan pada posisi tertentu yang tidak terganggu oleh gaya-gaya gravitasi dan hanya bergerak mengikuti pergerakan bumi. Namun dengan kondisi bumi yang terus berotasi maupun berevolusi dan dengan adanya pengaruh dari luar seperti gelombang radiasi matahari menyebabkan satelit dapat bergeser dari tempat yang semestinya berada sehingga berimplikasi pada kinerja satelit tersebut.

Apabila dinyatakan dalam koordinat kutub dimensi dua arah pergeseran satelit terbagi menjadi dua, yaitu arah radial (posisi searah dengan pengamat/menjauhi atau mendekati pengamat) dan arah tangensial (posisi gerak melingkar satelit). Pergeseran satelit pada arah radial disebabkan oleh pengaruh gaya gravitasi dari bumi dan gaya roket pada satelit sedangkan pergeseran satelit pada keadaan tangensial dipengaruhi oleh adanya gaya roket yang menyebabkan satelit bergerak melingkar.

Salah satu cara untuk mengatasi pergeseran posisi satelit dari keadaan geostasionernya karena terjadi gangguan adalah dengan memberikan suatu input kontrol yang mampu mengembalikan sistem kekeadaan stabil. Dikarenakan pergeseran satelit dibedakan dalam dua kondisi yaitu kondisi radial dan kondisi tangensial maka gaya dorong satelit juga dibedakan menjadi dua yaitu gaya dorong radial dan gaya dorong tangensial.

2. Asumsi

Berdasarkan pernyataan-pernyataan pada subbab A.1 maka asumsi-asumsi yang digunakan untuk membentuk model matematika gerak satelit adalah sebagai berikut:

- a. Gerak satelit yang dibahas dalam skripsi ini dinyatakan kedalam koordinat kutub dan dipandang dalam dimensi dua, yaitu searah radial dan searah tangensial,
- b. Gerak satelit yang dibahas dalam skripsi ini adalah pergerakan satelit geostasioner yang mengorbit bumi,
- c. Massa bumi jauh lebih besar dari massa satelit,
- d. Arah gaya dorong radial berlawanan dengan arah gaya gravitasi bumi,
- e. Unit vektor pada posisi radial tegak lurus dengan unit vektor pada posisi tangensial.

Berikut ini didefinisikan variabel dan parameter yang digunakan dalam model pengendalian gerak satelit, antara lain :

F_g : gaya gravitasi bumi

F_r : gaya dorong radial satelit

F_θ : gaya jet tangensial satelit

m : massa satelit (kg)

M : massa bumi (kg)

a : percepatan satelit

G : konstanta gravitasi bumi (Nm/kg^2)

r : jarak antara pusat bumi dan satelit (km)

\dot{r} : kecepatan radial satelit (km/s)

\ddot{r} : percepatan radial satelit (km/s^2)

\vec{r} : vektor posisi

\hat{r} : unit vektor pada posisi radial

v : kecepatan linear (m/s)

θ : sudut yang dibentuk dari pergeseran posisi satelit (derajat)

$\hat{\theta}$: unit vektor pada posisi tangensial

ω : kecepatan sudut (rad/s)

$\dot{\theta}$: kecepatan tangensial satelit ($derajat/s$)

$\ddot{\theta}$: percepatan tangensial ($derajat/s^2$)

3. Pembentukan Model Gerak Satelit

Berdasarkan asumsi-asumsi dan parameter yang digunakan, maka dapat dikonstruksi model gerak pada satelit buatan, untuk menentukan

konstruksi model tersebut pertama-tama akan dicari gaya-gaya yang terjadi pada satelit.

Dari gambar 2.1 diketahui $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ dan $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$, dengan $\theta, \vec{r}, \hat{r}, r$ merupakan fungsi atas waktu. Selanjutnya akan dicari hubungan antara \hat{r} dengan $\hat{\theta}$.

Diketahui :

- a. Unit vektor posisi satelit pada keadaan radial

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \cdot \vec{r} = \frac{1}{r} (r \cos \theta i + r \sin \theta j) = \cos \theta i + \sin \theta j \quad (3.1)$$

- b. Unit vektor posisi satelit pada keadaan tangensial

$$\hat{\theta} = -\sin \theta i + \cos \theta j \quad (3.2)$$

Apabila persamaan (3.1) dan (3.2) didiferensialkan terhadap waktu maka diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= -\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} i + \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} j \\ &= \dot{\theta}(-\sin \theta i + \cos \theta j) \\ &= \dot{\theta} \cdot \hat{\theta} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= -\cos \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} i - \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} j \\ &= \dot{\theta}(-\cos \theta i - \sin \theta j) \\ &= -\dot{\theta} \cdot \hat{r} \end{aligned} \quad (3.4)$$

dengan mendiferensialkan $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$ akan dicari persamaan kecepatan dari satelit.

$$\vec{r} = r \cdot \hat{r}$$

misal :

$$u = r \text{ maka } u' = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v = \hat{r} \text{ maka } v' = \frac{d\hat{r}}{dt}$$

sehingga diperoleh persamaan kecepatan pada satelit sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \dot{r} \hat{r} + r \frac{d\hat{r}}{dt} \\ &= \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan kecepatan pada arah radial sama dengan \dot{r} dan kecepatan pada arah tangensial sama dengan $r\dot{\theta}$.

dengan mendiferensialkan $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \hat{r} + r\dot{\theta} \hat{\theta}$ akan dicari persamaan percepatan dari satelit.

$$u_1 = \dot{r} \text{ maka } u'_1 = \frac{d\dot{r}}{dt} = \ddot{r} \quad u_2 = r \text{ maka } u'_2 = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$$

$$v_1 = \hat{r} \text{ maka } v'_1 = \frac{d\hat{r}}{dt} \quad v_2 = \dot{\theta} \hat{\theta} \text{ maka } v'_2 = \ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

sehingga diperoleh persamaan percepatan pada satelit sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= u'_1 \cdot v_1 + v'_1 \cdot u_1 + u'_2 \cdot v_2 + v'_2 \cdot u_2 \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \frac{d\hat{r}}{dt} \dot{r} + \dot{r}\dot{\theta} \hat{\theta} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} \frac{d\hat{\theta}}{dt} r \\ &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{\theta} \hat{\theta} \dot{r} + \dot{r}\dot{\theta} \hat{\theta} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} + \dot{\theta} (-\dot{\theta} \cdot \dot{r}) r \\ &= \ddot{r} \hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta} \hat{\theta} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} - r\dot{\theta}^2 \hat{r} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan percepatan pada arah radial sama dengan $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ dan percepatan pada arah tangensial sama dengan $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$.

Selanjutnya untuk menentukan gaya-gaya yang terjadi pada satelit maka digunakan Hukum II Newton yakni besar gaya yang bekerja pada sebuah benda akan sebanding dengan massa benda dan percepatan benda tersebut.

$$F = m \cdot a$$

a. Gaya pada arah radial

Gaya yang bekerja pada arah radial (F_r) adalah gaya dorong yang arahnya menjauhi bumi dan gaya gravitasi (2.2) yang menarik satelit menuju bumi, karena gaya gravitasi miliki arah yang berlawanan dengan gaya dorong maka diberikan notasi " - ". Dengan mensubstitusikan $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ sebagai nilai percepatan kepersamaan (2.1) maka diperoleh

$$F = m \cdot a$$

$$\Leftrightarrow F_r - F_g = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$\Leftrightarrow F_r - G \frac{M \cdot m}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (3.7)$$

b. Gaya pada arah tangensial

$$F = m \cdot a$$

Gaya yang bekerja pada arah tangensial (F_θ) adalah gaya dorong (tangensial). Dengan mensubstitusikan $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ sebagai nilai percepatan kepersamaan (2.1) maka diperoleh

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (3.8)$$

Persamaan (3.7) dan (3.8) inilah yang disebut sebagai sistem persamaan gerak satelit

$$\begin{cases} m(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t)) = F_r - G \frac{M.m}{r^2(t)} \\ m(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)) = F_\theta \end{cases} \quad (3.9)$$

B. Transformasi Model Gerak Satelit pada Solusi Khususnya

1. Menentukan solusi khusus sistem gerak satelit

Dengan memisalkan $g = GM$, $u_1(t) = \frac{F_r}{m}$, $u_2(t) = \frac{F_\theta}{m}$, dan

$r, \dot{r}, \ddot{r}, \theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ adalah fungsi atas waktu maka sistem (3.9) dapat ditulis menjadi

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{g}{r^2(t)} + u_1 \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

Langkah selanjutnya adalah mencari solusi khusus dari sistem (3.10).

Lemma 3.1. Jika $u_1(t) = u_2(t) = 0$ dan $g = \sigma^3 \omega^2$, dengan σ, ω adalah konstanta maka sistem (3.10) akan mempunyai solusi khusus yaitu

$$\begin{aligned} r(t) &= \sigma \\ \theta(t) &= \omega t \end{aligned}$$

Bukti:

$$r(t) = \sigma \quad \theta(t) = \omega t$$

$$\dot{r}(t) = 0 \quad \dot{\theta}(t) = \omega$$

$$\ddot{r}(t) = 0 \quad \ddot{\theta}(t) = 0$$

dengan mensubstitusikan $r(t)$, $\theta(t)$, $\dot{r}(t)$ dan $\dot{\theta}(t)$ kedalam sistem (3.10) maka diperoleh

$$\begin{aligned} \ddot{r}(t) &= r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{g}{r^2(t)} + u_1(t) \\ &= \sigma\omega^2 - \frac{\sigma^3\omega^2}{\sigma^2} + 0 = 0 \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{-2(0)(\omega)}{\sigma} + 0 = 0$$

karena $\ddot{r}(t) = \ddot{\theta}(t) = 0$ maka $r = \sigma$ dan $\theta = \omega t$ dengan σ, ω berupa konstanta merupakan solusi khusus dari sistem gerak satelit (3.10). ■

Selanjutnya dilakukan proses transformasi untuk mempermudah dalam menganalisa sistem gerak satelit.

2. Transformasi sistem gerak satelit pada solusi khususnya

Transformasi sistem (3.10) dilakukan dengan memisalkan suatu vektor baru. diketahui bahwa $r = \sigma$ dan $\theta = \omega t$ merupakan solusi khusus dari sistem (3.10) maka vektor baru yang diambil adalah

$$\mathbf{x}_1(t) = r(t) - \sigma$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \dot{r}(t)$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \sigma(\theta(t) - \omega t)$$

$$\mathbf{x}_4(t) = \sigma(\dot{\theta}(t) - \omega)$$

Berdasarkan $\mathbf{x}_i(t)$ diatas maka diperoleh $\dot{\mathbf{x}}_i(t), i = 1,2,3,4$ sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \dot{r} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_2(t) &= \ddot{r} = 0 \\ &= 3\sigma\omega^2 - 2\sigma\omega^2 + (-3\sigma\omega^2 + 2\sigma\omega^2) + u_1 \\ &= (3\sigma\omega^2 - 3\sigma\omega^2) + (2\sigma\omega^2 - 2\sigma\omega^2) + u_1 \\ &= 3\omega^2(\sigma - \sigma) + 2\sigma\omega(\omega - \omega) + u_1 \\ &= 3\omega^2(r - \sigma) + 2\sigma\omega(\dot{\theta} - \omega) + u_1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_3(t) = \sigma(\dot{\theta} - \omega) \quad (3.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_4(t) = \sigma\ddot{\theta}$$

dengan mensubstitusikan $\ddot{\theta} = \frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{r}u_2$ kedalam $\dot{\mathbf{x}}_4(t)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_4(t) &= \sigma \left(\frac{-2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \frac{1}{r}u_2 \right) \\ &= \sigma \left(\frac{-2\dot{r}\omega}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}u_2 \right) \\ &= -2\dot{r}\omega + u_2\end{aligned}\tag{3.14}$$

Persamaan (3.11), (3.12), (3.13) dan (3.14) diatas dapat dirubah kedalam bentuk matriks menjadi

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{r} \\ 3\omega^2(r - \sigma) + 2\sigma\omega(\dot{\theta} - \omega) + u_1 \\ \sigma(\dot{\theta} - \omega) \\ -2\dot{r}\omega + u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - \sigma \\ \dot{r} \\ \sigma(\theta - \omega t) \\ \sigma(\dot{\theta} - \omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ 0 \\ 0 \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_3(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \\ \mathbf{x}_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{3.15}$$

Berdasarkan persamaan (2.27) matriks (3.15) dapat dipandang sebagai suatu sistem linear $\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t)$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\tag{3.16}$$

Selanjutnya akan dilakukan transformasi output dari sistem gerak satelit. Misalkan y_1 adalah pengukuran terhadap jarak antara pusat satelit dengan pusat bumi dan y_2 sebagai pengukuran sudut yang dibentuk dari pergerakan satelit yang dapat diukur sedemikian sehingga $x_1(t) = r - \sigma$,

$x_3(t) = \sigma(\theta - \omega t)$ juga dapat diukur, maka output gerak satelit dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $y = Cx + Du$ sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + [0]u \quad (3.17)$$

dengan

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; D = [0] \quad (3.18)$$

C. Kestabilan Model Gerak Satelit

Berdasarkan teorema 2.1 jika $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ maka titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik, dan apabila ada $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ maka dikatakan tidak stabil untuk beberapa $i = 1, 2, \dots, k$. Selanjutnya akan dicari tipe kestabilan dari sistem (3.16).

Pertama-tama akan dicari persamaan karakteristik dari matriks A .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Berdasarkan definisi (2.5) dan persamaan (2.9) maka diperoleh persamaan karakteristik dari matriks A

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama diperoleh

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2\omega \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -2\omega & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3\omega^2 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \\
&= -\lambda(-\lambda^3 - 4\omega^2\lambda) - (3\omega^2\lambda^2) = 0 \\
&= \lambda^4 + 4\omega^2\lambda^2 - 3\omega^2\lambda^2 = 0 \\
&= \lambda^4 + \omega^2\lambda^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Persamaan (3.19) dapat difaktorkan menjadi $\lambda^2(\lambda^2 + \omega^2) = 0$

sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks A adalah

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= 0, \lambda^2 = -\omega^2 \\
\Leftrightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4} = \sqrt{\omega^2} \\
\Leftrightarrow \lambda_1 &= \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \omega I, \lambda_4 = -\omega I
\end{aligned} \tag{3.20}$$

dari persamaan (3.20) diperoleh 4 buah nilai eigen $(0,0,\omega I,-\omega I)$ yang memiliki $Re(\lambda_i) = 0, i = 1,2,3,4$ sedemikian sehingga tipe kestabilan dari sistem dinamik satelit tidak dapat ditentukan dengan menggunakan nilai eigen. Oleh karena itu selanjutnya akan diselidiki keterkontrolan dan keteramatatan satelit.

D. Keterkontrolan Model Gerak Satelit

Apabila diberikan sistem persamaan

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t) \\
y(t) &= C\mathbf{x}(t) + Du(t)
\end{aligned}$$

Maka berdasarkan teorema 2.2 tentang keterkontrolan, sistem persamaan tersebut dikatakan terkontrol jika dan hanya jika $Rank([B \ AB \ A^2B \ A^3B \cdots A^{n-1}B]) = n$.

Pada transformasi sistem gerak satelit diatas telah diketahui matriks A dan matriks B sedemikian sehingga

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Selanjutnya akan dicari $\text{Rank } ([B \ AB \ A^2B \ A^3B])$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\omega \\ 0 & 1 \\ -2\omega & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2\omega \\ -\omega^2 & 0 \\ -2\omega & 0 \\ 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -3\omega^4 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 2\omega^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3B = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^2 & 0 & 0 \\ -3\omega^4 & 0 & 0 & -2\omega^3 \\ -6\omega^3 & 0 & 0 & -4\omega^2 \\ 0 & 2\omega^3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega^3 \\ 0 & -4\omega^2 \\ 2\omega^3 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh

$$R = [B \ AB \ A^2B \ A^3B] = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\omega & -\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\omega & 0 & 0 & -4\omega^2 & 2\omega^3 & 0 \end{array} \right] \quad (3.21)$$

Untuk menyelidiki keterkontrolan model gerak satelit diatas maka matriks R dipisah berdasarkan kerja inputnya menjadi dua yaitu R_1 (saat $u_2 = 0$ atau u_2 tidak operatif) dan R_2 (saat $u_1 = 0$ atau u_1 tidak operatif).

1. Saat input tangensial tidak operatif ($u_2 = 0$) maka diperoleh

$$R_1 = [B_1 \ AB_1 \ A^2B_1 \ A^3B_1] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2\omega \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -\omega^2 \\ -2\omega \\ 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} -\omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 2\omega^3 \end{array} \quad (3.22)$$

dengan menggunakan operasi baris elementer pada persamaan (3.22) didapatkan penyederhanaan matriks R_1 sebagai berikut

$$\begin{aligned} R_1 &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2\omega \end{array} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ -\omega^2 \\ -2\omega \\ 0 \end{array} \right] R_2 - \frac{1}{2}\omega R_3 \\ &\Rightarrow R_1^* = \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dari persamaan (3.23) diperoleh $\text{Rank}(R_1^*) = 3$ sedangkan dari persamaan (3.16) diketahui matriks A merupakan matriks persegi dengan $n = 4$, karena $\text{Rank}(R_1^*) \neq n$ maka sistem gerak satelit pada saat input tangensial tidak operatif ($u_2 = 0$) tidak *controllable*.

2. Saat input radial tidak operatif ($u_1 = 0$) maka diperoleh

$$R_2 = [B_2 \ AB_2 \ A^2B_2 \ A^3B_2] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 2\omega \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} 2\omega \\ 0 \\ 0 \\ -4\omega^2 \end{array} \right] \begin{array}{l} 0 \\ -2\omega^3 \\ -4\omega^2 \\ 0 \end{array} \quad (3.24)$$

dengan menggunakan operasi baris elementer pada persamaan (3.24) didapatkan penyederhanaan matriks R_2 sebagai berikut

$$\begin{aligned}
R_2 &= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 2\omega & 0 & \frac{1}{2\omega} R_1 \\ 0 & 2\omega & 0 & -2\omega^3 & \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 & 2R_2 - 2\omega R_3 \\ 1 & 0 & -4\omega^2 & 0 & R_4 + 2\omega R_1 \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4\omega^3} R_2 \\ 0 & 0 & 0 & 4\omega^3 & \\ 0 & 1 & 0 & -4\omega^2 & R_3 + \frac{1}{\omega} R_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
\Rightarrow R_2^* &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.25) diperoleh $\text{Rank}(R_2^*) = 4$ dan dari persamaan (3.16) diketahui matriks A merupakan matriks persegi dengan $n = 4$, karena $\text{Rank}(R_2^*) = n$ maka sistem gerak satelit pada saat input radial tidak operatif ($u_1 = 0$) *controllable*.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa sistem dinamika satelit akan *controllable* pada saat input radial tidak operatif ($u_1 = 0$) dan apabila input tangensial tidak operatif ($u_2 = 0$) maka sistem gerak satelit tidak *controllable*. Sistem gerak satelit merupakan sistem terkontrol sehingga berdasarkan definisi 2.15 maka sistem gerak satelit pada saat input radial tidak bekerja dapat distabilkan, oleh karena itu selanjutnya akan didesain kontrol K pada sistem gerak satelit dengan menggunakan kontrol LQR dengan mengabaikan input radial ($u_1 = 0$).

E. Desain Kontrol LQR untuk Model Gerak Satelit

Sebagaimana telah dijelaskan pada bab sebelumnya tujuan dari desain kontrol LQR adalah menentukan matriks kontrol K yang mampu menstabilkan sistem gerak satelit. Hal ini menjadi penting karena pada

pembahasan kestabilan sistem gerak satelit diperoleh persamaan karakteristik (3.19) yang memiliki bagian real dari nilai eigen sama dengan nol sehingga sistem gerak satelit tidak diketahui tipe kestabilannya dan dalam keadaan rentan terhadap gangguan.

Selanjutnya akan ditentukan matriks kontrol K untuk menstabilkan sistem gerak satelit, menurut Muhammad Wakhid (2009) ada beberapa langkah yang harus dilakukan untuk menentukan matriks kontrol K dengan menggunakan metode LQR antara lain:

1. Melinearisasikan sistem nonlinear kedalam bentuk $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$.

Pada bab pembahasan bagian B telah dilakukan proses transformasi sistem gerak satelit nonlinear (3.10) sehingga didapatkan sistem gerak satelit linear (3.15).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.15)$$

Telah diketahui sebelumnya bahwa sistem gerak satelit terkontrol pada saat input radialnya tidak beroperasi ($u_1 = 0$) maka untuk penentuan matriks kontrol K akan digunakan input tangensian satelit (B_2)

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{bmatrix}; B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Menentukan matriks pembobot Q dan \hat{R} yang meminimumkan indeks performansi kuadratik berikut

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T \hat{R} u) dt \quad (2.66)$$

Berdasarkan definisi 2.19 matriks pembobot input \hat{R} dan matriks pembobot sistem Q merupakan matriks-matriks simetri yang dipilih pendisain yang bergantung pada tujuan pengontrolan. Diketahui bahwa sistem gerak satelit dapat dinyatakan dalam matriks berukuran 4×4 dan input sistem berukuran 4×1 sehingga untuk mempermudah perhitungan dalam menentukan solusi aljabar Riccati dipilih matriks simetri $Q_{4 \times 4}$ dan matriks simetri $\hat{R}_{1 \times 1}$ sebagai berikut :

$$Q = I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } \hat{R} = [1]. \quad (3.31)$$

dengan asumsi semakin kecil entri matriks pembobot yang dipilih maka indeks performansi J akan semakin minimal.

3. Menentukan matriks P yang merupakan solusi dari persamaan aljabar Riccati berikut

$$A^T P + PA - PB\hat{R}^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (2.64)$$

Untuk mempermudah perhitungan dan penyederhanaan sistem maka diambil $\omega = 1$ sedemikian sehingga matriks A dapat ditulis menjadi

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Selanjutnya akan dicari solusi dari persamaan Riccati (2.64). Misal

didefinisikan matriks $P = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$ dan diperoleh matriks A^T dan B_2^T

sedemikian sehingga $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B_2^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ maka

persamaan Riccati (2.64) dapat disusun sebagai berikut

$$\begin{aligned}
& A^T P + PA - PB_2 \hat{R}^{-1} B_2^T P + Q = 0 \\
& \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \\
& \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
(3.33)
\end{aligned}$$

dengan menggunakan bantuan program MATLAB R2010 maka diperoleh matriks P sebagai solusi dari persamaan (3.33) sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 36.5859 & 17.2448 & -6.2841 & 10.2210 \\ 17.2448 & 9.2146 & -3.4070 & 4.2841 \\ -6.2841 & -3.4070 & 2.7970 & -1 \\ 10.2210 & 4.2841 & -1 & 4.0170 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Akan dibuktikan bahwa matriks (3.34) merupakan solusi dari persamaan riccati (3.33).

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.34) kedalam persamaan (3.33) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36.5859 & 17.2448 & -6.2841 & 10.2210 \\ 17.2448 & 9.2146 & -3.4070 & 4.2841 \\ -6.2841 & -3.4070 & 2.7970 & -1 \\ 10.2210 & 4.2841 & -1 & 4.0170 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 36.5859 & 17.2448 & -6.2841 & 10.2210 \\ 17.2448 & 9.2146 & -3.4070 & 4.2841 \\ -6.2841 & -3.4070 & 2.7970 & -1 \\ 10.2210 & 4.2841 & -1 & 4.0170 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 36.5859 & 17.2448 & -6.2841 & 10.2210 \\ 17.2448 & 9.2146 & -3.4070 & 4.2841 \\ -6.2841 & -3.4070 & 2.7970 & -1 \\ 10.2210 & 4.2841 & -1 & 4.0170 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [1][0 \ 0 \ 0 \ 1] \\
& \quad \begin{bmatrix} 36.5859 & 17.2448 & -6.2841 & 10.2210 \\ 17.2448 & 9.2146 & -3.4070 & 4.2841 \\ -6.2841 & -3.4070 & 2.7970 & -1 \\ 10.2210 & 4.2841 & -1 & 4.0170 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 51.7344 & 27.6438 & -10.2210 & 12.8523 \\ 16.1439 & 8.6766 & -4.2841 & 2.1870 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 28.2055 & 15.0222 & -4.0170 & 7.5682 \end{bmatrix} \\
& \quad + \begin{bmatrix} 51.7344 & 16.1439 & 0 & 28.2055 \\ 27.6438 & 8.6766 & 0 & 15.0222 \\ -10.2210 & -4.2841 & 0 & -4.0170 \\ 12.8523 & 2.1870 & 0 & 7.5682 \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} 104.4688410 & 43.78778610 & -10.2210 & 41.05775700 \\ 43.78778610 & 18.35351281 & -4.2841 & 17.20922970 \\ -10.2210 & -4.2841 & 1 & -4.0170 \\ 41.05775700 & 17.20922970 & -4.0170 & 16.13628900 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -1.0000410 & -0.00008610 & 0 & 0.00004300 \\ -0.0000861 & -1.00031281 & 0 & -0.00002970 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0.00004300 & -0.00002970 & 0 & -0.99988900 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} -0.0000410 & -0.00008610 & 0 & 0.00004300 \\ -0.0000861 & -0.00031281 & 0 & -0.00002970 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.00004300 & -0.00002970 & 0 & 0.00011100 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \blacksquare
\end{aligned}$$

4. Menghitung nilai gain feedback K untuk mendapatkan matriks kontrol atas sistem

$$u = -\hat{R}^{-1}B^T P \mathbf{x} = -K \mathbf{x} \quad (2.65)$$

Dari persamaan (2.65) diperoleh matriks $K = \hat{R}^{-1}B^T P$, dengan mensubstitusikan $\hat{R}^{-1} = [1], B^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1]$ dan matriks P pada persamaan (3.34) ke persamaan (2.65) maka diperoleh

$$K = \hat{R}^{-1}B^T P$$

$$\begin{aligned}
&= [1][0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 36.5859 & 17.2448 & -6.2841 & 10.2210 \\ 17.2448 & 9.2146 & -3.4070 & 4.2841 \\ -6.2841 & -3.4070 & 2.7970 & -1 \\ 10.2210 & 4.2841 & -1 & 4.0170 \end{bmatrix} \\
&= [10.2210 \ 4.2841 \ -1 \ 4.0170] \quad (3.35)
\end{aligned}$$

5. Menentukan tipe kestabilan sistem $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}$

Berdasarkan persamaan (2.65) dan (3.35) diperoleh

$$u(t) = [-10.2210 \ -4.2841 \ 1 \ -4.0170]\mathbf{x} \quad (3.36)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.36) ke dalam persamaan $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_2 u$ maka diperoleh sistem dinamika satelit baru sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [-10.2210 \ -4.2841 \ 1 \ -4.0170]\mathbf{x} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10.2210 & -4.2841 & 1 & -4.0170 \end{bmatrix} \mathbf{x} \\
\dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10.2210 & -6.2841 & 1 & -4.0170 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dicari tipe kestabilan dari sistem (3.37)

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -10.2210 & -6.2841 & 1 & -4.0170 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Berdasarkan definisi (2.5) dan persamaan (2.9) maka diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$

$$|(A - BK) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -10.2210 & -6.2841 & 1 & -4.0170 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

dengan menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama diperoleh

$$\begin{aligned} |(A - BK) - \lambda I| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -10.2210 & -6.2841 & 1 & -4.0170 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -6.2841 & 1 & -4.0170 - \lambda \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -10.2210 & 1 & -4.0170 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= 0 \\ &= -\lambda(-\lambda^3 - 4.0170\lambda^2 - 11.5682\lambda) - (3\lambda^2 - 8.391\lambda - 3) = 0 \\ &= \lambda^4 + 4.0170\lambda^3 + 11.5682\lambda^2 - 3\lambda^2 + 8.391\lambda + 3 = 0 \\ &= \lambda^4 + 4.0170\lambda^3 + 8.5682\lambda^2 + 8.391\lambda + 3 = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Persamaan karakteristik (3.38) merupakan polinomial derajat 4 yang tidak mudah dicari akar-akar karakteristiknya apabila dengan menggunakan pemfaktoran, oleh karena itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan tipe kestabilan dari sistem (3.37).

Dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh

$$a_0 = 1, a_1 = 4.0170, a_2 = 8.5682, a_3 = 8.391, a_4 = 4$$

Tabel 3.1. tabel Routh-Hurwitz persamaan (3.38)

1	8.5682	4	...
4.0170	8.391	0	...
b_1	b_2	b_3	...
c_1	c_2	c_3	...

dengan

$$b_1 = \frac{4.0170 \times 8.5682 - 8.391}{4.0170} = 6.4793$$

$$b_2 = \frac{4.0170 \times 4 - 0}{4.0170} = 4$$

$$c_1 = \frac{6.4793 \times 8.391 - 4.0170 \times 4}{6.4793} = 5.9111$$

Berdasarkan tabel 3.1 dapat dilihat bahwa semua nilai pada kolom pertama adalah positif atau tidak mengalami perubahan tanda yang artinya semua akar persamaan karakteristik (3.38) memiliki bagian real negatif, sehingga berdasarkan teorema 2.1 tipe kestabilan dari sistem (3.37) adalah stabil asimtotik.

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari sistem (3.37), dengan menggunakan bantuan program MAPLE 15 diperoleh nilai eigen dari sistem (3.37) sebagai berikut

$$\lambda_1 = -1.1490 + 1.5861i$$

$$\lambda_2 = -1.1490 - 1.5861i$$

$$\lambda_3 = -0.8595 + 0.2082i$$

$$\lambda_4 = -0.8595 - 0.2082i$$

F. Simulasi Gerak Satelit

Untuk menunjukkan pengaruh matriks kontrol K dalam menstabilkan sistem gerak satelit akan ditunjukkan simulasi pergerakan satelit sebelum dan sesudah diberikan matriks kontrol K . Untuk itu dibutuhkan suatu kondisi awal yang merupakan besar gangguan yang diberikan pada sistem, hal ini

diperlukan untuk mengetahui keadaan sistem satelit ketika mengalami suatu gangguan.

Misalkan kondisi awal yang diambil adalah sebagai berikut

$$\mathbf{x}_1(t) = 1 \text{ km}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = 1 \text{ km/s}$$

$$\mathbf{x}_3(t) = 1 \text{ derajat}$$

$$\mathbf{x}_4(t) = 1 \text{ derajat/s}$$

dengan \mathbf{x}_1 menyatakan besar gangguan yang terjadi pada jarak antara bumi dan satelit dari posisi geostasionernya, \mathbf{x}_2 menyatakan besar gangguan yang terjadi pada kecepatan radial satelit dari kecepatan radial geostasioner, \mathbf{x}_3 menyatakan besar gangguan pada sudut yang dibentuk dari pergerakan satelit dari posisi geostasioner satelit, \mathbf{x}_4 menyatakan besar gangguan yang terjadi pada kecepatan tangensial satelit dari kecepatan tangensial geostasionernya.

1. Simulasi sistem dinamika satelit nonlinear tanpa kontrol

Diberikan sistem

$$\begin{cases} \ddot{r}(t) = r(t)\dot{\theta}^2(t) - \frac{g}{r^2(t)} + u_1 \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)}{r(t)} + \frac{1}{r(t)}u_2 \end{cases} \quad (3.10)$$

dengan mengambil $u_1 = u_2 = 0$ dan $g = 1$, serta memisalkan

$$\mathbf{x}_1 = r \qquad \qquad \mathbf{x}_3 = \theta$$

$$\mathbf{x}_2 = \dot{r} \qquad \qquad \mathbf{x}_4 = \dot{\theta}$$

maka diperoleh sistem diferensial orde 1 sebagai berikut:

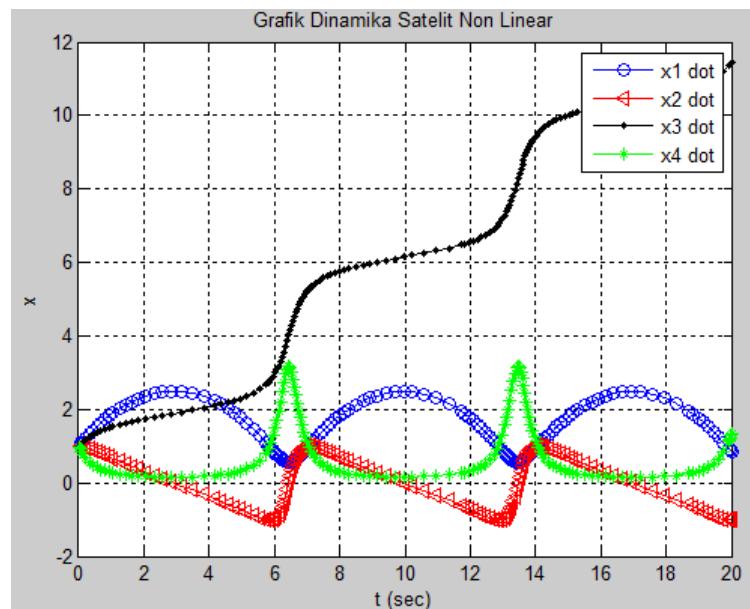
$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{r} = \mathbf{x}_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{r} = x_1 x_4^2 - \frac{1}{x_1}$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta} = -\frac{2x_2 x_4}{x_1}$$

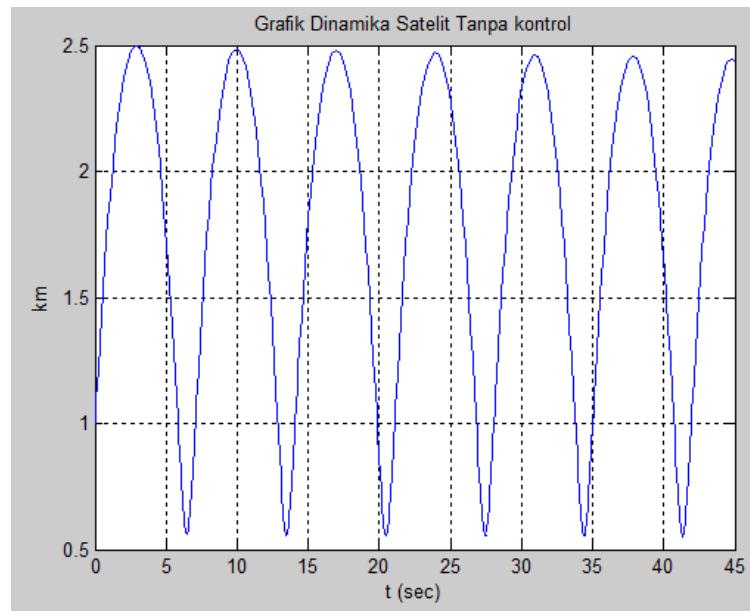
Sehingga simulasi sistem dinamik non linear (3.10) sebagai berikut:



Gambar 3.1. simulasi sistem dinamika satelit nonlinear tanpa kontrol.

Pada gambar 3.1 terlihat bahwa sistem gerak satelit berada dalam keadaan rentan terhadap gangguan, ketika sistem mengalami suatu gangguan sebesar $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ maka untuk t menuju tak hingga keadaan sistem gerak satelit akan mengalami fluktuasi naik turun dan sistem tidak bisa kembali pada keadaan sebelum terjadinya gangguan.

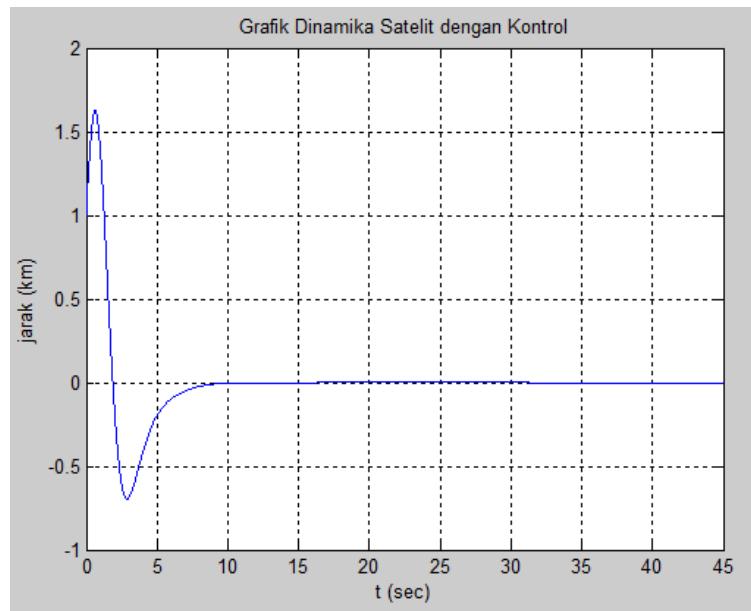
2. Simulasi pengaruh gangguan pada jarak satelit dan bumi tanpa kontrol



Gambar 3.2. simulasi pengaruh gangguan pada jarak satelit dan bumi tanpa menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.2 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan pada jarak antara bumi dan satelit sebesar 1km dari posisi geostasionernya maka untuk nilai t menuju tak hingga keadaan jarak antara bumi dan satelit tersebut akan mengalami suatu fluktuasi naik turun dan sistem tidak dapat kembali seperti keadaan sebelum terjadinya gangguan.

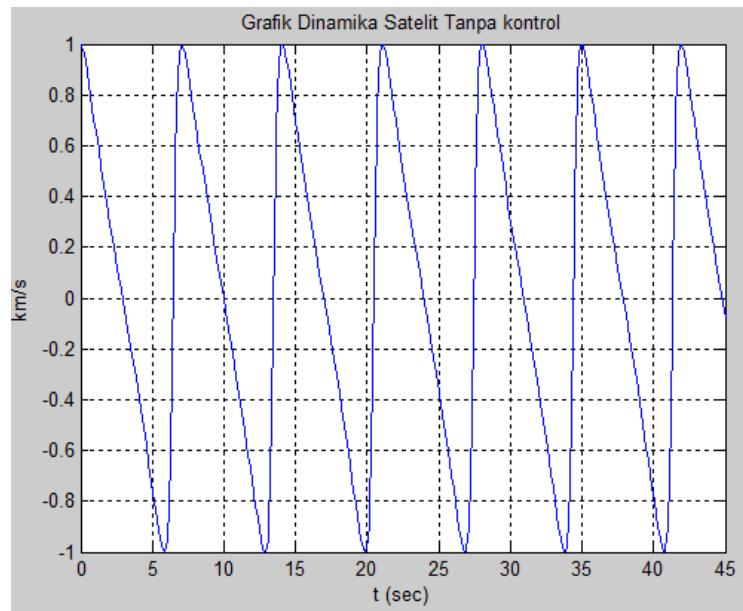
3. Simulasi pengaruh gangguan pada jarak satelit dan bumi menggunakan kontrol



Gambar 3.3. simulasi pengaruh gangguan pada jarak satelit dan bumi dengan menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.3 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan pada jarak antara bumi dan satelit sebesar 1 km dari posisi geostasjonernya maka kontrol yang telah dipasang pada sistem akan meniadakan gangguan tersebut dan mengembalikan jarak antara satelit dan bumi pada posisi sebelum terjadinya gangguan, sehingga dapat dilihat untuk nilai t menuju tak hingga maka sistem akan stabil asimtotik menuju nol.

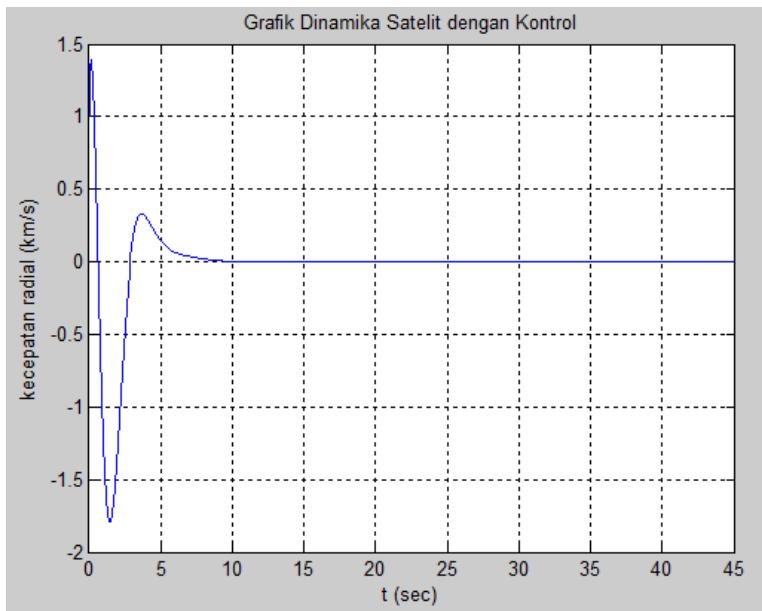
4. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan radial satelit tanpa kontrol



Gambar 3.4. simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan radial satelit tanpa menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.4 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan pada kecepatan radial sebesar 1 km/s dari kecepatan radial geostasionernya maka untuk nilai t menuju tak hingga keadaan kecepatan radial satelit akan mengalami suatu fluktuasi naik turun dan sistem tidak dapat kembali seperti keadaan sebelum terjadinya gangguan.

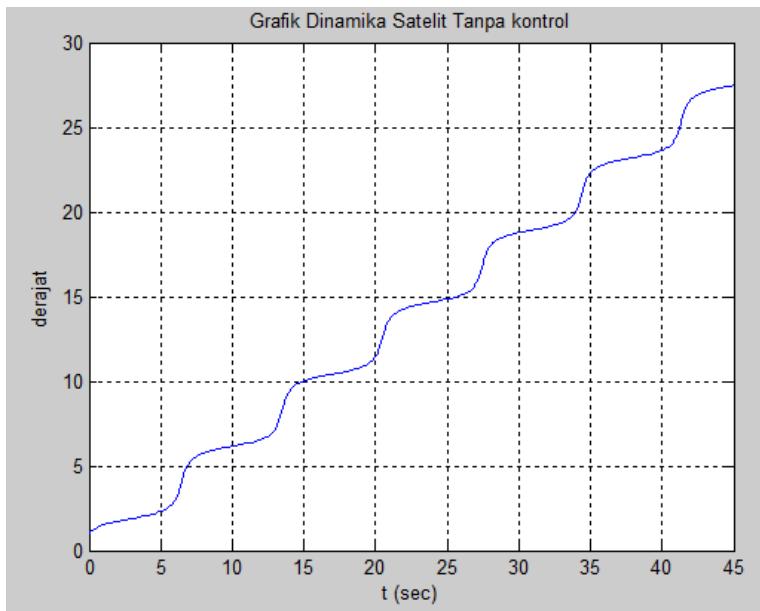
5. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan radial satelit dengan kontrol



Gambar 3.5. simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan radial satelit dengan menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.5 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan pada kecepatan radialnya sebesar 1 km/s dari kecepatan radial geostasionernya maka kontrol yang telah dipasang pada sistem akan meniadakan gangguan tersebut dan mengembalikan kecepatan radial satelit pada keadaan sebelum terjadinya gangguan, sehingga dapat dilihat untuk nilai t menuju tak hingga maka sistem akan stabil asimtotik menuju nol.

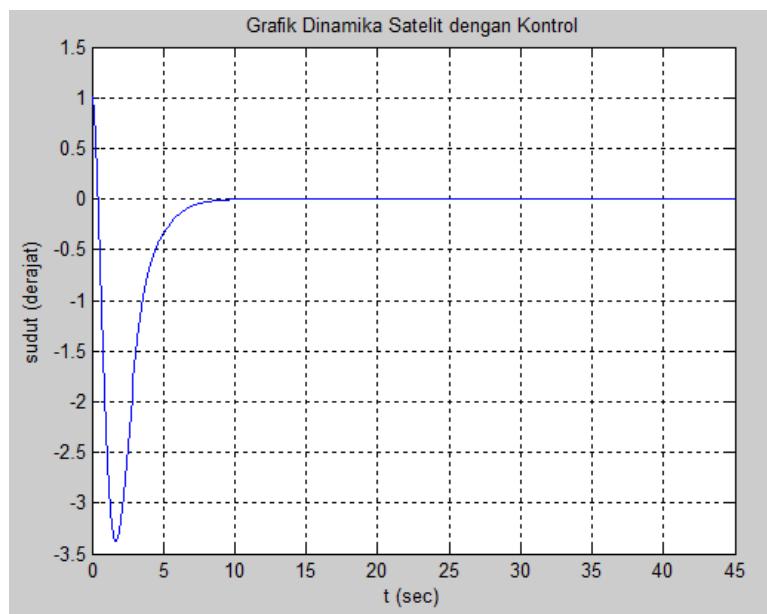
6. Simulasi pengaruh gangguan pada sudut satelit tanpa menggunakan kontrol



Gambar 3.6. simulasi pengaruh gangguan pada besar pergeseran satelit tanpa menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.6 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan sebesar 1 derajat pada besar pergeseran sudut satelit dari posisi geostasionernya maka untuk nilai t menuju tak hingga keadaan pergeseran sudut satelit tersebut akan mengalami perubahan yang semakin besar sedemikian sehingga sudut satelit akan menjauhi posisi geostasionernya dan sistem tidak dapat kembali seperti keadaan sebelum terjadinya gangguan, sehingga sistem gerak satelit tanpa kontrol merupakan sistem yang tidak stabil.

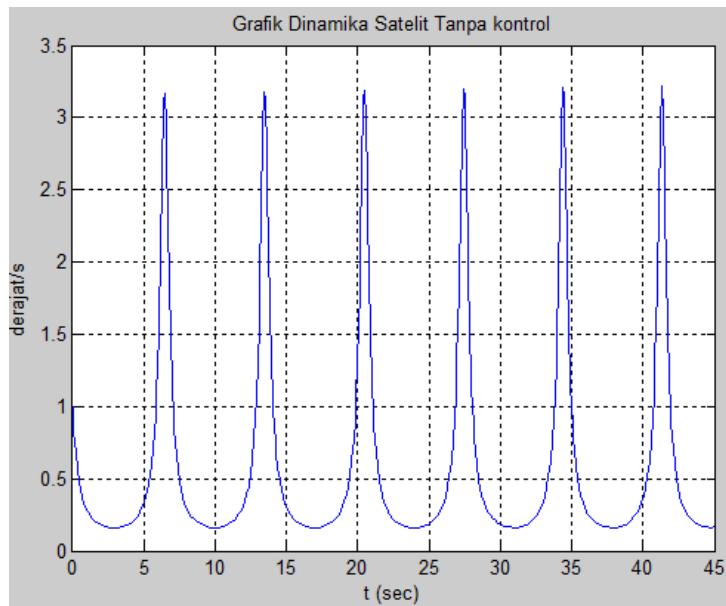
7. Simulasi pengaruh gangguan pada sudut satelit dengan menggunakan kontrol



Gambar 3.7. simulasi pengaruh gangguan pada besar pergeseran satelit dengan menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.7 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan sebesar 1 derajat pada besar pergeseran sudut satelit dari posisi geostasionernya maka kontrol yang telah dipasang pada sistem akan meniadakan gangguan tersebut dan mengembalikan sudut pergeseran satelit pada keadaan sebelum terjadinya gangguan, sehingga dapat dilihat untuk nilai t menuju tak hingga maka sistem akan stabil asimtotik menuju nol.

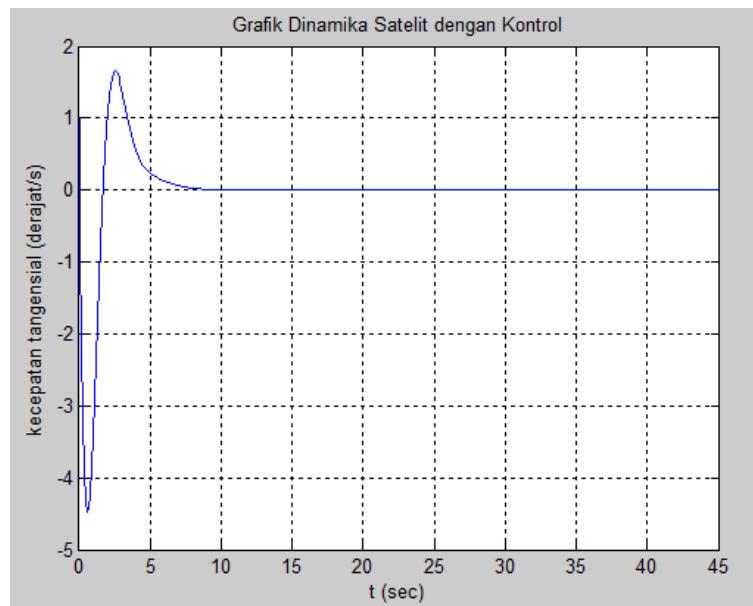
8. Simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan tangensial satelit tanpa kontrol



Gambar 3.8. simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan tangensial satelit tanpa menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.8 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan pada kecepatan tangensial sebesar 1 derajat/s dari kecepatan tangensial geostasionernya maka untuk nilai t menuju tak hingga keadaan kecepatan tangensial satelit akan mengalami suatu fluktuasi naik turun dan sistem tidak dapat kembali seperti keadaan sebelum terjadinya gangguan.

9. Simulasi gangguan pada kecepatan tangensial satelit dengan kontrol



Gambar 3.9. simulasi pengaruh gangguan pada kecepatan tangensial satelit dengan menggunakan kontrol.

Pada gambar 3.9 terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit mengalami gangguan pada kecepatan tangensial sebesar 1 derajat/s dari kecepatan tangensial geostasionernya maka kontrol yang telah dipasang pada sistem akan meniadakan gangguan tersebut dan mengembalikan kecepatan tangensial satelit pada keadaan sebelum terjadinya gangguan, sehingga dapat dilihat untuk nilai t menuju tak hingga maka sistem akan stabil asimtotik menuju nol.

G. Interpretasi Kontrol LQR pada Pengendalian Gerak Satelit

Pada pembahasan mengenai kestabilan sistem gerak satelit diperoleh nilai eigen yang memiliki bagian real sama dengan nol yang artinya sistem gerak satelit belum dapat dipastikan tipe kestabilannya dan berada dalam keadaan rentan terhadap gangguan, hal ini juga diperkuat oleh simulasi

gambar 3.1 dimana ketika terjadi suatu gangguan pada sistem gerak satelit maka sistem tersebut akan mengalami suatu pergerakan naik turun dan tidak dapat kembali seperti keadaan sebelum terjadinya gangguan. Apabila hal ini terjadi dalam kehidupan nyata maka akan menyebabkan suatu gangguan pada kinerja satelit.

Simulasi pada gambar 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 menunjukkan pengaruh gangguan terhadap keadaan sistem gerak satelit tanpa menggunakan kontrol yang diamati berdasarkan perubahan jarak antara satelit dan bumi, kecepatan radial dari satelit, sudut dan kecepatan tangensial satelit dari keadaan geostasionernya. Terlihat bahwa ketika sistem gerak satelit tanpa kontrol mengalami suatu gangguan maka keadaan sistem akan langsung naik turun dan tidak dapat kembali seperti keadaan sebelum terjadinya gangguan, sehingga sistem gerak satelit tanpa kontrol merupakan sistem yang tidak stabil.

Sistem gerak satelit dengan menggunakan kontrol (dalam hal ini berupa input jarak, kecepatan radial, sudut dan kecepatan tangensial) yang dipasang pada sistem satelit membuat sistem gerak satelit tersebut menjadi tahan terhadap gangguan dan bersifat stabil, hal ini ditunjukan melalui nilai-nilai eigen dari sistem yang telah diberi kontrol dimana $Re(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Simulasi gambar 3.3, 3.5, 3.7, 3.9 menunjukan keadaan sistem ketika mendapatkan suatu gangguan maka kontrol akan langsung bekerja meniadakan gangguan tersebut dan mengembalikan sistem pada keadaan stabil seperti sebelum mengalami gangguan.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil perhitungan dan analisis sistem dinamika satelit pada bab sebelumnya dapat diambil beberapa kesimpulan, antara lain :

1. Diperoleh model matematika dari pergerakan satelit geostasioner pada bumi adalah sebagai berikut

$$\begin{cases} m(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2(t)) = F_r - G \frac{M \cdot m}{r^2(t)} \\ m(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)) = F_\theta \end{cases}$$

dengan M adalah massa bumi, m adalah massa satelit, r adalah jarak antara bumi dan satelit, $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ merupakan percepatan satelit dalam arah radial, $2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)$ merupakan percepatan satelit dalam arah tangensial, F_θ merupakan gaya dorong satelit pada posisi tangensial, F_r merupakan gaya dorong satelit pada posisi radial dan G merupakan konstanta gravitasi bumi.

2. Sistem gerak satelit sebelum diberikan kontrol merupakan sistem yang rentan terhadap gangguan, hal ini ditunjukan dari persamaan karakteristik (3.19) yang memiliki $Re(\lambda_i) = 0, i = 1, 2, 3, 4$ dan simulasi gambar 3.1.
3. Sistem gerak satelit diatas terkontrol (*controllable*) pada saat input radial tidak operatif ($u_1 = 0$) karena matriks keterkontrolan memiliki $full rank = 4$ sehingga sistem gerak satelit dapat distabilkan.

4. Setelah diberikan matriks kontrol $K = [10.2210 \quad 4.2841 \quad -1 \quad 4.0170]$ sistem dinamika satelit menjadi stabil, hal ini ditunjukkan dari persamaan karakteristik (3.38) yang memiliki $\lambda_1 = -1.1490 + 1.5861i$, $\lambda_2 = -1.1490 - 1.5861i$, $\lambda_3 = -0.8595 + 0.2082i$, $\lambda_4 = -0.8595 - 0.2082i$.
5. Pergerakan satelit setelah diberikan kontrol juga cukup baik karena mampu tahan terhadap gangguan, hal ini ditunjukkan pada gambar 3.3, gambar 3.5, gambar 3.7, dan gambar 3.9 yang output nya mengikuti *set-point* dan stabil ke nol.

B. Saran

Berdasarkan hasil penulisan skripsi ini, penulis memberikan beberapa saran untuk mengembangkan skripsi ini menjadi lebih baik, antara lain :

1. Dalam pembentukan model gerak satelit penulis menggunakan pendekatan melalui vektor-vektor pada koordinat kutub dimensi-2, bagi pembaca yang ingin mengembangkan skripsi ini dapat menggunakan pendekatan-pendekatan lain untuk mengkonstruksi model gerak satelit yang lebih real.
2. Dalam skripsi ini belum dibahas mengenai besar indeks performansi dan energi optimal (minimal) yang diperlukan satelit untuk menstabilkan posisinya, hal ini dapat dijadikan kajian yang menarik bagi pembaca untuk mengembangkan skripsi ini.
3. Dalam penentuan nilai awal sistem penulis menggunakan nilai awal $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}_3(t) = \mathbf{x}_4(t) = 1$, oleh karena itu pembaca dapat

menggunakan data dari sumber lain yang menyajikan informasi-informasi mengenai pergerakan satelit secara lengkap sehingga simulasi sistem dapat lebih baik.

Daftar Pustaka

- Anton, Howard. (1998). Aljabar Linear Elementer. (Alih bahasa: Pantur Silaban). Drexel University. Jakarta: Erlangga.
- Budhi, W.S. (1995). Aljabar Linear. Jakarta: PT Gramedia.
- Campbell, Stephen L., & Haberman R. (2008). *Introduction to Differential Equation with Dynamical Systems*. New Jersey: Princeton University Press.
- Haryanto, Fredy. (2010). Penerapan Teori Kontrol pada Model Dinamika Gerak Satelit Tanpa Gangguan. *Skripsi*. Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga.
- Kamajaya. (2008). Cerdas Belajar Fisika. Bandung: Grafindo Media Pratama.
- Kusmaryanto, Sigit. (2013). Orbit Satelit. Diakses dari <http://www.sigitkus.lecture.ub.ac.id/?p=1691>. pada tanggal 07 Mei 2014, Jam 19.51 WIB.
- Kuznetsov, Yuri A. (1998). *Elements of Applied Bifurcations Theory*. New York: Springer-Verlag.
- Luknanto, Djoko. (2003). Model Matematika. Yogyakarta: Universitas Gadjah Mada.
- Musthofa, Muhammad W. (2009). Desain Linear Quadratic Regulator pada Sistem Inverted Pendulum. *Prosiding*, Seminar Nasional Matematika. Yogyakarta: FMIPA UNY.
- Ogata, Katsuhiko. (2010). *Modern Control Engineering*. Fifth Edition. New Jersey: Prentice Hall International.
- Olsder, G.J. & van der Woude, J.W. (2004). *Mathematical System Theory*. Intermediate Third Edition. The Netherlands.
- Perko, Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag.

- Purcel, Edwin. J. & Vanberg, Dale. (1987). *Calculus With Analytic Geometry*. Fifth Edition. (Alih bahasa: Drs. I Nyoman Susilo, M.Sc. dkk). Jakarta: Erlangga.
- PPPPTK Matematika. (2011). Peran Fungsi Tujuan dan Karakteristik Matematika Sekolah. Diakses dari <http://p4tkmatematika.org/2011/10/peran-fungsi-tujuan-dan-karakteristik-matematika-sekolah/> . pada tanggal 07 Mei 2014, Jam 15.16 WIB.
- Purwanti, Swesti Y., Supriatna, A.K., & Anggriani, Nursanti. (2009). Aplikasi Teori Kontrol dalam Linearisasi Model Persamaan Gerak Satelit. *Skripsi*. Universitas Padjadjaran.
- Pusat Teknologi Satelit Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional. (2012). Jenis-Jenis Satelit. Diakses dari <http://www.lapanrb.org/artikel/69-satelit> . pada tanggal 07 Mei 2014, Jam 16.13 WIB.
- Subiono. (2013). Sistem Linear dan Kontrol Optimal. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Triwiyatno, Aris. (2011). Konsep Umum Sistem Kontrol. Semarang : Universitas Diponegoro.
- Wiggins, Stephen. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Second Edition. New York: Springer-Verlag.
- Yulianto, Tony. (2012). Aplikasi Metode LQR Pada Kendali Attitude Rotor Spacecraft Yang Berada di Sumbu Tetap. *Jurnal SAINS dan SENI POMITS*. Volume 1. No 1. Hlmn 1-6.

Lampiran 1.

Perintah MAPLE 15 untuk mengilustrasikan kestabilan sistem (2.48A).

```
> restart :  
> with(linalg) :  
> with(plots) :  
> A := matrix([[3, 0], [0, -2]]) :  
> xdot := evalm(`&*`(A, matrix([[x1], [x2]]))) :  
menentukan nilai eigen A :  
> lambda := eigenvals(A) :  
menentukan vektor eigen A :  
> V := eigenvects(A) :  
> nilaiawal := matrix([[x01], [x02]]) :  
menentukan solusi fundamental A :  
> SF := exponential(A*t) :  
menentukan solusi umum A :  
> SU := evalm(`&*`(SF, nilaiawal)) :  
menentukan Medan Arah A :  
> fl := fieldplot([xdot[1, 1], xdot[2, 1]], x1 = -150 .. 150, x2 = -200 .. 200,  
thickness=2, title='Medan*Arah', color=grey) :  
menentukan solusi A dengan nilai awal tertentu :  
> s1 := plot([subs(x01 = -20, x02 = 60, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 =  
-20, x02 = 60, evalm(SU))[2, 1], t = -0.62 .. 0.69], color = blue,  
thickness = 2) :  
> s2 := plot([subs(x01 = 30, x02 = 50, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 = 30,  
x02 = 50, evalm(SU))[2, 1], t = -0.72 .. 0.55], color = BLUE,  
thickness = 2) :  
> s3 := plot([subs(x01 = 60, x02 = -120, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 =  
60, x02 = -120, evalm(SU))[2, 1], t = -0.27 .. 0.32], color = blue,  
thickness = 2) :  
> s4 := plot([subs(x01 = -80, x02 = -30, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 =  
-80, x02 = -30, evalm(SU))[2, 1], t = -0.97 .. 0.23], color = blue,  
thickness = 2) :
```

gambar potret fase A :

> *display(f1, s1, s2, s3, s4) :*

Lampiran 2.

Perintah MAPLE 15 untuk mengilustrasikan kestabilan sistem (2.48B).

> *restart :*

> *with(linalg) :*

> *with(plots) :*

> *B := matrix([[-5, 0], [0, -2]]) :*

> *xdot := evalm(`&*`(B, matrix([[x1], [x2]]))) :*

menentukan nilai eigen B :

> *lambda := eigenvals(B) :*

menentukan vektor eigen B :

> *V := eigenvecs(B) :*

> *nilaiawal := matrix([[x01], [x02]]) :*

menentukan solusi fundamental B :

> *SF := exponential(B*t) :*

menentukan solusi umum B :

> *SU := evalm(`&*`(SF, nilaiawal)) :*

menentukan Medan Arah B :

> *f1 := fieldplot([xdot[1, 1], xdot[2, 1]], x1 = -150 .. 150, x2 = -200 .. 200, thickness=2, title='Medan Arah', color='grey') :*

menentukan solusi B dengan nilai awal tertentu :

> *s1 := plot([subs(x01 = -20, x02 = 60, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 = -20, x02 = 60, evalm(SU))[2, 1], t = -0.418 .. 1.7], color = blue, thickness = 2) :*

> *s2 := plot([subs(x01 = 30, x02 = 50, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 = 30, x02 = 50, evalm(SU))[2, 1], t = -0.33 .. 1.5], color = blue, thickness = 2) :*

> *s3 := plot([subs(x01 = 60, x02 = -120, evalm(SU))[1, 1], subs(x01 = 60, x02 = -120, evalm(SU))[2, 1], t = -0.195 .. 2], color = blue, thickness = 2) :*

```
> s4 := plot([subs(x01 = -80,x02 = -100,evalm(SU))[1,1],subs(x01 =
-80,x02 = -100,evalm(SU))[2,1],t = -0.135..1.5],color=blue,
thickness=2) :
```

gambar potret fase B :

```
> display(f1,s1,s2,s3,s4) :
```

Lampiran 3.

Perintah MATLAB R2010a untuk menentukan matriks P yang merupakan solusi dari persamaan aljabar riccati (3.33).

```
A = [0 1 0 0;3 0 0 2;0 0 0 1;0 -2 0 0];
B = [0;0;0;1];
Q = [1 0 0 0;0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1];
R = [1];
[K,P,E] = lqr(A,B,Q,R)
```

Lampiran 4.

Perintah MAPLE 15 untuk mencari nilai eigen dari sistem (3.37)

```
> restart :
```

```
> with(linalg) :
```

Sistem awal gerak satelit

```
> A := matrix([[0,1,0,0],[3,0,0,2],[0,0,0,1],[0,-2,0,0]]) :
> Bt := matrix([[0,0,0,1]]) :
```

matriks P yang merupakan solusi aljabar riccati

```
> P := matrix([[36.5859,17.2448,-6.2841,10.2210],[17.2448,9.2146,
-3.4070,4.2841],[-6.2841,-3.4070,2.7970,-1],[10.2210,
4.2841,-1,4.0170]]) :
```

menentukan Matriks Kontrol K

```
> K := evalm(`&*`(Bt,P)) :
```

mensubstitusikan $u = -Kx$ kedalam sistem awal

```
> BK := evalm(`&*`(B,K)) :
```

Sistem gerak satelit terkontrol

```
> ABK := evalm(`-`(A,BK)) :
```

mencari nilai eigen dari sistem gerak satelit terkontrol

> lambda := eigvals(ABK) :

Lampiran 5.

Perintah MATLAB R2010a untuk mensimulasikan pergerakan satelit non linear.

```
function dx = satel(t,x)
dx = zeros(4,1);
% x(1) = r
% x(2) = r dot
% x(3) = teta
% x(4) = teta dot
% diambil u1=u2=0 dan g = 1
dx(1) = x(2);
dx(2) = (x(1)*x(4)^2)-(x(1)^(-1));
dx(3) = x(4);
dx(4) = (-2*x(2)*x(4))/x(1);
% t=[0 20];
% x0=[1 1 1 1];
% name='satel';
[t,x] = ode45(@satel,[0 20],[1 1 1 1]);
plot(t,x(:,1),'-bo',t,x(:,2),'<-r',t,x(:,3),'.-k',t,x(:,4),'-*g');grid;
xlabel('t (sec)'); ylabel('x');title('Grafik Dinamika Satelit Non Linear');
h=legend('x1 dot','x2 dot','x3 dot','x4 dot');
```

Lampiran 6.

Perintah MATLAB R2010a untuk mensimulasikan pergerakan satelit tanpa menggunakan kontrol.

```
A = [0 1 0 0;3 0 0 2;0 0 0 1;0 -2 0 0];
B = [0;0;0;1];
K = [10.2210      4.2841      -1.0000      4.0170];
sys = ss(A, eye(4),eye(4),eye(4));
t = 0:0.01:45;
x = initial(sys,[1;1;1;1],t);
x1 = [1 0 0 0]*x';
x2 = [0 1 0 0]*x';
x3 = [0 0 1 0]*x';
x4 = [0 0 0 1]*x';
plot(t,x1); grid
xlabel('t (sec)');
ylabel('jarak (km)');
title('Grafik Dinamika Satelit tanpa Kontrol');
figure;
plot(t,x2); grid
xlabel('t (sec)');
ylabel('kecepatan radial (km/s)');
title('Grafik Dinamika Satelit tanpa Kontrol');
figure;
plot(t,x3); grid
xlabel('t (sec)');
ylabel('sudut (derajat)');
title('Grafik Dinamika Satelit tanpa Kontrol');
figure;
plot(t,x4); grid
xlabel('t (sec)');
ylabel('kecepatan tangensial (derajat/s)');
title('Grafik Dinamika Satelit tanpa Kontrol');
figure;
```

Lampiran 7.

Perintah MATLAB R2010a untuk mensimulasikan pergerakan satelit dengan menggunakan kontrol.

```
A = [0 1 0 0;3 0 0 2;0 0 0 1;0 -2 0 0];
B = [0;0;0;1];
K = [10.2210      4.2841      -1.0000      4.0170];
t = 0:0.01:45;
syst = ss(A-B*K, eye(4),eye(4),eye(4));
a = initial(syst,[1;1;1;1],t);
a1 = [1 0 0 0]*a';
a2 = [0 1 0 0]*a';
a3 = [0 0 1 0]*a';
a4 = [0 0 0 1]*a';
plot(t,a1); grid
xlabel('t(sec)');
ylabel('jarak(km)');
title('Grafik Dinamika Satelit dengan Kontrol');
figure;
plot(t,a2); grid
xlabel('t (sec)');
ylabel('kecepatan radial (km/s)');
title('Grafik Dinamika Satelit dengan Kontrol');
figure;
plot(t,a3); grid
xlabel('t (sec)');
ylabel('sudut (derajat)');
title('Grafik Dinamika Satelit dengan Kontrol');
figure;
plot(t,a4); grid
xlabel('t(sec)');
ylabel('kecepatan tangensial (derajat/s)');
title('Grafik Dinamika Satelit dengan Kontrol');
```

LAMPIRAN