

**ANALISIS KESTABILAN POPULASI *HELICOVERPA ARMIGERA*
(HAMA PENGGEREK BUAH) DAN *PAEDERUS FUSCIPES SP*
(TOMCAT) MODEL MANGSA DAN PEMANGSA DENGAN METODE
BEDA HINGGA TENGAH**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains



Oleh:

M. Julkarnain

NIM. 09305141042

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2014**

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

**“ANALISIS KESTABILAN POPULASI *HELICOVERPA ARMIGERA*
(HAMA PENGGEREK BUAH) DAN *PAEDERUS FUSCIPES SP*
(TOMCAT) MODEL MANGSA DAN PEMANGSA DENGAN METODE
BEDA HINGGA TENGAH”**

Disusun Oleh:

M. Julkarnain

NIM. 09305141042

Telah disetujui dan disahkan oleh dosen pembimbing untuk diujikan di depan

Dewan Pengaji Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Disetujui pada tanggal:

8 April 2014

Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing



Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si

NIP. 198410192008122005

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

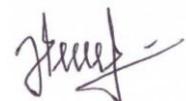
Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : M. Julkarnain
NIM : 09305141042
Prodi : Matematika
Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul Skripsi : Analisis Kestabilan Populasi *Helicoverpa Armigera* (Hama Penggerek Buah) dan *Paederus Fuscipes sp* (Tomcat) Model Mangsa dan Pemangsa dengan Metode Beda Hingga Tengah.

Menyatakan bahwa karya ilmiah ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang telah dipublikasikan, ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi atau institusi lain, kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tatacara dan etika penulisan karya ilmiah yang lazim. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya, dan saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 8 April 2014

Yang menyatakan,



M. Julkarnain

NIM.09305141042

PENGESAHAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL:

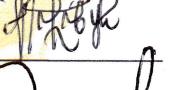
“Analisis Kestabilan Populasi *Helicoverpa Armigera* (Hama Penggerek Buah) dan *Paederus Fuscipes Sp* (Tomcat) Model Mangsa dan Pemangsa dengan Metode Beda Hingga Tengah”

Yang Disusun Oleh:

Nama : M. Julkarnain
NIM : 09305141042
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 21 April 2014
dan dinyatakan lulus

Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda tangan	Tanggal
<u>Fitriana Yuli S., M.Si.</u> 198407072008012003	Ketua Penguji		<u>9/6 - 14</u>
<u>Kus Prihantoso K., M.Si.</u> 197904062005011005	Sekretaris Penguji		<u>5/6 - 14</u>
<u>Nikenasih B., M.Si.</u> 198410192008122005	Penguji Utama		<u>28/5 - 14</u>
<u>Nur Hadi W., M.Eng.</u> 197801192003121002	Penguji Pendamping		<u>3/6 - 14</u>

Yogyakarta, 16 Juni 2014

Fakultas Matematika dan Ilmu

Pengetahuan Alam

Dekan,

Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

MOTTO

Maka nikmat Tuhanmu yang manakah yang kamu dustakan

(QS. Ar-Rahman: 13)

*Boleh jadi kamu membenci sesuatu, padahal ia amat baik bagimu, dan boleh jadi
(pula) kamu menyukai sesuatu, padahal ia amat buruk bagimu; Allah mengetahui,
sedang kamu tidak mengetahui*

(QS. Al Baqarah: 216)

PERSEMBAHAN

Puji syukur kepadaMu ya Røbb, sungguh tiada daya dan upaya kecuali dengan pertolonganMu. Kupersembahkan karya tulis ini untuk:

1. *Ayah dan Ibu tercinta yang telah memberi kasih sayang, motivasi dan doa. Kalian tak pernah lelah sebagai penopang dalam hidupku dan memberikan semua yang terindah.*
2. *Kakak dan adik-adikku yang memberi tambahan semangat dalam setiap kesulitan yang kuhadapi.*
3. *Teman-teman Matsub 2009 yang saling memberikan semangat, doa, dan kenangan yang indah.*

ANALISIS KESTABILAN *HELICOVERPA ARMIGERA* (HAMA PENGGEREK BUAH) DAN *PAEDERUS FUSCIPES SP* (TOMCAT) DENGAN MODEL MANGSA-PEMANGSA DENGAN METODE BEDA HINGGA TENGAH

**Oleh M. Julkarnain
NIM. 09305141042
Email: m.julkarnain@hotmail.com**

ABSTRAK

Ketidakseimbangan ekosistem terjadi apabila semua komponen biotik maupun abiotik tidak berada pada porsi yang seharusnya baik jumlah maupun peranannya dalam lingkungan. Salah satu contoh ketidakseimbangan ekosistem yang disebabkan oleh rantai makanan yang bermasalah adalah kasus serangan tomcat (*Paederus Fuscipes Sp*) di Surabaya pada tahun 2012. Tugas akhir skripsi ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan populasi tomcat dan hama penggerek buah model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten dari hasil simulasi di sekitar titik kesetimbangan. Simulasi model menggunakan metode beda hingga tengah (*centered difference method*).

Simulasi model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten pada populasi tomcat dan hama penggerek buah dengan metode beda hingga tengah dilakukan disekitar titik kesetimbangan model, yaitu dengan membentuk skema eksplisit metode beda hingga tengah, mensimulasikan hasilnya menggunakan Program *Matlab 7*. Variable-variabel penyusun model pada skripsi ini yaitu: jumlah populasi hama penggerek buah (M), jumlah populasi tomcat (P), angka kelahiran (α), angka kematian (β), jumlah kepadatan tomcat (g), konstanta kesebandingan (h), populasi maksimum hama penggerek buah (K), angka perkembangbiakan tumbuhan (z)

Kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomcat di titik kesetimbangan $E_2=(K,0)$ dicapai saat $K < \frac{\beta z}{\mu - \beta}$, sedangkan kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomcat di titik kesetimbangan $E_3 = (\bar{M}, \bar{P})$, dengan $\bar{M} > 0$, $\bar{P} > 0$ dicapai pada interval $\frac{\beta z}{\mu - \beta} < K < \frac{z(\mu + \beta)}{\mu - \beta}$.

Kata kunci: kestabilan, model mangsa-pemangsa, metode beda hingga tengah, Tomcat, hama penggerek buah.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul “Analisis Kestabilan *Helicoverpa Armigera* (Populasi Hama Penggerek Buah) dan *Paederus Fuscipes sp* (Tomcat) Model Mangsa dan Pemangsa dengan Metode Beda Hingga Tengah” ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar sarjana.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena bantuan, dukungan, saran, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan rasa terimakasih secara tulus kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan FMIPA UNY yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan arahan, saran, dan motivasi dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Koordinator Program Studi Matematika yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
4. Ibu Fitriana Yuli Saptaningtyas, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar telah memberikan bimbingan dan motivasi dari awal sampai terselesaiannya penulisan skripsi ini.
5. Bapak Dr. Agus Maman Abadi sebagai Dosen Penasehat Akademik yang telah memberikan nasehat kepada penulis selama masa studi penulis.
6. Ibu dan Bapak sebagai dewan penguji dalam ujian skripsi yang telah memberi kritik dan saran demi peningkatan kualitas skripsi ini.

7. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY beserta staf pendukungnya yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan selama penulis menempuh studi.
8. Semua pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu demi satu yang telah membantu dan memberikan dukungan moral, bantuan, dan dorongan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.

Penulis bersedia menerima kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi penulis serta pembaca.

Yogyakarta, 8 April 2014

Penulis,

M. Julkarnain

NIM. 09305141042

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
ABSTRAK	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR SIMBOL	xiv

BAB I PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah	1
B. Batasan Masalah.....	4
C. Rumusan Masalah	5
D. Tujuan Penelitian	5
E. Manfaat Penelitian	5

BAB II LANDASAN TEORI

A. Sistem Persamaan Differensial	6
B. Model Matematika	8
C. Model Matematika Mangsa dan Pemangsa.....	10
D. Respon Fungsional	13
E. Titik Kesetimbangan	15
F. Kestabilan	15
G. Deret Taylor	17
H. Metode Beda Hingga Tengah.....	18

BAB III PEMBAHASAN

A. Model Hama Pengerek Buah dan Tomcat	22
B. Titik Kesetimbangan Model Lotka Volterra dengan Respon Fungsional Michaelis Menten	29
C. Metode Beda Hingga Tengah untuk Model Mangsa dan Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten	31
D. Simulasi Model Menggunakan Metode Beda Hingga Tengah	33
1. Pemilihan nilai K pada interval $K < \frac{\beta z}{(\mu - \beta)}$	34
2. Pemilihan nilai K pada interval $\frac{\beta z}{\mu - \beta} < K < \frac{z(\mu + \beta)}{\mu - \beta}$	38
3. Pemilihan nilai K diluar interval $K > \frac{z(\mu + \beta)}{\mu - \beta}$	42

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan	45
B. Saran	46

DAFTAR PUSTAKA 47

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Diagram Laju Pertumbuhan Populasi Mangsa dan Pemangsa ...	10
Gambar 2.2	Diagram Interaksi Mangsa dan Pemangsa.....	12
Gambar 2.3	Titik Kesetimbangan stabil, tidak stabil dan stabil asimtotik	17
Gambar 3.1	Diagram Laju Pertumbuhan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat	22
Gambar 3.2	Diagram Interaksi Hama Penggerek Buah dan Tomcat	24
Gambar 3.3	Diagram Interaksi Mangsa dan Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten	27
Gambar 3.4	Simulasi Eksak Kesetimbangan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, M(0) = 3,$ $P(0) = 2.5$ dan $z = 4)$	35
Gambar 3.5	Grafik Populasi Hama Penggerek Buah ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5},$ $\alpha = 12, K = 2, z = 4, M_{11}(0) = 3, M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5,$ $P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7,$ $P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2,$ $P_{12}(0.027) = 2$	36
Gambar 3.6	Grafik Populasi Tomcat ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2,$ $z = 4, M_{11}(0) = 3, M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5,$ $M_{21}(0) = 4, M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7,$ $M_{31}(0) = 2.5, M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, P_{12}(0.027) = 2$	37
Gambar 3.7	Simulasi Eksak Kesetimbangan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, M(0) = 3,$ $P(0) = 2.5$ dan $z = 4)$	39

Gambar 3.8 Grafik Populasi Hama Penggerek Buah ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, z = 4, M_{11}(0) = 3, M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, P_{12}(0.027) = 2$) 40

Gambar 3.9 Grafik Populasi Tomcat ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 5, z = 4, M_{11}(0) = 3, M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, P_{12}(0.027) = 2$) 41

Gambar 3.10 Simulasi Eksak Kesetimbangan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, M(0) = 3, P(0) = 2.5$ dan $z = 4$) 43

Gambar 3.11 Grafik Populasi Tomcat dan Hama Penggerek Buah ($g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 10, z = 4, M_{11}(0) = 3, M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, P_{12}(0.027) = 2$) 44

DAFTAR SIMBOL

- α : Laju kelahiran perkapita hama penggerek buah (ribu ekor/ tahun)
- β : Laju kematian perkapita tomcat (ribu ekor/ tahun)
- E : Titik Kesetimbangan
- g : Kematian perkapita hama penggerek buah
- h : konstanta kesebandingan
- K : Jumlah populasi maksimum mangsa (hama penggerek buah)
- M : Jumlah populasi mangsa (hama penggerek buah)
- P : Jumlah populasi pemangsa (tomcat)
- t : waktu
- z : Laju perkembangbiakan tumbuhan
- Δt : Perubahan waktu

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Ekosistem adalah tingkatan yang sangat luas dalam hirarki organisasi biologis, yang terdiri dari komunitas organisme dalam suatu wilayah tertentu dan faktor abiotik yang membentuk lingkungan fisiknya (Neil A. Campbell, 2000: 409). Ekosistem berada pada kondisi seimbang jika rantai makanan dalam pembentukan suatu ekosistem berada dalam kondisi seimbang, dimana semua komponen baik biotik maupun abiotik berada pada porsi yang seharusnya, baik jumlah maupun peranannya dalam lingkungan. Ketidakseimbangan ekosistem terjadi apabila semua komponen biotik maupun abiotik tidak berada pada porsi yang seharusnya baik jumlah maupun peranannya dalam lingkungan.

Salah satu contoh ketidakseimbangan ekosistem yang disebabkan oleh rantai makanan yang bermasalah adalah kasus serangan tomcat (*Paederus Fuscipes Sp*) di Surabaya pada 13 Maret 2012 (Heru Ruslan, 2012). Masalah ini muncul dikaitkan dengan ketersediaan lahan yang menjadi tempat bagi hama penggerek buah (*Helicoverpa Armigera*) yang menjadi musuh alami dari tomcat menjadi berkurang. Hal ini menyebabkan berkurangnya ketersediaan makanan bagi kumbang tomcat yang merupakan pemangsa utama hama penggerek buah tersebut. Kondisi tidak terpenuhinya makanan bagi kumbang

tomcat merupakan wujud dari ketidakstabilan ekosistem (Ripno Juli Iswanto, 2012: 135).

Balai Pengkajian Teknologi Pertanian (BPTP) Kalimantan Barat dalam situs resminya <http://kalbar.litbang.deptan.go.id/> menjelaskan bahwa tomcat (*Paederus Fuscipes sp*) termasuk dalam Familia Staphylinidae, Ordo Coleoptera. Serangga tomcat berkembang biak di tanah dan menyukai tempat yang lembab dengan daur hidup dari telur sampai menjadi imago selama 18 hari. Stadium telur = 4 hari, larva = 9,2 hari, prepupa = 1 hari, dan pupa = 3,8 hari. Lama hidup serangga betina adalah 113,8 hari dan serangga jantan adalah 109,2 hari. Mangsa utama dari tomcat adalah hama penggerek buah (*Helicoverpa Armigera*).

Hama penggerek buah (*Helicoverpa Armigera*) merupakan musuh para petani. Hama ini terdapat pada tanaman kedelai, kapas, tomat, dan cabai. Pada tanaman kapas, hama ini akan menyerang kuncup bunga, bunga, dan buah kapas sehingga menyebabkan badan buah kapas tidak dapat berkembang atau gugur (Nurindah, 2001: 60).

Suatu ekosistem yang tidak stabil dapat dilakukan upaya untuk menstabilkannya. Salah satunya dengan menyetimbangkan populasi hama penggerek buah dan tomcat. Titik kesetimbangan antara kumbang tomcat dan hama penggerek buah dapat dicari dengan bantuan model mangsa dan pemangsa dengan tomcat sebagai pemangsa dan hama penggerek buah sebagai mangsa. Titik kesetimbangan model mangsa dan pemangsa diperoleh ketika laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa seimbang. Menurut Ripno

Juli Iswanto (2012: 135) permasalahan tomcat dapat dimodelkan dalam bentuk model mangsa dan pemangsa. Model yang digunakan untuk kasus ini adalah model mangsa dan pemangsa dengan respon fungsional Michelis-Menten. Dalam model ini, ditambahkan pengaruh keberadaan tumbuhan dalam proses pemangsaan yang dilakukan tomcat terhadap hama penggerek buah. Keberadaan tumbuhan sebagai tempat berlindung mangsa memperlambat proses perburuan oleh pemangsa.

Suatu model mangsa dan pemangsa umumnya berbentuk sistem persamaan differensial. Solusi sistem persamaan differensial secara umum dapat dicari dengan dua metode, yaitu metode analitik dan metode numerik. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari solusi sistem persamaan differensial adalah metode beda hingga. Metode beda hingga atau lebih dikenal FDM (*Finite Difference Method*) merupakan salah satu metode untuk mendapatkan solusi dari suatu sistem persamaan diferensial. Proses inti metode ini adalah membagi problem yang kompleks menjadi bagian-bagian kecil kemudian tiap bagian didekati dengan deret taylor terpotong, dimana solusi yang lebih sederhana dapat dengan mudah diperoleh (Prabuono, 2012:1).

Metode beda hingga dapat menggunakan skema eksplisit atau implisit. Skema implisit selalu menghasilkan solusi yang stabil sedangkan skema eksplisit ada kemungkinan solusi yang diperoleh tidak stabil. Di sisi lain, skema implisit sulit digunakan untuk persamaan diferensial non linier karena pada skema ini akan dibentuk sistem persamaan linier untuk mencari

penyelesaiannya, sedangkan skema eksplisit dapat digunakan baik pada persamaan diferensial linier maupun non linier karena untuk mencari penyelesaiannya hanya menggunakan nilai yang diperoleh sebelumnya (Bambang, 2012: 206).

Metode beda hingga terbagi menjadi metode beda hingga maju, metode beda hingga tengah dan metode beda hingga mundur. Pada skripsi ini, penyelesaian model tersebut akan menggunakan metode metode beda hingga tengah. Penggunaan metode beda hingga pada mudah dipahami terutama untuk masalah satu dimensi. Keunggulan metode beda hingga tengah dari metode beda hingga maju dan metode beda hingga mundur adalah pada *errornya*, lebih kecil dibandingkan dengan *error* pada metode beda hingga maju dan metode beda hingga mundur (Urroz, 2004: 5).

B. Batasan Masalah

Pada skripsi ini akan disimulasikan penyelesaian model mangsa-pemangsa pada kasus hama penggerek buah secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga tengah, metode tersebut langsung diterapkan tanpa sebelumnya dilakukan uji kelayakan metode. Model yang digunakan adalah model Lotka Voltera dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michelis Menten. Pertambahan populasi akibat migrasi maupun kematian spesies diabaikan.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan permasalahan yang ada, maka dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana prosedur metode beda hingga tengah pada model mangsa-pemangsa dengan respon fungsional Michelis Menten pada kasus hama penggerek buah dan tomcat?
2. Bagaimana hasil simulasi model mangsa-pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten pada kasus hama penggerek buah dan tomcat dengan metode beda hingga tengah?

D. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menjelaskan prosedur metode beda hingga tengah dalam menyelesaikan model mangsa-pemangsa dengan respon fungsional Michelis Menten untuk kasus hama penggerek buah dan tomcat.
2. Mensimulasikan dan menjelaskan hasil simulasi model mangsa-pemangsa dengan respon fungsional Michelis Menten pada kasus hama penggerek buah dan tomcat dengan metode beda hingga tengah.

E. Manfaat Penelitian

Hasil yang diperoleh diharapkan memberi landasan bagi peneliti yang akan meneliti dua spesies yang memiliki hubungan mangsa dan pemangsa dimana laju kematian mangsa dipengaruhi oleh keberadaan tanaman di lokasi perburuan mangsa oleh pemangsa.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang dibentuk dari beberapa persamaan diferensial (Widiarti, 1999:11). Berikut diberikan definisi-definisi yang berkaitan dengan persamaan diferensial.

Definisi 2.1 (Ross, 1984: 3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial menurut variabel bebasnya dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa (PDB) dan persamaan diferensial parsial (PDP).

Definisi 2.3 (Ross, 1984: 4)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.4 (Ross, 1984: 4)

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan yang memuat turunan-turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Contoh:

$$1. \frac{d^2y}{dx^2} + x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

$$2. \frac{d^4x}{dt^4} + 7 \frac{d^2x}{dt^2} + 21x = \cos 2t$$

$$3. \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Contoh 1 dan 2 merupakan persamaan diferensial biasa. Pada contoh 1, variabel bebasnya adalah x dan variabel tak bebasnya adalah y , sedangkan pada contoh 2, variabel bebasnya adalah t dan variabel tak bebasnya adalah x .

Contoh 3 dan 4 merupakan persamaan diferensial parsial. Pada contoh 3 variabel bebasnya adalah s dan t , sedangkan variabel tak bebasnya adalah v . Pada contoh 4 variabel bebasnya adalah x, y , dan z , sedangkan variabel tak bebasnya adalah u . Berdasarkan bentuk persamaannya, persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi persamaan diferensial linier dan persamaan diferensial nonlinier.

Definisi 2.5 (Widiarti, 1994: 17)

Persamaan diferensial linier adalah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah bebas dan turunan-turunannya.

Menurut Dr. Sri Rejeki P. (2009: 4-5) persamaan diferensial dapat dikatakan linier jika memenuhi syarat sebagai berikut:

1. Variabel terikatnya beserta turunannya paling tinggi berpangkat satu

2. Tidak terdapat unsur perkalian antara varibel terikat satu dengan lainnya, antara turunan-turunannya, serta turunan dengan varibel terikat.

Apabila suatu persamaan diferensial tidak memenuhi kedua syarat linier maka persamaan diferensial tersebut disebut persamaan diferensial nonlinier.

Contoh:

1. $\frac{dx}{dy} = 4xy + 7y$ (Persamaan Diferensial Nonlinier)
2. $\frac{dx}{dy} = 8x + 8y$ (Persamaan Diferensial Linier)

B. Model Matematika

Penerapan analisis sistem ilmu terapan meningkat pesat seiring perkembangan matematika. Di bidang biologi misalnya, untuk menggambarkan laju pertumbuhan populasi suatu spesies digunakan pemodelan matematika.

Definisi 2.6 (Widowati, 2007: 1)

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasikan dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia real dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia real ini menjadi lebih tepat.

Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika.

Definisi 2.7 (Ekawati, 2012: 133)

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata.

Menurut Meyer (1984:13) memodelkan suatu masalah nyata ke dalam bentuk matematika tidak dapat dilakukan secara langsung. Oleh karena itu terdapat tiga langkah pemodelan matematika yaitu merumuskan masalah, membuat model matematika dan mengevaluasi model.

1. Merumuskan masalah

Pada tahap ini dilakukan pengenalan masalah-masalah yang sebenarnya dan dilakukan penyederhanaan yang meliputi pengabaian faktor-faktor yang kurang relevan dengan masalah. Melalui pembuatan asumsi dan pembuatan model nyata agar diperoleh suatu penghampiran masalah sesungguhnya yang lebih sederhana dan mudah dirumuskan tanpa mengurangi substansi masalah yang dimodelkan.

2. Membuat model matematika

Pada tahap ini semua peubah dan relasi-relasi yang terdapat dalam rumusan masalah dinyatakan dalam istilah dan pengertian-pengertian matematika yaitu dengan cara membuat suatu peramaan matematika yang sesuai dengan masalah tersebut.

3. Mengevaluasi model

Pada tahap ini model matematika yang telah dibuat ditentukan penyelesaiannya agar dapat dilakukan analisis untuk evaluasi apakah model tersebut telah menjawab pertanyaan secara tepat atau belum serta berisi interpretasi dalam kehidupan nyata.

C. Model Matematika Mangsa dan Pemangsa

Ada beberapa jenis interaksi mangsa dan pemangsa seperti karnivora memangsa spesies hewan, herbivora yang memakan jenis tanaman, dll. Model mangsa dan pemangsa pada skripsi ini berlaku untuk satu spesies pemangsa dan satu spesies mangsa.

Populasi pemangsa yang memangsa satu spesies dan populasi mangsa yang dimangsa secara umum dapat direpresentasi pada diagram berikut



Gambar 2.1 Diagram Laju Pertumbuhan Populasi Mangsa dan Pemangsa
(Bernes, 2002: 121)

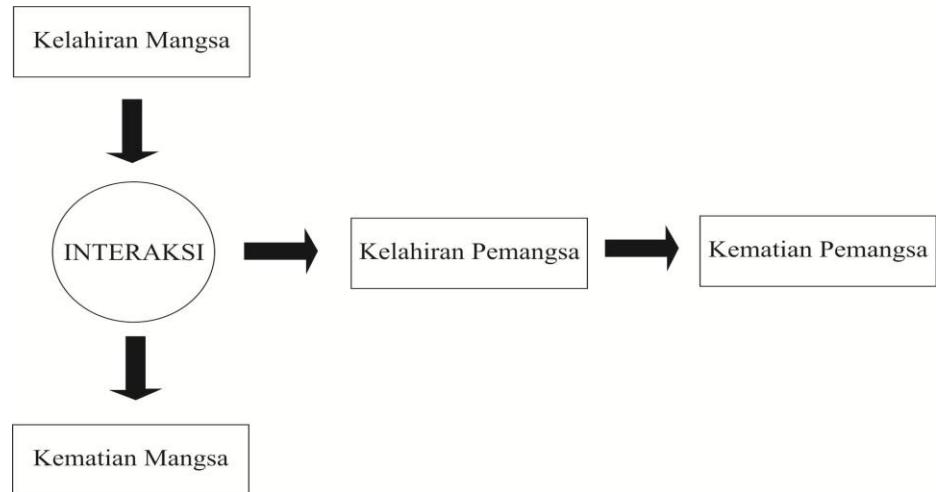
Laju pertumbuhan mangsa dipengaruhi oleh laju kelahiran mangsa dan laju kematian mangsa oleh pemangsa. Selisih antara laju kelahiran mangsa dan laju kematian mangsa yang disebabkan oleh pemangsa mengakibatkan perubahan pada laju populasi mangsa. Laju pertumbuhan populasi pemangsa

dipengaruhi oleh laju kelahiran pemangsa dan laju kematian pemangsa. Laju kematian pemangsa tidak dipengaruhi oleh mangsa atau lebih tepatnya disebabkan faktor alami, dan selisih antara laju kelahiran pemangsa dan laju kematian pemangsa mengakibatkan perubahan pada laju populasi pemangsa.

Berdasarkan Gambar 2.1 diperoleh beberapa fakta di lapangan yang menghubungkan perilaku mangsa dan pemangsa. Kelahiran mangsa menyebabkan bertambahnya banyaknya makanan bagi pemangsa, hal ini menjadikan tersedianya banyak energi sebagai proses perkembangbiakan pemangsa. Kematian mangsa karena interaksi perburuan sangat dipengaruhi banyaknya pemangsa. Kematian pemangsa pada umumnya disebabkan karena faktor alami dan bukanlah akibat interaksi perburuan. Berdasarkan kondisi-kondisi yang ada, maka dapat diambil beberapa asumsi yaitu:

- a. Laju kelahiran perkapita mangsa konstan
- b. Laju kematian perkapita pemangsa konstan
- c. Laju kematian perkapita mangsa sebanding dengan tingkat kepadatan pemangsa.
- d. Laju kelahiran perkapita pemangsa sebanding dengan jumlah mangsa yang berhasil dimangsa oleh pemangsa

Berdasarkan asumsi-asumsi yang ada maka interaksi antara mangsa dan pemangsa dapat ditunjukkan dalam diagram berikut:



Gambar 2.2 Diagram Interaksi Mangsa dan Pemangsa

Kehadiran mangsa menyebabkan bertambahnya persediaan makanan bagi pemangsa. Interaksi antara mangsa dan pemangsa dalam perburuan menyebabkan kematian mangsa. Kematian mangsa akibat interaksi memberikan energi bagi pemangsa untuk melakukan perkembangbiakan. Kematian pemangsa disebabkan faktor alami dan bukan disebabkan oleh mangsa.

Berdasarkan asumsi-asumsi yang ada, dapat dibentuk beberapa pengandaian dalam bentuk model matematika. Misalkan M menyatakan banyaknya populasi mangsa terhadap waktu, P menyatakan banyaknya populasi pemangsa terhadap waktu dan b menyatakan laju kelahiran perkapita. Berdasarkan asumsi pertama maka laju kelahiran perkapita mangsa dinyatakan bM .

Menurut asumsi kedua laju kematian pemangsa tidak disebabkan oleh mangsa, andaikan d menyatakan kematian perkapita maka laju kematian perkapita pemangsa dinyatakan oleh dP . Andaikan angka kematian mangsa

dinyatakan oleh g maka menurut asumsi ketiga laju kematian perkapita mangsa dinyatakan oleh gMP .

Jika $h > 0$ adalah konstan kesebandingan, sesuai dengan asumsi keempat yaitu laju kelahiran perkapita pemangsa sebanding dengan populasi mangsa maka laju kelahiran pemangsa dinyatakan oleh $ghMP$. Berdasarkan gambar 2.1 dan asumsi yang ada maka diperoleh:

$$\frac{dM}{dt} = bM - gMP \quad 2.1a$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu MP - dP \quad 2.1b$$

dimana $\mu = gh$.

Model laju pertumbuhan populasi mangsa ditunjukan oleh persamaan 2.1a. Model laju pertumbuhan populasi mangsa merupakan selisih antara kelahiran mangsa dengan kematian mangsa akibat interaksi. Persamaan 2.1b merupakan model laju pertumbuhan populasi pemangsa. Model laju pertumbuhan populasi pemangsa merupakan selisih antara kelahiran pemangsa yang disebabkan interaksi dengan kematian pemangsa. Model 2.1a dan model 2.1b merupakan model Lotka Voltera dengan dua populasi yaitu populasi mangsa dan populasi pemangsa.

D. Respon Fungsional

Definisi 2.8 (Damayanti, 2006: 29)

Respon fungsional adalah kemampuan pemangsa dalam mengendalikan kepadatan populasi mangsanya pada waktu tertentu.

Berdasarkan sifat interaksi antara pemangsa dan mangsa, respon fungsional dibagi menjadi dua bagian, yaitu respon fungsional kepadatan populasi pemangsa dan respon fungsional kepadatan populasi mangsa. Respon fungsional kepadatan populasi pemangsa adalah kemampuan sekelompok pemangsa dalam mengubah kepadatan populasi mangsanya pada waktu tertentu. Respon fungsional kepadatan populasi mangsa adalah kemampuan seekor pemangsa dalam mengubah kepadatan populasi mangsanya pada waktu tertentu. Berdasarkan tingkah laku makan pemangsa, respon fungsional dibagi atas tiga tipe yaitu: tipe 1, tipe 2, dan tipe 3. (Damayanti, 2006: 29).

1. Respon fungsional kepadatan populasi mangsa tipe 1

Pada tipe ini pemangsa mempunyai sifat memangsa hanya sampai batas kemampuannya. kemampuan untuk makan tidak bisa bertambah lagi meskipun kepadatan populasi mangsa bertambah, sehingga tidak tergantung pada kepadatan populasi mangsanya. Contoh: *Daphnia* yang pada mulanya bergerombol menjadi tersebar ke segala arah setelah dimasukkan ikan mas sebagai predator, sehingga menyebabkan penurunan drastis terhadap jumlah mangsa yang dimakan, kemudian menjadi konstan.

2. Respon fungsional kepadatan populasi mangsa tipe 2

Pada respon fungsional kepadatan populasi tipe 2, pemangsa akan lebih banyak memangsa apabila kepadatan mangsa tinggi. Hal ini mengakibatkan jumlah mangsa yang dimakan berubah menurut perubahan kepadatan. Umumnya dijumpai pada semua jenis pemangsa avertebrata dan serangga.

3. Respon fungsional kepadatan populasi mangsa tipe 3

Pada respon fungsional kepadatan populasi mangsa tipe 3, pemangsa akan memangsa mangsanya dari jenis lainnya bila kepadatan mangsa pertamanya sedikit, namun jika kepadatan mangsa pertamanya bertambah, maka pemangsa akan memangsanya lebih banyak sampai pada batas kemampuan. Contoh: Pemangsaan tikus terhadap kokon. Tikus akan memangsa mangsa yang lain apabila kokon yang menjadi mangsa pertamanya dalam jumlah yang sedikit, namun bila kepadatan kokon bertambah, maka tikus akan kembali memakannya.

E. Titik Kesetimbangan

Sistem persamaan diferensial mempunyai sifat-sifat tertentu, misalkan kestabilan. Kestabilan sistem persamaan diferensial dapat diketahui dengan penyelidikan melalui pemberian suatu nilai awal yang terletak pada persekitaran kesetimbangan.

Definisi 2.9 (Perko, 2000: 102)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$. Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik kesetimbangan apabila $f(\bar{x}) = 0$.

F. Kestabilan

Suatu penyelesaian dari model matematika yang dibentuk diharapkan berada pada kondisi stabil. Berikut ini diberikan definisi titik kesetimbangan stabil, tidak stabil dan stabil asimtotik.

Definisi 2.10. Titik Kesetimbangan Stabil (Finzio dan Ladas, 1988: 291)

Titik kesetimbangan $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dikatakan stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x_1(t), x_2(t))$ memenuhi $[(\bar{x}_1(0) - \bar{x}_1)^2 + [x_2(0) - \bar{x}_2]^2] < \delta$ dan memenuhi $[x_1(t) - \bar{x}_1]^2 + [x_2(t) - \bar{x}_2]^2 < \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

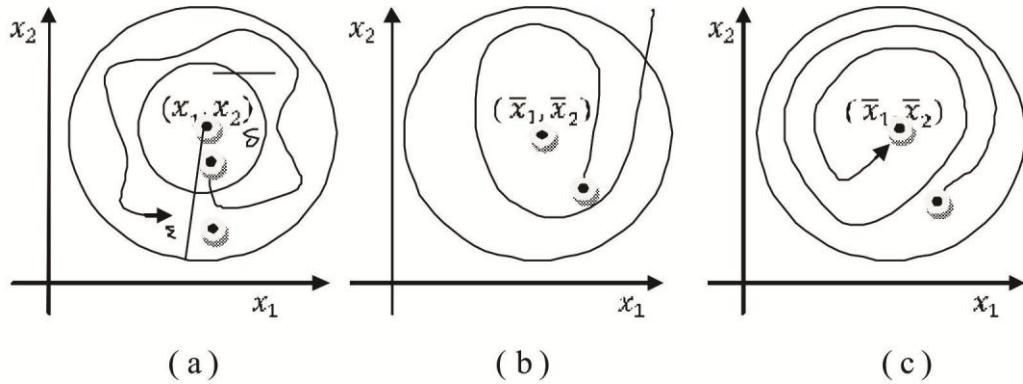
Definisi 2.11. Titik Kesetimbangan Tidak Stabil

Titik kesetimbangan $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dikatakan tidak stabil jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x_1(t), x_2(t))$ memenuhi $[(x_1(0) - \bar{x}_1)^2 + [x_2(0) - \bar{x}_2]^2] < \delta$ dan memenuhi $[x_1(t) - \bar{x}_1]^2 + [x_2(t) - \bar{x}_2]^2 > \varepsilon$ untuk semua $t \geq 0$.

Definisi 2.12. Titik Kesetimbangan Stabil Asimtotik

Titik kesetimbangan $\bar{x}=(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ dikatakan stabil asimtotik jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga untuk setiap solusi $(x_1(t), x_2(t))$ memenuhi $[(\bar{x}_1(0) - \bar{x}_1)^2 + [x_2(0) - \bar{x}_2]^2] < \delta$ dan memenuhi $[x_1(t) - \bar{x}_1]^2 + [x_2(t) - \bar{x}_2]^2 = \bar{x}$ untuk semua $t \geq 0$.

Berikut ini diberikan gambar konsep titik kesetimbangan stabil, tidak stabil dan stabil asimtotik.



Gambar 2.3. (a) Titik kesetimbangan stabil, (b) titik kesetimbangan tidak stabil, dan (c) titik kesetimbangan stabil asimtotik (Finizio dan Ladas, 1988: 291).

G. Deret Taylor

Definisi 2.13 (Bambang, 1996: 7)

Jika suatu fungsi $f(x)$ diketahui di titik x_i dan semua turunan dari f terhadap x diketahui pada titik tersebut, maka deret taylor dapat dinyatakan nilai f pada titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i yaitu

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots + f^n(x_i) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n \quad 2.2$$

dengan:

$f(x_i)$: fungsi di titik x_i

$f(x_{i+1})$: fungsi di titik x_{i+1}

f', f'', \dots, f^n : turunan pertama, kedua,..., ke- n dari fungsi

Δx : jarak antara x_i dan x_{i+1}

R_n : kesalahan pemotongan

$!$: operator faktorial, misalkan bentuk $3! = 3 \times 2 \times 1$

Dari Persamaan 2.10, R_n merupakan kesalahan pemotongan yang diberikan oleh bentuk berikut:

$$R_n = f^{n+1}(x_i) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} + f^{n+2}(x_i) \frac{\Delta x^{n+2}}{(n+2)!} \quad 2.3$$

atau dapat dinyatakan dengan

$$R_n = O(\Delta x^{n+1}) \quad 2.4$$

Indeks n menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke- n , sedangkan indeks $n + 1$ menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai orde $n + 1$.

H. Metode Beda Hingga Tengah

Diferensial numerik digunakan untuk memperkirakan bentuk diferensial kontinu menjadi bentuk diskret. Diferensial numerik banyak digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang diturunkan berdasarkan deret Taylor. Deret Taylor Persamaan 2.2 dapat ditulis dalam bentuk

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\Delta x + O(\Delta x^2) \quad 2.5$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta x} - O(\Delta x^2) \quad 2.6$$

Menurut Bambang (1996:10), bentuk diferensial dari Persamaan 2.14 disebut diferensial maju orde satu karena menggunakan data pada titik x_i dan x_{i+1} untuk memperhitungkan diferensial. Jika data yang digunakan di titik x_i dan x_{i-1} maka disebut diferensial mundur dan deret Taylor menjadi

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) \frac{\Delta x}{1!} + f''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} - f'''(x_i) \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad 2.7$$

atau

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i) \Delta x + O(\Delta x^2) \quad 2.8$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad 2.9$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa ataupun parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga).

Suatu fungsi f yang mempunyai variabel bebas x maka diferensial maju orde satu dapat ditulis

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta t} \quad 2.10$$

Pada skema maju, informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i+1$ yang berada di depannya dengan kesalahan pemotongan orde 2. Sedangkan untuk diferensial mundur orde satu ditulis sebagai berikut

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta t} \quad 2.11$$

Pada skema mundur, informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i-1$ yang berada di belakangnya dengan kesalahan pemotongan orde 2.

Diferensial tengah orde satu merupakan jumlahan dari beda hingga maju dan beda hingga mundur. Persamaan 2.10 dan 2.11 dijumlahkan menjadi

$$2f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\Delta t} + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta t}$$

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta t} \quad 2.12$$

Pada skema tengah, informasi pada titik hitung i dan $i-1$ dihubungkan dengan titik hitung $i+1$ yang berada di depannya sehingga pada skema tengah diperlukan 2 informasi nilai awal yaitu $f(x_i)$ dan $f(x_{i-1})$ untuk menentukan nilai selanjutnya $f(x_{i+1})$.

Menurut Bambang (1996:206), penyelesaian persamaan differensial dengan menggunakan metode beda hingga dapat dibedakan menjadi dua metode (skema) dasar, yaitu skema eksplisit dan skema implisit. Pada skema eksplisit, variabel pada suatu titik dihitung secara langsung dari variabel di beberapa titik disekitarnya pada waktu sebelumnya, yang sudah diketahui nilainya. Dengan metode ini, penurunan persamaan diferensial ke dalam bentuk beda hingga sangat mudah. Namun kendala utamanya adalah kemungkinan terjadinya ketidakstabilan hitungan, apabila digunakan langkah waktu (*time step*) yang besar. Dalam skema implisit, untuk menghitung variabel di suatu titik perlu dibuat suatu sistem persamaan yang mengandung variabel di titik tersebut dan titik-titik di sekitarnya pada waktu yang sama.

Berdasarkan kedua skema dasar tersebut telah dikembangkan skema lainnya, seperti skema Crank-Nicholson, Preissman, Leap Frog, dan sebagainya. Skema Crank-Nicholson merupakan pengembangan dari skema eksplisit dan implisit. Skema Preissman merupakan pengembangan dari skema implisit, sedang skema Leap Frog adalah pengembangan dari skema eksplisit.

1. Skema Eksplisit

Metode beda hingga skema eksplisit banyak digunakan dalam penyelesaian persamaan diferensial. Skema ini sangat sederhana dan mudah untuk memahaminya. Namun skema ini mempunyai kelemahan, yaitu langkah waktu Δt harus cukup kecil. Untuk persamaan diferensial parsial langkah waktu Δt dibatasi berdasar bilangan Courant yaitu $Cr = U \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$. Apabila nilai $Cr > 1$ maka hitungan menjadi tidak stabil. Penggunaan langkah waktu Δt yang kecil tersebut menyebabkan prosedur dan waktu hitungan dapat menjadi sangat lama. Pada skema eksplisit, variabel pada waktu $n + 1$ dihitung berdasarkan variable pada waktu n yang sudah diketahui.

2. Skema Implisit

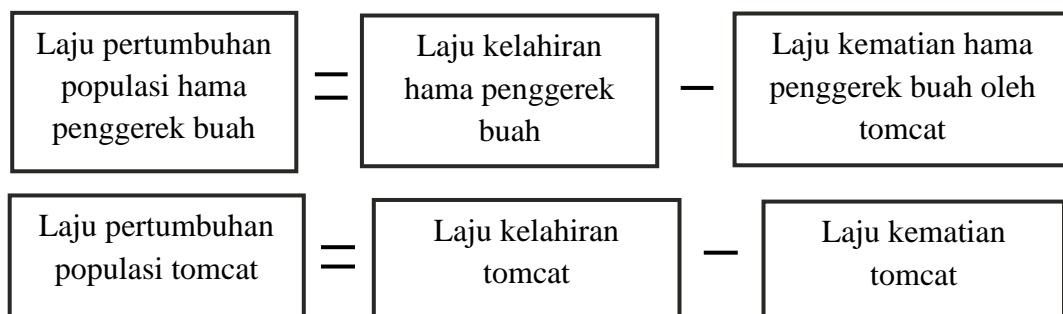
Pada dasarnya skema implisit menyelesaikan persamaan diferensial dengan membentuk sistem persamaan linear pada persamaan diferensial yang telah didiskritkan. Selanjutnya untuk memperoleh penyelesaiannya adalah dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut. Metode beda hingga dengan skema implisit selalu menghasilkan solusi stabil. Namun persamaan diferensial yang didiskritkan tersebut harus bisa disusun dalam bentuk sistem persamaan linier, sehingga skema implisit sulit untuk persamaan atau sistem persamaan diferensial yang setelah didiskretkan berbentuk non linier.

BAB III

PEMBAHASAN

A. Model Hama Penggerek Buah dan Tomcat

Laju pertumbuhan populasi hama penggerek buah dan tomcat dapat direpresentasikan pada diagram berikut ini :



Gambar 3.1. Diagram Laju Pertumbuhan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat (Belinda Bernes, 2002: 121)

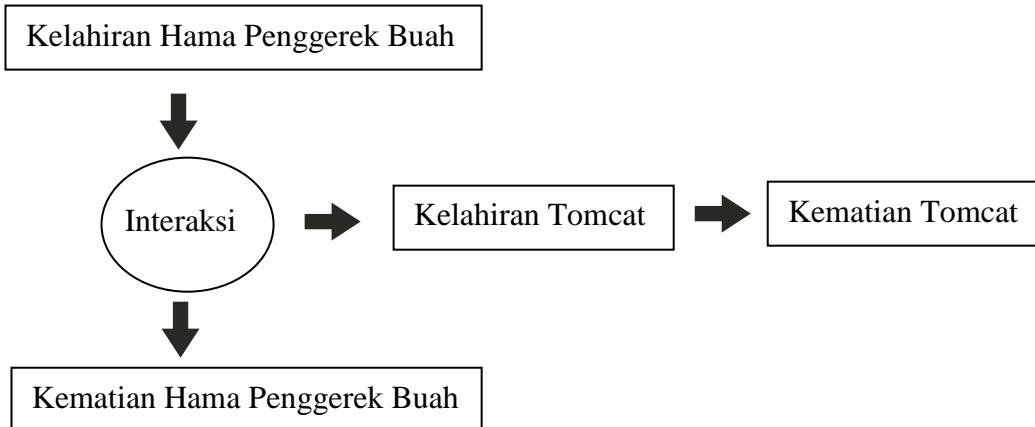
Laju perubahan populasi hama penggerek buah dipengaruhi oleh laju kelahiran hama penggerek buah dan laju kematian hama penggerek buah. Pada kasus tomcat dan hama penggerek buah, diasumsikan kematian hama penggerek buah hanya disebabkan oleh perburuan yang dilakukan tomcat, sehingga laju kematian hama penggerek buah merupakan laju kematian hama penggerek buah oleh tomcat. Selisih antara laju kelahiran hama penggerek buah dan laju kematian hama penggerek buah yang disebabkan oleh tomcat mengakibatkan perubahan pada laju hama penggerek buah.

Sistem mangsa dan pemangsa merupakan salah satu sistem dua jenis spesies yang digabungkan, dimana peningkatan jumlah pemangsa (tomcat) menurunkan jumlah mangsa (hama penggerek buah) hal tersebut disebabkan

oleh interaksi pemangsaan (Iswanto, 2012: 135). Akan tetapi apabila terjadi peningkatan jumlah populasi hama penggerek buah maka akan menyebabkan peningkatan jumlah tomcat, hal ini dikarenakan meningkatnya jumlah makanan bagi tomcat. Angka kelahiran hama penggerek buah dan angka kematian tomcat dipengaruhi oleh faktor alami sehingga dapat diasumsikan konstan. Angka kematian hama penggerek buah sebanding dengan banyaknya tomcat di habitat tersebut. Angka kelahiran tomcat sebanding dengan banyak hama penggerek buah yang berhasil dimangsa. Berdasarkan kondisi-kondisi yang ada, maka diambil beberapa asumsi yaitu:

1. Laju kelahiran perkapita hama penggerek buah konstan.
2. Laju kematian perkapita tomcat konstan.
3. Laju kematian perkapita hama penggerek buah sebanding dengan tingkat jumlah kepadatan tomcat.
4. Laju kelahiran perkapita tomcat sebanding dengan jumlah hama penggerek buah yang berhasil dimangsa oleh tomcat.

Kelahiran hama penggerek buah menyebabkan bertambahnya persediaan makanan bagi tomcat. Interaksi antara hama penggerek buah dan tomcat menyebabkan kematian hama penggerek buah. Kematian hama penggerek buah akibat interaksi memberikan energi bagi tomcat untuk melakukan perkembangbiakan. Kematian tomcat disebabkan faktor alami dan bukan disebabkan oleh hama penggerek buah. Berdasarkan asumsi-asumsi yang tersedia maka interaksi antara hama penggerek buah dan tomcat dapat ditunjukkan dalam diagram berikut



Gambar 3.2. Diagram Interaksi Hama Penggerek Buah dan Tomcat

Berdasarkan asumsi yang ada, dimisalkan M menyatakan banyaknya populasi hama penggerek buah terhadap waktu, P menyatakan banyaknya populasi tomcat terhadap waktu dan α menyatakan laju kelahiran perkapita. Berdasarkan asumsi pertama maka laju kelahiran perkapita hama penggerek buah adalah αM .

Asumsi kedua menyatakan bahwa laju kematian tomcat tidak bergantung pada populasi hama penggerek buah, andaikan β menyatakan kematian perkapita maka laju kematian perkapita tomcat dinyatakan oleh βP . Andaikan tingkat kepadatan hama penggerek buah dinyatakan oleh g maka menurut asumsi ketiga laju kematian perkapita hama penggerek buah dinyatakan oleh gMP . Jika $h > 0$ adalah konstan kesebandingan, sesuai dengan asumsi keempat yaitu laju kelahiran perkapita sebanding dengan populasi hama penggerek buah maka laju kelahiran tomcat dinyatakan oleh $ghMP$. Maka berdasarkan Gambar 3.1 serta dari asumsi yang ada diperoleh:

$$\frac{dM}{dt} = \alpha M - gMP \quad 3.1a$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu MP - \beta P \quad 3.1b$$

dimana $\mu = gh$.

Persamaan 3.1a merupakan model laju pertumbuhan populasi hama penggerek buah, sedangkan persamaan 3.1b merupakan model laju pertumbuhan populasi tomcat. Model laju pertumbuhan populasi hama penggerek buah merupakan selisih antara kelahiran hama penggerek buah dengan kematian hama penggerek buah akibat interaksi, sedangkan model laju pertumbuhan populasi tomcat merupakan selisih antara kelahiran tomcat yang disebabkan interaksi dengan kematian tomcat. Model tersebut merupakan model Lotka Volterra dengan dua populasi yaitu populasi hama penggerek buah dan populasi tomcat.

Diasumsikan area hidup terbatas akibatnya interaksi antara individu dalam populasi hama penggerek buah dapat mengakibatkan kematian individu. Persamaan 3.1a menunjukkan angka kelahiran hama penggerek buah akan menuju tak hingga apabila $\alpha > 0$. Oleh karena itu perlu diberikan suatu batasan populasi, andaikan K menyatakan populasi maksimum hama penggerek buah maka Persamaan 3.1a menjadi

$$\frac{dM}{dt} = \alpha M \left(1 - \frac{M}{K}\right) - gMP \quad 3.2$$

Persamaan 3.2 merupakan model laju pertumbuhan populasi hama penggerek buah dengan fungsi logistik.

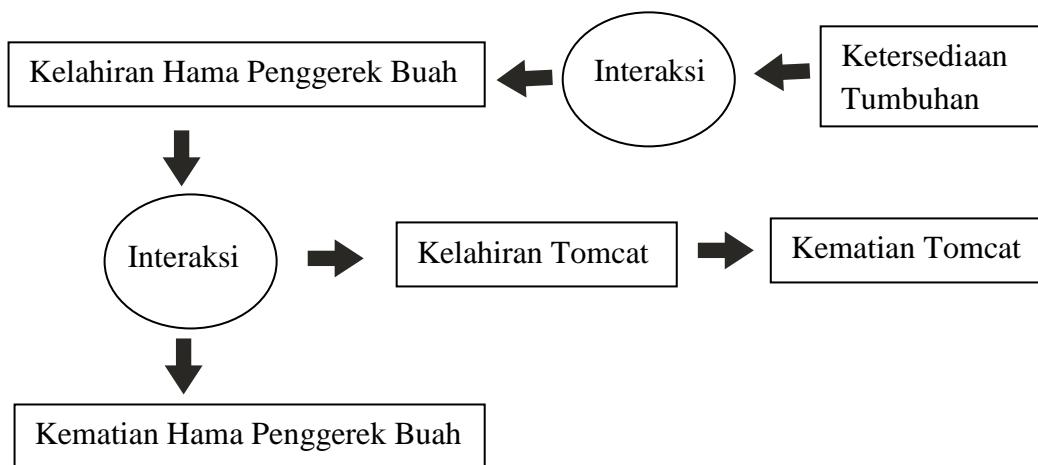
Banyaknya tumbuhan mempengaruhi jumlah hama penggerek buah yang berhasil ditangkap oleh tomcat, akan tetapi tidak mempengaruhi laju kelahirannya karena tumbuhan sebagai tempat berlindung dari interaksi perburuan antara tomcat dan hama penggerek buah, dan ketersediaan tumbuhan diasumsikan hanya mempengaruhi laju pemangsaan hama penggerek buah oleh tomcat. Kondisi yang berlaku pada permasalahan skripsi ini yaitu pemangsaan bergantung pada tumbuhan yang menjadi tempat tinggal dan bersembunyi hama penggerek buah dari tomcat.

Menurut Ripno J. Iswanto (2012: 135-144), respon fungsional Michaelis-Menten merupakan hubungan tiga jenis makhluk hidup yaitu tumbuhan, mangsa (hama penggerek buah) dan pemangsa (tomcat). Kondisi-kondisi yang dipaparkan oleh Ripno Juli Iswanto memenuhi kondisi pada permasalahan skripsi ini, yaitu dimana laju kematian hama penggerek buah dipengaruhi oleh banyaknya tanaman di habitatnya sebagai tempat berlindungnya hama penggerek buah dari perburuan tomcat. Oleh karena itu, pada skripsi ini akan digunakan respon fungsional Michaelis-Menten dalam model Lotka Volterra. Pada kondisi ini terjadi dua interaksi, yang pertama adalah interaksi antara tumbuhan dengan hama penggerek buah dan yang kedua adalah interaksi antara hama penggerek buah dengan tomcat. Berdasarkan interaksi-interaksi yang ada maka dapat diambil beberapa asumsi, yaitu:

1. Laju perkembangbiakan tumbuhan konstan.
2. Laju kelahiran perkapita hama penggerek buah konstan.
3. Laju kematian perkapita tomcat konstan.

4. Laju kematian perkapita hama penggerek buah sebanding dengan tingkat jumlah kepadatan tomcat.
5. Laju kelahiran perkapita tomcat sebanding dengan jumlah hama penggerek buah yang berhasil dimangsa oleh tomcat.

Berdasarkan asumsi tersebut maka interaksi antara mangsa dan pemangsa dengan respon fungsional Michaelis Menten dapat ditunjukkan dalam diagram berikut:



Gambar 3.3. Diagram Interaksi Mangsa dan Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten
 (Restu, 2012: 44)

Pada gambar 3.3 kelahiran hama penggerek buah menyebabkan bertambahnya persediaan makanan bagi tomcat. Interaksi antara hama penggerek buah dan tomcat menyebabkan kematian hama penggerek buah. Kematian hama penggerek buah akibat interaksi memberikan energi bagi tomcat untuk melakukan perkembangbiakan dan kematian tomcat disebabkan faktor alami. Banyaknya tumbuhan mempengaruhi jumlah hama penggerek buah yang berhasil ditangkap oleh tomcat. Berdasarkan kondisi dan asumsi

yang ada maka perlu ditambahkannya variable lagi ke dalam Persamaan 3.2.

Andaikan laju perkembangbiakan tumbuhan dinyatakan oleh z maka Persamaan 3.2 menjadi

$$\frac{dM}{dt} = \alpha \left(1 - \frac{M}{K}\right)M - \frac{gMP}{z+M} \quad 3.3$$

Angka kematian hama pengerek buah sangat bergantung pada banyak tanaman di habitat tersebut. Semakin banyak tanaman yang ada di habitat tersebut maka semakin sedikit angka kematian hama pengerek buah akibat interaksi perburuan. Respon fungsional Michelis Menten bersifat mengurangi angka kelahiran pada populasi hama pengerek buah, yaitu mempengaruhi angka kematian hama pengerek buah akibat interaksi perburuan.

Respon fungsional Michaelis Menten pada laju populasi tomcat bersifat menambah jumlah populasi, hal tersebut disebabkan oleh respon fungsional Michaelis Menten mempengaruhi angka kematian hama pengerek buah akibat interaksi perburuan. Berdasarkan kondisi tersebut maka Persamaan 3.1b menjadi

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\mu MP}{z+M} - \beta P \quad 3.4$$

Berdasarkan Persamaan 3.3 dan 3.4 maka diperoleh

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \alpha \left(1 - \frac{M}{K}\right)M - \frac{gMP}{z+M} \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{\mu MP}{z+M} - \beta P \end{aligned} \right\} 3.5$$

Persamaan 3.5 yang diperoleh merupakan model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten.

B. Titik Kesetimbangan Model Lotka Voltera dengan Respon Fungsional Michaelis Menten

Untuk mendapatkan titik kesetimbangan akan dicari solusi homogen dari Sistem 3.5, sehingga berlaku

$$\alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K}\right) \bar{M} - \frac{g\bar{M}\bar{P}}{z + \bar{M}} = 0 \quad 3.6$$

$$\frac{\mu\bar{M}\bar{P}}{z + \bar{M}} - \beta\bar{P} = 0 \quad 3.7$$

Dari Persamaan 3.7 diperoleh

$$\left(\frac{\mu\bar{M}}{z + \bar{M}} - \beta\right) \bar{P} = 0$$

$$\bar{M} = \frac{\beta z}{\mu - \beta} \quad \text{atau} \quad \bar{P} = 0$$

Persamaan 3.7 akan bernilai benar apabila nilai $\bar{P} = 0$ atau $\bar{P} = \frac{\beta z}{\mu - \beta}$. Nilai \bar{P} dan \bar{M} yang diperoleh akan digunakan untuk mencari nilai \bar{P} dan \bar{M} pada Persamaan 3.6. Langkah untuk mendapatkan nilai \bar{P} dan \bar{M} pada Persamaan 3.6 adalah dengan mensubtitusikan $\bar{P} = 0$ atau $\bar{M} = \frac{\beta z}{\mu - \beta}$ ke dalam Persamaan 3.6. Jika $\bar{P} = 0$ disubtitusikan ke dalam Persamaan 3.6 maka didapatkan

$$\alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K}\right) \bar{M} - \frac{g\bar{M}(0)}{z + \bar{M}} = 0$$

$$\alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K}\right) \bar{M} = 0$$

$$\bar{M} = 0 \text{ atau } \alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K} \right) = 0$$

Hasil pertama yang diperoleh dari mensubtitusikan nilai $\bar{P} = 0$ yaitu nilai $\bar{M} = 0$, diperoleh titik kesetimbangan pertama yaitu $E_1(\bar{M}, \bar{P}) = (0,0)$. Masih terdapat nilai \bar{M} lain pada Persamaan 3.6 apabila nilai $\bar{P} = 0$ disubtitusikan ke dalam Persamaan 3.6, yaitu didapatkan dari $\alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K} \right) = 0$. Sehingga akan diperoleh nilai \bar{M} sebagai berikut

$$\alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K} \right) = 0$$

$$\bar{M} = K$$

Hasil kedua yang diperoleh dari mensubtitusikan nilai $\bar{P} = 0$ yaitu nilai $\bar{M} = K$, diperoleh titik kesetimbangan kedua yaitu $E_2(\bar{M}, \bar{P}) = (K, 0)$. Jika $\bar{M} = \frac{\beta z}{\mu - \beta}$ disubtitusikan kedalam Persamaan 3.6 maka didapatkan

$$\begin{aligned} \alpha \left(1 - \frac{\bar{M}}{K} \right) \bar{M} - \frac{g \bar{M} \bar{P}}{z + \bar{M}} &= 0 \\ \alpha \left(1 - \frac{\frac{\beta z}{\mu - \beta}}{K} \right) \frac{\beta z}{\mu - \beta} - \frac{g \left(\frac{\beta z}{\mu - \beta} \right) \bar{P}}{z + \frac{\beta z}{\mu - \beta}} &= 0 \\ \frac{\alpha \beta z}{\mu - \beta} - \frac{\alpha \beta^2 z^2}{K(\mu - \beta)^2} - \frac{g \bar{P} \beta z}{z \mu} &= 0 \\ \frac{\alpha \beta z}{\mu - \beta} - \frac{\alpha \beta^2 z^2}{K(\mu - \beta)^2} &= \frac{g \bar{P} \beta}{\mu} \end{aligned}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan nilai $\frac{\mu}{g \beta}$ maka diperoleh

$$\left(\frac{\alpha\beta z}{\mu - \beta} - \frac{\alpha\beta^2 z^2}{K(\mu - \beta)^2} \right) \frac{\mu}{g\beta} = \left(\frac{g\bar{P}\beta}{\mu} \right) \frac{\mu}{g\beta}$$

$$\frac{\alpha\mu z}{g(\mu - \beta)} - \frac{\alpha\mu\beta^2 z^2}{gK(\mu - \beta)^2} = \bar{P}$$

$$\frac{\alpha\mu z(K(\mu - \beta) - \beta z)}{gK(\mu - \beta)^2} = \bar{P}$$

Hasil yang diperoleh dari mensubtitusikan nilai $\bar{M} = \frac{\beta z}{\mu - \beta}$ yaitu nilai

$\bar{P} = \frac{\alpha\mu z(K(\mu - \beta) - \beta z)}{gK(\mu - \beta)^2}$, sehingga diperoleh titik kesetimbangan ketiga yaitu

$$E_3(\bar{M}, \bar{P}) = \left(\frac{\beta z}{\mu - \beta}, \frac{\alpha\mu z(K(\mu - \beta) - \beta z)}{gK(\mu - \beta)^2} \right).$$

Berdasarkan hasil analisis secara analitik kestabilan masing-masing titik kesetimbangan diketahui bahwa titik kesetimbangan E_1 tidak stabil, titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik dan titik kesetimbangan E_3 akan stabil asimtotik pada interval nilai K yaitu $\frac{\beta z}{\mu - \beta} < K < \frac{z(\mu + \beta)}{\mu - \beta}$. Setelah menganalisis secara analitik masing-masing kestabilannya kemudian menganalisis kestabilan global diketahui bahwa titik E_2 akan stabil global pada interval $K < \frac{\beta z}{\mu - \beta}$ dan titik E_3 akan stabil global pada interval $\frac{\beta z}{\mu - \beta} < K < \frac{2\beta z}{\mu - \beta}$ (Restu, 2012).

C. Metode Beda Hingga untuk Model Mangsa dan Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten

Model mangsa dan pemangsa pada persamaan 3.5 akan analisa di sekitar titik kesetimbangan dengan menggunakan metode beda hingga. Dalam notasi beda hingga, banyaknya populasi hama penggerek buah dan banyaknya populasi tomcat akan dipartisi. Sistem 3.5 akan diubah dalam bentuk diskret

dengan sesuai dengan persamaan 2.12 dengan mengganti variabel bebas dengan M dan P , sehingga persamaan 3.5 menjadi

$$\frac{M_{t+1} - M_{t-1}}{2\Delta t} = \alpha \left(1 - \frac{M_t}{K}\right) M_t - \frac{gMP_t}{z+M_t} \quad 3.8$$

$$\frac{P_{t+1} - P_{t-1}}{2\Delta t} = \frac{\mu M_t P_t}{z+M_t} - \beta P_t \quad 3.9$$

Selanjutnya dengan mengalikan kedua ruas pada kedua persamaan 3.8 dan 3.9 dengan $2\Delta t$ diperoleh

$$M_{t+1} - M_{t-1} = 2\Delta t \alpha \left(1 - \frac{M_t}{K}\right) M_t - \frac{2\Delta t g M P_t}{z+M_t} \quad 3.10$$

$$P_{t+1} - P_{t-1} = \frac{2\Delta t \mu M_t P_t}{z+M_t} - 2\Delta t \beta P_t \quad 3.11$$

Apabila kedua ruas dari persamaan 3.10 dan 3.11 dijumlahkan masing-masing dengan M_{t-1} dan P_{t-1} , maka menghasilkan

$$\left. \begin{aligned} M_{t+1} &= 2\alpha\Delta t \left(1 - \frac{M_t}{K}\right) M_t - \frac{2gMP_t\Delta t}{z+M_t} + M_{t-1} \\ P_{t+1} &= \frac{2\mu M_t P_t \Delta t}{z+M_t} - 2\beta\Delta t P_t + P_{t-1} \end{aligned} \right\} \quad 3.12$$

Sistem persamaan 3.12 merupakan skema eksplisit metode beda hingga tengah untuk model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michelis Menten. Berdasarkan persamaan 3.12, untuk mendapatkan nilai (M_{t+1}) , diperlukan 2 nilai awal yaitu M_{t-1} dan M_t dan untuk mendapatkan nilai (P_{t+1}) , diperlukan 2 nilai awal yaitu P_{t-1} dan P_t .

D. Simulasi Model Menggunakan Metode Beda Hingga Tengah

Algoritma metode beda hingga tengah pada model mangsa dan pemangsa pada kasus tomcat dan hama pengerek buah adalah sebagai berikut:

1. Menetukan nilai parameter yang dibutuhkan yaitu μ, β, α, z dan K .
2. Menentukan nilai awal (m_1, m_2, p_1 dan p_2), time step (Δt), final time (T) dan jumlah iterasi (n)
3. Membuat vektor solusi awal ($M=[m_1; m_2]$ dan $P=[p_1; p_2]$)
4. Perhitungan. *Looping* menggunakan $m(i+1)$, $m(i)$ dan $m(i-1)$ yang masing-masing merupakan (M_{t+1}) , (M_t) , dan (M_{t-1}) pada skema eksplisit pada populasi mangsa dan $p(i+1)$, $p(i)$ dan $p(i-1)$ yang masing-masing merupakan (P_{t+1}) , (P_t) , dan (P_{t-1}) pada skema eksplisit pada populasi pemangsa, dengan syarat bahwa jika jumlah populasi mangsa dan pemangsa lebih kecil dari nol, maka dianggap punah.
5. Tiap hasil perhitungan $m(i+1)$ dan $p(i+1)$ ditambahkan ke vektor solusi awal M dan P
6. Plot hasil

Skema eksplisit metode beda hingga tengah untuk model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michelis Menten yang diperoleh akan disimulasikan dengan menggunakan software Matlab 7.0.

Simulasi akan dilakukan pada 3 interval nilai K yaitu $K < \frac{\beta z}{(\mu - \beta)}$, $\frac{\beta z}{(\mu - \beta)} < K < \frac{z(\mu + \beta)}{(\mu - \beta)}$, dan $K > \frac{z(\mu + \beta)}{(\mu - \beta)}$. Data parameter untuk kasus tomcat dan hama

penggerek buah belum ada, sehingga karena dianggap mirip, simulasi kali ini menggunakan data parameter untuk kasus murat dan vekton milik Profesor Alfred Clark, Profesor Department of Mechanical Engineering, Rochester University, United State. Pengambilan nilai-nilai parameter awalnya yaitu $g = 20$ ribu pertahun, $\mu = 4$ ribu pertahun, $\beta = \frac{8}{5}$ ribu pertahun, $\alpha = 12$ ribu pertahun dan $z = 4$ ribu pertahun (Ripno J. Iswanto (2012): 144).

1. Pemilihan nilai K pada interval $K < \frac{\beta z}{(\mu - \beta)}$

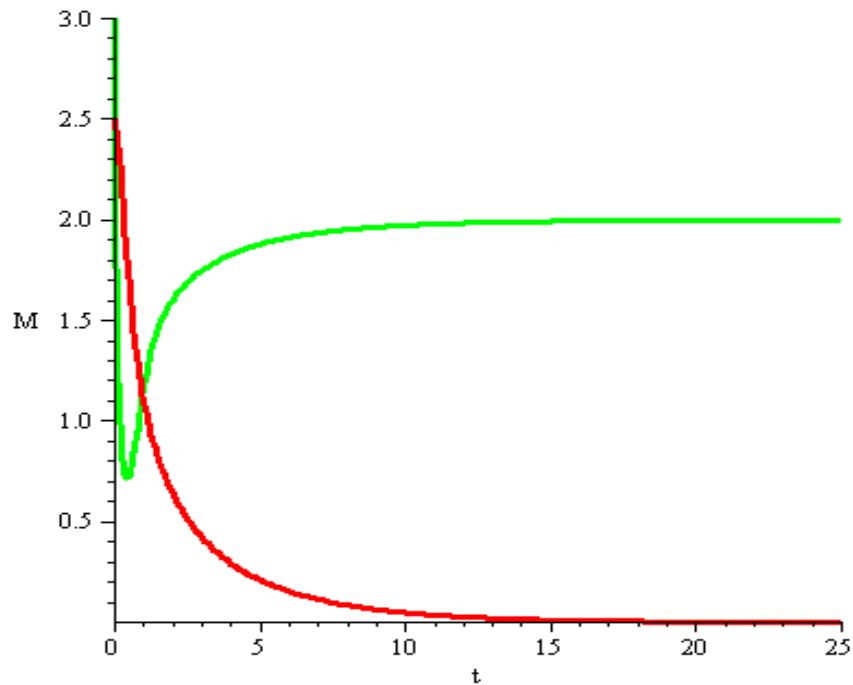
Berdasarkan parameter-parameter yang diperoleh maka didapatkan interval K yaitu $< \frac{\frac{8}{5} \cdot 4}{4 - \frac{8}{5}}$ atau $K < \frac{32}{12}$. Oleh karena itu akan dipilih $K = 2$ yang memenuhi interval tersebut.

a. Titik Kesetimbangan Model Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten Untuk Nilai $K = 2$

Titik kesetimbangan model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten pada kasus tomcat dan hama penggerek buah yang sebelumnya diperoleh yaitu $E_1(\bar{M}, \bar{P}) = (0,0)$, $E_2(\bar{M}, \bar{P}) = (K, 0)$ dan $E_3(\bar{M}, \bar{P}) = \left(\frac{\beta z}{\mu - \beta}, \frac{\alpha \mu z (K(\mu - \beta) - \beta z)}{g K (\mu - \beta)^2} \right)$. Kemudian dengan mensubtitusikan nilai $K = 2$ dan parameter yang ada, maka diperoleh titik kesetimbangan model yaitu $E_1(\bar{M}, \bar{P}) = (0,0)$, $E_2(\bar{M}, \bar{P}) = (2,0)$ dan $E_3(\bar{M}, \bar{P}) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3} \right)$.

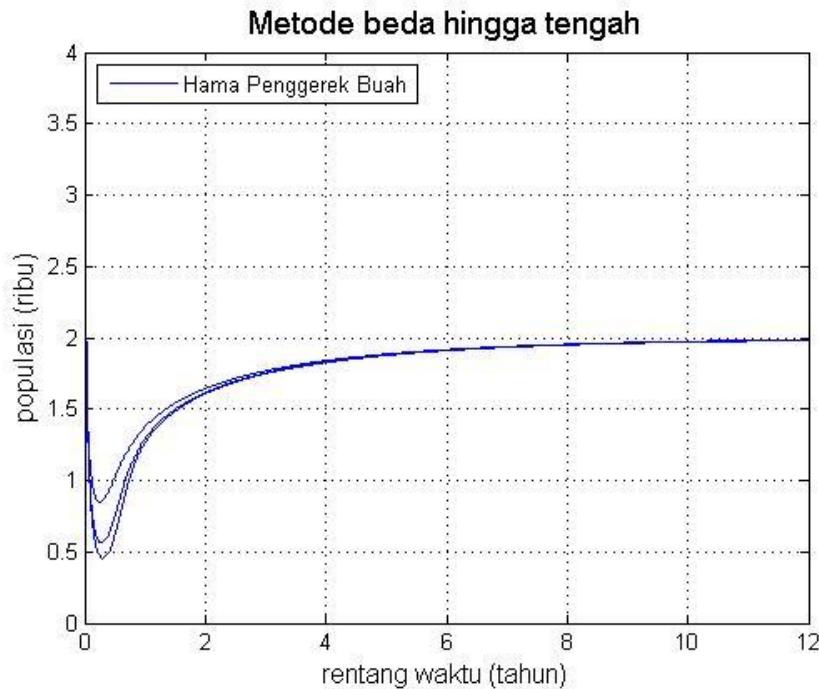
b. Simulasi Skema Eksplisit Metode Beda Hingga Tengah Model Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten Untuk Nilai $K = 2$

Simulasi kestabilan secara analitik dengan nilai $K = 2$ yaitu:



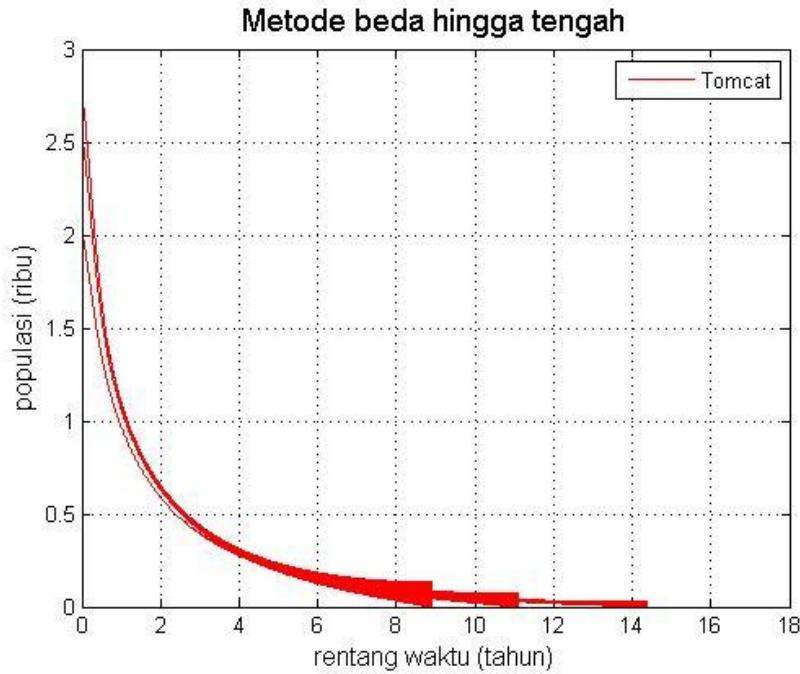
Gambar 3.4 Simulasi Eksak Kesetimbangan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat ($g = 20$, $\mu = 4$, $\beta = \frac{8}{5}$, $\alpha = 12$, $K = 2$, $M(0) = 3$, $P(0) = \frac{5}{2}$ dan $z = 4$)
(Restu, 2012: 78)

Simulasi skema eksplisit akan dibandingkan dengan hasil simulasi analitik tersebut. Simulasi skema eksplisit metode beda hingga tengah untuk nilai $K = 2$ dengan mengambil nilai awal di sekitar titik kesetimbangan yaitu $M_{11}(0) = 3$, $M_{12}(0.027) = 3$, $P_{11}(0) = 2.5$, $P_{12}(0.027) = 2.5$, $M_{21}(0) = 4$, $M_{22}(0.027) = 4$, $P_{21}(0) = 2.7$, $P_{22}(0.027) = 2.7$, $M_{31}(0) = 2.5$, $M_{32}(0.027) = 2.5$, $P_{11}(0) = 2$, dan $P_{12}(0.027) = 2$. Simulasi model mangsa-pemangsa dengan respon fungsional Michaelis Menten pada kasus tomcat dan hama penggerek buah dengan metode beda hingga tengah menggunakan program matlab 7 sebagai berikut:



Gambar 3.5 Grafik Populasi Hama Penggerek Buah
 $(g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, z = 4, M_{11}(0) = 3,$
 $M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4,$
 $M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5,$
 $M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, \text{ dan } P_{12}(0.027) = 2)$

Hasil simulasi populasi mangsa (hama penggerek buah) pada Gambar 3.5 menunjukkan bahwa perilaku populasi hama penggerek buah akan menuju sebuah titik dimana tidak terjadi perubahan jumlah populasi hama penggerek buah pada titik tersebut. Dari Gambar 3.5 terlihat bahwa populasi hama penggerek buah akan menuju kestabilan sekitar tahun kesepuluh dengan jumlah populasinya 2000 ekor. Simulasi populasi pemangsa (tomcat) adalah sebagai berikut:



Gambar 3.6 Grafik Populasi Tomcat

$$\begin{aligned}
 & (g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, z = 4, M_{11}(0) = 3, \\
 & M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, \\
 & M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, \\
 & M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, \text{ dan } P_{12}(0.027) = 2)
 \end{aligned}$$

Hasil simulasi populasi pemangsa (tomcat) pada Gambar 3.6 menunjukkan bahwa perilaku populasi tomcat sebenarnya sebelum mencapai titik 0 mengalami perubahan yang besar dalam waktu singkat, bahkan sampai bernilai negatif, hal ini tentu saja tidak mungkin terjadi pada kondisi yang sebenarnya. Oleh karena itu ketika populasinya menuju titik 0, maka setelah itu tidak terjadi perubahan jumlah populasi tomcat karena populasi tomcat mengalami kepunahan. Sehingga dari Gambar 3.7 dan Gambar 3.8 dapat diketahui bahwa populasi hama penggerek buah dan tomcat menuju kestabilan di titik kesetimbangan $E_2 = (2,0)$. Hasil simulasi populasi tomcat dengan metode beda hingga tengah tidak sama

dengan simulasi eksaknya, dimana pada simulasi dengan metode beda hingga tengah terjadi perubahan populasi yang besar dalam waktu singkat sebelum mencapai titik 0 (punah), sedangkan simulasi hama penggerek buah sama dengan simulasi eksaknya pada gambar 3.5.

2. Pemilihan nilai K pada interval $\frac{\beta z}{(\mu-\beta)} < K < \frac{z(\mu+\beta)}{(\mu-\beta)}$

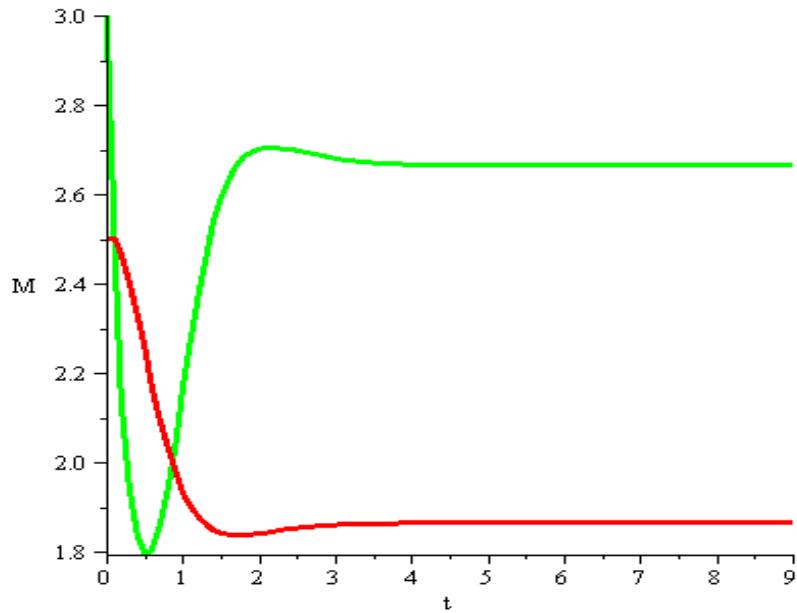
Berdasarkan parameter-parameter yang diperoleh maka didapatkan interval K yaitu $\frac{\frac{8}{5} \cdot 4}{4 - \frac{8}{5}} < K < \frac{4(4 + \frac{8}{5})}{4 - \frac{8}{5}}$ atau $\frac{32}{12} < K < \frac{112}{12}$. Oleh karena itu akan dipilih $K = 5$ yang memenuhi interval tersebut.

a. Titik Kesetimbangan Model Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten Untuk Nilai $K = 5$

Titik kesetimbangan model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten pada kasus tomcat dan hama penggerek buah yang sebelumnya diperoleh yaitu $E_1(\bar{M}, \bar{P}) = (0,0)$, $E_2(\bar{M}, \bar{P}) = (K, 0)$ dan $E_3(\bar{M}, \bar{P}) = \left(\frac{\beta z}{\mu-\beta}, \frac{\alpha\mu z(K(\mu-\beta)-\beta z)}{gK(\mu-\beta)^2}\right)$. Kemudian dengan mensubtitusikan nilai $K = 2$ dan parameter yang ada, maka diperoleh titik kesetimbangan model yaitu $E_1(\bar{M}, \bar{P}) = (0,0)$, $E_2(\bar{M}, \bar{P}) = (5,0)$ dan $E_3(\bar{M}, \bar{P}) = \left(\frac{8}{3}, \frac{28}{15}\right)$.

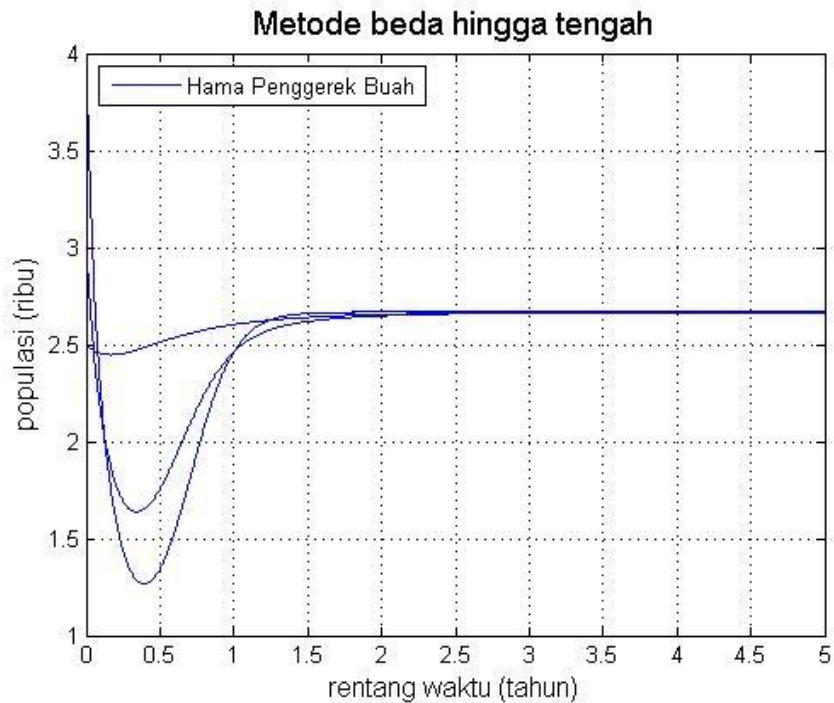
b. Simulasi Skema Eksplisit Metode Beda Hingga Tengah Model Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten Untuk Nilai $K = 5$

Simulasi kestabilan secara analitik dengan nilai $K = 5$ yaitu



**Gambar 3.7 Simulasi Eksak Kesetimbangan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat ($g = 20$, $\mu = 4$, $\beta = \frac{8}{5}$, $\alpha = 12$, $K = 5$, $M(0) = 3$, $P(0) = \frac{5}{2}$ dan $z = 4$)
(Restu, 2012: 68)**

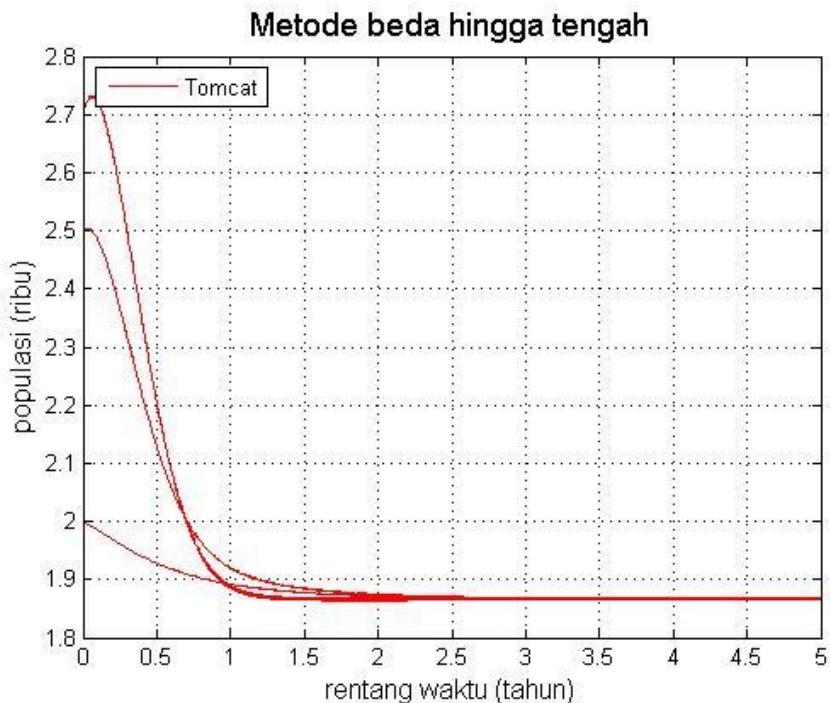
Simulasi skema eksplisit akan dibandingkan dengan hasil simulasi analitik tersebut. Simulasi skema eksplisit metode beda hingga tengah untuk nilai $K = 2$ dengan mengambil nilai awal di sekitar titik kesetimbangan yaitu $M_{11}(0) = 3$, $M_{12}(0.027) = 3$, $P_{11}(0) = 2.5$, $P_{12}(0.027) = 2.5$, $M_{21}(0) = 4$, $M_{22}(0.027) = 4$, $P_{21}(0) = 2.7$, $P_{22}(0.027) = 2.7$, $M_{31}(0) = 2.5$, $M_{32}(0.027) = 2.5$, $P_{11}(0) = 2$, dan $P_{12}(0.027) = 2$. Simulasi model mangsa-pemangsa dengan respon fungsional Michaelis-Menten pada kasus tomcat dan hama penggerek buah dengan metode beda hingga tengah menggunakan program matlab 7 sebagai berikut:



Gambar 3.5 Grafik Populasi Hama Penggerek Buah

$$(g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 2, z = 4, M_{11}(0) = 3, M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, \text{ dan } P_{12}(0.027) = 2)$$

Hasil simulasi populasi mangsa (hama penggerek buah) pada Gambar 3.8 menunjukkan bahwa perilaku populasi hama penggerek buah akan menuju sebuah titik dimana tidak terjadi perubahan jumlah populasi mangsa pada titik tersebut. Dari Gambar 3.8 terlihat bahwa populasi hama penggerek buah akan menuju kestabilan pada pertengahan tahun ketiga dengan jumlah populasinya sekitar 2670 ekor, sedangkan grafik untuk populasi pemangsa (tomcat) adalah sebagai berikut:



Gambar 3.9 Grafik Populasi Tomcat

$$\begin{aligned}
 & (g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 5, z = 4, M_{11}(0) = 3, \\
 & M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, \\
 & M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, \\
 & M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, \text{ dan } P_{12}(0.027) = 2)
 \end{aligned}$$

Hasil simulasi populasi pemangsa (tomcat) pada Gambar 3.9 menunjukkan bahwa perilaku populasi tomcat akan menuju sebuah titik dimana tidak mengalami perubahan jumlah populasi tomcat pada titik tersebut. Dari Gambar 3.9 terlihat bahwa populasi tomcat akan menuju kestabilan pada pertengahan tahun ketiga dengan jumlah populasinya sekitar 1870 ekor. Sehingga dari Gambar 3.8 dan Gambar 3.9 dapat diketahui bahwa populasi hama penggerek buah dan tomcat menuju kestabilan di titik kesetimbangan $E_3 = \left(\frac{8}{3}, \frac{28}{15}\right)$. Hasil yang sama dengan simulasi eksaknya pada gambar 3.7.

3. Simulasi nilai K pada interval $K > \frac{z(\mu+\beta)}{(\mu-\beta)}$

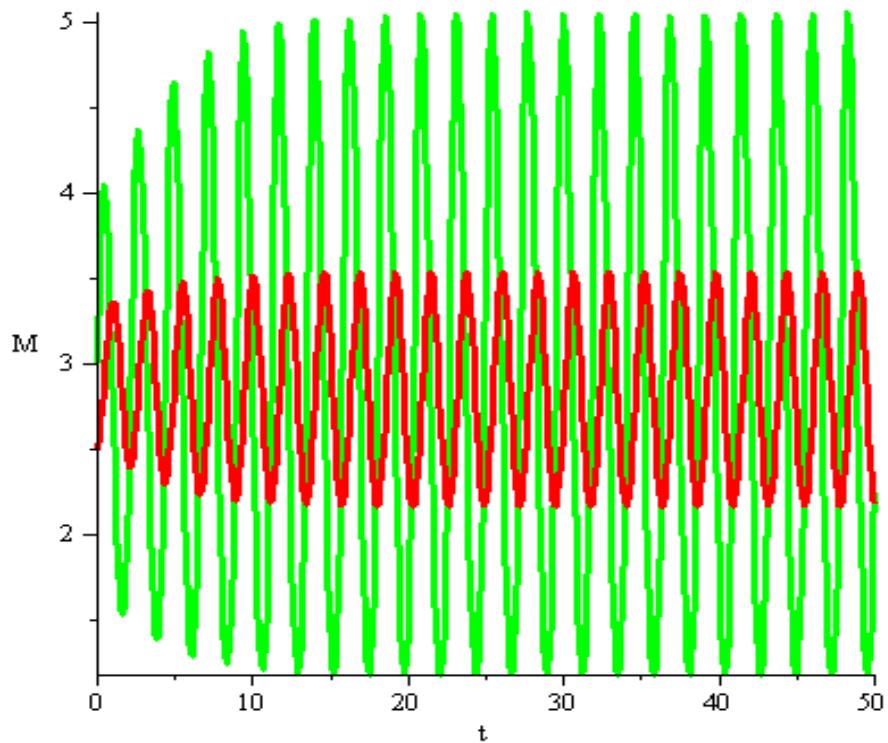
Berdasarkan parameter-parameter yang diperoleh maka didapatkan interval K yaitu $K > \frac{4(4+\frac{8}{5})}{4-\frac{8}{5}}$ atau $K > \frac{112}{12}$. Oleh karena itu akan dipilih nilai $K = 10$ yang memenuhi interval tersebut.

a. Titik Kesetimbangan Model Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten Untuk Nilai $K = 10$

Titik kesetimbangan model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten pada kasus tomcat dan hama penggerek buah yang sebelumnya diperoleh yaitu $E_1(\bar{M}, \bar{P}) = (0,0)$, $E_2(\bar{M}, \bar{P}) = (K, 0)$ dan $E_3(\bar{M}, \bar{P}) = \left(\frac{\beta z}{\mu-\beta}, \frac{\alpha\mu z(K(\mu-\beta)-\beta z)}{gK(\mu-\beta)^2}\right)$. Kemudian dengan mensubtitusikan nilai $K = 2$ dan parameter yang ada, maka diperoleh titik kesetimbangan model yaitu $E_1 = (0,0)$, $E_2 = (10,0)$ dan $E_3 = \left(\frac{8}{3}, \frac{44}{15}\right)$.

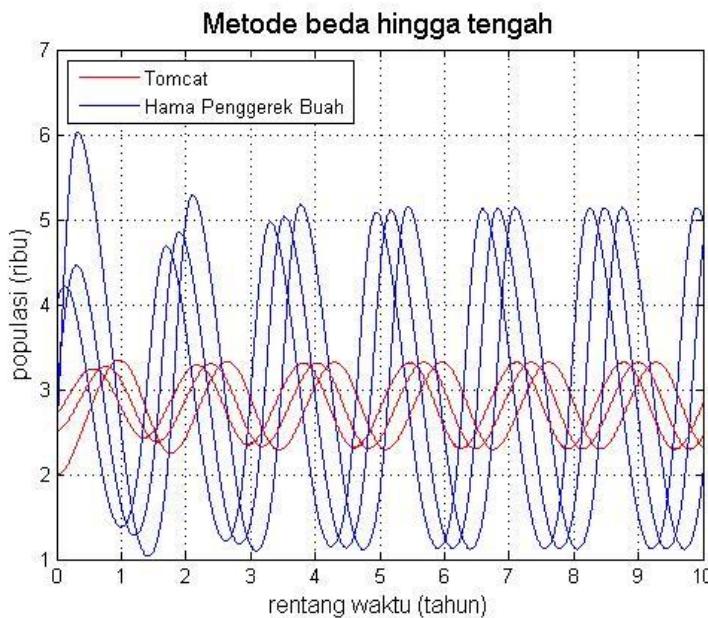
b. Simulasi Skema Eksplisit Metode Beda Hingga Tengah Model Mangsa-Pemangsa dengan Respon Fungsional Michaelis Menten Untuk Nilai $K = 10$

Simulasi kestabilan secara analitik dengan nilai $K = 10$ ditunjukkan pada Gambar 3.10 berikut.



Gambar 3.10 Simulasi Eksak Kesetimbangan Populasi Hama Penggerek Buah dan Tomcat ($g = 20$, $\mu = 4$, $\beta = \frac{8}{5}$, $\alpha = 12$, $K = 10$, $M(0) = 3$, $P(0) = \frac{5}{2}$ dan $z = 4$)
(Restu, 2012: 87)

Simulasi skema eksplisit akan dibandingkan dengan hasil simulasi analitik tersebut. Simulasi skema eksplisit metode beda hingga tengah untuk nilai $K = 2$ dengan mengambil nilai awal di sekitar titik kesetimbangan yaitu $M_{11}(0) = 3$, $M_{12}(0.027) = 3$, $P_{11}(0) = 2.5$, $P_{12}(0.027) = 2.5$, $M_{21}(0) = 4$, $M_{22}(0.027) = 4$, $P_{21}(0) = 2.7$, $P_{22}(0.027) = 2.7$, $M_{31}(0) = 2.5$, $M_{32}(0.027) = 2.5$, $P_{11}(0) = 2$, dan $P_{12}(0.027) = 2$. Simulasi model mangsa-pemangsa dengan respon fungsional Michaelis Menten pada kasus tomcat dan hama penggerek buah dengan metode beda hingga tengah menggunakan program matlab 7 sebagai berikut:



Gambar 3.11 Grafik Populasi Tomcat dan Hama Penggerek Buah

$$\begin{aligned}
 & (g = 20, \mu = 4, \beta = \frac{8}{5}, \alpha = 12, K = 10, z = 4, M_{11}(0) = 3, \\
 & M_{12}(0.027) = 3, P_{11}(0) = 2.5, P_{12}(0.027) = 2.5, M_{21}(0) = 4, \\
 & M_{22}(0.027) = 4, P_{21}(0) = 2.7, P_{22}(0.027) = 2.7, M_{31}(0) = 2.5, \\
 & M_{32}(0.027) = 2.5, P_{11}(0) = 2, \text{ dan } P_{12}(0.027) = 2)
 \end{aligned}$$

Hasil simulasi populasi mangsa dan pemangsa pada Gambar 3.11 menunjukkan pergerakan naik turun jumlah populasi kedua spesies tersebut dan tidak menunjukkan kestabilan di titik kesetimbangan $E_1 = (0,0)$, $E_2 = (10,0)$ dan $E_3 = \left(\frac{8}{3}, \frac{44}{15}\right)$. Saat populasi awal mangsa 4000 ekor pertahun dan populasi awal tomcat 2700 ekor pertahun, jumlah populasi hama penggerek buah akan meningkat jika jumlah populasi tomcat menurun, begitu juga sebaliknya. Sama seperti hasil simulasi eksaknya, jumlah populasi mangsa tidak pernah melebihi 5132 ekor dan tidak pernah lebih sedikit dari 1122 ekor, begitu juga dengan jumlah populasi pemangsa tidak pernah melebihi 3320 ekor dan tidak pernah lebih sedikit dari 2980 ekor.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan pembahasan yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Analisis kestabilan populasi tomcat dan hama penggerek buah dengan model mangsa dan pemangsa dan respon fungsional Michaelis Menten dengan metode beda hingga tengah dilakukan dengan cara:
 - a) Mencari titik kesetimbangan populasi tomcat dan hama penggerek buah dengan model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten.
 - b) Membentuk skema eksplisit metode beda hingga tengah untuk model mangsa dan pemangsa dengan fungsi logistik dan respon fungsional Michaelis Menten.
 - c) Menentukan nilai awal yaitu jumlah populasi awal mangsa dan pemangsa.
 - d) Menyelesaikan secara serentak skema eksplisit metode beda hingga tengah model mangsa dan pemangsa dengan respon fungsional Michaelis Menten dengan bantuan *Matlab* 7.
 - e) Mensimulasikan dan menganalisa kestabilan dari populasi tomcat dan hama penggerek buah menggunakan Program *Matlab* 7.
2. Berdasarkan hasil simulasi dapat dilakukan analisis kestabilan populasi tomcat dan hama penggerek buah dengan model mangsa dan pemangsa

dengan respon fungsional Michaelis Menten menggunakan metode beda hingga tengah. Analisis kestabilan dari hasil simulasi tersebut diperoleh kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomcat di titik kesetimbangan $E_2 = (K, 0)$ dicapai untuk nilai $K < \frac{\beta z}{(\mu - \beta)}$ namun populasi pemangsa sebelum mencapai titik 0 terjadi naik turun jumlah populasi dalam waktu singkat, hal tersebut berbeda dengan hasil simulasi eksaknya yang langsung menuju titik kesetimbangan 0, sedangkan kestabilan populasi hama penggerek buah dan tomcat di titik kesetimbangan $E_3 = (\bar{M}, \bar{P})$, dengan $\bar{M} > 0, \bar{P} > 0$ dicapai pada interval $\frac{\beta z}{\mu - \beta} < K < \frac{z(\mu + \beta)}{(\mu - \beta)}$. Pada interval $K > \frac{z(\mu + \beta)}{(\mu - \beta)}$ kedua populasi stabil, namun mengalami pergerakan naik turun secara periodik dan tidak menuju ke suatu titik kesetimbangan.

B. Saran

Penggunaan model untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial sebaiknya dilakukan uji terlebih dahulu sebelum digunakan yaitu uji stabilitas, konsistensi dan konvergensi model. Pengembangan dari skripsi ini yaitu dengan menambahkan faktor perubahan jumlah populasi karena adanya migrasi populasi atau dapat juga dengan kondisi dua spesies pemangsa dengan satu spesies mangsa. Metode lain juga dapat digunakan sebagai pengembangan dari skripsi ini yaitu *finite element method*.

DAFTAR PUSTAKA

- Belinda, B dan Fulford,G.R. (2002). *Mathematical Modeling with Case Study, Maps and Chaotic Behavior*. London: Taylor & Francis
- BPTP Kalimantan Barat. (2013). *Pengendalian Serangga Tomcat*. Diakses dari http://kalbar.litbang.deptan.go.id/ind/index.php?option=com_content&view=article&id=225:pengendalian-tomcat&catid=55:teknologi. pada tanggal 10 November 2013, jam 13.20 WIB.
- Campbell, Neil A., Recce, J.B & Mitchell, L.G. (2004). *Biologi*. (Alih bahasa: Prof. Dr. Ir. Wasmen Manalu). Jakarta: Erlangga.
- Damayanti, Effi. (2006). *Respon Fungsional Ikan Sepat Biru (Trichogaster Trichopterus) terhadap Larva Aedes Aegypti di Laboratorium*. Diakses dari <http://ejournal.litbang.depkes.go.id/index.php/MPK/article/download/897/826>. Pada tanggal 10 November 2013, jam 14.15 WIB.
- Ekawati, Aminah. (2012). Kestabilan Model SEIR. *Jurnal Universitas Borneo tarakan*.
- Finizio, N. & Ladas, G. (1988). *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern Edisi Kedua*. (Alih bahasa Widiarti S). Jakarta: Erlangga.
- Haberman, Richard. (1977). *Mathematical Models*. New York: Prentice Hall.
- Iswantoro. Ripno J. (2012). *Pemodelan Matematika Aplikasi dan Terapannya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Judarwanto, Widodo. (2013). *Cegah dan Tangani Serangan Tomcat*. Diakses dari <http://health.kompas.com/read/2012/03/26/09261569/Cegah.dan.Tangani.Serangan.Tomcat>. pada tanggal 10 November 2013, Jam 13.18 WIB.
- Kosasih, Prabuono P. (2012). *Teori dan Aplikasi Metode Elemen Hingga*. Yogyakarta: Andi.
- Meyer, Walter J. (1984). *Concept of Mathematical Modeling*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Nurindah, Sunarto, D, Adi & Sujak. (2001). *Peran dan Musuh Alami dalam Pengendalian Helicoverpa Armigera pada Kapas* . *Jurnal Litri Vol 7 No. 2*. Hlm: 60-66
- Perko, Lawrence, (1991). *Differential Equation and Dynamical System*. New York: Springer Verlag.
- Pudjaprasetya, Sri Redjeki. (2009). *Metoda Numerik*. [Diktat Kuliah]. Bandung: Jurusan Matematika FMIPA ITB.

- Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equation*. New York: University of New Hampshire.
- Ruslan, Heru. (2012). *Inilah Data Kasus Serangan Tomcat di Jawa Timur*. Diakses dari <http://www.republika.co.id/berita/nasional/lingkungan/12/03/21/m182dy-inilah-data-kasus-serangan-tomcat-di-jawa-timur>. diakses pada tanggal 10 November 2013, Jam 12.25 WIB.
- Saleh, Restu Ibnu. (2012). *Analisis Kestabilan Helicoverpa Armigera (Populasi Hama Penggerek Buah) dan Paederus Fuscipes Sp (Tomcat) dengan Model Mangsa dan Pemangsa dan Respon Fungsional Michelis Menten*. [Skripsi]. Yogyakarta: Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- Sudjak, M. (2010). Resensi Hasil-Hasil Teknologi Pengelolaan Serangga Helicoverpa Armigera. *Jurnal Penelitian Hama dan Penyakit Pada Balit Sereal Marus Sul-Sel*. Hlm: 1-9.
- Triatmodjo, Bambang. 1996. *Metode Numerik*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Urroz, Gilberto E (2004). *Convergence, Stability, and Consistency of Finite Difference Schemes in the Solution of Partial Differential Equations*. [worksheet]. Utah: Faculty of Civil and Environmental Engineering Utah State University
- Widiarti, S & Pamuntjak, R.J. (1994). *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.
- Widodo. (2007). *Pemodelan Matematika*. Yogyakarta.
- Widowati dan Sutiman. (2007). Buku Ajar Pemodelan Matematika. *Jurnal FMIPA UNDIP*. Hlm. 1-71.
- Winarko, M. Setijo. dkk. (2012). Analisis Kestabilan Model Mangsa-Pemangsa Dengan Mangsa Yang Terinfeksi di Lingkungan Tercemar. *Jurnal Penelitian*. Hlm: 1-11.

LAMPIRAN

Simulasi Metode Beda Hingga Tengah pada Model Tomcat dan Hama Penggerek Buah

```
%-----  
% model mangsa dan pemangsa pada kasus hama penggerek buah dan tomcat  
% dM/dt=a.M.(1-M/k)-g.M.P/ (z+M)  
% dp/dt=mu.M.P/ (z+M)-bP  
%-----  
% parameter pada model  
a = 12; % Laju kelahiran per kapita  
b = 1.6; % Laju kematian per kapita  
g = 20; % Jumlah kepadatan tomcat  
mu = 4; % Jumlah kepadatan tomcat x konstanta kesebandingan  
z = 4; % Laju perkembangbiakan tumbuhan  
k = input('masukkan jumlah populasi maksimum mangsa (dalam ribuan)= ');  
% nilai awal  
m1=3; m2=3; % Jumlah populasi awal mangsa  
p1=2.5; p2=2.5; % Jumlah populasi awal pemangsa  
dt = 1/365; % time step  
T=input('masukkan final time (dalam tahun)= ');  
% matriks solusi awal M dan P  
M=[m1;m2];  
P=[p1;p2];  
n=T/dt; %banyaknya iterasi  
for i= 2:n  
    % menentukan nilai m(i-1), m(i), p(i-1) dan p(i) dari matriks M dan P  
    m(i-1)=M(max(size(M))); p(i-1)=P(max(size(P))-1);  
    m(i)=M(max(size(M))); p(i)=P(max(size(P)));  
    % Jumlah populasi mangsa  
    % Syarat jumlah populasi mangsa harus positif, jika negatif maka  
    % ...populasi dianggap punah (nol)  
    if m(i)<=0;  
        m(i+1)=0;  
    else  
        % menghitung nilai m ke i+1  
        m(i+1) =(2*dt*a*m(i)-(2*dt*a*m(i)/k) ...  
        -((2*dt*g*m(i)*p(i))/(z+m(i)))+ m(i-1);  
        % syarat jumlah populasi harus positif, jika negatif maka  
        % ...populasi dianggap punah (nol)  
        if m(i+1)<=0;  
            m(i+1)=0;  
        end  
    end  
    % Jumlah populasi pemangsa  
    % Syarat jumlah populasi pemangsa harus positif, jika negatif maka  
    % ...populasi dianggap punah (nol)  
    if p(i)<=0;  
        p(i+1)=0;  
    else  
        p(i+1) =((mu*m(i)*p(i)*2*dt)/(z+m(i))) - (b*2*dt*p(i))+ p(i-1);  
        % syarat jumlah populasi harus positif, jika negatif maka  
        % ...populasi dianggap punah (nol)  
        if p(i+1)<0;  
            p(i+1)=0;  
        end  
    end  
    % menambahkan m dan p ke i+1 masing-masing ke dalam matriks M dan P  
    M=[M;m(i+1)];  
    P=[P;p(i+1)];  
end  
t = 0:dt:T; % waktu sebagai absis untuk plot grafik  
% plot grafik  
plot (t,P,'r'),grid on, hold on  
plot (t,M,'b'), hold off  
legend ('Tomcat','Hama Penggerek Buah','Location','NorthEast')  
 xlabel('rentang waktu (tahun)', 'fontsize', 12)  
 ylabel('populasi (ribu)', 'fontsize', 12)  
 title ('Metode beda hingga tengah', 'fontsize', 14)
```