PENENTUAN NILAI OPSI SAHAM TIPE EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN MENGGUNAKAN *CONSTANT ELASTICITY OF VARIANCE (CEV)*

SKRIPSI

Diajukan Kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh:

Istri Rumi Andriyani

NIM. 10305141021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2014

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

PENENTUAN HARGA OPSI SAHAM TIPE EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN MENGGUNAKAN *CONSTANT ELASTICITY OF VARIANCE (CEV)*

Oleh:

Istri Rumi Andriyani

NIM. 10305141021

Telah disetujui pada tanggal 7 Juli 2014

untuk diujikan di hadapan Dewan Penguji Skripsi

Program Studi Matematika Jurusan

Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Menyetujui

Dosen Pembimbing

Rosita Kusumawati, M.Sc

NIP. 198007072005012001

PENGESAHAN

SKRIPSI YANG BERJUDUL

"PENENTUAN NILAI OPSI SAHAM TIPE EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN MENGGUNAKAN *CONSTANT ELASTICITY OF VARIANCE (CEV)*"

Yang disusun oleh:
Nama : Istri Rumi Andriyani
NIM : 10305141021
Prdoi : Matematika

Skripsi ini telah diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 16 Juli 2014 dan dinyatakan LULUS

Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Rosita Kusumawati, M.Sc NIP. 19800707200501 2001	Ketua Penguji	Rosita	22/07/14
Husna 'Arifah, M.Sc NIP. 19781015200212 2001	Sekretaris Penguji	....	22/07/14
Endang Listyani, M.S. NIP. 19591115198601 2001	Penguji Utama	....	18/07/14
Retno Subekti, M.Sc NIP. 19811116200501 2002	Penguji Pendamping	....	22/07/14

Yogyakarta, 22 Juli 2014
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan,

KEMENTERIAN PENDIDIKAN DAN KEBUDAYAAN UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA FAKULTAS

Dr. Hartono
NIP. 196203291987021002

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Istri Rumi Andriyani

NIM : 10305141021

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Judul : PENENTUAN NILAI OPSI SAHAM TIPE EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN MENGGUNAKAN *CONSTANT ELASTICITY OF VARIANCE (CEV)*

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di Perguruan Tinggi lain kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan. Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya.

Yogyakarta, 7 Juli 2014

Yang menyatakan

Istri Rumi Andriyani

NIM. 10305141021

Motto

==

Maka Nikmat Tuhan Mu yang manakah yang kan kau dustakan?
(QS Ar – Rohman 55)

Maka Sesungguhnya disamping ada kesukaran terdapat pula kemudahan
(QS. Al Insyirah :6)

Hal-hal besar tidak dicapai secara tiba-tiba, melainkan perpaduan dari serentetan dengan hal-hal kecil yang dilakukan baik dan sempurna
(Vincent van Goth)

Tidak ada daya dan kekuatan kecuali dengan pertolongan Alloh

==

PERSEMBAHAN

Aku persembahkan karya sederhana ini untuk,.

Special for my parents
Which be the reason why I am here and growing up of me
I Love you so much Mom..., Dad..
I just want to make you proud of me, Trust me...!

My little family and the biggest one,
I fell become richest person, because of you all,

My best friend: Chandra, Depik, Likhah , Lina, Meita, Nazil, Ratna..
Thanks for become more than best friend ,
my life more beautiful because of you all were in it

for MEG
Thx for all, I feel comfortable among you all ☺

and the last one for EAP
thx God, You have sent to me someone who always taken care about me, keep me, cheers me, Thx for everything, dear you...

PENENTUAN NILAI OPSI SAHAM TIPE EROPA DENGAN PEMBAGIAN DIVIDEN MENGGUNAKAN *CONSTANT ELASTICITY OF VARIANCE (CEV)*

Oleh:
Istri Rumi Andriyani
NIM. 10305141021

ABSTRAK

Opsi saham merupakan salah satu alat yang dapat digunakan untuk mengamankan investasi saham yang dimiliki investor. Nilai nyata opsi saham dapat diketahui saat tanggal jatuh tempo. Formula nilai opsi saham dapat digunakan untuk mengetahui nilainya sebelum tanggal jatuh tempo. Dividen merupakan sebagian keuntungan perusahaan yang diberikan kepada pemegang saham. Pentingnya pengaruh dividen pada investasi, membuat pengaruh dividen perlu dipertimbangkan pada penurunaan formula nilai opsi saham. Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui pendekatan formula nilai opsi saham tipe Eropa dengan pembagian dividen pada model *CEV*.

Persamaan diferensial parsial Black-Scholes menjadi dasar dari penurunan nilai opsi saham. Persamaan diferensial parsial Black-Scholes diperoleh dari model harga saham dengan prinsip portofolio dan Lemman It$\hat{o}$. Menggunakan definisi volatilitas pada model *CEV* dan persamaan diferensial model Black-Scholes dapat diperoleh persamaan diferensial model *CEV*. Teknik *perturbation* merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang tidak bisa diselesaikan secara biasa seperti persamaan diferensial Black-Scholes dan *CEV*. Pendekatan solusi model Black-Scholes menggunakan *perturbation theory* menghasilkan nilai error yang kecil terhadap solusi eksaknya. Hal yang sama dilakukan pula pada model *CEV* untuk opsi saham tipe Eropa dengan pembagian dividen.

Teknik *perturbation* dapat menghasilkan pendekatan solusi pada formula nilai opsi saham tipe Eropa dengan pembagian dividen untuk model *CEV*. Pembayaran dividen pada model *CEV* menyebabkan nilai opsi saham beli tipe Eropa turun. Sedangkan pengaruh dividen pada opsi saham jual tipe Eropa model *CEV* membuat nilainya meningkat.

Kata Kunci: *Opsi saham, Saham, Dividen, Constant Elasticity of Varience*

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yag berjudul “Penentuan Nilai Opsi Saham Dengan Pembayaran Dividen Menggunakan *Constant Elasticity of Variance (CEV)*”. Skripsi ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan dorongan dari berbagai pihak, skripsi ini tidak akan terwujud. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta atas izin yang telah diberikan kepada penulis untuk menyusun skripsi.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika atas izin kepada penulis untuk menyusun skripsi dan memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus Penasehat Akademik yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
4. Ibu Rosita Kusumawati, M.Sc selaku Dosen Pembimbing Utama yang telah membimbing, membantu, dan memberikan arahan serta masukan yang sangat membangun.
5. Ibu Endang Listyani, M.S. selaku Penguji Utama yang telah memberikan arahan serta masukan yang sangat membangun.
6. Ibu Retno Subekti, M.Sc selaku Penguji Pendamping yang telah memberikan arahan serta masukan yang sangat membangun.
7. Ibu Husna ‘Arifah, M.Sc selaku Sekretaris Penguji yang telah memberikan arahan serta masukan yang sangat membangun.

8. Seluruh dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah mengajarkan ilmunya selama kuliah.
9. Semua pihak yang tekah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Semoga bantuan dan dorongan yang telah diberikan menjadi amanah dan diridhoi Allah SWT. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, oleh karena itu saran dan masukan sangat terbuka lebar. Penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi kepentingan pendidikan pada khususnya dan dunia keilmuan pada umumnya.

Yogyakarta, 7 Juli 2013

Penulis

Istri Rumi Andriyani

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$C(s,t)$	:	Nilai opsi beli
$P(s,t)$	:	Nilai opsi jual
$V(s,t)$	:	Nilai opsi
σ	:	Volatilitas
Π	:	Nilai portofolio
r	:	Tingkat bunga bebas resiko
μ	:	Laju pertumbuhan harga saham
D	:	Persentase pembayaran dividen
S_t	:	Harga saham pada waktu t
K	:	Harga eksekusi
T	:	Tanggal jatuh tempo
t	:	Waktu ke t
z	:	Gerak Brownian
β	:	Parameter pada model *CEV* dengan $\beta < 2$
$N(x)$	:	Fungsi distribusi komulatif dari distribusi normal standar variabel acak x $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz$
$n(x)$	:	Fungsi densitas peluang dari distribusi normal standar variabel acak x $n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

BAB I
PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Pasar modal merupakan tempat jual beli berbagai macam instrumen keuangan, yaitu saham, obligasi, reksadana, turunan instrumen keuangan dan lain sebagainya. Instrumen keuangan berperan sebagai alat perdagangan di pasar modal. Pasar modal memberi fasilitas kepada penyedia dana untuk meminjamkan dana yang dimiliki kepada pihak yang membutuhkan, tentunya dengan aturan yang telah ditetapkan. Bursa Efek Indonesia (BEI) merupakan salah satu pasar modal yang cukup terkenal dikalangan masyarakat Indonesia. BEI merupakan gabungan dari dua bursa efek yang ada di Indonesia, yaitu bursa efek Jakarta dan bursa efek Surabaya. Surat berharga yang diperdagangkan di bursa efek biasa disebut dengan efek, antara lain adalah saham, obligasi dan produk turunan dari instrumen keuangan, serta reksadana (BEI, 2010).

Saham merupakan instrumen keuangan yang lebih dikenal masyarakat daripada jenis instrumen keuangan lainnya. Saham menunjukkan bukti kepemilikan seorang atas perusahaan yang menjual sahamnya. Investasi dalam bentuk saham mempunyai peluang memiliki untung dalam bentuk *capital gain* dan dividen. *Capital gain* merupakan selisih antara harga beli dan harga jual saham, *capital gain* terbentuk karena adanya perubahan nilai harga saham. Misalkan seseorang membeli saham dengan harga Rp 1.000,- kemudian menjualnya dengan harga Rp 1.250,- maka besarnya *capital gain* adalah Rp 250,-. Dividen adalah sebagian laba yang diberikan emiten kepada para pemegang sahamnya (BEI, 2010). Dividen dapat menjadi salah satu faktor yang dapat menarik para investor untuk berinvestasi. Semakin tinggi dividen yang dibayarkan perusahaan akan meningkatkan keinginan masyarakat untuk berinvestasi di perusahaan tersebut.

Harga saham bisa naik maupun turun atau bahkan nilainya bisa tetap, hal ini yang menyebabkan pemegang saham bisa mendapat keuntungan atau malah mengalami kerugian. Saham menjadi pilihan dalam berinvestasi karena memiliki keunggulan yaitu modal yang digunakan berpeluang dapat kembali dalam waktu relatif singkat, namun saham merupakan investasi yang berisiko. Cermat mengamati kondisi pasar agar tidak mengalami kerugian adalah kunci keberhasilan jika ingin mendapatkan keuntungan ketika berinvestasi saham. Harga saham terbentuk oleh *supply* dan *demand* atas saham tersebut. *Supply* dan *demand* tersebut terjadi karena adanya banyak faktor, baik yang sifatnya spesifik atas saham tersebut (kinerja perusahaan dan industri dimana perusahaan tersebut bergerak) maupun faktor yang sifatnya makro seperti tingkat suku bunga, inflasi, nilai tukar dan faktor-faktor non ekonomi seperti kondisi sosial dan politik, dan faktor lainnya (BEI, 2010).

Perkembangan pasar modal dunia mengalami beberapa kali kondisi pasang surut, begitu juga di Indonesia. Investor sempat tidak tertarik untuk menginvestasikan kekayaannya di pasar modal. Hal ini mendasari munculnya turunan instrumen keuangan untuk menarik para investor agar menginvestasikan kekayaannya di pasar modal. Turunan instrumen keuangan merupakan instrumen keuangan yang nilainya bergantung pada aset yang mendasarinya (*underlying* *asset*). Beberapa contoh produk turunan instrumen keuangan adalah opsi saham, *forward, future, swap, right issue, warrant,* dan lain sebagainya. Turunan instrumen keuangan banyak digunakan oleh para pelaku pasar (pemodal dan perusahaan efek) sebagai sarana untuk melakukan lindung nilai *(hedging)* atas kumpulan investasi yang mereka miliki (BEI, 2010). Jenis produk turunan instrumen keuangan yang diperdagangkan di BEI adalah Kontrak Opsi saham (KOS) dan Kontrak Berjangka Indeks Efek (KBIE).

Turunan instrumen keuangan yang digemari para investor adalah opsi saham, karena opsi saham mampu meminimalkan risiko kerugian yang mungkin dialami seseorang ketika berinvestasi saham. Opsi saham merupakan hak yang diberikan kepada pemegang surat kontrak opsi saham untuk membeli atau menjual saham dengan harga yang telah ditentukan dan dalam jangka waktu yang ditentukan. Kontrak surat opsi saham bukan kewajiban melainkan hak, sehingga pemegangnya boleh menggunakan hak tersebut atau tidak. Opsi saham yang memberikan haknya kepada pemegang surat kontrak opsi saham untuk menjual saham pada harga tertentu disebut opsi saham jual (*put option*), sedangkan hak yang diberikan untuk membeli saham pada harga tertentu disebut opsi saham beli (*call option*).

Dividen merupakan salah satu pertimbangan investor untuk melakukan investasi disuatu perusahaan. Alasan tersebut membuat beberapa perusahaan mempertimbangkan pembagian dividen kepada pemegang sahamnnya. Hadirnya dividen menjadi cukup penting diperhatikan untuk mengatur strategi dalam berinvestasi. Besar dan tanggal pembagian dividen biasanya diumumkan terlebih dahulu oleh perusahaan yang akan membagikan dividen. Pemegang saham yang berhak atas dividen merupakan pemegang saham yang telah membeli saham pada empat hari sebelum tanggal pendataan (Sharpe, Alexander, & Bailey, 1995).

Gerak Brownian geometrik sangat berguna untuk memodelkan harga saham (Ross, 2010). Model pergerakan harga saham yang diperoleh dapat digunakan untuk menentukan harga opsi saham. Perhitungan harga opsi saham yang paling dikenal yaitu model Black-Scholes. Model Black-Scholes hanya dapat digunakan untuk menghitung opsi saham jual maupun beli tipe Eropa dengan tidak mempertimbangkan pembayaran dividen (Hull, 2009).

Perhitungan opsi saham tipe Eropa dengan pembayaran dividen dapat dilakukan menggunakan modifikasi dari model Black-Scholes (Hull, 2009). Perhitungan opsi saham tipe dengan pembayaran dividen dapat menggunakan model yang dikembangkan oleh Fischer Black, Myron Scholes, dan Robert Merton. Model tersebut sering disebut dengan Model Black-Scholes-Merton. Pembentukan model Black-Scholes-Merton merupakan pengembangan dari model Black-Scholes.

Volatilitas menyatakan variansi pengembalian saham yang membuat harga saham berubah-ubah. Becker (1980) dalam jurnalnya menerangkan bahwa berdasarkan pengamatan di pasar, harga opsi saham dipengaruhi oleh volatilitas yang tidak konstan. Hasil pengamatan tersebut menghasilkan kesimpulan bahwa terdapat hubungan kebalikan antara nilai saham dan nilai volatilitas saham. Hubungan kebalikan tersebut menandakan jika nilai volatilitas tinggi maka kemungkinan harga saham jatuh akan cukup besar. John Cox pada tahun 1996 memperkenalkan model *Constant Elasticity of Variance* (*CEV*) sebagai cara untuk mendeskrisipkan hubungan kebalikan tersebut (Randal, 1998). Volatilitas menyatakan parameter untuk harga saham yang berubah-ubah setiap waktu. *CEV* merupakan pengembangan model Black-Scholes untuk harga saham dengan volatilitas stokastik (Becker, 1980).

Perhitungan harga opsi saham menggunakan model *CEV* dapat menghasilkan perhitungan yang lebih akurat karena mempertimbangkan volatilitas yang berubah–ubah sesuai kondisi nyata di pasar. Sebelumnya telah dibahas mengenai penentuan harga opsi menggunakan *Constant Elasticity of Variance* (*CEV*) (Fika Hanna Mayasari, 2013) tanpa pembagian dividen. Pentingnya dividen dalam mengatur strategi berinvestasi sehingga pembayaran dividen penting untuk dipertimbangkan. Penulisan dalam skripsi ini akan membahas harga opsi saham menggunakan model *CEV* serta melihat pengaruh pembayaran dividen terhadap harga opsi saham.

B. Batasan Masalah

Batasan masalah diperlukan untuk menjaga agar topik yang dibahas tetap berada dalam tema. Pembahasan dalam penulisan skripsi dibatasi pada penurunan model *CEV* menggunakan pendekatan dengan teknik perturbasi untuk pembentukan model opsi saham tipe Eropa dengan pengaruh dividen.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan pembatasan masalah diatas dapat ditentukan rumusan masalah sebagai berikut,

1. Bagaimana menentukan harga opsi saham tipe Eropa dengan pembayaran dividen menggunakan *CEV*?
2. Bagaimana pengaruh pembayaran dividen terhadap harga opsi saham tipe Eropa pada model *CEV*?

D. **Tujuan**

Sesuai dengan rumusan masalah diatas maka tujuan dari penulisan skripsi adalah sebagai berikut,

1. Mengetahui formula harga opsi saham tipe Eropa dengan pembagian dividen pada model *CEV*.
2. Mengetahui pengaruh pembayaran dividen terhadap harga opsi saham tipe Eropa pada model *CEV*.

E. **Manfaat**

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut,

1. Bagi mahasiswa Matematika yaitu, menambah pengetahuan mengenai pengaruh pembayaran dividen pada harga opsi saham khususnya opsi saham tipe Eropa, menambah pengetahuan tentang model *CEV*, mengetahui penerapan model *CEV* untuk menghitung harga opsi saham tipe Eropa dengan pembagian dividen.
2. Bagi Perpustakaan Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yaitu, menambah referensi tentang permasalahan menentukan harga opsi saham dengan pembayaran dividen.

Bab II
Landasan Teori

Pembahasan pada bagian ini akan menjadi dasar teori yang akan digunakan untuk membahas bab berikutnya. Dasar teori yang dibahas pada bab ini adalah teori opsi saham, dividen, kalkulus, teori peluang, persamaan difusi, proses stokastik, proses Markov, gerak Brown yang meliputi gerak Brown *drift* dan gerak Brown geometrik, model pergerakan saham tanpa pembagian dividen dan dengan pembagian dividen, lemma Itô, persamaan diferensial parsial Black-Scholes dan teori *perturbation*.

A. Teori Opsi saham

Pembahasan mengenai teori opsi saham dalam skripsi ini meliputi pengertian opsi saham dan jenis opsi saham, arbitrasi, nilai opsi saham, *hedging*, portofolio, dan *put-call parity*.

1. Pengertian dan jenis opsi saham

Opsi saham merupakan hak yang diberikan kepada seseorang untuk membeli atau menjual suatu instrumen keuangan yang menjadi dasar aset (*underlying asset*) opsi saham dengan harga tertentu (*exercise price*) dan dalam jangka waktu (*expiry date*) yang telah ditentukan (Higham, 2004). Contoh instrumen keuangan yang dapat menjadi *underlying asset* opsi saham adalah saham, kurs valas (*currency*), komoditas, indeks saham, obligasi, dan lain sebagainya. Berdasarkan waktu penggunaan hak yang diberikan kepada pemegang opsi saham, opsi saham dibedakan menjadi dua yaitu

a. tipe Eropa dimana opsi saham hanya dapat digunakan saat tanggal jatuh tempo,
b. tipe Amerika dimana opsi saham dapat digunakan sebelum atau pada saat tanggal jatuh tempo.

Berdasarkan hak yang diberikan , opsi saham dibedakan menjadi dua yaitu,

a. opsi saham beli (*call option*) merupakan hak yang diberikan kepada pemegang opsi saham untuk membeli saham suatu perusahaan dengan harga dan jangka waktu yang telah ditentukan,
b. opsi saham jual (*put option*) merupakan hak yang diberikan kepada pemegang opsi saham untuk menjual saham suatu perusahaan dengan harga dan jangka waktu yang telah ditentukan.

Contoh berikut akan menggambarkan lebih jelas mengenai manfaat yang diperoleh investor jika membeli opsi saham. Misalkan seorang investor yang memiliki saham perusahaan PT. XYZ dengan harga $15 setiap lembarnya. Investor tersebut mengamati kondisi pasar dan khawatir harga saham PT.XYZ akan turun, sehingga investor tersebut memutuskan untuk membeli opsi saham jual tipe Eropa seharga $1 dengan *exercise price* $13 untuk setiap lembarnya dan *expiry date* tiga bulan.

Berdasarkan keterangan pada contoh diatas, kerugian maksimal yang dapat dialami investor dengan opsi saham jual sebesar US$1, sedang kerugian yang dapat dialami investor tanpa opsi saham jual adalah tak terbatas. Misalkan dalam tiga bulan kedepan harga saham menjadi US$9 maka keuntungan yang akan diperoleh investor dengan opsi saham beli adalah

$$Harga\ eksekusi - Harga\ Saham - premi\ opsi = US\$13 - US\$9 - US\$1$$

$$= US\$3$$

Tabel 2.1 menggambarkan beberapa keadaan yang mungkin akan terjadi tiga bulan kemudian.

Tabel 2.1 Perbandingan keuntungan atau kerugian pembeli opsi saham jual

Harga saham saat jatuh tempo	Keuntungan/kerugian investor dengan opsi saham jual		Keuntungan/kerugian investor tanpa opsi saham jual	
	Untung	Rugi	Untung	Rugi
US$9	$3	-	-	$6
US$10	$2	-	-	$5
US$11	$1	-	-	$4
US$12	-	-	-	$3
US$13	-	$1	-	$2
US$14	-	$1	-	$1
US$15	-	$1	-	-
US$16	-	$1	$1	-
US$17	-	$1	$2	-
US$18	-	$1	$3	-

Istilah-istilah yang sering digunakan pada saat melakukan transaksi perdagangan opsi saham adalah

a. *Exercise price/strike price* merupakan harga kesepakatan atas saham yang menjadi *underlying asset* pada saat eksekusi yang tertulis pada surat kontrak opsi saham.

b. *Expiry date* merupakan tanggal jatuh tempo pada suatu kontrak opsi saham.

c. *Option premium* yaitu sejumlah uang yang harus dibayarkan untuk membayar surat kontrak opsi saham.

d. *Payoff* merupakan keuntungan yang diperoleh ketika surat kontrak opsi saham dieksekusi. Misalkan seorang investor yang mempunyai opsi saham beli dengan harga eksekusi \$5 dan digunakan untuk membeli saham seharga \$7 maka besarnya *payoff* adalah \$2.

Opsi saham beli pertama kali diperdagangkan di *Chicago Board Exchange* (CBOE) pada tahun 1973 dengan *underlying asset* saham (Hull, 2009). Opsi saham di BEI baru mulai diperdagangkan pada tahun 2004. Perdagangan opsi saham di BEI sempat dihapus karena pada waktu itu belum begitu diminati masyarakat namun pada tahun 2010 kembali lagi diperdagangkan dan peminatnya cukup banyak seiring bertambahnya wawasan investor di Indonesia. Produk turunan instrumen keuangan yang diperdagangkan di BEI adalah (BEI, 2010),

a. Kontrak Opsi saham (KOS)

Opsi Saham yang diperdagangkan di BEI disebut dengan Kontrak Opsi Saham (KOS). Karakteristik opsi saham yang diperdagangkan di BEI disajikan dalam Tabel 2.2 berikut,

Tabel 2.2 Karakteristik opsi saham yang diperdagangkan di BEI

Karakteristik	Keterangan
Tipe KOS	Call Option dan Put Option
Satuan Perdagangan	1 Kontrak = 10.000 opsi saham
Masa Berlaku	1, 2, dan 3 bulan
Pelaksanaan Hak (*exercise*)	Metode Amerika (setiap saat dalam jam tertentu di bursa, selama masa berlaku KOS)
Penyelesaian Pelaksanaan Hak	Secara tunai pada T+1, dengan pedoman call option = WMA – *strike price* put option = *Strike price* - WMA
Margin Awal	10% dari nilai kontrak

<table>
<tr><th>Karakteristik</th><th colspan="2">Keterangan</th></tr>
<tr><td>WMA
(weighted moving average)</td><td colspan="2">rata-rata tertimbang dari saham acuan opsi saham selama 30 menit dan akan muncul setelah 15 menit berikutnya</td></tr>
<tr><td>Strike Price</td><td colspan="2">harga tebus (exercise price) untuk setiap seri KOS yang ditetapkan 7 seri untuk call option dan 7 seri untuk put option</td></tr>
<tr><td>Automatic exercise</td><td colspan="2">diberlakukan apabila:
110% dari strike ≥ call option, jika WMA price
90% dari strike price ≤ put option, jika WMA</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Jam Perdagangan KOS</td><td rowspan="2">Senin – Kamis</td><td>Sesi 1: 09.30 – 12.00 WIB</td></tr>
<tr><td>Sesi 2: 13.30 – 16.00 WIB</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Jum’at</td><td>Sesi 1: 09.30 – 11.30 WIB</td></tr>
<tr><td>Sesi 2: 14.00 – 16.00 WIB</td></tr>
<tr><td>Jam Pelaksanaan Hak</td><td colspan="2">Senin–Kamis:10.01–12.15 dan 13.45–16.15 WIB
Jum’at:10.01–11.45 dan 14.15–16.15 WIB</td></tr>
<tr><td>Premium</td><td colspan="2">diperdagangkan secara lelang berkelanjutan (continuous auction market)</td></tr>
</table>

Berdasarkan Tabel 2.2 dapat diperoleh informasi mengenai opsi saham yang diperdagangkan di BEI adalah *call option* dan *put option.* Opsi saham yang diperdagangkan di BEI termasuk dalam tipe Amerika, artinya pemegang kontrak opsi saham dapat menggunakan haknya sebelum atau pada *expiry date*.

b. Kontrak Berjangka Indeks Efek (KBIE)

Macam-macam KBIE yang diperdagangkan di BEI adalah sebagai berikut,

i. LQ45 Futures

ii. Mini LQ45 Futures

iii. LQ45 Futures Periodik

iv. Mini LQ45 Futures Periodik

v. Japan Futures

Pembahasan pada tulisan ini hanya dibatasi pada opsi saham, yaitu opsi saham dengan saham sebagai *underlying asset,* sehingga KBEI dan macam-macamnya tidak dijelaskan lebih lanjut pada skripsi ini.

2. Arbitrasi

Kesempatan untuk memperoleh keuntungan tanpa risiko sering disebut dengan arbitrasi. Arbitrasi dilakukan investor untuk memperoleh keuntungan tanpa risiko salah satunya dengan cara masuk pada dua atau lebih pasar modal (Hull, 2009). Kondisi yang memungkinkan terjadi kesempatan arbitrasi adalah adanya perbedaan harga saham antara pasar modal yang satu dengan yang lainnya.

Contoh berikut akan menjelaskan bagaimana arbitrasi bisa terjadi, misalkan sebuah saham diperdagangkan di dua pasar modal yaitu *The New York Stock Exchange* dan *The London Stock Exchange.* Sebuah saham diperdagangkan di New York dengan harga \$200 dan ₤100 di London saat terjadi nilai tukar mata uang \$2.03 per pound. Seorang investor dapat membeli 100 saham di New York kemudian menjualnya di London, sehingga investor tersebut dapat memperoleh keuntungan tanpa risiko sebesar \$300 (Hull, 2009).

$$\begin{aligned} 100\ lembar(₤100 \text{ x } \$2.03 - \$200) &= 100 lembar(\$203 - \$200) \\ &= \$300 \end{aligned}$$

Contoh lain yang dapat menggambarkan terjadinya kesempatan arbitrasi adalah seorang arbitor (pelaku arbitrasi) yang membeli opsi saham jual tipe Eropa dengan *option premium* sebesar \$1 per lembar tetapi tidak mempunyai saham. Pada saat *expiry date* harga saham naik, arbitor tersebut meminjam saham kemudian menjualnya. Arbitor tersebut dapat segera membeli kembali saham tersebut dengan harga yang lebih rendah kemudian mengembalikannya. Jika *exercise price* adalah \$13 per lembar, harga saham pada saat *expiry date* adalah \$8 per lembar, biaya yang dikeluarkan untuk meminjam saham dengan biaya peminjaman sebesar \$1 per lembar, maka arbitor tersebut memperoleh keuntungan tanpa risiko sebesar

$$\begin{aligned}\text{Exercise price} - \text{harga saham} - \text{premi opsi} - \text{biaya sewa saham} &= \$13 - \$8 - \$1 - \$1 \\ &= \$3.\end{aligned}$$

Jadi keuntungan arbitor tersebut sebesar \$3 per lembar saham. Asumsi pasar bebas arbitrasi merupakan cara untuk memperoleh harga opsi saham yang adil.

3. Nilai Opsi saham

Nilai opsi saham ditetapkan sebagai selisih antara *exercise price* dengan harga saham saat jatuh tempo. *Payoff* dapat muncul karena harga saham selalu berubah dari waktu ke waktu. Pada opsi saham beli maupun opsi saham jual terdapat tiga keadaan yang akan terjadi, misalkan S_t merupakan harga sahat saat jatuh tempo dan K adalah harga patokan maka tiga keadaan tersebut adalah $S_T > K, S_T = K,$ atau $S_T < K$.

a. Nilai opsi saham beli

Jika harga saham pada waktu jatuh tempo lebih besar dari *execise price* atau $S_T > K$ maka investor akan menggunakan haknya dan mendapatkan keuntungan sebesar $S_T - K$, sehingga nilai opsi saham adalah $S_T - K$. Namun jika harga saham pada waktu jatuh tempo lebih kecil atau sama dengan *exercise price* maka investor akan memilih untuk tidak menggunakan haknya dan opsi saham beli menjadi tidak bernilai, sehingga nilai opsi saham adalah nol. Sehingga nilai opsi saham beli tipe Eropa dapat dinyatakan sebagai,

$$C = maks(0, S_T - K) \tag{2.1}$$

dengan C adalah nilai opsi saham beli tipe Eropa, S_T adalah harga saham pada waktu jatuh tempo, K adalah e*xercise price*, dan T adalah waktu pada saat jatuh tempo.

b. Nilai opsi saham jual

Jika harga saham pada waktu jatuh tempo lebih besar atau samadengan *execise price* atau $S_T \geq K$ maka investor tidak akan menggunakan haknya dan opsi saham menjadi tidak bernilai, sehingga nilai opsi saham adalah nol. Namun jika harga saham pada waktu jatuh tempo lebih kecil atau sama dengan *exercise price* atau $S_T < K$ maka investor tentu akan memilih untuk menggunakan haknya dan nilai opsi saham jual adalah $K - S_T$, sehingga nilai opsi saham jual adalah $K - S_T$. Sehingga nilai opsi saham jual tipe Eropa dapat dinyatakan sebagai,

$$P = maks(0, K - S_T) \tag{2.2}$$

dengan P adalah nilai opsi saham jual tipe Eropa, S_T adalah harga saham pada waktu jatuh tempo, K adalah e*xercise price*, dan T adalah waktu pada saat jatuh tempo.

Nilai Opsi saham bergantung pada kondisi harga saham yang dibedakan menjadi tiga kondisi yaitu,

a. *At the Money*

Pada opsi saham beli maupun opsi saham jual, kondisi *at the money* terjadi ketika harga saham pada saat jatuh tempo sama dengan harga eksekusi. Kondisi ini membuat pemegang opsi saham tidak mendapatkan keuntungan karena tidak ada selisih antara harga saham pada saat jatuh tempo dengan harga eksekusi. Pemegang opsi saham beli maupun opsi saham jual biasanya tidak akan menggunakan haknya pada kondisi ini.

b. *In the Money*

Kondisi *in the money* merupakan kondisi yang diharapkan oleh pemegang opsi saham, karena pemegang opsi saham akan mendapatkan keuntungan dari hasil eksekusi kontrak opsi saham yang dimiliki. Pada opsi saham beli, kondisi *in the money* terjadi ketika harga saham pada saat jatuh tempo lebih tinggi dari harga eksekusi. Sedangkan pada opsi saham jual, kondisi *in the money* terjadi ketika harga saham pada saat jatuh tempo lebih rendah dari harga eksekusi. Kondisi ini membuat pemegang opsi saham beli maupun opsi saham jual akan mendapatkan keuntungan karena selisih antara harga saham pada saat jatuh tempo dengan harga eksekusi bernilai positif.

c. *Out of the Money*

Kondisi *out of the money* merupakan kondisi yang tidak diharapkan oleh pemegang opsi saham, karena pemegang opsi saham akan mengalami kerugian jika pemegang saham melakukan eksekusi atas kontrak opsi saham yang dimiliki. Pada opsi saham beli, kondisi *out of the money* terjadi ketika harga saham pada saat jatuh tempo lebih rendah dari harga eksekusi. Sedangankan Pada opsi saham jual, kondisi *out of the money* terjadi ketika harga saham pada saat jatuh tempo lebih tinggi dari harga eksekusi. Kondisi ini membuat pemgang opsi saham beli maupun opsi saham jual tidak akan mendapatkan keuntungan karena selisih antara harga saham pada saat jatuh tempo dengan harga eksekusi bernilai negatif.

4. *Hedging*

Hedging merupakan strategi investasi yang dapat dilakukan seorang investor untuk melindungi nilai aset yang mereka miliki. *Hedging* tidak memberikan jaminan untuk memperoleh keuntungan, namun *hedging* dapat meminimalkan kerugian yang mungkin akan dialami investor. *Hedging* dapat dilakukan dengan produk turunan instrumen keuangan misalnya *forward* maupun opsi saham (Hull, 2009). Hedging dengan *forward contract* biasanya dilakukan oleh perusahaan *import* sebagai langkah untuk mengantisipasi kerugian yang timbul karena perubahan nilai tukar mata uang. Sedangkan *hedging* menggunakan opsi saham banyak dilakukan investor yang melakukan investasi di pasar modal.

Opsi saham yang digunakan untuk melindungi aset saham disebut dengan opsi saham.

Salah satu strategi penting lindung nilai adalah *delta hedging*, yaitu Δ opsi saham yang didefinisikan sebagai perubahan harga opsi saham terhadap harga saham (Higham, 2004). Sehingga delta menyatakan turunan pertama dari harga opsi saham terhadap saham, secara matematis dinyatakan dengan

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \tag{2.3}$$

dengan Δ = *delta hedging*, V adalah nilai opsi saham, dan S adalah harga saham.

Contoh tindakan *hedging* adalah sebagai berikut, misalkan seorang investor memiliki 100 lembar saham *Microsoft* pada bulan Juli 2014 dengan harga $\$50$ per lembar. Investor tersebut memperkirakan bahwa harga saham pada 3 bulan kedepan akan turun, sehingga membuat investor tersebut mengambil keputusan untuk membeli opsi saham jual. Kontrak opsi saham jual ini membuat investor memiliki hak untuk menjual saham yang dimilikinya sebesar $\$45$ per lembar. Jika harga setiap kontrak opsi saham jual adalah $\$15$ dan setiap kontrak opsi saham dapat digunakan untuk menjual 10 lembar saham maka investor perlu mengeluarkan biaya $\$150$ untuk melindungi aset yang dimilikinya.

Walaupun harus membayar $\$150$ untuk membeli kontrak opsi saham, namun investor tersebut memiliki jaminan untuk bisa menjual sahamnya seharga $\$45$ besar dan terhindar dari kerugian yang mungkin akan cukup besar. Jika harga saham turun dibawah $\$45$ maka investor tersebut dapat menggunakan haknya dan memperoleh $\$4{,}500$ dengan keuntungan sebesar $\$4{,}500 - \$150 = \$4{,}350$. Jika harga saham naik diatas $45 maka opsi saham jual tidak perlu dieksekusi, investor dapat menjual saham yang dimilikinya sesuai harga pasar.

5. Portofolio

Portofolio merupakan kombinasi dari aset-aset yang dimiliki oleh seorang investor. Portofolio juga merupakan salah satu strategi investor yang digunakan untuk melindungi nilai (*hedging*) atas aset-aset yang mereka milik. Portofolio dapat dibentuk dengan mengkombinasikan opsi saham dan saham pada posisi yang berlawanan sehingga diperoleh posisi bebas risiko. Contoh posisi berlawanan adalah pada saat opsi saham beli tidak dieksekusi karena harga saham dipasar lebih kecil dari harga *exercise price* maka pelaku hedging akan mendapat keuntungan jika membeli saham dibursa. Sebaliknya, jika keadaan memungkinkan untuk melakukan eksekusi opsi saham beli maka pelaku hedging dapat memperoleh keuntungan dengan menjual saham ke penerbit opsi saham. Keadaan ini membuat pelaku hedging berada diposisi bebas risiko.

Salah satu strategi yang digunakan untuk melindungi nilai portofolio adalah strategi yang dikenal dengan *reversed covered call*. Strategi ini merupakan suatu strategi investasi dimana sejumlah saham berada dalam posisi *short*. Posisi *short* berarti posisi yang dapat memberikan hak kepada pelaku pasar untuk melakukan penjualan atas aset keuangan yang dimiliki. Sedangkan opsi saham berada pada posisi *long*, yaitu posisi dimana pelaku pasar dapat membeli aset keuangan. Sehingga dapat dibentuk nilai portofolio dengan nilai saham dilindungi oleh *delta hedging* adalah sebagai berikut,

$$\Pi = V - \Delta S_t \tag{2.4}$$

dengan Π adalah portofolio, V adalah harga opsi saham, Δ = *delta heging* dan S_t adalah harga saham. Pada interval waktu dt perubahan portofolio adalah

$$\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{t}} = dV_t - \Delta dS_t \tag{2.5}$$

Persamaan (2.6) merupakan nilai portofolio pada interval dt dengan asumsi tanpa pembayaran dividen. Pembayaran dividen menyebabkan perubahan harga saham, karena harga saham harus jatuh sebesar dividen yang dibayarkan.

6. *Put-Call Parity*

Pada opsi saham tipe Eropa terdapat pendapat yang mendefinisikan hubungan antara nilai opsi saham beli dan opsi saham jual dengan harga eksekusi K dan *expiry date* T (Higham, 2004). Hubungan untuk menggambarkan hal tersebut dijelaskan dengan menggunakan ilustrasi dibentuk dua portofolio, misalkan π_a dan π_b. Portofolio pertama yaitu π_a, merupakan kombinasi dari satu opsi saham beli dan sejumlah uang Ke^{-rT} yang diinvestasikan di bank. Sedangkan portofolio kedua atau π_b merupakan kombinasi dari satu opsi saham jual dan satu unit aset berupa saham. Pada saat *expiry date* maka nilai portofolio a adalah

$$\pi_a = C + Ke^{-r(T-T)}$$

$$\pi_a = maks(0, S_t - K) + K$$

$$\pi_a = maks(S_t, K)$$

sedangkan nilai portofolio b adalah

$$\pi_b = P + S_t$$

$$\pi_b = maks(0, K - S_t) + S_t$$

$$\pi_b = maks(S_t, K)$$

Dari uraian diatas dapat terlihat bahwa nilai kedua portofolio tersebut sama, sehingga diperoleh

$$\pi_a = \pi_b$$

$$C + Ke^{-r(T-t)} = P + S_t$$

dengan C adalah nilai opsi saham beli pada, K adalah *exercise price*, P adalah nilai opsi saham jual, dan S_t adalah harga saham pada waktu t. *Put-Call Parity* menyatakan hubungan antara opsi saham beli dan opsi saham jual tipe Eropa. Hubungan tersebut dinyatakan dengan

$$C + Ke^{-r(T-t)} = P + S_t \tag{2.6}$$

B. Dividen

Dividen merupakan pembagian keuntungan yang diberikan perusahaan penerbit saham kepada pemegang sahamnya. Dividen yang dibayarkan diasumsikan besarnya tetap dan dibayarkan secara kontinu pada persentase D. Setelah interval waktu dt maka besarnya dividen yang diperoleh pemegang saham adalah

$$DS_t dt \tag{2.7}$$

Pembayaran dividen dapat membuat nilai saham turun agar tidak memberikan kesempatan arbitrasi. Jika harga saham tidak jatuh maka investor akan membeli saham sebelum dividen dibayarkan kemudian akan menjualnya kembali setelah dividen dibayarkan. Kondisi tersebut menimbulkan kesempatan arbitrasi dan pemegang saham akan mendapat keuntungan tanpa risiko sebesar dividen yang dibayarkan. Dengan demikian, harga saham harus jatuh minimal sebesar dividen yang dibayarkan. Perubahan harga saham pada interval dt membuat Persamaan (2.5) berubah menjadi

$$\mathrm{d}\Pi_{\mathrm{t}} = dV_t - \Delta dS_t - DS_t dt \tag{2.8}$$

dengan Π adalah portofolio, V adalah harga opsi saham, Δ = *delta heging*, D adalah persentase pembayaran dividen dan S_t adalah harga saham. Persamaan (2.7) merupakan perubahan nilai portofolio terhadap waktu dengan adanya pembayaran dividen.

C. Konsep Kalkulus

Konsep kalkulus yang akan dibahas pada tulisan ini adalah turunan fungsi, aturan rantai dan integral tak wajar.

1. Turunan fungsi

Suatu fungsi f dikatakan mempunyai turunan jika fungsi f mempunyai limit dan kontinu. Sebelum membahas mengenai turunan fungsi, akan disinggung mengenai suatu fungsi f yang mempunyai limit dan suatu fungsi f yang kontinu. Suatu fungsi f dikatakan mempunyai limit jika memenuhi Definisi 2.1 berikut,

Definisi 2.1 (Bartle, 2000)

Diberikan fungsi yang didefinisikan pada selang terbuka yang memuat c, kecuali c itu sendiri. Misalkan limit fungsi f dengan x mendekati c adalah bilangan $f(c)$ yaitu

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{2.9}$$

Jika $\forall \varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat bilangan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $|f(x) - f(c)| < \varepsilon, \forall x \in R$ dan $0 < |x - c| < \delta$.

Persamaan (2.9) dapat memenuhi syarat suatu fungsi f yang kontinu jika memenuhi ketiga syarat berikut,

i. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada,

ii. $f(c)$ ada,

iii. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Suatu fungsi f mempunyai limit dan merupakan fungsi kontinu sehingga dapat diperoleh pengertian turunan fungsi f seperti pada Definisi 2.2 berikut,

Definisi 2.2 (Bartle, 2000)

Misalkan $y = f(x)$ merupakan suatu fungsi dan c berada pada domain f. Turunan fungsi f pada c dinyatakan dengan $f'(c)$ maka

$$f^{'}(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \tag{2.10}$$

Jika nilai limitnya ada.

Definisi 2.2 digunakan untuk memahami Teorema 2.1 berikut,

Teorema 2.1 Aturan Rantai

Fungsi f dan g merupakan fungsi yang mempunyai turunan. Jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka turunan $y = f(g(x))$ adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Bukti

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Jika $u = g(x)$ mempunyai turunan, maka $\Delta u \to 0$ bila $\Delta x \to 0$.

Sehingga,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

$$= 0 \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 0$$

Jadi,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$$

Sehingga,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad \blacksquare$$

2. Integral tak wajar

Definisi 2.3 berikut merupakan penngertian mengenai integral tak wajar,

Definisi 2.3 (Baisuni, 1986)

Integral tak wajar adalah suatu integral dimana salah satu atau kedua harga limit batas integralnya adalah tak berhingga untuk suatu harga x dalam interval $[a, b]$ sehingga,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\ dx \tag{2.11}$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\ dx \tag{2.12}$$

Contoh 2.1

Tentukan nilai dari menggunakan Definisi 2.3

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

Penyelesaian,

Berdasarkan Persamaan 2.12 maka

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_{1}^{a} \frac{dx}{x^2}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1\right]$$

$$= 1$$

Definisi 2.4 berikut dapat digunakan untuk mempermudah dalam menentukan nilai integral tak wajar,

Definisi 2.4 (Baisuni, 1986)

Jika limit pada ruas kanan ada dan bernilai tak berhingga, maka dikatakan integral tak wajar yang bersangkutan konvergen dan memiliki nilai. Jika tidak, maka integral tersebut dikatakan divergen. Jika $\int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen, maka dikatakan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ konvergen dengan nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\ dx \qquad (2.13)$$

Contoh 2.2

Tentukan integral dari

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2},$$

menggunakan Definisi 2.4

Penyelesaian,

Berdasarkan Persamaan (2.13) maka diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+4x^2}\ dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+4x^2}\ dx$$

$$= \lim_{t\to-\infty} [arctg 4x]_t^0 + \lim_{t\to\infty} [arctg 4x]_t^0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

D. Teori Peluang

Teori peluang yang akan dibahas pada pembahasan ini meliputi variabel acak, ekspektasi dan variansi, serta distribusi normal dan lognormal.

1. Variabel Acak

Variabel acak atau sering disebut dengan *variable random* merupakan fungsi dari bilangan real yang didefinisikan atas ruang sampel (Ross, 2010). Nilai variabel acak diperoleh dari hasil percobaan. Fungsi padat peluang dari variabel acak diskrit X didefinisikan sebagai $p(a) = P(X = a)$ dengan fungsi distribusi komulatif $F(a)$ dinyatakan sebagai

$$F(a) = \sum_{\forall x_i \le a} p(x_i) \tag{2.14}$$

Misalkan X merupakan variabel acak yang mendefinisikan hasil dari penjumlahan dua dadu dari percobaan dua dadu yang dilempar maka peluang yang menyatakan hasil percobaan dengan jumlah lima adalah

$$P(X = 5) = \frac{4}{36}$$

Fungsi padat peluangnya adalah

$$\begin{aligned} F(5) &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} \\ &= \frac{10}{36} \end{aligned}$$

Variabel acak X dikatakan sebagai variabel acak kontinu jika terdapat fungsi non negatif $f(x)$, $\forall x \in R$ maka untuk $\forall x \in B$ didefinisikan sebagai (Ross, 2010)

$$P(X \in B) = \int_B f(x)\, dx \tag{2.15}$$

dengan $f(x)$ adalah fungsi padat peluang dari variabel acak X. Fungsi distribusi komulatif untuk pubah acak kontinu adalah

$$F(a) = P(X \in (-\infty, a]) = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx \tag{2.16}$$

Misalkan X merupakan variabel acak kontinu dan diberikan himpunan $B = [2,5]$ dengan

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{untuk } a \le x \le b \\ 0 & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.17}$$

maka dari Persamaan (2.17) dapat ditentukan fungsi padat peluang dari $f(x)$, yaitu

$$P(2 \leq X \leq 5) = \int_{2}^{5} \frac{1}{5-2}\, dx$$
$$= \int_{2}^{5} \frac{1}{3}\, dx$$
$$= 1$$

Fungsi distribusi komulatif dari Persamaan (2.17) adalah

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0\ dx + \int_{2}^{5} \frac{1}{5-2}\, dx + \int_{6}^{\infty} 0\ dx$$
$$= 1$$

2. Ekspektasi dan Variansi

Ekspektasi menyatakan rata-rata atau nilai harapan, disimbolkan dengan $E[X]$. Ekspektasi dari sebuah variabel acak diskrit dengan fungsi padat peluang $p(x)$ didefinisikan sebagai

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \tag{2.18}$$

sedangkan untuk ekspektasi dari sebuah variabel acak kontinu dengan fungsi padat peluang $p(x)$ adalah

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i p_i(x)\, dx \tag{2.19}$$

Variansi untuk variabel diskrit maupun kontinu didefinisikan sebagai

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \tag{2.20}$$

3. Distribusi Normal dan Lognormal

Suatu variabel acak X berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 disimbolkan dengan $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Penulisan $X \sim N(0,1)$ memiliki makna bahwa suatu variabel acak X berditribusi normal standar. Fungsi padat peluang untuk $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dinyatakan dengan

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \tag{2.21}$$

Distribusi normal dikatakan *normalized* atau standar jika memiliki rata-rata dan variansi berturut-turut sama dengan nol dan satu. Sehingga persamaan $f(x)$ untuk distribusi normal standar adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2) \tag{2.22}$$

Misalkan suatu variabel acak X berditribusi normal dengan mean μ dan variansi σ^2 maka suatu variabel acak Y dengan $Y = e^X$ dikatakan berdistribusi lognormal. Pernyataan tersebut diperjelas melalui Definisi 2.5 berikut,

Definisi 2.5 (Luenberger, 1998)

Jika X berdistribusi normal atau $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ maka $Y = \exp(X)$ merupakan distribusi lognormal atau $Y \sim LOGN(\mu, \sigma^2)$ dan Y mempunyai interval $0 < y < \infty$. Fungsi padat peluang untuk distribusi lognormal adalah

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}) & \text{untuk } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{untuk } y \leq 0 \end{cases} \tag{2.23}$$

untuk $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$

Selanjutnya akan diselidiki rata-rata dan variansi dari distribusi lognormal

a. Ekspektasi distribusi lognormal

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2})\, dy,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2})\, dy.$$

misalkan $x = \ln y$ maka $y = \exp(x)$ dan $dy = \exp(x)\, dx$ sehingga,

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \exp(x)\, dx,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\, dx,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2}{\sigma^2}\right) dx,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(- \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2\sigma^2 x - 2x\mu + \mu^2}{\sigma^2}\right) dx,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2x\mu - 2x\sigma^2 + \mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4}{\sigma^2}\right) + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dx,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right)^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dx,$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right)^2 + \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) dx,$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + \sigma^2)}{\sigma}\right)^2\right) dx.$$

misalkan $z = \frac{x-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}$ maka $dz = \frac{1}{\sigma} dx$ sehingga,

$$E[Y] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \sigma dz,$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz,$$

$$= \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right).$$

Jadi

$$E[Y] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \tag{2.24}$$

b. Variansi distribusi lognormal

Sebelum menentukan variansi dari distribusi lognormal, akan ditentukan terlebih dahulu nilai $E[Y^2]$

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2})\, dy, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2})\, dy. \end{aligned}$$

misalkan $x = \ln y$ maka $y = \exp(x)$ dan $dy = \exp(x)\, dx$ sehingga,

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}) \exp(x)\, dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(2x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})\, dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(2x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2}{\sigma^2}\right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 4\sigma^2 x - 2x\mu + \mu^2}{\sigma^2}\right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2x\mu - 4x\sigma^2 + \mu^2 + 4\mu\sigma^2 + 4\sigma^4}{\sigma^2}\right) + 2\mu + 2\sigma^2\right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + 2\sigma^2)}{\sigma}\right)^2 + 2\mu + 2\sigma^2\right) dx, \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + 2\sigma^2)}{\sigma}\right)^2 + 2\mu + 2\sigma^2\right) dx, \\ &= \exp(2\mu + 2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - (\mu + 2\sigma^2)}{\sigma}\right)^2\right) dx. \end{aligned}$$

misalkan $z = \dfrac{x-(\mu+2\sigma^2)}{\sigma}$ maka $dz = \dfrac{1}{\sigma}dx$ sehingga,

$$E[Y^2] = \exp(2\mu+2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)\sigma dz,$$

$$= \exp(2\mu+2\sigma^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz,$$

$$= \exp(2\mu+2\sigma^2).$$

Jadi

$$E[Y^2] = \exp(2\mu+2\sigma^2) \tag{2.25}$$

Berdasarkan Persamaan (2.24) dan (2.25) maka dapat diperoleh variansi dari distribusi lognormal, yaitu

$$Var\ (Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2,$$

$$= \exp(2\mu+2\sigma^2) - \left(\exp\left(\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\right)^2,$$

$$= \exp(2\mu+2\sigma^2) - \exp(2\mu+\sigma^2),$$

$$= \exp(2\mu+\sigma^2)\exp(\sigma^2) - \exp(2\mu+\sigma^2),$$

$$= \exp(2\mu+\sigma^2)\,(\exp(\sigma^2)-1).$$

Jadi, variansi distribusi lognormal adalah

$$Var\ (Y) = \exp(2\mu+\sigma^2)\,(\exp(\sigma^2)-1)$$

E. Persamaan Diferensial

Sebuah persamaan yang terdiri atas turunan dari satu atau lebih variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (Ross, 1984). Contoh persamaan diferensial adalah sebagai berikut (Ross, 1984),

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

2. $\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^4} + 3x = \sin t$

3. $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$

4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

Berdasarkan tipenya, persamaan diferensial dibedakan menjadi dua macam yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Nomor 1 dan 2 merupakan contoh persamaan diferensial biasa, sedangkan Nomor 3 dan 4 merupakan contoh persamaan diferensial parsial.

Berdasarkan kelinearannya, persamaan diferensial dibedakan menjadi persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear. Contoh persamaan diferensial linear adalah

$$\frac{dy}{dx} + 3y = 0$$

sedangkan contoh persamaan diferensial nonlinear adalah

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - 8y = 0$$

Solusi persamaan diferensial merupakan persamaan yang memenuhi identitas dari persamaan diferensial jika persamaan tersebut disubstitusi kedalam persamaan diferensial tersebut. Contoh 2.3 berikut akan menjelaskan cara mendapatkan solusi dari suatu persamaan diferensial.

Contoh 2.3

Tentukan solusi dari persamaan diferensial berikut,

$$\frac{dy}{dx} = 2x \tag{2.26}$$

dengan kondisi awal

$$y(1) = 4$$

Penyelesaian

Berdasarkan persamaan (2.26) maka dapat diperoleh persamaan,

$$dy = 2x\ dx$$

integral dari keua ruas maka akan diperoleh

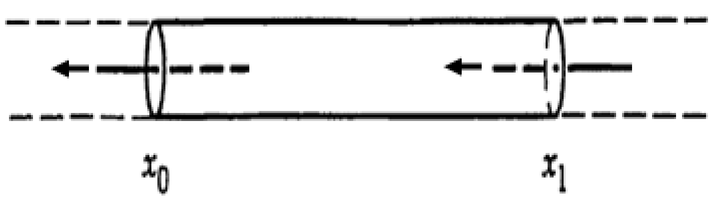
$$y = x^2 + c$$

dengan c merupakan konstanta. Selanjuynta dengan kondisi awal $y(1) = 4$ maka diperoleh nilai $c = 3$. Sehingga diperoleh solusi dari Persamaan (2.26) adalah $y = x^2 + 3$.

Solusi dari persamaan diferensial biasa lebih mudah ditentukan daripada solusi dari persamaan diferensial parsial, salah satu cara untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial parsial adalah melakukan transformasi menjadi persamaan diferensial biasa kemudian ditentukan solusinya.

F. Persamaan Difusi

Persamaan difusi dapat diperoleh dengan ilustrasi Gambar 2.1, sebuah cairan bergerak secara perlahan mengisi sebuah pipa lurus dan sebuah zat pencemar menyebar pada cairan tersebut pada selang $[x_0, x_1]$. Zat pencemar tersebut menyebar melalui cairan dengan arah pergerakan dari konsentrasi tinggi menuju ke konsentrasi yang lebih rendah.



Gambar 2.1 Sebuah cairan mengisi pipa dan sebuah zat pencemar menyebar melalui cairan tersebut

Jika $u(x,t)$ menyatakan konsentrasi (massa per satuan panjang) dari zat dengan posisi x pada waktu t. Maka massa zat pada selang $[x_0, x_1]$ diperoleh dari integral konsentrasi $u(x,t)$ yaitu $M = \int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\, dx$ sehingga,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{x_0}^{x_1} u(x,t)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\, dx \qquad (2.27)$$

Perubahan massa pada selang tersebut juga bergantung pada zat masuk dan zat keluar pada selang tersebut. Hukum *Fick* mengatakan bahwa perubahan massa pada selang $[x_0, x_1]$ terhadap waktu sebanding dengan selisih antara zat masuk dan zat keluar, secara matematis dapat ditulis dengan

$$\frac{dM}{dt} = zat\ masuk - zat\ keluar$$

sehingga perubahan massa pada selang $[x_0, x_1]$ adalah,

$$\frac{dM}{dt} = k\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1,t) - k\frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0,t) \qquad (2.28)$$

dengan M adalah massa dari konsentrasi, $u(x,t)$ adalah konsentrasi pada posisi x dan waktu t, dan k adalah konstanta pembanding.

Berdasarkan Persamaan (2.27) dan (2.28) maka

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\, dx = k\frac{\partial}{\partial x_1} u(x_1,t) - k\frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0,t)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\, dx = k\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\, dx \qquad (2.29)$$

Turunan kedua ruas dari Persamaan (2.29) adalah,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) \qquad (2.30)$$

Persaman (2.30) sering disebut sebagai persamaan difusi.

Selanjutnya akan ditentukan solusi dari persamaan difusi dengan persamaan difusi pada *whole line* diberikan seperti berikut,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = k\frac{\partial^2}{\partial x}u(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty)$$

dengan kondisi awal

$$u(x,0) = \phi(x) \tag{2.31}$$

solusi dari Persamaan (2.30) dapat diperoleh dengan menentukan solusi $\phi(x)$ terlebih dahulu kemudian baru menentukan solusi umumnya (Strauss, 1992).

Sebelum menentukan solusi persamaan difusi akan dibahas terlebih dahulu lima sifat dasar persamaan difusi yang akan digunakan untuk menetukan solusi. Lima sifat dasar dari persamaan difusi adalah sebagai berikut (Strauss, 1992),

a. jika $u(x,t)$ merupakan solusi maka translasi $u(x-y,t)$ juga merupakan solusi untuk setiap y,
b. jika $u(x,t)$ merupakan solusi maka setiap turunannya juga merupakan solusi,
c. kombinasi linear dari solusi $u(x,t)$ juga merupakan solusi,
d. integral dari solusi $u(x,t)$ juga merupakan solusi, dan
e. jika $u(x,t)$ merupakan solusi maka dilatasi dari solusi juga merupakan solusi.

Langkah-langkah untuk menentukan solusi Persamaan (2.30) adalah sebagai berikut,

1. Diberikan persamaan difusi dalam bentuk khusus yaitu (Strauss, 1992),

$$Q(x,t) = g(p) \text{ dengan } p = \frac{x}{\sqrt{4t}}$$

selanjutnya Persamaan $Q(x,t)$ akan dibentuk kedalam Persamaan (2.30) maka,

a. Turunan pertama $Q(x,t)$ terhadap t adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial t},$$

$$= -\frac{p}{2t}\frac{dg}{dp}. \tag{2.32}$$

b. Turunan pertama $Q(x,t)$ terhadap x adalah

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{dg}{dp}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4kt}}\frac{dg}{dp}. \tag{2.33}$$

sehingga turunan kedua dari $Q(x,t)$ terhadap x adalah

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{d\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{dp}\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$= \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{\sqrt{4kt}}\frac{dg}{dp}\right)\frac{1}{\sqrt{4kt}},$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{4kt}}\frac{d^2 g}{dp^2}\right)\frac{1}{\sqrt{4kt}}.$$

maka

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{1}{4kt}\frac{d^2 g}{dp^2} \tag{2.34}$$

dari Persamaan (2.32) dan (2.34) dapat dibentuk persamaan difusi sebagai berikut,

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$$

sehingga,

$$-\frac{p}{2t}\frac{dg}{dp} = k\left[\frac{1}{4kt}\frac{d^2 g}{dp^2}\right]$$

$$p\frac{dg}{dp} = -\frac{1}{2}\frac{d^2g}{dp^2}$$

$$\frac{d^2g}{dp^2} + 2p\frac{dg}{dp} = 0$$

$$\left(\frac{d}{dp} + 2p\right)\frac{dg}{dp} = 0 \qquad (2.35)$$

Misalkan $v = \frac{dg}{dp}$ maka Persamaan (2.35) dapat dibentuk menjadi,

$$\left(\frac{d}{dp} + 2p\right)v = 0$$

$$\frac{dv}{dp} + 2pv = 0 \qquad (2.36)$$

Selanjutnya akan ditentukan solusi dari Persamaan (2.36)

$$\frac{dv}{dp} = -2pv$$

Integral dari kedua ruas tersebut menghasilkan,

$$\int \frac{1}{v}\,dv = \int -2p\,dp$$

$$\ln v + c_1 = -p^2 + c_2$$

$$\ln v = -p^2 + c_3 \text{ dengan } c_3 = c_2 - c_1$$

$$v = e^{-p^2+c_3}$$

$$= e^{-p^2}.e^{c_3}$$

Sehingga diperoleh

$$v = c_4e^{-p^2} \text{ dengan } c_4 = e^{c_3}$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan $v = \frac{dg}{dp}$ akan diperoleh,

$$\frac{dg}{dp} = c_4e^{-p^2}$$

$$\int_0^p dg = c_4\int_0^p e^{-p^2}\,dp$$

$$g + c_5 = c_4\int_0^p e^{-p^2}\,dp$$

$$g = c_4 \int_0^p e^{-p^2}\ dp + c_6$$

dengan $c_6 = -c_5$, sehingga diperoleh

$$Q(x,t) = c_4 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2}\, dp + c_6 \qquad (2.37)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai konstanta c_4 dan c_6 dengan menggunakan syarat awal khusus yang diberikan dalam bentuk

$$Q(x,0) = \begin{cases} 1, untuk\ x > 0 \\ 0, untuk\ x < 0 \end{cases}$$

maka pada kasus $x > 0$ maka

$$\lim_{t \to 0^+} Q(x,t) = c_4 \int_0^{\infty} e^{-p^2}\ dp + c_6 \qquad (2.38)$$

untuk menghitung integral tak wajar seperti Persamaan (2.38) digunakan distribusi normal $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2}\ dp = 1$ maka,

$$c_4 \int_0^{\infty} e^{-p^2}\ dp + c_6 = c_4 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_6$$

sehingga diperoleh

$$c_4 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_6 = 1 \qquad (2.39)$$

Pada kasus $x < 0$ maka,

$$\lim_{t \to 0^+} Q(x,t) = c_4 \int_0^{\infty} e^{-p^2}\ dp + c_6$$

$$c_4 \int_{-\infty}^{0} e^{-p^2}\ dp + c_6 = 0$$

$$-c_4 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_6 = 0 \qquad (2.40)$$

Berdasarkan Persamaan (2.39) dan (2.40) dapat ditentukan nilai c_4 dan c_6 yaitu, $c_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ dan $c_6 = \frac{1}{2}$. Sehingga diperoleh

$$Q(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4kt}}} e^{-p^2}\, dp + \frac{1}{2} \text{ untuk } t > 0 \qquad (2.41)$$

2. Selanjutnya akan dicari solusi dari u terkait dengan Q, berdasar sifat jika u memenuhi persamaan $\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ maka $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ juga memenuhi persamaan tersebut. Akan ditunjukkan bahwa v memenuhi persamaan tersebut.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

Selanjutnya akan diselidiki apakah *v* memenuhi persamaan difusi,

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - k\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t} - k\frac{\partial^3 u}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\,.0$$

diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

dengan demikian v memenuhi persamaan difusi, sehingga Persamaan (2.41) merupakan solusi bagian khusus dari Persamaan (2.31). Misalkan $S(x,t) = \frac{\partial Q}{\partial x}$ merupakan solusi persamaan difusi, diberikan fungsi ϕ kemudian didefinisikan

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t)\phi(y)\, dy \qquad (2.42)$$

untuk sebarang $\phi(y)$ integral konvergen dan $t > 0$. Berdasarkan sifat persamaan difusi poin d maka Persamaan (2.40) juga merupakan solusi persamaan difusi. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa u memenuhi kondisi awal $u(x,0) = \phi(x)$ yaitu,

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t)\phi(y)\,dy$$

$$u(x,t) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial Q}{\partial y}(x-y,t)\phi(y)\,dy$$

karena $\frac{\partial Q}{\partial x}(x-y,t) = -\frac{\partial Q}{\partial y}(x-y,t)$ maka,

$$u(x,t) = -\left[\phi(y)Q(x-y,t)\,\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,t)\phi'(y)\,dy\right]$$

diasumsikan $\phi \to 0$ untuk $|y| \to \infty$ maka

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x-y,0)\phi'(y)\,dy \tag{2.43}$$

dengan $Q(x,0) = 1$ untuk $x > 0, Q(x-y,0) = 1$ untuk $y < x$, atau $Q(x,0) = 0$ untuk $y > x$

Sehingga berdasarkan Persamaan (2.43) maka diperoleh,

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d\phi}{dy}\,dy = \phi(x)$$

dengan demikian u memenuhi kondisi awal. Sehingga solusi umum untuk Persamaan (2.30) diperoleh,

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-y)^2}{4kt}}\ \phi(y)dy \tag{2.44}$$

G. Proses Stokastik

Proses stokastik menggambarkan perubahan nilai pubah acak yang berubah sepanjang waktu dengan pola yang tidak terduga. Variabel yang nilainya berubah atas waktu dengan keadaan yang tidak dapat ditentukan dikatakan mengikuti proses stokastik (Higham, 2004). Misalkan X_t merupakan variabel acak yang menggambarkan karakter keadaan sistem pada titik diskrit diwaktu $t = 1,2,3, \ldots$ maka himpunan variabel acak $\{X_t\}$ disebut dengan proses stokastik (Taha, 2007).

Berdasarkan waktu, proses stokastik dapat dibedakan menjadi dua yaitu proses stokastik waktu diskrit dan proses waktu kontinu. Proses stokastik waktu diskrit merupakan proses stokastik dengan nilai variabel yang berubah pada waktu tertentu. Contoh kejadian proses stokastik waktu diskrit adalah waktu yang dibutuhkan untuk menjual produk setiap jamnya. Proses stokastik waktu kontinu merupakan proses stokastik dengan nilai variabel yang berubah setiap waktu. Contoh kejadian proses stokastik waktu kontinu adalah waktu pada pergerakan saham.

Proses stokastik juga dapat dibedakan berdasar perubahan variabel yaitu proses stokastik variabel diskrit dan proses stokastik variabel kontinu. Proses stokastik varibel diskrit ditandai dengan variabelnya yang memiliki beberapa nilai yang mungkin. Contoh kejadian proses stokastik variabel diskrit adalah terjualnya suatu produk di toko. Proses stokastik variabel kontinu ditandai dengan variabelnya memiliki nilai acak. Contoh kejadian proses stokastik variabel kontinu adalah perubahan harga saham.

Proses Markov merupakan proses stokastik yang menyatakan bahwa kejadian masa lampau tidak mempengaruhi kejadian dimasa yang akan datang, kejadian dimasa yang akan datang hanya dipengaruhi kejadian sekarang. Misalkan diberikan waktu kejadian $t_0, t_1, t_2, \dots t_n$ maka himpunan variabel acak $\{X_{t_n}\} = \{x_{0,} x_1, \ x_2, \dots, x_n\}$ dikatakan mengikuti proses Markov jika

$$P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}\}$$

Pergerakan harga saham merupakan contoh dari proses stokastik waktu kontinu dan variabel kontinu. Pergerakan harga saham diasumsikan mengikuti proses Markov, artinya prediksi harga saham dimasa datang tidak dipengaruhi harga saham dimasa lalu, tetapi harga saham saat ini (Hull, 2009).

Gerak Brownian merupakan proses stokastik yang aplikasinya dapat ditemukan pada model pergerakan harga saham. Proses stokastik yang merupakan gerak Brownian standar dinyatakan pada definisi berikut,

Definisi 2.6 (Taylor and Karlin, 1998)

Sebuah proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ dikatakan sebagai gerak Brownian standar jika,

i. Setiap kenaikan $X(s+t) - X(s)$ berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan variansi $\sigma^2 t$ dengan σ^2 merupakan parameter yang ditetapkan,

ii. Untuk setiap pasangan interval waktu bersama $(t_1, t_2], (t_3, t_4]$, dengan $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ memiliki kenaikan $X(t_4) - X(t_3)$ dan $X(t_2) - X(t_1)$ adalah variabel acak yang saling beba, begitu juga untuk n, dimana n merupakan bilangan bulat positif yang berubah-ubah,

iii. $X(0) = 0$ dan $X(t)$ merupakan fungsi kontinu atas fungsi t.

Gerak Brownian dibedakan mendai dua, yaitu gerak Brownian *drift* dan gerak Brownian Geometrik.

i. Gerak Brownian *drift*

Gerak Brownian *drift* adalah suatu proses stokastik $\{X(t), t \geq 0\}$ yang memenuhi sifat berikut,

a. Setiap kenaikan $X(s+t) - X(s)$ berdistribusi normal dengan rata-rata μt dan variansi $\sigma^2 t$ dengan σ^2 merupakan parameter yang ditetapkan,

b. Untuk setiap pasangan interval waktu bersama $(t_1, t_2], (t_3, t_4]$, dengan $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ memiliki kenaikan $X(t_4) - X(t_3)$ dan $X(t_2) - X(t_1)$ adalah variabel acak yang saling beba, begitu juga untuk n, dimana n merupakan bilangan bulat positif yang berubah-ubah,

c. $X(0) = 0$ dan $X(t)$ merupakan fungsi kontinu atas fungsi t.

ii. Gerak Brownian geometrik

Gerak Brownian geometrik dijelaskan pada Definisi 2.7 berikut,

Definisi 2.7 (Ross, 2010)

Jika $\{X(t), t \geq 0\}$ merupakan gerak Brownian *drift* dengan laju koefisein μ dan parameter variansi σ^2 maka

$$Y(t) = \exp\big(X(t)\big) \tag{2.45}$$

disebut gerak Brownian geometrik.

Selanjutnya akan dibahas mengenai proses Wiener, model pergerakan harga saham dan Lemma It$\hat{o}$.

1. Proses Wiener

Gerak Brwonian standar dalam bidang fisika disebut dengan proses Wiener standar yang digunakan untuk menggambarkan gerak partikel. Sebuah variabel z mengikuti proses Wiener jika memenuhi sifat berikut (Hull, 2009),

a. Perubahan Δz pada selang waktu Δt dinyatakan sebagai

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.46}$$

Dimana ϵ merupakan distribusi normal standar,

b. Nilai Δz untuk dua selang waktu Δt yang berbeda adalah saling bebas.

2. Model Pergerakan Harga Saham

Model pergerakan harga saham diasumsikan mengikuti proses Markov, yaitu prediksi harga saham hanya dipengaruhi harga saham saat ini dan tidak dipengaruhi harga saham di masa lampau. Model pergerakan harga saham menyatakan tingkat pengembalian saham. Misalkan $S(t)$ menyatakan harga saham pada waktu t dan μ menyatakan rata-rata pertumbuhan saham per satuan waktu. Jika volatilitas dianggap nol maka laju pergerakan harga saham per satuan waktu dinyatakan dengan

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t)$$

atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt$$

Selanjutnya $S(t)$ akan ditulis S untuk mempermudah penulisan. Sehingga model diatas dapat ditulis dengan,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt \tag{2.47}$$

Jika harga saham pada waktu $t = 0$ adalah S_0 dan harga saham saat $t = T$ adalah S_T maka integral kedua ruas dari Persamaan (2.47) adalah

$$\int_0^T \frac{dS}{S} = \int_0^T \mu dt$$

$$[\ln S]_0^T = [\mu t]_0^T$$

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = \mu T$$

$$S_T = S_0 e^{\mu T} \tag{2.48}$$

Persamaan (2.48) menunjukkan bahwa saat laju variansi sama dengan nol, harga saham tumbuh secara kontinu dipengaruhi laju μ per satuan waktu (Hull, 2009).

Pada kenyataanya, harga saham selalu berubah-ubah sehingga nilai volatilitas tidak selalu bernilai nol. Sebagai gambaran, jika seoarang investor memiliki saham senilai \$5 tentunya tidak akan dikembalikan ketika nilai saham \$3. Perubahan simpangan baku pada interval waktu dt harus sebanding dengan harga saham (Hull, 2009). Misalkan σ menyatakan volatilitas dan dz merupakan gerak Brownian maka model pergerakan harga saham dengan nilai volatilitas tidak nol adalah

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz$$

atau dapat ditulis sebagai

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz \tag{2.49}$$

Model harga saham pada Persamaan (2.49) merupakan harga saham tanpa pembagian dividen. Harga saham harus jatuh setelah dividen dibayarkan pada interval dt sesuai Persamaan (2.4) untuk menjaga kondisi pasar bebas arbitrasi. Sehingga model harga saham dengan pembagian dividen yang diperoleh adalah,

$$dS_t = \mu S_t dt - DS_t dt + \sigma S_t dz \tag{2.50}$$

3. Lemma It$\hat{o}$

Pada bagian ini akan dibahas penurunan lemma It$\hat{o}$ yang akan berguna untuk mendapatkan persamaan diferensial parsial Black-Scholes. Sebelum membahas mengenai Lemma $It\hat{o}$ akan dibahas terlebih dahulu mengenai deret taylor dua variabel dan pengaruh variabel yang mengikuti proses $It\hat{o}$.

Diberikan suatu fungsi G kontinu yang dapat diturunkan terhadap x dan y. Jika Δx merupakan perubahan kecil yang terjadi pada x dan Δt merupakan perubahan kecil yang terjadi pada t dan ΔG merupakan perubahan kecil yang terjadi pada G maka dapat dibentuk

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{dG}{dy}\Delta y \tag{2.51}$$

Dengan menggunakan deret Taylor, maka Persamaan (2.51) dapat di perluas menjadi

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + \cdots \tag{2.52}$$

Karena Δx dan Δy merupakan perubahan yang kecil, maka nilai Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2 dan pangkat tinggi berikutnya akan semakin kecil dan akan cenderung mendekati nol, sehingga nilainya bisa diabaikan. Sehingga dapat diperoleh

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta y \tag{2.53}$$

Jika pada fungsi G terdapat salah satu variabel yang mengikuti proses It$\hat{o}$ maka nilai Δx^2 tidak dapat langsung dihilangkan karena terdapat nilai Δt. Penjabaran masalah tersebut adalah sebagi berikut, misalkan variabel x merupakan perluasan proses Wiener atau sering disebut proses $It\hat{o}$ dan dinyatakan sebagai

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dz(t) \tag{2.54}$$

dengan x merupakan variabel yang mengikuti proses $It\hat{o}$, $a(x,t)$ dan $b(x,t)$ merupakan fungsi yang bergantung pada variabel x dan t, dan dZ adalah gerak Brownian (Hull, 2009). Persamaan (2.54) dapat ditulis kembali sebagai,

$$\Delta x(t) = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.55}$$

dengan x merupakan variabel yang mengikuti proses Ito, variabel $a(x,t)$ dan variabel $b(x,t)$ merupakan fungsi yang bergantung pada variabel x dan t, dan $\epsilon\sqrt{\Delta t} = \Delta z$ adalah proses Wiener.

Persamaan (2.55) dapat disederhanakan menjadi

$$\Delta x = a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \tag{2.56}$$

untuk mempermudah penulisan, maka kuadrat kedua ruas dari Persamaan (2.56) akan menghasilkan

$$\Delta x^2 = a^2\Delta t^2 + 2ab\epsilon\sqrt{\Delta t}\Delta t + b^2\epsilon^2\Delta t \tag{2.57}$$

Variansi dari distribusi normal standar adalah 1, sehingga

$$E[\epsilon^2] - (E[\epsilon])^2 = 1 \tag{2.58}$$

dengan E merupakan nilai ekspektasi. Karena $E[\epsilon] = 0$ maka $(E[\epsilon])^2 = 0$ sehingga $E[\epsilon^2] = 1$. Karena Δx dan Δy merupakan perubahan yang kecil, maka Δx^2, Δt^2, dan $\sqrt{\Delta t}\Delta t$ cenderung menuju nol sehingga nilainya dapat diabaikan.

Nilai harapan untuk $b^2\epsilon^2\Delta t$ adalah $b^2\Delta t$ karena $E[\epsilon^2] = 1$. Sehingga persamaan (2.58) ekuivalen dengan persamaan berikut,

$$\Delta x^2 = b^2\Delta t \tag{2.59}$$

Persamaan (2.59) akan digunakan pada Lemma 2.1 berikut,

Lemma 2.1 (Luenberger, 1998)

Sebuah proses acak x didefinisikan dengan proses It$\hat{o}$, yaitu

$$dx(t) = a(x,t)dt + b(x,t)dz \tag{2.60}$$

dengan Z merupakan proses Wiener. Diberikan G merupakan fungsi atas x dan t maka meghasilkan persamaan It$\hat{o}$ seperti berikut,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz \tag{2.61}$$

Bukti

Diberikan suatu fungsi G kontinu yang dapat diturunkan terhadap x dan t. Jika Δx merupakan perubahan kecil yang terjadi pada x dan Δt merupakan perubahan kecil yang terjadi pada t dan ΔG merupakan perubahan kecil yang terjadi pada G maka dapat dibentuk

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{dG}{dt}\Delta t \tag{2.62}$$

Dengan menggunakan deret Taylor, maka Persamaan (2.62) dapat di perluas menjadi

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \cdots \tag{2.63}$$

Subtitusi Persamaan (2.59) pada (2.63) akan diperoleh

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \cdots \tag{2.64}$$

nilai Δx^2, $\Delta x \Delta y$, Δy^2 dan pangkat tinggi berikutnya akan semakin kecil dan akan cenderung mendekati nol, sehingga nilainya bisa diabaikan. Sehingga diperoleh

$$G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\Delta t$$

atau ekuivalen dengan

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt \qquad (2.65)$$

Substitusi Persamaan (2.60) pada (2.65) diperoleh,

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial x}b dz(t) \qquad (2.66)$$

Persamaan (2.66) dikenal sebagai Lemma Ito ■

4. Persamaan Diferensial Parsial Black-Scholes

Asumsi yang digunakan dalam penurunan persamaan diferensial parsial model Black-Scholes adalah opsi saham hanya dapat dieksekusi saat *expiry date*, volatilitas harga saham konstan, tingkat bunga bebas risiko, dan tidak ada pembayaran dividen (Hull, 2009). Dasar dari penurunan persamaan diferensial parsial Black-Scholes adalah portofolio. Berikut ini merupakan cara untuk mendapatkan persamaan diferensial parsial Black-Scholes.

a. Tanpa dividen

Misalkan V merupakan fungsi opsi saham atas harga saham S_t dan waktu t, maka berdasarkan lemma It$\hat{o}$, dengan $dS = \mu S dt + \sigma S dz$ maka diperoleh

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S_t}\mu S + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\right)dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}\sigma S_t dz \qquad (2.67)$$

Sesuai prinsip *hedging* maka dapat dibentuk portofolio yang bebas risiko, atau persamaan portofolio tersebut tidak memiliki bagian stokastik. Berdasarkan prinsip portofolio pada Persamaan (2.4) yaitu,

$$\mathrm{d}\Pi = dV - \Delta dS$$

Substitusi Persamaan (2.67), (2.49) dan $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ pada Persamaan (2.4) maka diperoleh

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\right)dt \qquad (2.68)$$

Nilai portofolio tidak memuat komponen acak sehingga nilai $\mathrm{d}\Pi$ pada Persamaan (2.68) merupakan nilai bebas risiko selama selang waktu dt. Oleh karena itu, nilai portofolio $d\Pi$ akan sebanding dengan nilai portofolio $\mathrm{d}\Pi$ pada periode waktu $d\mathrm{t}$ dengan tingkat suku bunga bebas risiko r. Sehingga diperoleh

$$\mathrm{d}\Pi = \mathrm{r}\Pi\mathrm{dt} \qquad (2.69)$$

Berdasar Persamaan (2.3) dapat diperoleh nilai portofolio

$$\Pi = V - \Delta S$$

Substitusi Persamaan (2.3) dan (2.62) pada (2.63) maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\right)dt = r(V - \Delta S)dt \qquad (2.70)$$

Karena nilai $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ maka diperoleh

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\right)dt = r\left(V - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{S}}S\right)dt$$

Sehingga diperoleh persamaan diferensial parsial sebagai berikut,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} - rV = 0 \qquad (2.71)$$

Persamaan (2.71) biasanya dikenal sebagai persamaan diferensial parsial Black-Scholes.

b. Pengaruh dividen

Model harga saham dengan pembagian dividen yang diperoleh dinyatakan seperti Persamaan (2.49) yaitu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW - DS_t dt$$

perubahan nilai portofolio dalam selang waktu dt sesuai Persamaan (2.5) yaitu

$$\mathrm{d}\Pi = dV - \Delta dS_t - D\Delta S_t dt$$

dengan langkah yang sama dalam menemukan Persamaan (2.71) maka akan diperoleh persamaan diferensial parsial Model Black-Scholes dengan asumsi pembagian dividen seperti berikut,

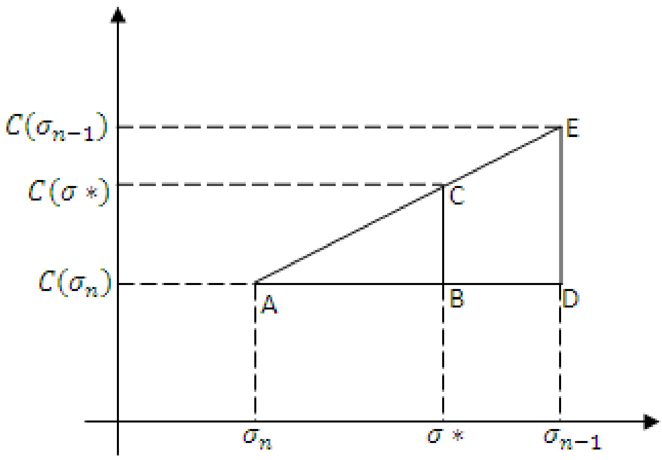
$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} - rV = 0 \qquad (2.72)$$

H. Penaksiran Tingkat Volatilitas

Penaksiran volatilitas dapat dilakukan dengan dua cara yaitu penaksir tingkat volatilitas tersirat harga saham atau *implicit volatility* dan penaksir tingkat volatilitas historis.

1. Volatilitas tersirat harga saham

Implied or implicity volatility merupakan cara untuk mendapatkan nilai taksiran volatilitas berdasarkan harga opsi saham, harga saham, harga pelaksanaan, tingkat suku bunga dan waktu jatuh tempo. Salah satu cara untuk menaksir volatilitas adalah metode interpolasi linear. Gambar 2.2 menjelaskan hubungan pada *implicity volatility* sebagai berikut,



Gambar 2.2 ***Implicity Volatility***

Berdasarkan sifat dua segitiga ABC dan ADE diatas, diperoleh $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{\sigma_{n+1} - \sigma^*}{\sigma_{n+1} - \sigma_n} = \frac{C(\sigma_{n+1}) - C(\sigma^*)}{C(\sigma_{n+1}) - C(\sigma_n)} \tag{2.73}$$

dengan

σ^* = volatilitas tersirat yang dicari

σ_n = volatilitas perkiraan ke − n

σ_{n+1} = volatilitas perkiraan ke − (n + 1)

$C(\sigma^*)$ = Nilai opsi saham tersirat yang dicar

$C(\sigma_n)$ = Nilai opsi saham perkiraan ke − n

$C(\sigma_{n+1})$ = Nilai opsi saham perkiraan ke − (n + 1)

2. Volatilitas historis

Nilai taksiran pada volatilitas historis diperoleh dengan menganalisis harga saham pada masa lalu. Perhitungan nilai taksiran volatilitas historis memerlukan data harga saham sebanyak 252, yaitu jumlah hari perdagangan dalam satu tahun. Data tersebut kemudian digunakan untuk menghitung sejumlah tingkat keuntungan dalam melakukan investasi, yang dinyatakan sebagai,

$$R_t = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \tag{2.74}$$

dengan S_T merupakan harga saham pada waktu t dan S_t merupakan harga saham pada waktu $t-1$. Selanjutnya menghitung variansi dalam satu periode dengan

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(R_t - \overline{R_t})^2 \tag{2.75}$$

Variansi yang diperlukan dalam menghitung penaksiran volatilitas historis merupakan variansi tahunan yang diperoleh dari hasil kali jumlah hari perdagangan dalam satu periode dengan nilai variansi dalam satu periode dalam satu tahun. Jumlah hari perdagangan di pasar saham adalah 252 hari, sehingga diperoleh

$$s = \sqrt{252\text{x}\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(R_t - \overline{R_t})^2} \tag{2.76}$$

Nilai penaksiran volatilitas historis lebih baik dari pada nilai penaksiran volatilitas tersirat karena melibatkan data saham selama 252 hari, sehingga penaksiran nilai volatilitas historis sering digunakan untuk menentukan nilai penaksiran volatilitas.

I. *Perturbation Theory*

Masalah *perturbation* merupakan bagian penting yang muncul pada berbagai cabang ilmu teknik dan matematika terapan. Metode *perturbation* dalam matematika dapat digunakan untuk mendapatkan pendekatan solusi pada persamaan yang komplek dan solusinya susah dicari. Kata "*perturbation*" memiliki arti gangguan kecil pada sistem fisik. Secara umum gangguan kecil pada sistem fisik dinotasikan dengan ε, dengan ε merupakan parameter *perturbation* yang bernilai sangan kecil atau bisa dikatakan ε menuju nol.

Tujuan utama penggunaan ekspansi *perturbation* dalam skripsi ini adalah untuk mendekati solusi dari suatu persamaan diferensial yang solusinya sulit didapatkan dengan cara seperti biasa. *Perturbation theory* dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu,

1. Regularly perturbed

Suatu persamaan diferensial dikatakan sebagai *regularly perturbed* jika nilai $\varepsilon = 0$ maka orde dari persamaan diferensial tersebut tidak berubah. Contoh persamaan diferensial yang termasuk dalampermasalahan *regularly perturbed* adalah

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \varepsilon y^2$$

2. Singularly perturbed

Suatu persamaan diferensial dikatakan sebagai s*ingularly perturbed* jika nilai $\varepsilon = 0$ maka orde dari persamaan diferensial tersebut berubah. Contoh persamaan diferensial yang termasuk dalam permasalahan *regularly perturbed* adalah

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = 2x + 1$$

Bagian *perturbation theory* yang cukup penting adalah *asymptotic expansions*, dimana barisan *asymptotic* standar didefinisikan sebagai $\{1, \varepsilon, \varepsilon^2$, *ε3,...* dan *ƒn(x)* menggambarkan anggota barisan *asymptotic* maka $f_{n+1}(\varepsilon) = o(f_n(\varepsilon))$ dengan $x \to a$ sehingga $\lim_{x\to a} \frac{f_{n+1}(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)} = 0$. Secara umum, fungsi $f_n(\varepsilon)$ dinyatakan dalam Definisi 2.8 berikut,

Definisi 2.8 (Satapathy, 2012)

Jika $\varepsilon \to 0$, a_n adalah konstanta, $R(N) = O\big(f_{n+1}(\varepsilon)\big)$, dan $\lim_{n\to\infty} R(N) = 0$ maka

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n f_n(\varepsilon) + R(N) \tag{2.77}$$

Cara untuk mendapatkan pendekatan solusi pada *singularly perturbed* adalah menggunakan *matched asymptotic expansion*. Metode *matched asymptotic expansion* pertama kali diperkenalkan melalui teori lapisan batas Ludwig Prandtl pada tahun 1905 (Satapathy, 2012). Secara matematika, lapisan batas terjadi ketika terdapat parameter kecil menjadi pengali pada orde tertingi suatu persamaan diferensial yang biasa dikenal sebagai *singularly perturbed*. Daerah asal pada batas tersebut dapat menghasilkan dua daerah yang dikenal sebagai *outer problem* dan *inner problem*. *Outer problem* merupakan daerah yang berada jauh dari lapisan batas dimana solusinya berjalan dengan lembut mendekati solusi, sedangkan *inner problem* memiliki gradien yang membuat pendekatan solusi secara cepat (Sataphaty, 2012). Algoritma untuk memperoleh solusi menggunakan *matched asymptoric expansion* adalah sebagai berikut (Sataphaty, 2012),

1. Menentukan sebuah solusi pada *outer problem* sampai ekspansi *asymptotic* jauh dari daerah batas.
2. Menentukan solusi pada *inner problem* hingga variabel terulur sampai ekspansi *asymptotic* dalam lapisan batas.
3. Mencocokan orde dari suku kedua solusi masalah tersebut menggunkan kondisi pencocokan oleh Prandtl dengan kondisi

$$\lim_{x \to 0} f^{out}(x) = \lim_{x \to \infty} f^{in}(s)$$

Contoh pendekatan solusi menggunakan *matching asymptotic expansion* pada masalah *singularly perturbed* dapat dilihat pada penyelesaian Contoh 2.2 berikut,

Contoh 2.4 (Holmes, 1995)

Diberikan persamaan diferensial yang termasuk dalam *singularly perturbed*,

$$\varepsilon \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \tag{2.78}$$

dengan kondisi awal

$$y(0) = 0 \text{ dan } \mathrm{y}(1) = 1 \tag{2.79}$$

Penyelesaian

Persamaan (2.78) merupakan persamaan diferensial biasa yang bisa diselesaikan secara langsung. Solusi eksak dari Persamaan (2.78) adalah

$$y(x) = \exp(ax) + \exp(bx)$$

dengan $a = -1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon}$ dan $b = -1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon}$. Selanjutnya akan dilihat seberapa dekat solusi yang yang diperoleh menggunakan *matched asymptotic expansion*, untuk melihat keakuratan metode tersebut. Diketahui ekspansi *asymptotic* adalah sebagai berikut,

$$y(x) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots \tag{2.80}$$

Substitusi Persamaan (2.80) pada Persamaan (2.78) sehingga diperoleh,

$$\varepsilon \frac{d^2}{dx^2}(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots) + 2\frac{d}{dx}(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots)$$

$$+2(y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + \cdots) = 0 \tag{2.81}$$

berdasarkan Persamaan (2.81) dapat diperoleh,

$$\frac{dy_0(x)}{dx} + y_0(x) = 0 \tag{2.82}$$

Solusi dari Persamaan (2.82) adalah

$$y_0(x) = ae^{-x} \tag{2.83}$$

Kondisi awal yang diberikan ada dua, sehingga Persamaan (2.83) bukan merupakan solusi yang diharapkan karena hanya memuat satu konstanta. Cara mengatasi masalah tersebut adalah sebagai berikut,

Outer Solution

Diasumsikan terdapat *boundary layer* pada $x = 0$ atau $x = 1$ sehingga perlu ada pendekatan *asymptotic* yang berbeda. Penyelesaian pada interval biasa disebut sebagai *outer solution*.

Inner Solution

Singularitas dapat terjadi, misalkan pada saat $x = a$ dengan $0 < a < 1$ sehingga dibuat *boundary layer* yang baru

$$\bar{x} = \frac{x}{\varepsilon^{\alpha}}$$

Karena dilakukan transformasi maka Persamaan (2.78) juga perlu dilakukan transformasi. Berdasarkan aturan rantai, maka diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\bar{x}} \cdot \frac{d\bar{x}}{dx} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \frac{dy}{d\bar{x}} \qquad (2.84)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \frac{dy}{d\bar{x}}\right) = \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{d^2y}{d\bar{x}^2} \qquad (2.85)$$

sehingga,

$$\varepsilon\left(\frac{1}{\varepsilon^{2\alpha}} \frac{d^2y}{d\bar{x}^2}\right) + 2\left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha}} \frac{dy}{d\bar{x}}\right) + 2y = 0$$

$$\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2y}{d\bar{x}^2} + 2\varepsilon^{-\alpha} \frac{dy}{d\bar{x}} + 2y = 0 \qquad (2.86)$$

Ekspansi *asymptotic* $y(\bar{x})$ adalah

$$y(\bar{x}) = y_0(\bar{x}) + \varepsilon y_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 y_2(\bar{x}) + \cdots \qquad (2.87)$$

Substitusi Persamaan (2.87) pada Persamaan (2.86) diperoleh

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{1-2\alpha} \frac{d^2}{d\bar{x}^2}\left(y_0(\bar{x}) + \varepsilon y_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 y_2(\bar{x}) + \cdots\right) \\ &\quad + 2\varepsilon^{-\alpha} \frac{d}{d\bar{x}}\left(y_0(\bar{x}) + \varepsilon y_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 y_2(\bar{x}) + \cdots\right) \\ &\quad + 2\left(y_0(\bar{x}) + \varepsilon y_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 y_2(\bar{x}) + \cdots\right) = 0 \qquad (2.88) \end{aligned}$$

dengan menyesuaikan suku berdasarkan order epsilon, akan diperoleh beberapa kemungkinan,

1. Suku pertama dan ketiga memiliki order yang sama

   Berdasarkan Persamaan (2.88), misalkan order kesatu dan ketiga memiliki order yang sama dan suku kedua berorde lebih tinggi, dipilih $1-2\alpha=0$ sehingga $\alpha=\frac{1}{2}$. Pemilihan nilai $\alpha=\frac{1}{2}$ akan menyebabkan suku kedua berorder $O\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$, kondisi ini bukan yang diharapkan karena melanggar pernyataan awal yang menyatakan bahwa suku kedua harus berorder epsilon lebih tinggi. Jadi, penyesuaian order suku pertama dan ketiga tidak tepat.

2. Suku pertama dan kedua memiliki order yang sama

   Jika suku pertama dan suku kedua berorde sama maka suku ketiga harus memiliki orde lebih tinggi. Sehingga berlaku $1-2\alpha=-\alpha$ jadi, $\alpha=1$. Jadi, suku pertama dan suku kedua berorder $O(\varepsilon^{-1})$ dan suku ketiga berorder $O(\varepsilon^{0})=O(1)$. Kondisi ini sesuai masalah mula-mula, sehingga penyesuaian dianggap tepat.

Selanjutnya akan diselesaikan masalah awal untuk $O(\varepsilon^{-1})$ adalah

$$\frac{d^2y_0}{dx^2}+2\frac{dy_0}{dx}=0 \tag{2.89}$$

dengan $y(0)=0$ mengunakan pendekatan *asymptotic*. Penyelesaian umum Persamaan (2.89) adalah

$$y_0(\bar{x})=A(1-e^{-2\bar{x}}) \tag{2.90}$$

dengan A merupakan konstanta. Ekspansi Taylor pada Persamaan (2.87) diharapkan memuat paling sedikit 1 penyelesaian *outer layer* untuk masalah

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} + \frac{dy_0}{dx} = 0$$

dengan *outer solution* harus memenuhi syarat $x = 1$ maka,

$$y_0(x) = e^{1-x} \tag{2.91}$$

Matching

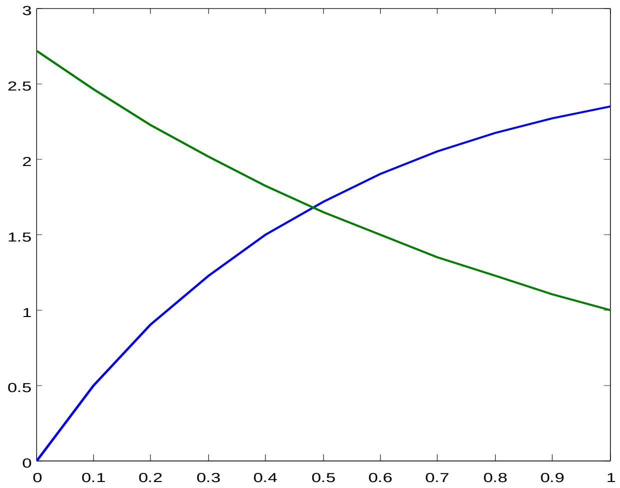
Outer solution dan inner solution merupakan pendekatan untuk fungsi yang sama, karena pada daerah transisi *outer* dan *inner solution* harus memberikan penyelesaian yang sama maka,

$$y_0(\infty) = y_0(0)$$
$$A(1 - 2^{-2x}) = e^{1-x}$$
$$A = e$$

sehingga diperoleh

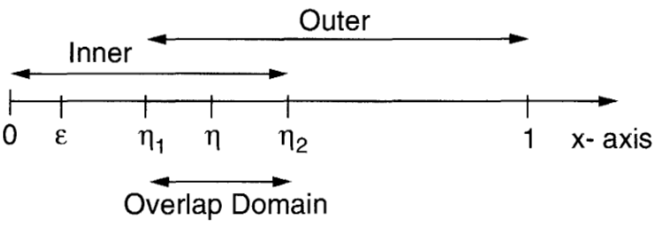
$$y_0(\bar{x}) = e - e^{1-2\bar{x}} \tag{2.92}$$

Gambar 2.3 merupakan hasil dari *outer* dan *inner*,



Gambar 2.3 *Outer* (biru) dan *inner* (hijau) *solution*

Langkah selanjutnya adalah mengkombinasikan solusi yang diperoleh pada satu persamaan. Membuat sebuah variabel baru yang disebut variabel antara atau yang biasa disebut dengan *variabel overlap* yaitu $x_\eta = x/\eta(\varepsilon)$ dimana posisinya berada diantara *outer layer* dan *inner layer*. Variabel tersebut diletakkan pada daerah transisi atau domain tercampur (*overlap domain*) yang terlihat seperti Gambar 2.4,



Gambar 2.4 Skema daerah validitas dari *outer* dan *inner expansions* pada proses pencocokan

Berdasarkan Gambar 2.4, diharapkan $\eta(\varepsilon)$ memenuhi $\varepsilon \leq \eta \leq 1$. Prosedur pencocokan dilakukan dengan langkah sebgai berikut,

a. Mengubah variabel pada *outer expansion* (dari x menjadi x_η) untuk memperoleh y_{outer} , diasumsikan terdapat $\eta_1 \leq \eta(\varepsilon) \leq 1$.

b. Mengubah variabel pada *inner expansion* (dari x menjadi x_η) untuk memperoleh y_{inner} , diasumsikan terdapat $\eta(\varepsilon)$ sehingga dipenuhi $\varepsilon \leq \eta(\varepsilon) \leq \eta_2$.

c. Diasumsikan bahwa domain validitas y_{outer} dan y_{inner} memenuhi *overlap* sehingga $\eta_1 \leq \eta_2$. Pada domain *overlap*, *matching expansions* menghasilkan nilai y_{outer} dan y_{inner} sama.

Penggunaan prosedur *matching expansions* diawali dengan mendefinisikan variabel $x_\eta = x/\varepsilon^\beta$ dengan $0 < \beta < 1$. Interval β muncul diperlukan untuk penyekalaan pada variabel *overlap*. Berdasarkan (2.87) dan (2.90) diperoleh,

$$
\begin{aligned}
y_{inner} &\sim A(1 - \exp\left(1 - \frac{2x_\eta}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \cdots \\
&\sim A - \exp\left(1 - \frac{2x_\eta}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) + \cdots \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

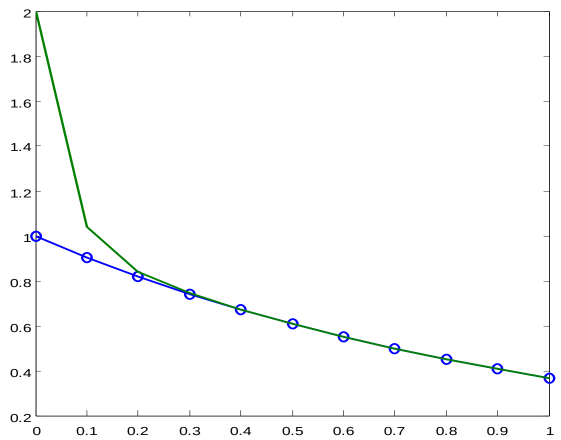
Berdasarkan (2.80) dan (2.91) diperoleh

$$
\begin{aligned}
y_{outer} &\sim \exp\left(1 - x_\eta \varepsilon^{\beta}\right) + \cdots \\
&\sim \exp(1) + \exp(1 - x\varepsilon^{\beta}) + \cdots \qquad (2.92)
\end{aligned}
$$

Solusi yang diperoleh terdiri atas dua bagian, langkah selanjutnya menggabungkan dua solusi tersebut pada bentuk *composite expansions*. Sehingga diperoleh solusi y menggunakan pendekatan *matched expansions method* yaitu,

$$y \approx \exp(1 - x) + \exp(1 - 2x/\varepsilon)$$

Gambar 2.5 menunjukkan bahwa hasil pendekatan yang diperoleh menuju solusi eksak yang telah dikerjakan sebelumnya.



Gambar 2.5 Pendekatan solusi (hijau) dan solusi eksak (biru)

Berdasarkan Gambar 2.5 dapat terlihat bahwa hasil pendekatan solusi menuju solusi eksak. Hal tersebut terlihat pada gambar warna hijau yang mendekati grafik warna biru.

BAB III
Pembahasan

Pada bab ini akan dibahas mengenai fungsi opsi saham model Black-Scholes tanpa dividen, fungsi opsi saham model Black-Scholes dengan dividen, fungsi opsi saham model *CEV* tanpa dividen, dan fungsi opsi saham model *CEV* dengan dividen. Selanjutnya akan ditentukan nilai opsi saham dengan bantuan program Matlab serta membandingkan nilai opsi saham model Black-Scholes tanpa dividen dengan nilai opsi saham model Black-Scholes dengan dividen, nilai opsi saham model *CEV* tanpa dividen dengan nilai opsi saham model *CEV* dengan dividen, dan nilai opsi saham model Black-Scholes dengan dividen dengan nilai opsi saham model *CEV* dengan dividen.

A. Formula Nilai Opsi saham tipe Eropa dengan Model $Black - Scholes$

Formula harga opsi saham Model Black-Scholes menjadi terkenal dalam perkembangan dunia keuangan karena mudah untuk digunakan. Parameter yang mempengaruhi nilai opsi saham pada model Black-Scholes adalah harga saham saat ini, *exercise price*, *expiry date,* volatilitas, tingkat bunga bebas risiko, dan pembayaran dividen (Hull, 2009). Harga opsi saham model Black-Scholes melibatkan satu parameter yang tidak dapat diamati secara langsung yaitu volatilitas. Nilai volatilitas pada formula harga opsi saham model Black-Scholes diperoleh melalui penaksiran.

Selain volatilitas, kelima faktor lainnya yang mempengaruhi harga opsi saham pada model Black-Scholes dapat diperoleh melalui observasi secara langsung di pasar. Opsi saham tipe Eropa hanya bisa dieksekusi pada saat *expiry date* sehingga faktor ini tidak mengamali kenaikan atau penurunan. Pengaruh kenaikan kelima faktor terhadap harga opsi saham disajikan dalam Tabel 3.1 (Hull, 2009),

Tabel 3.1 Pengaruh faktor terhadap harga opsi saham tipe Eropa

No	Kenaikan Faktor	Opsi Saham Beli	Opsi Saham Jual
1.	Harga saham saat ini	+	-
2.	*Exercise price*	-	+
3.	*Expiry date*	x	x
4.	Volatilitas	+	+
5.	Tingkat bunga bebas risiko	+	-
6.	Jumlah dividen yang dibayarkan	-	+

Tanda positif (+) menunjukkan bahwa jika terjadi kenaikan faktor maka akan menyebabkan kenaikan nilai opsi saham. Sebaliknya, tanda negatif (-) menunjukkan bahwa jika terjadi faktor mengalami penurunan maka akan nilai opsi saham juga akan turun. Sedangkan tanda (x) menunjukkan hubungan yang tidak tentu, artinya pengaruh tanggal jatuh tidak bisa menentukan nilai opsi saham akan naik atau turun. Jika terjadi penurunan faktor, terdapat hubungan kebalikan dari kenaikan faktor.

Selanjutnya akan dibahas mengenai penurunan formula harga opsi saham model Black-Scholes dengan asumsi tidak ada pembayaran dividen. Formula harga opsi saham model Black-Scholes kemudian dapat diperluas untuk formula nilai opsi saham dengan asumsi pembayaran dividen yang dibayarkan secara tetap pada persentase tertentu. Penurunan harga opsi saham model Black-Scholes tanpa pembayaran dividen adalah sebagai berikut,

1. Formula Harga Opsi Saham Model Black-Scholes Tanpa Dividen

Sebelum menentukan formula nilai opsi saham model Black-Scholes akan dibahas terlebih dahulu mengenai transformasi sistem persamaan diferensial parsial Black-Scholes. Berdasarkan Persamaan (2.71) diperoleh persamaan diferensial parsial Black-Scholes sebagai berikut,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} - rV = 0$$

dengan menggunakan pemisalan

$$S = K \exp(x) \tag{3.1}$$

$$t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{3.2}$$

$$V(S,t) = Kv(x,\tau) \tag{3.3}$$

maka diperoleh

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2, \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = 0\,, \qquad \frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{S}, \qquad \text{dan } \frac{\partial \tau}{\partial S} = 0$$

dengan menggunakan aturan rantai diperoleh,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t},\\ &= \frac{\partial V}{\partial \tau}\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right) + \frac{\partial V}{\partial x}0,\\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial V,}{\partial \tau}\\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial v}{\partial \tau}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial S},$$
$$= \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{1}{S}\right) + \frac{\partial V}{\partial \tau}0,$$
$$= \frac{1}{S}\frac{\partial V}{\partial x},$$
$$= \frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial\left(\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial S},$$
$$= K\frac{\partial\left(\frac{1}{S}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial S},$$
$$= K\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{S}\right)}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial S}\right),$$
$$= K\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{S}\right)}{\partial S}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S}\frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial S}\right),$$
$$= K\left(-\frac{1}{S^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{S^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right),$$
$$= \frac{K}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{3.6}$$

Substitusi Persamaan (3.4), (3.5), dan (3.6) kedalam Persamaan (2.71) sehingga,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} - rV = 0$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau} + rS_t\frac{K}{S}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\left(\frac{K}{S^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) - rKv = 0$$
$$-\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau} + rK\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - rKv = 0$$
$$\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau} = rK\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) - rKv$$

$$K\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}K\frac{\partial v}{\partial x}+K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}Kv$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}v \tag{3.7}$$

Misalkan $k=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ maka Persamaan (3.7) dapat ditulis menjadi

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=k\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}-kv$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(k-1)\frac{\partial v}{\partial x}-kv \tag{3.8}$$

Misalkan

$$v=\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u(x,\tau) \tag{3.9}$$

maka,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\beta\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u+\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\alpha\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u+\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\alpha^2\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u+\alpha\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\exp(\alpha x+\beta\tau))\frac{\partial u}{\partial X}$$

$$+\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.12}$$

Substitusi Persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12) ke Persamaan (3.8), sehingga diperoleh

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(k-1)\frac{\partial v}{\partial x}-kv$$

$$\beta\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u+\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}=\alpha^2\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u+\alpha\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\alpha\exp(\alpha x+\beta\tau))\frac{\partial u}{\partial x}+\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$+(k-1)\left(\alpha\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u+\exp(\alpha x+\beta\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

$-k\exp(\alpha x+\beta\tau)\,u(x,\tau)$

$$\Leftrightarrow\left(\beta u+\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)\exp(\alpha x+\beta\tau)$$

$$=\exp(\alpha x+\beta\tau)\left(\alpha^2u+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+(k-1)\left(\alpha u+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-ku\right)$$

$$\Leftrightarrow\beta u+\frac{\partial u}{\partial\tau}=\alpha^2u+2\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+k\alpha u+k\frac{\partial u}{\partial x}-\alpha u-\frac{\partial u}{\partial x}-ku$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+(2\alpha+k-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha^2+(k-1)\alpha-k)u-\beta u$$

dengan mengambil nilai

$$\alpha=-\frac{1}{2}(k-1)\qquad(3.13)$$

$$\beta=-\frac{1}{4}(k+1)^2\qquad(3.14)$$

dapat diperoleh persamaan difusi

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\qquad(3.15)$$

dengan

$$u=\frac{v}{\exp(\alpha x+\beta\tau)}\qquad(3.16)$$

Substitusi Persamaan (3.13) dan (3.14) ke Persamaan (3.9) akan diperoleh,

$$v=\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)u(x,\tau)$$

$$V=K\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)u(x,\tau)\qquad(3.17)$$

dengan

$$k=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

$u(x,\tau)$ = solusi persamaan difusi

V = nilai opsi saham

K = harga eksekusi

Sehingga dengan menentukan solusi persamaan difusi pada Persamaan (3.15) dapat ditentukan pula nilai opsi saham.

Fungsi *payoff* merupakan fungsi yang dinyatakan oleh beberapa nilai *payoff* karena adanya variansi harga saham. Sebelum menentukan solusi dari persamaan difusi, akan ditentukan terlebih dahulu transformasi fungsi *payoff* untuk opsi saham beli untuk mendapatkan kondisi awal $u(x,0)$. Berdasarkan Persamaan (2.1) fungsi *payoff* dinyatakan sebagai

$$C(S,t) = maks(0, S_t - K)$$

Saat $C(S,t) = 0$ maka berdasarkan Persamaan (3.16)

$$u(x,0) = \frac{0}{K}\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right)$$

$$u(x,0) = 0 \tag{3.18}$$

Saat $C(S,t) = S_t - K$ maka,

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \frac{S_t - K}{K}\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right), \\ &= \frac{K\exp(x) - K}{K}\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right), \\ &= (\exp(x) - 1)\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right), \\ &= \exp(x)\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right) - \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right), \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) - \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Berdasarkan Persamaan (3.18) dan (3.19) maka diperoleh kondisi awal dari solusi persamaan difusi adalah

$$u(x,0) = maks\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) - \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right), 0\right) \tag{3.20}$$

Berdasarkan Persamaan (2.44) diperoleh solusi dari persamaan difusi $u(x,\tau)$ adalah

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(s,0)\exp\frac{-(\mathrm{x}-\mathrm{s})^2}{4\tau}\mathrm{ds} \tag{3.21}$$

misalkan $\mathrm{y}=\dfrac{\mathrm{s}-\mathrm{x}}{\sqrt{2\tau}}$

$$\mathrm{s}=\mathrm{y}\sqrt{2\tau}+\mathrm{x}$$

berdasarkan kondisi awal pada Persamaan (3.20) maka Persamaan (3.21) dapat ditulis menjadi

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u\left(\mathrm{y}\sqrt{2\tau}+\mathrm{x},0\right)\exp\frac{-(\mathrm{x}-\mathrm{s})^2}{4\tau}\mathrm{ds}$$

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\exp\frac{1}{2}(k+1)\,(y\sqrt{2\tau}+x)\exp\frac{-\mathrm{y}^2}{2}\mathrm{dy}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\exp\frac{1}{2}(k-1)\,(y\sqrt{2\tau}+x)\exp\frac{-\mathrm{y}^2}{2}\mathrm{dy}$$

$$u(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2+\frac{1}{2}(k+1)(y\sqrt{2\tau}+x)\right)\mathrm{dy}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2+\frac{1}{2}(k-1)\left(y\sqrt{2\tau}+x\right)\right)\mathrm{dy} \tag{3.22}$$

Misalkan

$$C_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2+\frac{1}{2}(k+1)\left(y\sqrt{2\tau}+x\right)\right)\mathrm{dy} \tag{3.23}$$

$$\mathrm{C}_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2+\frac{1}{2}(k-1)(y\sqrt{2\tau}+x)\right)\mathrm{dy} \tag{3.24}$$

Maka nilai $u(x,\tau)$ dapat dinyatakan sebagai,

$$u(x,\tau)=C_1-C_1 \tag{3.25}$$

selanjutnya akan ditentukan perhitungan C_1 pada Persamaan (3.23), yaitu

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2 + \frac{1}{2}(k+1)(y\sqrt{2\tau}+x)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y}^2 - (k+1)y\sqrt{2\tau} - (k+1)x\right)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y}^2 - (k+1)y\sqrt{2\tau} - (k+1)x\right)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y}^2 - (k+1)y\sqrt{2\tau} + \left(\frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y} - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y} - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right) \mathrm{dy}.$$

Misalkan $\mathrm{z} = \mathrm{y} - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}$ maka diperoleh

$$C_1 = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2\right) \mathrm{dz},$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2\right) \mathrm{dz},$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2\right) \mathrm{dz},$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right) N(d1),$$

dengan

$$d1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} \tag{3.26}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz.$$

Subtitusi Persamaan (3.1), (3.2), dan nilai $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ ke dalam Persamaan (3.26) maka diperoleh

$$\mathrm{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{3.27}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai C_2 pada Persamaan (3.24)

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{y}^2 + \frac{1}{2}(k-1)(y\sqrt{2\tau} + x)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y}^2 - (k-1)y\sqrt{2\tau} - (k-1)x\right)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y}^2 - (k-1)y\sqrt{2\tau} - (k-1)x\right)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y}^2 - (k-1)y\sqrt{2\tau} + \left(\frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 - \left(\frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right)\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y} - \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right) \mathrm{dy},$$

$$= \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathrm{y} - \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2\right) \mathrm{dy}.$$

Misalkan $\mathrm{z} = \mathrm{y} - \frac{(k-1)\sqrt{2\tau}}{2}$ maka diperoleh

$$C_2 = \frac{\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2\right) \mathrm{dz},$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2\right) \mathrm{dz},$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{z})^2\right) \mathrm{dz},$$

$$= \exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right) N(d2).$$

dengan

$$d2 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k-1)\sqrt{2\tau}, \tag{3.28}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz.$$

Subtitusi Persamaan (3.1), (3.2), dan nilai $k = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ ke Persamaan (3.28) diperoleh

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}} \tag{3.29}$$

Berdasarkan Persamaan (3.25) maka nilai untuk opsi saham beli dapat dinyatakan sebagai,

$$C = K \exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)(C_1 - C_1) \tag{3.30}$$

$$
\begin{aligned}
C = K \exp\Big(-\frac{1}{2}(k-1)x & \\
& -\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\Big)\left[\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)N(d1)\right. \\
& \left.-\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)N(d2)\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= K\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)N(d1)\right) \\
&\qquad - K\exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x-\frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)N(d2)\right), \\
&= K\exp(x)\,N(d1) - K\exp(-k\tau)\,N(d2), \\
&= K\exp(x)\,N(d1) - K\exp(-k\tau)\,N(d2), \\
&= SN(d1) - K\exp\big(-r(T-t)\big)\,N(d2).
\end{aligned}
$$

diperoleh formula nilai opsi saham beli model Black-Scholes yaitu,

$$
C_t = S_tN(d1) - K\exp\big(-r(T-t)\big)\,N(d2) \tag{3.31}
$$

dengan $\mathrm{d}_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$
\mathrm{d}_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

$$
N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z^2)\,dz
$$

Berdasarkan Persamaan (2.6) maka dapat ditentukan nilai opsi saham jual model Black-Scholes yaitu sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
S_t + P_t - C_t &= K\exp(-r(T-t)) \\
P_t &= K\exp(-r(T-t)) + C_T - S_t \\
&= K\exp(-r(T-t)) + S_tN(d_1) - K\exp(-r(T-t))\,N(d_2) - S_t \\
&= K\exp(-r(T-t)) - K\exp(-r(T-t))\,N(d_2) - S_t + S_tN(d_1) \\
&= K\exp(-r(T-t))\big(1-N(d_2)\big) - S_T\big(1-N(d_1)\big) \\
&= K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_TN(-d_1)
\end{aligned}
$$

dengan demikian diperoleh nilai opsi saham jual model Black-Scholes adalah

$$
P_t = K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_tN(-d_1) \tag{3.32}
$$

Sehingga formula nilai opsi saham beli dan opsi saham jual model Black-Scholes tanpa pembayaran dividen adalah

$$C_t = S_t N(d_1) - K \exp(-r(T-t))\, N(d_2)$$
$$P_t = K \exp(-r(T-t))\, N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

dengan $\mathrm{d}_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)\, dz$$

Selanjutnya akan ditentukan formula nilai opsi saham model Black-Scholes yang dipengaruhi pembayaran dividen.

2. **Formula Harga Opsi saham Model Black-Scholes dengan Dividen**

Dividen diasumsikan dibayar pada jumlah dan waktu yang ditentukan pada sepanjang umur opsi saham. Berdasarkan Persamaan (2.7) besarnya dividen yang dibayarkan pada interval waktu dt adalah $DS_t dt$. Pembayaran tersebut akan menyebabkan harga saham turun pada waktu t, sehingga nilai opsi saham juga akan turun.

Contoh berikut ini akan menjelaskan pengaruh dividen terhadap harga opsi saham, diketahui sebuah opsi saham beli tipe Eropa atas saham yang membayarkan dividen setiap dua bulan dan lima bulan. Dividen dibayarkan pada waktu yang telah ditentukan sebesar 0.5% dari harga saham. Harga saham saat ini adalah \$40, harga eksekusi \$40, volatilitas harga saham 30% pertahun, tingkat bunga bebas risiko 9% pertahun, dan batas waktunya enam bulan. Berdasarkan soal tersebut maka nilai dividen pada waktu sekarang adalah

$$0.5\exp\left(-\frac{2}{12}\text{x}0.09\right)+0.5\exp\left(-\frac{5}{12}\text{x}0.09\right)=0.971$$

Dividen menyebabkan harga saham turun sejumlah dividen yang dibayarkan, sehingga harga saham pada waktu $t=0$ adalah

$$S_0=40-0.971=39.0259$$

Berdasar soal tersebut dapat diketahui bahwa nilai $K=40, r=0.09, \sigma=0.3$, dan $T=0.5$. Perhitungan menggunakan formula nilai opsi saham model Black-Scholes dapat diperoleh nilai opsi saham adalah $3.67 (Hull, 2009). Berdasarkan formula nilai opsi saham model Black-Scholes jika dividen tidak dibayarkan maka besarnya nilai opsi saham adalah $4.26. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahawa pembayaran dividen akan menyebabkan nilai opsi saham beli turun.

Penurunan formula nilai opsi saham untuk saham yang membayarkan dividen dapat dilakukan seperti penurunan nilai opsi saham model Black-Scholes tanpa pembayaran dividen. Penurunan formula nilai opsi saham model Black-Scholes yang diperluas untuk asumsi pembayaran dividen dapat dilakukan sebagi berikut, berdasarkan Persamaan (2.72) diperoleh persamaan diferensial parsial Black-Scholes sebagai berikut,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(r-D)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}-rV=0$$

Substitusi nilai (3.4), (3.5), dan (3.6) kedalam persamaan (2.72) sehingga,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+(r-D)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}+\frac{1}{2}\sigma^2{S_t}^2\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}-rV=0$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau}+(r-D)S_t\frac{K}{S_t}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2 {S_t}^2\left(\frac{K}{{S_t}^2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)-rKv=0$$

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau}+(r-D)K\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2 K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-rKv=0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 K\frac{\partial v}{\partial \tau}=(r-D)K\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\sigma^2 K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-rKv$$

$$K\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{(r-D)}{\frac{1}{2}\sigma^2}K\frac{\partial v}{\partial x}+K\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}Kv$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{(r-D)}{\frac{1}{2}\sigma^2}\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}v$$

Misalkan $m=\frac{(r-D)}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ (3.33)

$$d=\frac{D}{\frac{1}{2}\sigma^2} \tag{3.34}$$

sehingga

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+(m-1)\frac{\partial v}{\partial x}-(m+d)v \tag{3.35}$$

Misalkan

$$v=\exp(-\omega x-(\omega^2+m+d)\tau)\,u(x,\tau) \tag{3.36}$$

untuk mempermudah penulisan dapat ditulis dengan

$$v=\exp(-\omega x-(\omega^2+m+d)\tau)\,u \tag{3.37}$$

Sehingga dapat diperoleh,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \tau}&=-(\omega^2+m+d)\exp(-\omega x-(\omega^2+m+d)\tau)\,u\\&\quad+\exp(-\omega x-(\omega^2+m+d)\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=-\omega\exp(-\omega x-(\omega^2+m+d)\tau)\,u\\&\quad+\exp(-\omega x-(\omega^2+m+d)\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \omega^2 \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\, u - \omega \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$- \omega \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+ \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.40}$$

Dengan mensubtitusi Persamaan (3.38), (3.39), dan (3.40) kedalam Persamaan (3.37) akan diperoleh

$$-(\omega^2 + m + d)\exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\, u + \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$= \omega^2 \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\, u - \omega \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$- \omega \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial u}{\partial x} + \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$+ (m-1)\Big(-\omega \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\, u$$
$$+ \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) - (m + d)\exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\, u$$

$$\exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\left(-(\omega^2 + m + d)u + \frac{\partial u}{\partial \tau}\right)$$
$$= \exp(-\omega x - (\omega^2 + m + d)\tau)\Bigg(\omega^2 u - 2\omega\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (m-1)\left(-\omega u + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$
$$- (m + d)u\Bigg)$$

$$-(\omega^2 + m + d)u + \frac{\partial u}{\partial \tau}$$
$$= \omega^2 u - 2\omega\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (m-1)\left(-\omega u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - (m + d)u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \omega^2 u - 2\omega\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (m-1)\omega u + (m-1)\frac{\partial u}{\partial x} - (m + d)u + (\omega^2 + m$$
$$+ d)u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\omega\frac{\partial u}{\partial x} + (m-1)\frac{\partial u}{\partial x} + \omega^2 u - (m-1)\omega u - (m + d)u + (\omega^2 + m$$
$$+ d)u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \big((m-1) - 2\omega\big)\frac{\partial u}{\partial x} + \big(\omega^2 - (m-1)\omega - (m+d)\big)u + (\omega^2 + m + d)u$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (m - 1 - 2\omega)\frac{\partial u}{\partial x} + (2\omega^2 - (m-1)\omega)u \qquad (3.41)$$

dengan mengambil nilai

$$\omega = \frac{1}{2}(m-1) \qquad (3.42)$$

akan diperoleh persamaan difusi seperti Persamaan (3.15)

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan u merupakan solusi persamaan difusi dan nilai v adalah

$$v = \exp\left(-\frac{1}{2}(m-1)x - (\omega^2 + m + d)\tau\right)u.$$

Nilai $V = Kv$, sehingga dengan menentukan solusi dari persamaan difusi u maka nilai opsi saham juga dapat diketahui.

Dengan cara yang sama untuk mendapatkan Persamaan (3.30) akan diperoleh

$$C = K \exp\left(-\frac{1}{2}(m-1)x - (\omega^2 + m + d)\tau\right)(C_1 - C_1) \qquad (3.43)$$

dengan mensubstitusi Persamaan (3.23) dan (3.24) ke Persamaan (3.43) akan diperoleh

$$C = K \exp\left(-\frac{1}{2}(m-1)x - \frac{1}{4}((m+1)^2 + 4d)\tau\right)\left[\exp\left(\frac{1}{2}(m+1)x + \frac{1}{4}(m+1)^2\tau\right)N(d1) - \exp\left(\frac{1}{2}(m-1)x + \frac{1}{4}(m-1)^2\tau\right)N(d2)\right]$$

$$C = K \exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}((k+1)^2 + 4d)\tau\right)\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau\right)N(d1)\right) - K \exp\left(-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}((k+1)^2 + 4d)\tau\right)\left(\exp\left(\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau\right)N(d2)\right)$$

$$C = K \exp(x - d\tau\ )\, N(d1) - K \exp\big((-d-k)\tau\big)\, N(d2)$$

$$C = S_t \exp\left(-\frac{D}{(\frac{1}{2}\sigma^2)}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)\right)N(d1) - K \exp\left(\left(-\frac{D}{\frac{1}{2}\sigma^2} - \frac{r-D}{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)N(d2)$$

$$= S_t \exp(-D(T-t)\ )\, N(d1) - K \exp\big((-r)(T-t)\big)\, N(d2)$$

dengan demikian diperoleh formula nilai opsi saham beli model Black-Scholes dengan pembayaran dividen adalah,

$$C_t = S_t \exp(-D(T-t)\ )\, N(d1) - K \exp\big(-r(T-t)\big)\, N(d2) \tag{3.44}$$

dengan nilai

$$\mathrm{d1} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(m+1)\sqrt{2\tau} \tag{3.45}$$

$$\mathrm{d2} = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(m-1)\sqrt{2\tau} \tag{3.46}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)\, dz$$

Substitusi Persamaan (3.33), nilai $x = \ln\frac{S_t}{K}$ dan $\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)$ ke Persamaan (3.44) dan (3.45) akan diperoleh

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Berdasarkan Persamaan (2.6) maka dapat ditentukan nilai opsi saham jual model Black-Scholes dengan asumsi pembayaran dividen yaitu sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
S_t + P_t - C_t &= K\exp(-r(T-t)) \\
P_t &= K\exp(-r(T-t)) + C_T - S_t \\
&= K\exp(-r(T-t)) + S_t\exp(-D(T-t))\,N(d1) \\
&\qquad - K\exp\big(-r(T-t)\big)\,N(d2) - S_t \\
&= K\exp(-r(T-t)) - K\exp((D-r)(T-t))\,N(d_2) - S_t \\
&\qquad + S_t\exp(-D(T-t))\,N(d1) \\
&= K\exp(-r(T-t))\big(1 - N(d_2)\big) \\
&\qquad - S_t\exp(-D(T-t))\big(1 - N(d_1)\big) \\
&= K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_t\exp(-D(T-t))\,N(-d_1)
\end{aligned}$$

dengan demikian diperoleh nilai opsi saham jual model Black-Scholes adalah

$$P_t = K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_t\exp(-D(T-t))\,N(-d_1) \tag{3.47}$$

Sehingga diperoleh formula harga opsi saham beli maupun opsi saham jual model Black-Scholes dengan asumsi pembayaran dividen yaitu,

$$C_t = S_t\exp(-D(T-t))\,N(d_1) - K\exp(-r(T-t))\,N(d_2)$$

$$P_t = K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_t\exp(-D(T-t))\,N(-d_1)$$

dengan $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}z^2)\,dz$$

3. Formula Harga Opsi saham dengan Ekspektasi

Selain menggunakan cara yang telah dijabarkan menggunakan persamaan diferensial parsial, formula nilai opsi saham dapat ditentukan menggunakan ekspektasi. Penjelasan nilai opsi saham dengan ekspektasi akan dijelaskan melalui penjabaran berikut ini.

Sebelum menentukan nilai opsi saham menggunakan dasar statistika, akan ditentukan terlebih dahulu fungsi densitas peluang $f(S_T)$ terlebih dahulu. Berdasarkan Persamaan (2.49), harga saham dinyatakan sebagai,

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz$$

Misalkan $f(S_T, t) = \frac{dS_t}{S_t}$

atau dapat ditulis dengan $f = \frac{dS_t}{S_t}$

Berdasarkan Lemma It$\hat{o}$ maka dapat diperoleh,

$$df = \frac{1}{S} dS - \frac{1}{2S^2} (dS)^2 \tag{3.48}$$

Subtitusi Persamaan (2.49) pada Persamaan (3.48) akan diperoleh,

$$df = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt - \sigma(z_T - z_t)$$

Karena terdapat asumsi tingkat bunga bebas risiko maka nilai $\mu = r$, sehingga diperoleh,

$$df = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt - \sigma(z_T - z_t)$$

atau

$$\frac{dS_T}{S_T} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dt - \sigma(z_T - z_t)$$

Integral dari kedua ruas akan diperoleh,

$$\ln S_T - \ln S_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T - t) - \sigma x\sqrt{T - t}$$

Sehingga akan diperoleh solusi untuk persamaan harga saham pada Persamaan (2.49) adalah,

$$S_T = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma x\sqrt{T-t}\right) \qquad (3.49)$$

dengan S_t adalah harga saham pada waktu t, r adalah tingkat bunga bebas risiko, σ adalah variansi tingkat pengembalian saham atau volatilitas, T adalah waktu jatuh tempo, dan x merupakan variabel yang mengikuti distribusi normal. Fungsi densitas peluang distribusi normal dinyatakan sebagai,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$$

Berdasarkan Persamaan (3.49) maka nilai x dapat dinyatakan sebagai

$$x = \frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}} \qquad (3.50)$$

Untuk mendapatkan fungsi padat peluang $f(S_T)$, perbandingan fungsi distribusi komulatif $f(S_T)$ dengan $f(x)$ dapat dinyatakan dengan

$$\int f(S_T)\, dS_T = \int f(x)dx$$

Sehingga,

$$f(S_T)\, dS_T = f(x)dx$$

atau

$$f(S_T) = f(x)\frac{dx}{dS_T}$$

Sehingga fungsi padat peluang $f(S_T)$ untuk Persamaan (3.49) adalah

$$f(S_T) = f\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}}\right)\frac{d}{dS_t}\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}}\right),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}} \right)^2 \right) \frac{d}{dS_t}\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}} \right),$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}} \right)^2 \right) \frac{1}{S_T\sigma\sqrt{t-T}},$$

$$= \frac{1}{\left(S_T\sigma\sqrt{t-T}\right)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\frac{S_T}{S_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-T)}{\sigma\sqrt{t-T}} \right)^2 \right),$$

$$= \frac{1}{\left(S_T\sigma\sqrt{t-T}\right)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \left(\ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{t-T}} \right)^2 \right),$$

$$= \frac{1}{\left(S_T\sigma\sqrt{t-T}\right)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \left(\ln S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{t-T}} \right)^2 \right).$$

Misalkan

$\mu_1 = \ln S_t + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)$

$\sigma_1 = \sigma\sqrt{T-t}$

maka

$$f(S_T) = \frac{1}{S_T\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln S_T - \mu_1}{\sigma\sqrt{t-T}} \right)^2 \right) \tag{3.51}$$

Berdasarkan Persamaan (2.1), nilai opsi saham beli tipe Eropa pada dasarnya adalah

$$C(S,t) = maks(0, S_T - K)$$

dan fungsi padat peluang dari $f(S_T)$ adalah

$$f(S_T) = \begin{cases} \dfrac{1}{S_T\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) & \text{untuk } S_T > 0 \\ \\ 0 & \text{untuk } S_T < 0 \end{cases}$$

Ekspektasi fungsi keuntungan opsi saham beli adalah

$$E[max(0, S_T - K)] \tag{3.52}$$

Sehingga nilai dari ekspektasi keuntungan opsi saham beli adalah

$$\begin{aligned} E[max(0, S_T - K)] &= \int_0^\infty (max(0, S_T - K))g(S_T)dS_T, \\ &= \int_0^\infty 0\, f(S_T)dS_T + \int_0^\infty (S_T - K)\, f(S_T)dS_T, \\ &= \int_0^\infty S_T\, f(S_T)dS_T - \int_0^\infty K\, f(S_T)dS_T. \end{aligned}$$

Misalkan $C_1 = \int_0^\infty S_T\, g(S_T)dS_T$

$C_2 = \int_0^\infty K\, g(S_T)dS_T$

maka $E[max(0, S_T - K)] = C_1 - C_2$ (3.53)

Nilai ekspektasi keuntungan opsi saham diperoleh dengan menentukan terlebih dahulu nilai C_1 dan C_2. Pertama akan ditentukan nilai C_1,

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^\infty S_T\, f(S_T)dS_T, \\ &= \int_0^\infty S_T \frac{1}{S_T\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) dS_T, \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) dS_T. \end{aligned}$$

Misalkan $z = \ln S_T$

$$e^{z} = S_T$$

$$e^{z}dz = dS_T$$

$$C_1 = \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(z-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2\right) \exp(z)\, dz,$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(z-\frac{1}{2}\left(\frac{(z-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2\right) dz,$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(z-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2-2z\mu_1+\mu_1^2}{\sigma_1{}^2}\right)\right) dz,$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2-2\sigma_1{}^2z-2z\mu_1+\mu_1^2}{\sigma_1{}^2}\right)\right) dz,$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2-2z\mu_1-2z\sigma_1{}^2+\mu_1^2+2\mu_1\sigma_1{}^2+\sigma_1{}^4}{\sigma_1{}^2}\right)+\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right) dz,$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(\mu_1+\sigma_1{}^2)}{\sigma_1}\right)^2+\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right) dz,$$

$$= \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(\mu_1+\sigma_1{}^2)}{\sigma_1}\right)^2\right) \exp\left(\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right) dz,$$

$$= \exp\left(\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right) \int_{\ln K}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(\mu_1+\sigma_1{}^2)}{\sigma_1}\right)^2\right) dz.$$

Misalkan

$$q = \frac{z-(\mu_1+\sigma_1{}^2)}{\sigma_1}$$

$$z = q\sigma_1+\mu_1+\sigma_1{}^2$$

$$dz = \sigma_1 dq$$

Sehingga

$$C_1 = \exp\left(\mu_1+\frac{1}{2}\sigma_1{}^2\right) \int_{\frac{\ln K-(\mu_1+\sigma_1{}^2)}{\sigma_1}}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) \sigma_1 dq,$$

$$= \exp\left(\mu_1 + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2\right) \int_{\frac{\ln K - (\mu_1 + {\sigma_1}^2)}{\sigma_1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}q^2\right) dq,$$

$$= \exp\left(\mu_1 + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2\right) \int_{-\infty}^{-\left(\frac{\ln K - (\mu_1 + {\sigma_1}^2)}{\sigma_1}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{z - (\mu_1 + {\sigma_1}^2)}{\sigma_1}\right)^2\right) d\left(\frac{z - (\mu_1 + {\sigma_1}^2)}{\sigma_1}\right),$$

$$= \exp\left(\mu_1 + \frac{1}{2}{\sigma_1}^2\right) N\left(\frac{(\mu_1 + {\sigma_1}^2) - \ln K}{\sigma_1}\right),$$

$$= \exp\left(\ln(S_t) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left(\sigma\sqrt{T-t}\right)^2\right) N\left(\frac{\ln(S_t) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) + \left(\sigma\sqrt{T-t}\right)^2 - \ln(K)}{\sigma_1}\right),$$

$$= \exp(\ln(S_t) + r(T-t))\, N\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

$$= S_t \exp(r(T-t))\, N\left(\frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right).$$

diperoleh,

$$C_1 = S_t \exp(r(T-t))\, N\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}\right) \qquad (3.54)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai C_2,

$$C_2 = K \int_0^{\infty} f(S_T)\, dS_T,$$

$$= K \int_0^{\infty} \frac{1}{S_T \sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) dS_T.$$

Misalkan $z = \dfrac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}$

$$S_T = \exp(\sigma_1 z + \mu_1)$$

$$dS_T = \sigma_1 \exp(\sigma_1 z + \mu_1)\, dz$$

sehingga

$$C_2 = K \int_{\frac{\ln(K)-\mu_1}{\sigma_1}}^{\infty} \frac{1}{\exp(\sigma_1 z + \mu_1)\, \sigma_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \sigma_1 \exp(\sigma_1 z + \mu_1)\, dz,$$

$$= K \int_{\frac{\ln(K)-\mu_1}{\sigma_1}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) dz,$$

$$= K \int_{-\infty}^{\frac{\mu_1-\ln(K)}{\sigma_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right) d\left(\frac{(\ln s_T) - \mu_1}{\sigma_1}\right),$$

$$= KN\left(\frac{\mu_1 - \ln(K)}{\sigma_1}\right),$$

$$= KN\left(\frac{\ln(S_t) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right) - \ln(K)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

$$= KN\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).$$

diperoleh

$$C_2 = KN\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{3.55}$$

C_t menyatakan nilai opsi saham pada saat t, berdasarkan Persamaan (3.54) dan (3.55) maka,

$$C_t = \exp(-r(T-t))\, E[max(0, S_T - K)]\,,$$

$$= \exp\big(-r(T-t)\big)\,(C_1 - C_2),$$

$$= \exp(-r(T-t))\,\big(S_t \exp(r(T-t))\, N(d_1) - KN(d_2)\big).$$

diperoleh

$$C_t = S_t N(d_1) - K \exp\big(-r(T-t)\big)\, N(d_2)$$

Nilai opsi saham jual pada saat t dapat ditentukan melalui Persamaan (2.6) dan mennghasilkan

$$P_t = K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

dengan demikian diperoleh formula nilai opsi saham beli maupun jual berturut-turut untuk model Black-Scholes adalah

$$C_t = S_t N(d_1) - K\exp\big(-r(T-t)\big)\,N(d_2)$$

$$P_t = K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_t N(-d_1)$$

dengan $\mathrm{d}_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (T-t)\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)\,dz$$

Dividen menyebabkan harga saham pada waktu t berubah, harga saham tersebut akan jatuh sebesar dividen yang dibayarkan. Sehingga harga saham pada waktu t yang awalnya dinyatakan dengan S_t, setelah adanya pembayaran dividen menyebabkan perubahan harga saham pada waktu t dinyatakan dengan

$$S_t\exp(-D(T-t))$$

Sehingga formula nilai opsi saham dengan pengaruh dividen adalah,

$$C_t = S_t\exp(-D(T-t))\,N(d_1) - K\exp(-r(T-t))\,N(d_2)$$
$$P_t = K\exp(-r(T-t))\,N(-d_2) - S_t\exp(-D(T-t))\,N(-d_1)$$

dengan $\mathrm{d}_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (T-t)\left(r - D + \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}$

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) - (T-t)\left(r - D - \frac{1}{2}\sigma^2\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2)\, dz$$

Cara yang berbeda dapat menghasilkan formula nilai opsi saham yang sama dengan formula nilai opsi saham yang diturunkan sebelumnya. Selanjutnya akan ditentukan formula harga opsi saham menggunakan *Constant Elasticity of Variance (CEV).*

B. Formula Nilai Opsi saham Model *CEV*

Perhitungan nilai opsi saham menggunakan formula nilai opsi saham model *Black-Scholes* menggunakan nilai volatilitas yang diperoleh melalui penaksiran. Nilai volatilitas tersebut diasumsikan konstan sampai tanggal jatuh tempo. Pada kenyataannya nilai volatilitas selalu berubah-ubah sampai tanggal jatuh tempo, hal ini membuat perhitungan nilai opsi saham model Black-Scholes kurang tepat. Model *CEV* yang diperkenalkan oleh John Cox merupakan model lanjutan dari model Black-Scholes. Jika model Black-Scholes menggunakan asumsi bahwa nilai volatilitas konstan, maka pada model *CEV* yang merupakan pengembangan dari model *Black-Scholes*, menggunakan nilai volatilitas tidak konstan.

Pada model *CEV* terdapat hubungan antara harga saham dan volatilitas yang dinyatakan sebagai (Schroder, 1989)

$$\sigma(S,t) = \hat{\sigma} \cdot S_0^{\frac{(\beta-2)}{2}} \tag{3.56}$$

denagn $\hat{\sigma}$ merupakan volatilitas pada model *CEV*, S_0 merupakan harga saham pada waktu nol, dan β merupakan parameter yang menyatakan hubungan antara volatilitas dengan harga saham. Berdasarkan persamaan diatas, jika nilai $\beta = 2$ maka nilai volatilitasnya sama dengan model Black-Scholes. Jika nilai $\beta < 2$ akan terjadi hubungan terbalik antara harga saham dan volatilitas, atau sering disebut dengan hubungan invers antara harga saham dan volatilitas. Pada pembahasan model *CEV* digunakan nilai $\beta < 2$, hal ini berdasarkan kondisi pasar yang mengindikasikan bahwa ada hubungan invers antara harga saham dan volatilitas. Pada penurunan nilai opsi saham model digunakan nilai $\beta < 2$ dan nilai volatilitas dinyatakan seperti Persamaan (3.56), sehingga diperoleh definisi harga saham pada model *CEV* yaitu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma {S_0}^{1-\beta/2} S^{\beta/2} dz \tag{3.57}$$

dengan β merupakan hubungan antara tingkat harga saham dan variansi tingkat pengembalian saham. Model *CEV* memiliki asumsi bahwa nilai $\beta < 2$ sebagaimana dasar permasalahan yang dikemukakan oleh John Cox yang menyatakan pada kenyataannya terdapat hubungan invers antara volatilitas dan harga saham.

Berdasarkan persamaan harga saham pada model *CEV* yang dinyatakan pada Persamaan (3.57) dan dengan cara yang sama untuk mendapatkan Persamaan (2.71) akan diperoleh persamaan diferensial parsial pada model *CEV* tanpa pembayaran dividen sebagai berikut,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2 \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \tag{3.58}$$

dan persamaan diferensial parsial pada model *CEV* dengan pembayaran dividen sebagai berikut,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - D)S\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2 \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0 \qquad (3.59)$$

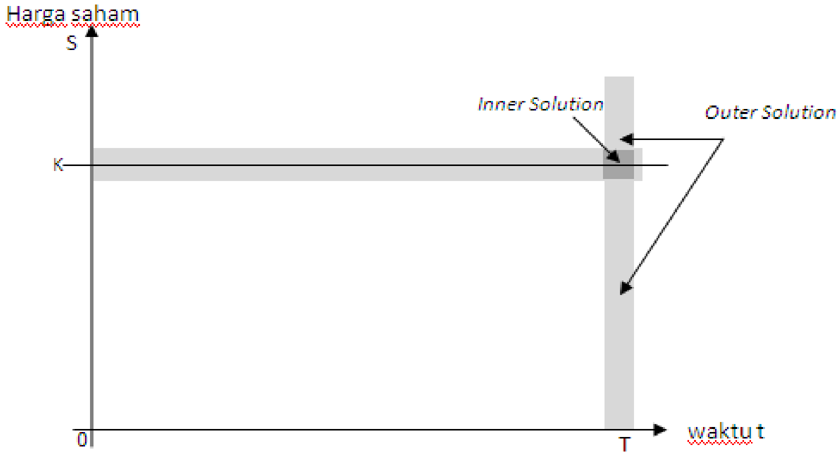
Cara yang digunakan untuk menentukan solusi dari persamaan diferensial model *CEV* hampir sama dengan cara yang digunakan untuk menentukan solusi pada persamaan pada model Black-Scholes. Bentuk persamaan diferensial model *CEV* yang agak kompleks membuat pemilihan variabel lokal harus tepat agar bisa menyelesaikan persamaan diferensial dan mendapatkan solusi yang diinginkan. Solusi persamaan diferensial parsial merupakan pendekatan secara numerik dengan *perturbation theory*.

1. Aplikasi Teori Perturbasi pada Bidang Keuangan

Sebelum menentukan solusi pada model *CEV*, akan dibahas terlebih dahulu mengenai aplikasi teori *perturbation* pada model keuangan untuk untuk menunjukkan metode dan menemukan sebuah pendekatan pada model Black-Scholes. Hasil yang diperoleh nantinya akan dibandingkan dengan solusi eksaknya untuk mendapatkan kesimpulan seberapa dekat solusi yang diperoleh melalui metode pendekatan dengan teori *perturbation*. Pendekatan dapat dilakukan untuk solusi *exact* model Black-Scholes pada rentang waktu yang kecil, adanya *scalling* membuat lapisan batas yang dibentuk oleh dua lapisan batas yaitu,

a. Ketika harga saham dekat denga harga eksekusi
b. Ketika tanggal t dekat dengan tanggal jatuh tempo T

Pembentukan lapisan batas semu dibutuhkan untuk menunjukkan aplikasi metode *asymptotic expansions* pada model keuangan dasar (Jong, 2010). Lapisan batas semu diilustrasikan seperti Gambar 3.1,



Gambar 3.1 Lapisan semu yang dibentuk pada metode *asymptotic expansions*

Gambar 3.1 menunjukkan lapisan semu yang dibentuk disekitar harga eksekusi dan waktu jatuh tempo. Lapisan semu tersebut digunakan untuk membantu penyekalaan yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah dengan teknik *pertutbation theory*.

Pembahasan dalam metode *asymptotic expansions* hanya membahas daerah pada lapisan yang dekat dengan tanggal jatuh tempo karena pada daerah tersebut membutuhkan analisis yang cermat untuk melakukan suatu tindakan untuk menjual maupun membeli opsi saham. Langkah-langkah yang yang dilakukan untuk mendapatkan hasil pendekan tersebut adalah sebagai berikut (Jong, 2010),

a. ***Scalling***

Tanggal eksekusi diskala dengan σ^2 untuk membuat perbandingan yang sesuai dengan

$$\frac{t'}{\sigma^2} = T - t$$

atau

$$t' = (T - t)\sigma^2$$

Sehingga Persamaan (2.71) dapat ditransformasi menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial t'} = \frac{1}{2}{S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} + \alpha S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + -\alpha V \tag{3.60}$$

dengan $\alpha = \frac{r}{\sigma^2}$. Misalkan $\alpha = O(1)$ dan diskala pada waktu yang kecil, sedemikian sehingga diperoeh $\tau = \frac{t'}{\varepsilon \eta}$ dengan ε merupakan bilangan yang sangat kecil, yang menyebabkan peregangan pada daerah saat jatuh tempo $t = T$, pada titik ini nilai skala parameter η belum diketahui, dan akan ditentukan nanti. Sehingga diperoleh persamaan Black-Scholes yang sebelumnya dengan *scalling* adalah

$$\frac{\partial V}{\partial t'} = \frac{1}{2}{S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} + \alpha S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + -\alpha V$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau \varepsilon^\eta} = \frac{1}{2}{S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} + \alpha S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + -\alpha V$$

$$\frac{1}{\varepsilon^\eta}\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{2}{S_t}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} + \alpha S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + -\alpha V \tag{3.61}$$

b. Outer Problem dan Outer Solution

Sebelum menentukan *outer solution* akan dibahas mengenai permasalahan pada *outer problem*, berdasarkan Gambar 3.1 diperoleh *ekspansi outer* biasa yaitu (Jong, 2010)

$$V_\varepsilon(S,\tau) = \sum_{n=0}^{m} \varepsilon^{n\eta} V_n(S,\tau) + O(\varepsilon^{\eta(m+1)})$$

atau

$$V_\varepsilon(S,\tau) = V_0(S,\tau) + \varepsilon^\eta V_1(S,\tau) + \cdots \quad (3.62)$$

Sehingga Persamaan (3.61) dapat berubah menjadi,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\tau}(V_0(S,\tau) + \varepsilon^\eta V_1(S,\tau) + \cdots) \\
&\quad = \varepsilon^\eta \frac{1}{2} {S_t}^2 \frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2}(V_0(S,\tau) + \varepsilon^\eta V_1(S,\tau) + \cdots) \\
&\quad + \varepsilon^\eta \alpha S_t \frac{\partial}{\partial S_t}(V_0(S,\tau) + \varepsilon^\eta V_1(S,\tau) + \cdots) \\
&\quad - \varepsilon^\eta \alpha (V_0(S,\tau) + \varepsilon^\eta V_1(S,\tau) + \cdots) \\
&\quad = \varepsilon^\eta \frac{1}{2} {S_t}^2 \frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2} V_0(S,\tau) + (\varepsilon^\eta)^2 \frac{1}{2} {S_t}^2 \frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2} V_1(S,\tau) + \cdots \\
&\qquad + \varepsilon^\eta \alpha S_t \frac{\partial}{\partial S_t} V_0(S,\tau) + (\varepsilon^\eta)^2 \alpha S_t \frac{\partial}{\partial S_t} V_1(S,\tau) \\
&\qquad + \cdots - \varepsilon^\eta \alpha V_0(S,\tau) - (\varepsilon^\eta)^2 \alpha V_1(S,\tau) + \cdots \\
&\quad = \varepsilon^\eta \left(\frac{1}{2} {S_t}^2 \frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2} V_0(S,\tau) + \alpha S_t \frac{\partial}{\partial S_t} V_0(S,\tau) - \alpha V_0(S,\tau) + \cdots\right) \\
&\qquad + (\varepsilon^\eta)^2 \left(\frac{1}{2} {S_t}^2 \frac{\partial^2}{\partial {S_t}^2} V_1(S,\tau) + \alpha S_t \frac{\partial}{\partial S_t} V_1(S,\tau) \right. \\
&\qquad \left. - \alpha V_1(S,\tau) + \cdots\right)
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau} = 0 \quad (3.63)$$

dan

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau} = \frac{1}{2} {S_t}^2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial {S_t}^2} + \alpha \left(S_t \frac{\partial V_0}{\partial S} - V_0\right) \quad (3.64)$$

karena nilai $\frac{\partial^2 V_0}{\partial {S_t}^2} = 0$ maka Persamaan (3.64) menjadi,

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau} = \alpha\left(S_t\frac{\partial V_0}{\partial S} - V_0\right) \tag{3.65}$$

sehingga diperoleh syarat,

$$\frac{\partial V_1}{\partial \tau} = \begin{cases} \alpha\big(S_t - (S_t - K)\big) = \alpha K & untuk\ S > K \\ 0 & untuk\ S \leq\ K \end{cases} \tag{3.66}$$

Outer Solution

Solusi dari $O(1)$ dari persamaan *outer* yang memiliki syarat awal

$$V_0(S,T) = maks\ (S - K, 0)$$

selanjutnya, untuk menyelesaikan persamaan $O(\varepsilon^\eta)$ dengan kondisi awal yang telah dijabarkan pada Persamaan (3.66) diperoleh

$$V_1(S,t) = \begin{cases} \alpha K\tau & untuk\ S > K \\ 0 & untuk\ S \leq K \end{cases}$$

Sehingga dapat diperoleh kondisi awal untu *ekspansi* $V(S,t)$ terhadap ε hingga suku kedua adalah

$$V_\varepsilon(S,t) = V_0 + \varepsilon^\eta V_1 = \begin{cases} S - K + \varepsilon^\eta \alpha K\tau & untuk\ S > K \\ 0 & untuk\ S \leq K \end{cases} \tag{3.67}$$

yang dapat ditulis menjadi

$$V_0 + \varepsilon^\eta V_1 = \begin{cases} S - K(1 - \varepsilon^\eta \alpha\tau) & untuk\ S > K \\ 0 & untuk\ S \leq K \end{cases} \tag{3.68}$$

c. Inner Problem dan Inner Solution

Langkah selanjutnya untuk mendapatkan pendekatan *matching asympthotic ekspansion* yaitu mendefinisikan *inner problem* dan menentukan solusinya.

Inner Problem

Diberikan pemisalan variabel lokal adalah sebagai berikut (Howison, 2005),

$$x = \frac{S - K}{\varepsilon K} \tag{3.69}$$

Misalkan $v(x,\tau)$ merupakan skala yang menyatakan bahwa

$$v(x,\tau) = \frac{V(S,\tau)}{\varepsilon K} \tag{3.70}$$

Berdasarkan *scalling* maka diperoleh pemisalan

$$t = T - \frac{t'}{\sigma^2}$$

$$\tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Maka

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t}, \\
&= \frac{\partial V}{\partial \tau}\left(-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right), \\
&= \frac{\partial (\varepsilon K v)}{\partial \tau}\left(-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right), \\
&= \frac{\varepsilon K \partial v}{\partial \tau}\left(-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right), \\
&= -\frac{\sigma^2 K}{\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S}, \\
&= \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right), \\
&= \frac{\partial (\varepsilon K v)}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right), \\
&= \frac{\varepsilon K \partial v}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right), \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

dan

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial(\frac{\partial v}{\partial x})}{\partial S},$$

$$= \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S},$$

$$= \frac{1}{\varepsilon K}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{3.73}$$

berdasarkan skala pada Persamaan (3.69), (3.71), (3.72) dan (3.73), maka dapat diperoleh Persamaan (2.71) yang diskala yaitu,

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - r\varepsilon K v$$

$$-\left(-\frac{\sigma^2 K}{\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)\right) = \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{1}{\varepsilon K}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + rS\frac{\partial v}{\partial x} - r\varepsilon K v$$

$$\frac{\sigma^2 K}{\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2\frac{1}{\varepsilon K}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + rS\frac{\partial v}{\partial x} - r\varepsilon K v$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{r}{\sigma^2}\frac{S}{K}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x} + -\alpha\varepsilon^2 v \tag{3.74}$$

dan fungsi *payoff* menjadi

$$v(x,0) = \frac{V(S,0)}{\varepsilon K} = \frac{maks\ (S-K,0)}{\varepsilon K} = maks\ (x,0) \tag{3.75}$$

Selanjutnya, akan ditentukan solusi dari *inner problem* dan hasilnya akan dicocokkan dengan *outer solution*. Diasumsikan v dan ε merupakan bilangan bulat sehingga $v(x,\tau)$ dapat diekspansi terhadap ε dan diperoleh

$$v(x,\tau) = v_0(x,\tau) + \varepsilon v_1(x,\tau) + O(\varepsilon^2) \tag{3.76}$$

dengan,

$$v_1(x,\tau_\beta) = \frac{\partial v_0(x,\tau_\beta)}{\partial x}, v_2(x,\tau_\beta) = \frac{1}{2}\frac{\partial {v_0}^2(x,\tau_\beta)}{\partial x^2}, \ldots$$

Berdasarkan Persamaan (3.74) dapat diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(v_0(x,\tau)+\varepsilon v_1(x,\tau)+\cdots)=\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_0(x,\tau)+\varepsilon v_1(x,\tau)+\cdots)$$

$$+\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}(v_0(x,\tau)+\varepsilon v_1(x,\tau)+\cdots)-\alpha\varepsilon^2(v_0(x,\tau)+\varepsilon v_1(x,\tau)+\cdots)$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\tau}v_0(x,\tau)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}v_1(x,\tau)+\cdots=\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_0(x,\tau)+\frac{\varepsilon}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_1(x,\tau)+\cdots$$

$$+\alpha\varepsilon(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_0(x,\tau)+\alpha\varepsilon^2(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_1(x,\tau)+\cdots-\alpha\varepsilon^2 v_0(x,\tau)+\alpha\varepsilon^3 v_1(x,\tau)$$

$$+\cdots$$

$$\Leftrightarrow\frac{\partial}{\partial\tau}v_0(x,\tau)+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\tau}v_1(x,\tau)+\cdots=\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_0(x,\tau)$$

$$+\varepsilon\left(\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_1(x,\tau)+\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_0(x,\tau)\ldots\right)$$

$$+\varepsilon^2\left(-\alpha v_0(x,\tau)+\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_1(x,\tau)+\cdots\right)+\alpha\varepsilon^3 v_1(x,\tau)+\cdots \quad (3.77)$$

berdasarkan Persamaan (3.77) dapat diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial\tau}v_0(x,\tau)=\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_0(x,\tau) \quad (3.78)$$

dengan menggunakan deret taylor, maka $(1+\varepsilon x)^2$ dapat diekspansi terhadap ε menjadi

$$(1+\varepsilon x)^2=1+2(1+\varepsilon x)\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots \quad (3.79)$$

karena nilai $\varepsilon\to 0$ maka Persamaan (3.79) setara dengan satu. Sehingga Pesamaan (3.78) menjadi,

$$\frac{\partial v_0}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \quad (3.80)$$

dengan $v_0(x,0)=maks\ (x,0)$ sehingga fungsi *payoff* dinyatakan sebagai,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{v_0(x,\tau)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}v_0(x,\tau)=0$$

Inner Solution

Berdasarkan sifat fungsi dilatasi pada persamaan difusi $u(\sqrt{a}x, at)$, maka dapat diperoleh

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{v_0(x,\tau)}{\sqrt{\tau}} \tag{3.81}$$

dengan pemisalan,

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\tau}} \tag{3.82}$$

Ssubstitusi Persamaan (3.81) dan (3.82) pada Persamaan (3.80) akan diperoleh,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{\tau}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{\tau}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \tag{3.83}$$

berdasarkan Persamaan (3.82) diperoleh,

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = -\frac{x}{2\tau\sqrt{\tau}}$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}$$

sehingga

$$\frac{\partial}{\partial\tau}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial\tau} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial\tau}$$

$$= -\frac{x}{2\tau\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi} \tag{3.84}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{\partial f(\xi)}{\partial x} = \frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi} \tag{3.85}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}f(\xi) \tag{3.86}$$

substitusi Persamaan (3.84), (3.85), dan (3.86) pada Persamaan (3.83) maka akan diperoleh,

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}}f(\xi)+\sqrt{\tau}\left(-\frac{x}{2\tau\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\right)=\frac{\sqrt{\tau}}{2}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}f(\xi)\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}}f(\xi)-\frac{x}{2\tau}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=\frac{1}{2\sqrt{\tau}}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}f(\xi) \tag{3.87}$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan $2\sqrt{\tau}$ maka,

$$f(\xi)-\frac{x}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2}f(\xi) \tag{3.88}$$

karena $\xi=\frac{x}{\sqrt{\tau}}$ maka Persamaan (3.88)dapat ditulis menjadi

$$f(\xi)-\xi\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}f(\xi)$$

atau

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}f(\xi)+\xi\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}-f(\xi)=0 \tag{3.89}$$

dengan kondisi

$$\begin{aligned}&\lim_{\xi\to-\infty} f=0\\&\lim_{\xi\to\infty}\frac{f}{\xi}=1\end{aligned} \tag{3.90}$$

Faktor integrasi dari Persamaan (3.89) adalah $\mu=e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$sehingga,

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi}f(\xi)=Ae^{-\frac{1}{2}\xi^2} \tag{3.91}$$

dengan mengintegralkan kedua ruas dari Persamaan (3.91) akan diperoleh

$$f(\xi)=c_1\int_0^{\xi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi+c_2 \tag{3.92}$$

Berdasarkan kondisi batas pada Persamaan (3.90) dapat diperoleh,

jika $\lim_{\xi\to-\infty} f=0$ maka $-c_1\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi+c_2=0$

$$-c_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}+c_2=0 \tag{3.93}$$

jika $\lim_{\xi\to\infty}\frac{f}{\xi}=0$ maka $c_1\int_0^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi+c_2=0$

$$c_1\frac{\sqrt{\pi}}{2}+c_2=1 \tag{3.94}$$

dari Persamaan (3.93) dan (3.94) maka dapat ditentukan $c_1$dan c_2 yaitu,

$$\text{diperoleh nilai}\begin{cases} c_1=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \\ c_2=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

sehingga Persamaan (3.92) dapat dinyatakan sebagai

$$f(\xi)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\gamma}e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\,d\xi \tag{3.95}$$

misalkan

$$G(x,\tau)=\frac{\partial}{\partial x}f(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \tag{3.96}$$

dan

$$v_0(x,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}G(x-y,\tau)\,\emptyset(y)dy \tag{3.97}$$

Berdasarkan sifat persamaan difusi, maka Persamaan (3.97) juga merupakan solusi yang memenuhi syarat awal $v_0(x,0)=maks(x,0)=\emptyset(x)$. Berdasarkan Persamaan (3.96) dan (3.97) maka diperoleh

$$v_0(x,\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}}maks(y,0)dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}ye^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}}dy \tag{3.98}$$

misalkan $z=\frac{x-y}{\sqrt{\tau}}$ maka $dz=-\frac{1}{\sqrt{\tau}}dy$ atau $y=x-z\sqrt{\tau}$ sehingga

$$v_0(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} (x - z\sqrt{\tau}) e^{-\frac{z^2}{2}} (-\sqrt{\tau}dz)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} (x - z\sqrt{\tau}) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) - \sqrt{\tau}\left[0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\frac{x}{\sqrt{\tau}}^2}{2}}\right]$$

$$= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\frac{x}{\sqrt{\tau}}^2}{2}}\right]$$

$$= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\, n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) \tag{3.99}$$

diperoleh,

$$v_0(x,\tau) = xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau} n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) \tag{3.100}$$

pendekatan untuk

$$v_\varepsilon(x,\tau) = v_0(x,\tau) + O(\varepsilon)$$

$$= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau} n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

diperoleh,

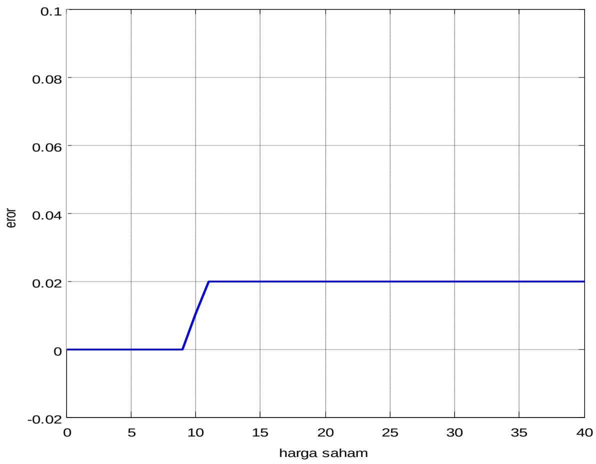
$$v_\varepsilon(x,\tau) = \frac{\frac{S}{K} - 1}{\varepsilon} N\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{T-t} n\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \tag{3.101}$$

Sehingga, diperoleh pendekatan formula nilai opsi saham model Black-Scholes adalah sebagi berikut,

$$V(S,t) \approx V_0(S,t) \approx \varepsilon K v_0(x,\tau) = \varepsilon K \left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\varepsilon} N\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \frac{\sigma}{\varepsilon}\sqrt{T-t} n\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

$$= (S - K)N\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) + \sigma\sqrt{T - t}Kn\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T - t}}\right) \tag{3.102}$$

Hasil yang diperoleh pada Persamaan (3.102) akan dibandingkan dengan solusi eksak yang diperoleh sebelumnya untuk mendapatkan seberapa besar hasil yang diperoleh melalui metode pendekatan sehingga diperoleh error seperti Gambar 3.2 yang diperoleh dengan bantuan Matlab pada Lampiran IV,



Gambar 3.2 Error solusi pendekatan hingga suku pertama pada model Black-Scholes terhadap solusi eksak

Gambar 3.2 menjelaskan bahwa hasil yang diperoleh hingga pendekatan suku pertama masih menghasilkan eror yang masih cukup besar, sehingga perlu dilanjutkan analisis untuk pendekatan hingga suku yang lebih tinggi. Selanjutnya akan diselidiki untuk pendekatan hingga suku kedua $v_1(x, \tau)$, berdasarkan Persamaan (3.77) dan alasan yang sama untuk mendapatkan Persamaan (3.78) maka diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial \tau}v_1(x, \tau) = x\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_0(x, \tau) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_1(x, \tau) + \alpha\frac{\partial}{\partial x}v_0(x, \tau) \tag{3.103}$$

dengan $v_1(x, 0) = 0$.

Selanjutnya akan ditentukan solusi dari Persamaan (3.103) untuk mendapatkan nilai pendekatan hingga suku kedua pada model Black-Scholes. Nilai $v_1 = \frac{\partial v_0(x,\tau)}{\partial x}$ sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tau} v_1(x,\tau) &= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v_0(x,\tau)}{\partial x}\right) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau) \\
&= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3} v_0(x,\tau) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau) \\
&= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \frac{1}{2}\tau\frac{\partial^3}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau)
\end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned}
v_1(x,\tau) &= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \frac{1}{2}\tau^2\frac{\partial^3}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \alpha \frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau) \\
&= x\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \frac{1}{2}\tau^2\frac{\partial^3}{\partial x^2} v_0(x,\tau) + \alpha\tau \frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau) \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{\tau}n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \alpha\tau N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) \qquad (3.104)
\end{aligned}$$

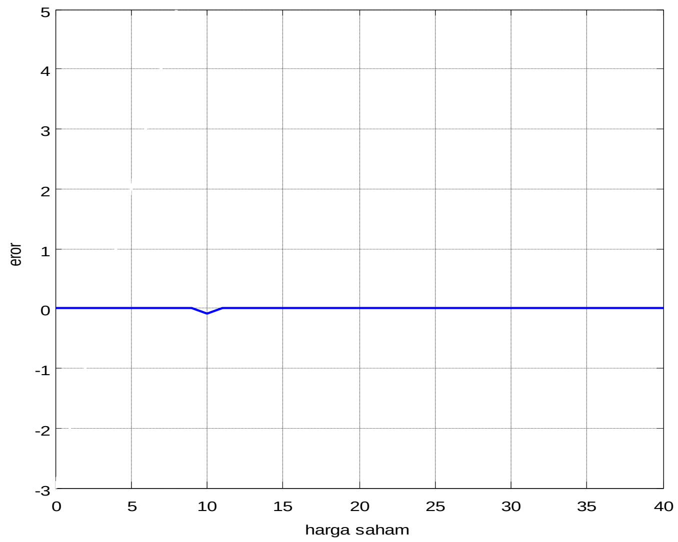
Sehingga untuk pendekatan hingga dua suku diperoleh,

$$\begin{aligned}
v(x,\tau) &\sim v_0(x,\tau) + \varepsilon v_1(x,\tau) \\
&= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}x\sqrt{\tau}n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \alpha\tau N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \\
&= (x + \varepsilon\alpha\tau)N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{2}\varepsilon x\right)n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) \qquad (3.105)
\end{aligned}$$

diperoleh pendekatan hingga suku kedua adalah,

$$\begin{aligned}
V(S,t) &= \varepsilon K v(x,\tau) \approx \varepsilon K\big(v_0(x,\tau) + v_1(x,\tau)\big) = \varepsilon K\big(v_0(x,\tau) + v_1(x,\tau)\big) \\
&= \big(S - K + rK(T-t)\big)N\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\qquad + \sigma\sqrt{T-t}(S+K)n\left(\frac{\frac{S}{K} - 1}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \qquad (3.106)
\end{aligned}$$

dengan membandingkan solusi eksak dengan Persamaan (3.106) akan diperoleh eror seperti pada Gambar 3.3 yang diperoleh dengan bantuan Matlab pada Lampiran V,



Gambar 3.3 Error solusi pendekatan hingga suku kedua pada model Black-Scholes terhadap solusi eksak

Berdasarkan plot Gambar 3.3 dapat disimpulkan bahwa pendekatan hingga suku kedua lebih baik daripada suku pertama karena menghasilkan selisi atau eror yang mendekati nol. Melihat hasil yang diperoleh melalui pendekatan *matching asymptotic expansion* pada Gambar 3.1 memiliki selisih yang tidak begitu berarti, maka metode ini cocok digunakan untuk mendapatkan pendekatan solusi dari model *CEV*.

2. Formula Nilai Opsi Saham Tipe Eropa dengan Model *CEV* Tanpa Dividen

Fisher Black menyadari bahwa formula nilai opsi saham yang diturunkannya kurang tepat karena terdapat asumsi nilai volatilitas sepanjang umur opsi saham yang diperoleh menlalui penaksiran adalah sama. Fisher Black meminta John Cox untuk mengembangkan nilai opsi saham yang dipengaruhi nilai volatilitas yang tidak konstan sepanjang umurnya atau yang dikenal sebagai model *CEV* (Randal, .

Persamaan diferensial parsial pada model *CEV* tanpa pembayaran dividen dinyatakan seperti Persamaan (3.58) yaitu,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2 \left(\frac{S}{S_0}\right)^{\beta} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Selanjutnya akan ditentukan formula nilai opsi saham pada model *CEV* pada Persamaan (3.58) dengan cara mentransformasi dalam bentuk persamaan difusi kemudian ditentukan solusinya.

a. Transformasi Persamaan Diferensial Parsial model *CEV*

Misalkan $x = \dfrac{S-K}{\varepsilon K}$ maka $\mathrm{S} = K(1 + x\varepsilon)$

sehingga

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \varepsilon K$$

atau

$$\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{\varepsilon K}$$

dengan ε merupakan bilangan bulat positif yang sangat kecil.

Misalkan

$$\tau = \frac{(T-t)\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Maka

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

didefinisikan

$$v(x,\tau) = \frac{V(S,\tau)}{\varepsilon K}$$

dengan penyingkatan penulisan

$$v = \frac{V}{\varepsilon K}$$

Maka diperoleh

$$V = \varepsilon K v \tag{3.107}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \frac{\partial V}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} \\
&= \frac{\partial V}{\partial \tau}\left(-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right), \\
&= \frac{\partial(\varepsilon K v)}{\partial \tau}\left(-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right), \\
&= \frac{\varepsilon K \partial v}{\partial \tau}\left(-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}\right), \\
&= -\frac{\sigma^2 K}{\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right).
\end{aligned} \tag{3.108}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial S} &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial S} \\
&= \frac{\partial V}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right), \\
&= \frac{\partial(\varepsilon K v)}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right), \\
&= \frac{\varepsilon K \partial v}{\partial x}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\right), \\
&= \frac{\partial v}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{3.109}$$

dan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} &= \frac{\partial(\frac{\partial v}{\partial x})}{\partial S}, \\
&= \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S}, \\
&= \frac{1}{\varepsilon K}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{3.110}$$

dengan mensubstitusi Persamaan (3.107), (3.108), (3.109), dan (3.110) ke dalam Persamaan (3.58) maka diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^{\beta}\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

$$-\frac{\sigma^2K}{\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial\tau}\right)+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{\varepsilon K}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right)+rS\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)-r\varepsilon Kv=0$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{1}{2}S^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^{\beta}\left(\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}\right)+\varepsilon\frac{r}{\sigma^2K}S\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2v$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{1}{2}{S_0}^{2-\beta}(1+\varepsilon x)^{\beta}K^{\beta-2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{r}{\sigma^2}(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2v$$

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{K}\right)^{2-\beta}(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{r}{\sigma^2}(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2v \qquad (3.111)$$

misalkan $\alpha=\frac{r}{\sigma^2}$ dan $\kappa^2=\left(\frac{S_0}{K}\right)^{2-\beta}$ maka Persamaan (3.111) dapat ditulis menjadi,

$$\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x}-\alpha\varepsilon^2v \qquad (3.112)$$

Misalkan $\tau_\beta=\tau\kappa^2$ maka

$$\partial\tau_\beta=\partial\tau\kappa^2 \qquad (3.113)$$

dengan menggunakan deret Taylor, maka ekspansi v terhadap ε adalah,

$$v(x,\tau_\beta)=\frac{V(S,\tau)}{\varepsilon K}\text{ dan }\tau_\gamma=\tau\kappa^2$$

$$v(x,\tau_\beta)=v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon\frac{\partial v_0(x,\tau_\beta)}{\partial x}+\varepsilon^2\frac{1}{2}\frac{\partial {v_0}^2(x,\tau_\beta)}{\partial x^2}+\cdots \qquad (3.114)$$

misalkan $v_1(x,\tau_\beta)=\frac{\partial v_0(x,\tau_\beta)}{\partial x}, v_2(x,\tau_\beta)=\frac{1}{2}\frac{\partial {v_0}^2(x,\tau_\beta)}{\partial x^2}, \ldots$

maka Persamaan (3.114) dapat ditulis menjadi

$$v(x,\tau_\beta)=v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon v_1(x,\tau_\beta)+\varepsilon^2v_1(x,\tau_\beta)+\cdots \qquad (3.115)$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.113) dan (3.115) ke Persamaan (3.112) akan diperoleh,

$$\kappa^2 \frac{\partial v}{\partial \tau_\beta} = \frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^\beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha\varepsilon^2 v$$

$$\begin{aligned}\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta}\left(v_0(x,\tau_\beta) + \varepsilon v_1(x,\tau_\beta) + \varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots\right) \\ = \frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(v_0(x,\tau_\beta) + \varepsilon v_1(x,\tau_\beta) + \varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots\right) \\ + \varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}\left(v_0(x,\tau_\beta) + \varepsilon v_1(x,\tau_\beta) + \varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots\right) \\ - \alpha\varepsilon^2\left(v_0(x,\tau_\beta) + \varepsilon v_1(x,\tau_\beta) + \varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) + \kappa^2\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \kappa^2\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots \\ = \left(\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^\beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta) + \frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^\beta \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta)\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^\beta \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots\right) \\ + \left(\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau_\beta) + \varepsilon^2\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta)\right. \\ \left. + \varepsilon^3\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots\right) \\ - \left(\alpha\varepsilon^2 v_0(x,\tau_\beta) + \alpha\varepsilon^3 v_1(x,\tau_\beta) + \alpha\varepsilon^4 v_1(x,\tau_\beta)\right. \\ \left. + \cdots\right) \qquad (3.116)\end{aligned}$$

dengan menggunakan deret taylor, maka $(1+\varepsilon x)^\beta$ dapat diekspansi terhadap ε menjadi

$$(1+\varepsilon x)^\beta = 1 + \beta(1+\varepsilon x)^{\beta-1}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\beta(\beta-1)(1+\varepsilon x)^{\beta-2}\varepsilon^3 + \cdots \qquad (3.117)$$

dengan ε merupakan bilangan positif kecil sehingga $\varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots$ mendekati nol sehingga Persamaan (3.117) dapat disimpulkan menjadi

$$(1+\varepsilon x)^\beta \approx 1 \qquad (3.118)$$

sehingga Persamaan (3.116) dapat berubah menjadi

$$\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta) + \frac{1}{2}\kappa^2 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta)$$
$$+ \frac{1}{2}\kappa^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots + \varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau_\beta)$$
$$+ \varepsilon^2\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) + \varepsilon^3\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$- \alpha\varepsilon^2 v_0(x,\tau_\beta) - \alpha\varepsilon^3 v_1(x,\tau_\beta) - \alpha\varepsilon^4 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$

$$\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau_\beta)\right)\varepsilon$$
$$+ \left(\frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) - \alpha v_0(x,\tau_\beta)\right)\varepsilon^2$$
$$+ \left(\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) - \alpha v_1(x,\tau_\beta)\right)\varepsilon^3 - \alpha\varepsilon^4 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$

dengan mengambil nilai yang memiliki koefisien yang sama maka akan diperoleh

$$\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) = \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta)$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta) \tag{3.119}$$

Persamaan (3.119) merupakan persamaan difusi. Selanjutnya akan ditentukan solusi dari persamaan difusi tersebut untuk mendapatkan formula nilai harga opsi saham.

b. Solusi persamaan difusi

Diberikan persamaan difusi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

dengan syarat awal

$$Q(x,0)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Persamaan (3.119) memiliki solusi yang serupa dengan Persamaan (2.30), sehingga dengan mendapatkan solusi dari persamaan difusi tersebut akan menghasilkan formula nilai opsi saham. Misalkan $f(S)=V(S)$ merupakan nilai opsi saham model *CEV*, maka dengan mengambil pemisalan

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)=\frac{v_0(x,\tau)}{\sqrt{\tau}}$$

atau

$$v_0(x,\tau)=\sqrt{\tau}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) \tag{3.120}$$

Berdasarkan Persamaan (3.113), dengan menentukan solusi dari Persamaan (3.112) yaitu $v_0(x,\tau)$ dapat digunakan untuk menentukan formula nilai opsi saham. Substitusikan Persamaan (3.113) pada Persamaan (3.112) maka diperoleh,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{\tau}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sqrt{\tau}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}}f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)+\sqrt{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right)=\frac{\sqrt{\tau}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right) \tag{3.121}$$

misalkan $\gamma=\dfrac{x}{\sqrt{\tau}}$ maka,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\gamma}{\partial\tau}&=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right),\\ &=-\frac{x}{2\tau\sqrt{\tau}},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right),$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\tau}}.$$

maka

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}} f(\gamma) + \sqrt{\tau}\frac{\partial}{\partial \tau}\big(f(\gamma)\big) = \frac{\sqrt{\tau}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(f(\gamma)\big) \tag{3.122}$$

sehingga

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{\partial f(\gamma)}{\partial \tau} = \frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \tau},$$
$$= -\frac{x}{2\tau\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma}. \tag{3.123}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{\partial f(\gamma)}{\partial x} = \frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma,}{\partial x}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma}. \tag{3.124}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) = \frac{\partial^2 f(\gamma)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\gamma)}{\partial x}\right),$$
$$= \frac{1}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f(\gamma). \tag{3.125}$$

dengan mensubstitusikan Persamaan (3.123), (3.124), dan (3.125) pada Persamaan (3.129) maka akan diperoleh,

$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}} f(\gamma) + \sqrt{\tau}\left(-\frac{x}{2\tau\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma}\right) = \frac{\sqrt{\tau}}{2}\left(\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f(\gamma)\right)$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\tau}} f(\gamma) - \frac{x}{2\tau}\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{1}{2\sqrt{\tau}}\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f(\gamma) \tag{3.126}$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan $2\sqrt{\tau}$ maka,

$$f(\gamma) - \frac{x}{\sqrt{\tau}}\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f(\gamma) \tag{3.127}$$

karena $\gamma = \dfrac{x}{\sqrt{\tau}}$ maka Persamaan (3.127)dapat ditulis menjadi

$$f(\gamma) - \gamma\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} = \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f(\gamma)$$

atau

$$\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} f(\gamma) + \gamma\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} - f(\gamma) = 0 \qquad (3.128)$$

Faktor integrasi dari Persamaan (3.128) adalah $\mu = e^{\frac{1}{2}\gamma^2}$ sehingga,

$$\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} = c_1 e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}$$

dan

$$f(\gamma) = c_1 \int_0^{\gamma} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}\, d\gamma + c_2 \qquad (3.129)$$

Jika $\lim_{\gamma \to -\infty} f = 0$ maka $-c_1 \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}\, d\gamma + c_2 = 0$

$$-c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2 = 0 \qquad (3.130)$$

Jika $\lim_{\gamma \to \infty} f = 0$ maka $c_1 \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}\, d\gamma + c_2 = 0$

$$c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} + c_2 = 1 \qquad (3.131)$$

dari Persamaan (3.130) dan (3.131) maka dapat ditentukan nilai c_1 dan c_2 yaitu

diperoleh nilai $\begin{cases} c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \\ c_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

sehingga, Persamaan (3.129) dapat dinyatakan sebagai

$$f(\gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2}\, d\gamma$$

Misalkan

$$G(x,\tau) = \frac{\partial}{\partial x} f(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2} \qquad (3.132)$$

dan

$$v_0(x,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y,\tau)\,\emptyset(y)dy \tag{3.133}$$

berdasarkan sifat persamaan difusi maka Persamaan (3.133) juga merupakan solusi yang memenuhi syarat awal $v_0(x,0) = maks(x,0) = \emptyset(x)$. Berdasarkan Persamaan (3.132) dan (3.133) maka diperoleh

$$\begin{aligned} v_0(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} maks(y,0)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}} dy \end{aligned} \tag{3.134}$$

misalkan $z = \frac{x-y}{\sqrt{\tau}}$ maka $dz = -\frac{1}{\sqrt{\tau}}dy$ atau $y = x - z\sqrt{\tau}$ sehingga

$$\begin{aligned} v_0(x,\tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} \left(x - z\sqrt{\tau}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}\left(-\sqrt{\tau}dz\right), \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} \left(x - z\sqrt{\tau}\right)e^{-\frac{z^2}{2}} dz, \\ &= x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\right) - \frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{\tau}}} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz, \\ &= x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} N\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)\right) - \sqrt{\tau}\left[0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\frac{x}{\sqrt{\tau}}^2}{2}}\right], \\ &= xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\,n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right). \end{aligned} \tag{3.135}$$

dengan cara yang sama untuk mendapatkan Persamaan (3.105) akan diperoleh

$$\begin{aligned} v(x,\tau) &= v_0(x,\tau) + \varepsilon v_1(x,\tau) \\ &= (x + \varepsilon\alpha\tau)N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) + \kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\beta x\right)n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) \end{aligned} \tag{3.136}$$

dengan mensubstitusi pemisalan variabel pada Persamaan (3.136) akan diperoleh formula nilai harga opsi saham model *CEV* seperti berikut,

$$
\begin{aligned}
V(S,t) &= \varepsilon K\left((x+\alpha\tau)N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right)+\kappa\sqrt{\tau}\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\beta x\right)n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right)\right),\\
&= \varepsilon K(x+\varepsilon\alpha\tau)N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right)+\varepsilon K\kappa\sqrt{\tau}\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\beta x\right)n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right),\\
&= \varepsilon K\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}+\varepsilon\frac{r}{\sigma^2}(T-t)\right)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right)\\
&\qquad\qquad + \varepsilon K\kappa\sqrt{\tau}\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon\beta\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right),\\
&= \varepsilon K\left(\frac{S-K+\varepsilon^2 K\frac{r}{\sigma^2}(T-t)}{\varepsilon K}\right)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right)\\
&\qquad\qquad + \varepsilon K\kappa\sqrt{\tau}\left(\frac{4+\beta\left(\frac{S-K}{K}\right)}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right),\\
&= \big(S-K+rK(T-t)\big)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\
&\qquad\qquad + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S+(4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}
$$

dengan demikian diperoleh nilai opsi saham model *CEV* adalah sebagai berikut,

$$
\begin{aligned}
C(S,t) &= \big(S-K+rK(T-t)\big)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\
&\qquad + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S+(4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \qquad (3.137)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan *put-call parity* dan Persamaan (3.137) dapat diperoleh formula nilai opsi saham jual yaitu,

$$P(S,t) = \left(S - K + rK(T-t)\right)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$+ \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S + (4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$+ K\exp\left(-r(T-t)\right) - S \qquad (3.138)$$

3. Formula Nilai Opsi Saham tipe Eropa dengan Model *CEV* dengan Dividen

Persamaan diferensial parsial pada model *CEV* dengan pembayaran dividen dinyatakan seperti Persamaan (3.59) yaitu,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_0^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^\beta \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0$$

Selanjutnya akan ditentukan formula nilai opsi saham pada model *CEV* pada Persamaan (3.138) dengan cara mentransformasi dalam bentuk persamaan difusi kemudian ditentukan solusinya.

a. Transformasi Persamaan Diferensial Parsial model *CEV*

Substitusi Persamaan (3.107), (3.108), (3.109), dan (3.110) ke dalam Persamaan (3.59) maka diperoleh

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^\beta \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r-D)S\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

$$-\frac{\sigma^2 K}{\varepsilon}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^\beta\left(\frac{1}{\varepsilon K}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + (r-D)S\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) - r\varepsilon K v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}S^2\left(\frac{S}{S_0}\right)^\beta\left(\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \varepsilon\frac{r-D}{\sigma^2 K}S\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{1}{2}{S_0}^{2-\beta}(1+\varepsilon x)^\beta K^{\beta-2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{r-D}{\sigma^2}(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2 v$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{K}\right)^{2-\beta}(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon\frac{r}{\sigma^2}(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{r}{\sigma^2}\varepsilon^2 v \qquad (3.139)$$

misalkan $\alpha=\frac{r-D}{\sigma^2}$, $d=\frac{D}{\sigma^2}$ dan $\kappa^2=\left(\frac{S_0}{K}\right)^{2-\beta}$ maka Persamaan (3.139) dapat ditulis menjadi,

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x}-(\alpha+d)\varepsilon^2 v \qquad (3.140)$$

Pemisalan τ_β seperti Persamaan (3.112) dan ekspansi v terhadap ε akan menghasilkan persamaan yang serupa dengan Persamaan (3.115). Substitusi Persamaan (3.113) dan (3.115) ke Persamaan (3.140) akan diperoleh,

$$\begin{aligned}
\kappa^2\frac{\partial v}{\partial \tau_\beta}&=\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial v}{\partial x}-(\alpha+d)\varepsilon^2 v\\
\kappa^2\frac{\partial}{\partial \tau_\beta}\big(v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon v_1(x,\tau_\beta)+\varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta)+\cdots\big)&\\
&=\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big(v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon v_1(x,\tau_\beta)+\varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta)+\cdots\big)\\
&\quad+\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}\big(v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon v_1(x,\tau_\beta)+\varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta)+\cdots\big)\\
&\quad-(\alpha+d)\varepsilon^2\big(v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon v_1(x,\tau_\beta)+\varepsilon^2 v_1(x,\tau_\beta)+\cdots\big)\\
\kappa^2\frac{\partial}{\partial \tau_\beta}v_0(x,\tau_\beta)+\kappa^2\varepsilon\frac{\partial}{\partial \tau_\beta}v_1(x,\tau_\beta)+\kappa^2\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial \tau_\beta}v_1(x,\tau_\beta)+\cdots&\\
&=\bigg(\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_0(x,\tau_\beta)+\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_1(x,\tau_\beta)\\
&\quad+\frac{1}{2}\kappa^2(1+\varepsilon x)^{\beta}\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}v_1(x,\tau_\beta)+\cdots\bigg)\\
&\quad+\bigg(\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_0(x,\tau_\beta)+\varepsilon^2\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_1(x,\tau_\beta)\\
&\quad+\varepsilon^3\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x}v_1(x,\tau_\beta)+\cdots\bigg)\\
&\quad-\big((\alpha+d)\varepsilon^2 v_0(x,\tau_\beta)+(\alpha+d)\varepsilon^3 v_1(x,\tau_\beta)+(\alpha+d)\varepsilon^4 v_1(x,\tau_\beta)\\
&\quad+\cdots\big)
\end{aligned} \qquad (3.141)$$

Berdasarkan Persamaan (3.18) diperoleh $(1+\varepsilon x)^{\beta}$ yang diekspansi terhadap ε dan menghasilkan nilai yang setara dengan satu, sehingga Persamaan (3.141) dapat berubah menjadi

$$\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$= \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta) + \frac{1}{2}\kappa^2 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \frac{1}{2}\kappa^2 \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$+\varepsilon\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau_\beta) + \varepsilon^2\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) + \varepsilon^3\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$-(\alpha+d)\varepsilon^2 v_0(x,\tau_\beta) - (\alpha+d)\varepsilon^3 v_1(x,\tau_\beta) - (\alpha+d)\varepsilon^4 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$
$$\Leftrightarrow \kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \kappa^2 \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_1(x,\tau_\beta) + \cdots = \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta)$$
$$+\left(\frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_0(x,\tau_\beta)\right)\varepsilon$$
$$+\left(\frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_1(x,\tau_\beta) + \alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) - (\alpha+d) v_0(x,\tau_\beta)\right)\varepsilon^2$$
$$+\left(\alpha(1+\varepsilon x)\frac{\partial}{\partial x} v_1(x,\tau_\beta) - (\alpha+d) v_1(x,\tau_\beta)\right)\varepsilon^3 - (\alpha+d)\varepsilon^4 v_1(x,\tau_\beta) + \cdots$$

dengan mengambil nilai yang memiliki koefisien yang sama maka akan diperoleh

$$\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) = \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta)$$

atau

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\beta} v_0(x,\tau_\beta) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} v_0(x,\tau_\beta) \qquad (3.142)$$

Persamaan (3.142) merupakan persamaan difusi. Selanjutnya akan ditentukan solusi dari persamaan difusi tersebut untuk mendapatkan formula nilai harga opsi saham.

c. Solusi persamaan difusi

Persamaan (3.142) akan menghasilkan solusi seperti pada persamaan (3.135) yaitu

$$v_0(x,\tau) = xN\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right) + \sqrt{\tau}\, n\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right)$$

dengan cara yang sama untuk mendapatkan Persamaan (3.105) dan (3.136) dapat diperoleh persamaan ekspansi $v(x,\tau)$ hingga suku kedua yaitu,

$$
\begin{aligned}
v(x,\tau) &= v_0(x,\tau) + \varepsilon v_1(x,\tau) \\
&= (x + \varepsilon\alpha\tau) N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) + \kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\beta x\right) n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) \qquad (3.143)
\end{aligned}
$$

dengan mensubstitusi pemisalan variabel pada Persamaan (3.143) akan diperoleh formula nilai harga opsi saham model *CEV* seperti berikut,

$$
\begin{aligned}
V(S,t) &= \varepsilon K\left((x + \alpha\tau) N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) + \kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\beta x\right) n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right)\right), \\
&= \varepsilon K(x + \varepsilon\alpha\tau) N\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right) + \varepsilon K\kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\beta x\right) n\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{\tau}}\right), \\
&= \varepsilon K\left(\frac{S-K}{\varepsilon K} + \varepsilon\frac{r-D}{\sigma^2}(T-t)\right) N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&\qquad + \varepsilon K\kappa\sqrt{\tau}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon\beta\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)\right) n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right), \\
&= \varepsilon K\left(\frac{S - K + \varepsilon^2 K\frac{r-D}{\sigma^2}(T-t)}{\varepsilon K}\right) N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right) \\
&\qquad + \varepsilon K\kappa\sqrt{\tau}\left(\frac{4 + \beta\left(\frac{S-K}{K}\right)}{4}\right) n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{\varepsilon K}\right)}{\sqrt{\tau}}\right), \\
&= \big(S - K + (r-D)K(T-t)\big) N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \\
&\qquad + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S + (4-\beta)K}{4}\right) n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
\end{aligned}
$$

dengan demikian diperoleh nilai opsi saham model *CEV* adalah sebagai berikut,

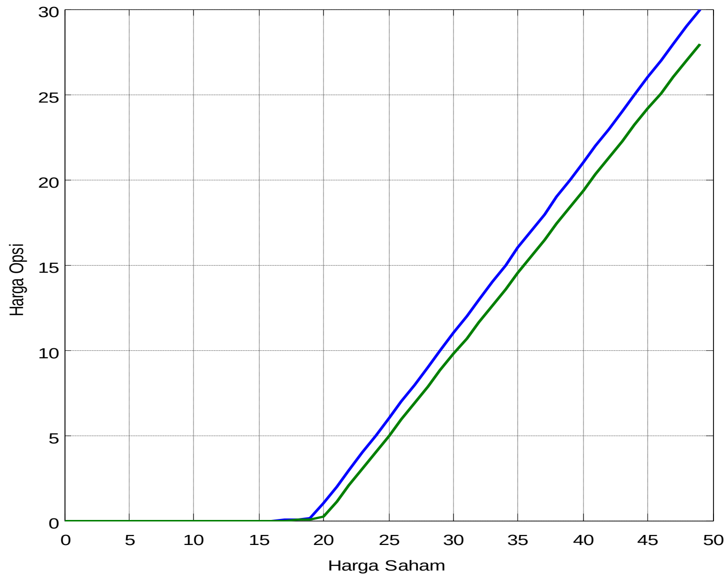
$$C(S,t) = \big(S - K + (r - D)K(T - t)\big)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S + (4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (3.144)$$

Berdasarkan Persamaan (2.6) dan Persamaan (3.144) dapat diperoleh formula nilai opsi saham jual yaitu,

$$P(S,t) = \big(S - K + (r - D)K(T - t)\big)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S + (4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + K\exp\big(-r(T-t)\big) - S \quad (3.145)$$

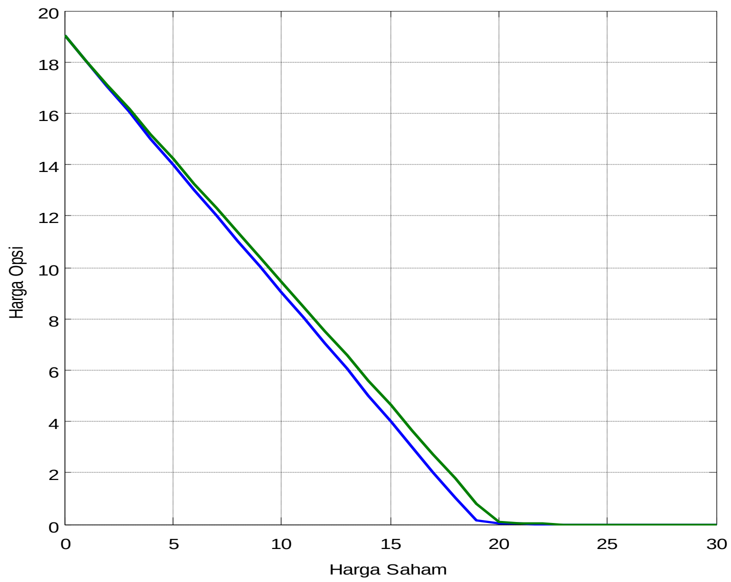
C. Simulasi dan Intepretasi

Berdasarkan Persamaan (3.31) dan (3.42) dapat diperoleh grafik pada Gambar 3.4 yang menujukkan pengaruh dividen akan menurunkan nilai opsi saham. Dividen menyebabkan harga saham jatuh, dengan demikian akan berdampak dengan berkurangnya nilai opsi saham. Gambar 3.4 berikut dapat menggambarkan pengaruh dividen akan menyebabkan nilai opsi saham turun dengan input parameter harga eksekusi $K = 20,$ tingkat bunga bebas risiko $r = 0.07,$ volatilitas $\sigma = 0.25$, umur opsi saham $T = 0.1,$ dan dividen yang dibayarkan selama umur opsi saham adalah $D = 0.21.$



Gambar 3.4 Grafik nilai opsi saham beli model Black-Scholes tanpa dividen (biru) dan grafik dengan dividen (hijau)

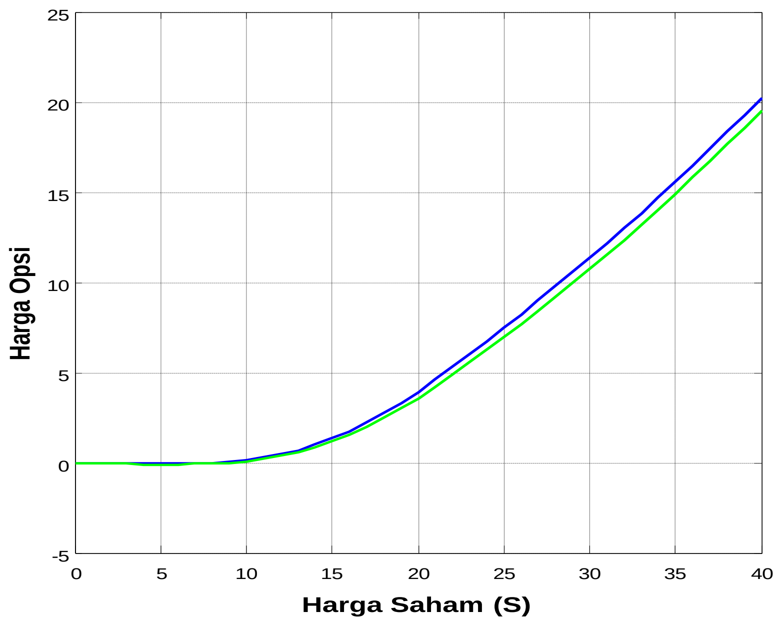
dengan menggunakan faktor input yang sama maka dapat diperoleh hasil yang dapat dilihat pada Gambar 3.5 yang menunjukkan grafik opsi saham jual model Black-Scholes,



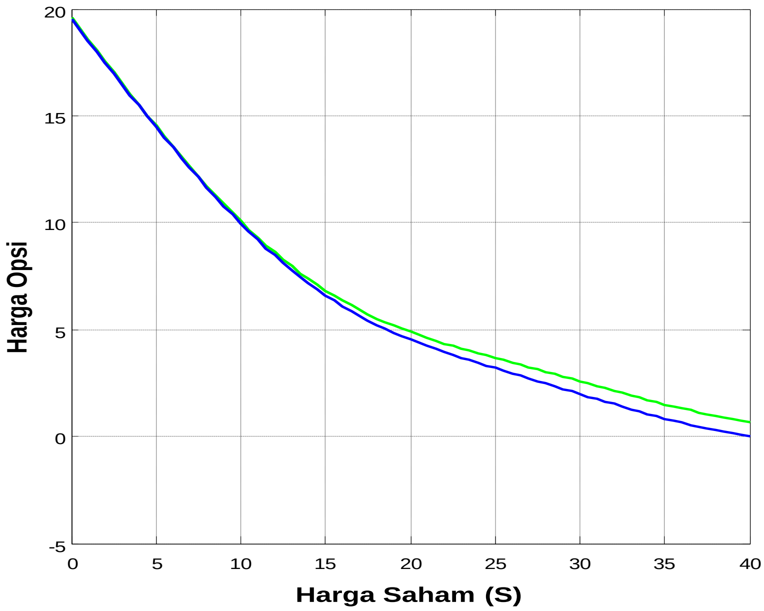
Gambar 3.5 Grafik opsi saham jual Black-Scholes tanpa dividen (biru) dan dengan dividen (hijau)

Gambar 3.5 menujukkan bahwa pengaruh pembayaran dividen akan menyebabkan nilai opsi saham pada opsi saham jual naik. Hal tersebut ditunjukkan dengan grafik berwarna hijau yang berada diatas garis berwarna biru dimana grafik warna hijau mewakili nilai opsi saham dengan pembayaran dividen dan grafik warna biru mewakili nilai opsi saham yang tidak ada pembayaran dividen. Secara teori hasil tersebut sesuai yang diharapkan, dimana jumlah dividen yang dibayarkan akan menyebabkan nilai harga saham turun sehingga akan menyebabkan harga opsi saham beli juga turun, sedangkan pada harga opsi saham jual akan meningkat.

Sedangkan pengaruh dividen terhadap model *CEV* dapat dilihat seperti Gambar 3.6 untuk opsi saham beli dan Gambar 3.7 untuk opsi saham jual seperti berikut,



Gambar 3.6 Grafik nilai opsi saham beli model *CEV* tanpa dividen (biru) dan dengan dividen (hijau)



Gambar 3.7 Grafik nilai opsi saham jual model *CEV* tanpa dividen (biru) dan dengan dividen (hijau)

Berdasarkan Gambar 3.6 dan Gambar 3.7 dapat disimpulkan bahwa pembayaran dividen pada model *CEV* juga akan menyebakan nilai opsi saham beli turun dan opsi saham jual naik. Formula nilai opsi saham yang diperoleh dapat digunakan investor untuk mempertimbangkan sebuah keputusan dalam berinvestasi. Selanjutnya akan dibahas mengenai penggunaan dari formula nilai opsi saham model Black-Scholes maupun *CEV*.

D. Aplikasi

Hasil yang diperoleh melalui perhitungan menggunakan penurunan model opsi saham baik model Black-Scholes maupun *CEV* bukan merupakan cara yang bisa digunakan untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal akan tetapi hasil yang diperoleh dapat digunakan untuk pertimbangan dalam mengambil keputusan. Manfaat dari perhitungan akan dijelaskan pada permasalah berikut,

1. Opsi saham Beli

Diketahui harga saham MSFT di bursa amerika pada tanggal 1 Juni 2014 adalah $40.94, nilai volatilitas harga saham adalah 0.04 (penghitungan penaksiran volatilitas pada lampiran II), tingkat suku bunga Amerika pada saat itu adalah 0.25%, waktu jatuh tempo opsi saham tersebut sampai tanggal 16 Agustus 2014 (umur surat kontrak opsi saham = 78 hari), dividen yang dibayarkan selama umur opsi saham adalah 0.5% dan harga pelaksanaan seperti pada Tabel 3.2,

Tabel 3.2 Rekomendasi Sikap Investor Opsi saham Beli Saham Microsoft Corporation

Harga Eksekusi	Harga Opsi saham Beli di Pasar	Harga Opsi saham Beli Model BS		Saran	Harga Opsi saham Beli Model *CEV*		Saran
		Tanpa dividen	Dengan dividen		Tanpa dividen	Dengan dividen	
29.00	10.57	13.3543	13.0743	Beli	13.4893	13.2902	Beli
34.00	7.00	8.5982	8.3182	Beli	8.7564	8.5574	Beli
35.00	6.00	7.6470	7.3670	Beli	7.8099	7.6108	Beli
36.00	4.45	6.6957	6.4157	Beli	6.8633	6.66421	Beli
37.00	3.65	5.7445	5.4645	Beli	5.9167	5.7176	Beli
38.00	3.32	4.7933	4.5133	Beli	4.9701	4.7711	Beli
39.00	2.59	3.8421	3.5621	Beli	4.0236	3.8245	Beli
40.00	1.90	2.8908	2.6108	Beli	3.0770	2.8779	Beli
41.00	1.36	1.9403	1.6620	Beli	2.1304	1.9313	Beli
42.00	0.92	1.0169	0.7705	Beli*	1.1838	0.9847	Beli
43.00	0.58	0.3110	0.1856	Jual	0.2373	0.0382	Jual

Jika hasil perhitungan lebih besar dari nilai opsi yang ditawarkan, maka tidakan yang sebaiknya dilakukan investor adalah beli. Sebaliknya, jika hasil perhitungan yang ditawarkan lebih kecil dari nilai opsi yang ditawarkan maka sebaiknya tindakan yang diambil adalah jual.

Keterangan:

Beli* : investor disarankan membeli opsi saham beli hanya jika diketahui tidak ada dividen yang dibayarkan, karena jika terdapat pembayaran dividen maka nilai opsi saham melalui perhitungan lebih rendah dari harga yang ditawarkan.

2. Opsi saham Jual

Diketahui harga saham MSFT di bursa amerika pada tanggal 1 Juni 2014 adalah $40.94, nilai volatilitas harga saham adalah 0.04 (penghitungan penaksiran volatilitas pada lampiran II), tingkat suku bunga Amerika pada saat itu adalah 0.25%, waktu jatuh tempo opsi saham tersebut sampai tanggal 16 Agustus 2014 (umur surat kontrak opsi saham = 78 hari), dividen yang dibayarkan selama umur opsi saham adalah 0.5% dan harga pelaksanaan seperti pada Tabel 3.3,

Tabel 3.3 Rekomendasi Sikap Investor Opsi saham Jual Saham Microsoft Corporation

Harga Eksekusi	Harga Opsi saham jual di Pasar	Harga Opsi saham Jual Model BS		Saran	Harga Opsi saham Jual Model *CEV*		Saran
		Tanpa dividen	Dengan dividen		Tanpa dividen	Dengan dividen	
29.00	**0.03**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.02410	0.04066	Beli*
34.00	**0.08**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03111	0.04766	Jual
35.00	**0.13**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03251	0.04907	Jual
36.00	**0.19**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03391	0.0505	Jual
37.00	**0.29**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03531	0.0519	Jual
38.00	**0.44**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03671	0.0533	Jual
39.00	**0.66**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03812	0.0547	Jual
40.00	**0.98**	**0.0000**	**0.0000**	Jual	0.03952	0.0561	Jual
41.00	**1.43**	**0.0007**	**0.0024**	Jual	0.04092	0.0575	Jual
42.00	**2.04**	**0.0286**	**0.0621**	Jual	0.04232	0.0589	Jual
43.00	**3.30**	**0.2738**	**0.4284**	Jual	0.04372	0.0603	Jual

Jika hasil perhitungan lebih besar dari nilai opsi yang ditawarkan, maka tidakan yang sebaiknya dilakukan investor adalah beli. Sebaliknya, jika hasil perhitungan yang ditawarkan lebih kecil dari nilai opsi yang ditawarkan maka sebaiknya tindakan yang diambil adalah jual.

Keterangan:

Beli* : investor disarankan membeli opsi saham jual jika diketahui ada dividen yang dibayarkan, karena jika terdapat pembayaran dividen maka nilai opsi saham jual melalui perhitungan lebih tinggi dari harga yang ditawarkan.

BAB IV
Penutup

A. Kesimpulan

Formula nilai opsi saham beli dengan pembayaran dividen dinyatakan sebagai berikut,

$$C(S,t) = \big(S - K + (r-D)K(T-t)\big)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S + (4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

sedangkan untuk opsi saham jual adalah sebagai berikut,

$$P(S,t) = \big(S - K + (r-D)K(T-t)\big)N\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + \kappa\sigma\sqrt{T-t}\left(\frac{\beta S + (4-\beta)K}{4}\right)n\left(\frac{\kappa\left(\frac{S-K}{K}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) + K\exp\big(-r(T-t)\big) - S.$$

Dividen menyebabkan harga opsi saham beli tipe Eropa baik model Black-Scholes maupun model *CEV* menjadi turun, sedangkan pada opsi saham jual nilainya mengalami kenaikan. Hasil tersebut dapat dilihat melalui grafik yang menunjukkan bahwa grafik dengan rumus nilai opsi saham beli menggunakan dividen selalu berada dibawah grafik nilai opsi saham beli tanpa dividen. Sedangkan hasil grafik dengan rumus nilai opsi saham jual menggunakan dividen selalu berada diatas grafik nilai opsi saham jual tanpa dividen.

B. Saran

Hasil yang diperoleh dari model *CEV* masih banyak dinyatakannya dalam berbagai versi, antara lain menurut John Cox, Mark Schoder, dan Stan Becker. Menurut John Cox memperkenalkan nilai opsi saham mengguanakan fungsi Bessel. Mark Schoder mengenalkan nilai opsi saham yang didekati dengan distribusi chi square non-central. Sedangkan Stan Becker mengenalkan penilain harga opsi saham model *CEV* yang dikembangkan pada kasus yang lebih khusus yaitu model absolut (ketika nilai parameter volatilitasnya sama dengan nol) dan square root (ketika nilai parameter volatilitasnya sama dengan satu). Penulisan skripsi ini hanya sebatas pada pendekatan harga opsi saham pada tipe Eropa menggunakan *perturbation theory* dengan melihat pembayaran faktor dividen, untuk penulisan selanjutnya dapat dikembangkan pada tipe Amerika atau versi lain yang telah disebutkan sebelumnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, Robert G., dan Donald R. Sherbert. *Introduction To Real Analysis Third Edition*. USA: John Wiley & Sons.

Beckers, Stan. 1980. 'The Constant Elasticity of Variance and Its Implications for Option Pricing', *Journal Of Finance* Vol 35, No 3, halaman 661-673.

Baisuni. 1986. *Kalkulus*. Jakarta: Universitas Indonesia.

Bursa Efek Indonesia. *Indonesia Stock Exchange*. 1 Juni 2014. http://www.idx.co.id/id-id/beranda/produkdanlayanan/derivatif.aspx

Fika Hanna Mayasari. 2013. *Penentuan Harga Opsi saham Tipe Eropa Menggunakan Constant Elasticity of Variance (CEV)*. Skripsi. UNY

Higham, Desmond J. 2004. *An Introduction To Financial Option Valuation*. UK: Cambridge University Press.

Howison, Sam. 2005. *Matched Asymptotic Expansions in Financial Engineering*. Jurnal.

Hsu, Y., L., T.I. Lin., dan C.F. Lee. 2007. 'Constant Elasticity of Variance (*CEV*) Option Pricing Model: Integration and Detailed Derivation', *Mathematics and Computers in Simulation*, halaman 60-71.

Holmes, Mark. 1995. *Introduction To Perturbation Methods*. New York:Springer.

Hull, J.,C. 2009. *Option, Futures, and other Derivatives (7th ed)*. New Jersey: Prentice-Hall.

Randal, John. 1998. *The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model*. Thesis.

Jong, Lieke De. 2010. *Option Pricing with Perturbation Methods*. Thesis. Delft Institute and Applied Mathematics.

Luenberger, David G. 1998. *Investment Science*. New York: Oxford University Press

Ross, Sheldon M. 2010. *Introduction to Probability Models (10^{th} ed)*. UK: Elsevier.

Ross, Sheldon. 2010. *A First Course in Probability (8^{th}ed).* New Jersey: Pratince-Hall.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equation Third Edition*. Singapore: John Wiley & Sons.

Sataphaty, Gayatri. *Asymptotic Expansions Methods for Singularly Perturbation Problem*. Thesis. National Institute of Technologi Rourkela India.

Schroder, Mark. 1989. ‘Computing the Constant Elasticity of Variance Option Pricing Formula’, *Journal of finance* Vol 44, No 1, halaman 211-219.

Strauss, Walter A. *Partial Differential Equations: An Introduction*. USA: John Wiley & Sons.

Taha, Hamdy A. 2007. *Operation Research: An Introduction (8^{th} ed).* United States of America: Pearson Education.

Taylor, H., M., dan Karlin. 1998. *An Introduction to Stochastic Modeling*. San Diego: Academic Press.

http://finance.yahoo.com/q/hp?s=MSFT&a=05&b=3&c=2013&d=05&e=3&f=2014&g=d diakses tanggal 1 Juni 2014 pukul 09.30 WIB

http://finance.yahoo.com/q/op?s=MSFT&m=2014-07-19 diakses tanggal 1 Juni 2014 pukul 08:45

http://finance.yahoo.com/q/op?s=MSFT&m=2014-07-19 diakses tanggal 1 Juni 2014 pukul 08.53

Lampiran

LAMPIRAN I

DATA HARGA PENUTUPAN SAHAM HARIAN MICROSOFT CORPORATION (MSFT)

Periode 3 Juni 2013 - 2 Juni 2014[1]

(Data Harga dalam Dollar)

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
(1)	(2)	(3)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
02-06-2014	40.95	41.09	40.68	40.79	18494200	40.79	-0.00367063	-0.004327177	1.872446E-05
30-05-2014	40.45	40.97	40.25	40.94	34567600	40.94	0.014764048	0.014107498	0.000199021
29-05-2014	40.15	40.35	39.91	40.34	19888200	40.34	0.00821411	0.00755756	5.71167E-05
28-05-2014	40.14	40.19	39.82	40.01	25711500	40.01	-0.00448879	-0.005145336	2.64745E-05
27-05-2014	40.26	40.26	39.81	40.19	26160600	40.19	0.001743245	0.001086695	1.18091E-06
23-05-2014	40.37	40.37	40	40.12	18020000	40.12	0.000498629	-0.000157921	2.49391E-08
22-05-2014	40.29	40.35	39.85	40.1	20201800	40.1	-0.00621506	-0.00687161	4.7219E-05
21-05-2014	39.8	40.35	39.74	40.35	22398700	40.35	0.016744112	0.016087562	0.00025881
20-05-2014	39.68	39.94	39.46	39.68	21320900	39.68	-0.00176256	-0.002419109	5.85209E-06
19-05-2014	39.61	39.82	39.46	39.75	24524100	39.75	-0.00201056	-0.002667106	7.11345E-06
16-05-2014	39.67	39.84	39.27	39.83	29867100	39.83	0.005791279	0.005134729	2.63654E-05

[1] http://finance.yahoo.com/q/hp?s=MSFT&a=05&b=3&c=2013&d=05&e=3&f=2014&g=d diakses tanggal 1 Juni 2014 pukul 09.30 WIB

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
15-05-2014	40.09	40.4	39.51	39.6	37777200	39.6	-0.01603241	-0.016688958	0.000278521
14-05-2014	40.3	40.45	40.05	40.24	18805400	40.24	-0.00446319	-0.005119736	2.62117E-05
13-05-2014	39.92	40.5	39.85	40.42	27004800	40.42	0.018225445	0.017568895	0.000308666
12-05-2014	39.74	40.02	39.65	39.97	22782600	39.69	0.010893078	0.010236528	0.000104787
09-05-2014	39.54	39.85	39.37	39.54	29647600	39.26	-0.00254388	-0.003200433	1.02428E-05
08-05-2014	39.34	39.9	38.97	39.64	32120400	39.36	0.00560511	0.00494856	2.44882E-05
07-05-2014	39.22	39.51	38.51	39.42	41744500	39.14	0.008982481	0.008325931	6.93211E-05
06-05-2014	39.29	39.35	38.95	39.06	27112400	38.79	-0.00923794	-0.009894491	9.7901E-05
05-05-2014	39.52	39.64	39.3	39.43	22460900	39.15	-0.00661917	-0.007275719	5.29361E-05
02-05-2014	40.31	40.34	39.66	39.69	43416600	39.41	-0.00783525	-0.008491798	7.21106E-05
01-05-2014	40.24	40.36	39.95	40	28787400	39.72	-0.01002012	-0.010676674	0.000113991
30-04-2014	40.4	40.5	40.17	40.4	35458700	40.12	-0.00273802	-0.003394573	1.15231E-05
29-04-2014	41.1	41.19	40.39	40.51	29636200	40.23	-0.00866235	-0.009318898	8.68419E-05
28-04-2014	40.14	41.29	40.09	40.87	50610200	40.58	0.023688927	0.023032377	0.00053049
25-04-2014	40.29	40.68	39.75	39.91	56876800	39.63	0.001262467	0.000605917	3.67135E-07
24-04-2014	39.74	39.97	39.3	39.86	42381600	39.58	0.004304349	0.003647799	1.33064E-05
23-04-2014	39.99	39.99	39.47	39.69	24602800	39.41	-0.00758345	-0.008240004	6.78977E-05
22-04-2014	39.96	40.14	39.83	39.99	27056700	39.71	0.001259922	0.000603372	3.64058E-07
21-04-2014	40.13	40.15	39.79	39.94	22221200	39.66	-0.00176345	-0.002419997	5.85638E-06
17-04-2014	40.01	40.2	39.51	40.01	36689400	39.73	-0.00976839	-0.010424943	0.000108679
16-04-2014	40.06	40.42	39.91	40.4	30615800	40.12	0.016334073	0.015677523	0.000245785
15-04-2014	39.34	39.96	39.05	39.75	33968700	39.47	0.014289603	0.013633053	0.00018586
14-04-2014	39.11	39.41	38.9	39.18	32006600	38.91	-0.00077071	-0.001427263	2.03708E-06

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
11-04-2014	39	39.79	39	39.21	34330200	38.94	-0.00358883	-0.004245377	1.80232E-05
10-04-2014	40.44	40.69	39.09	39.36	45960800	39.08	-0.02800738	-0.028663931	0.000821621
09-04-2014	39.93	40.55	39.88	40.47	27398700	40.19	0.016305391	0.015648841	0.000244886
08-04-2014	39.75	39.93	39.2	39.82	35918600	39.54	0.000505945	-0.000150605	2.26819E-08
07-04-2014	39.96	40.27	39.74	39.8	37559600	39.52	-0.00176969	-0.002426238	5.88663E-06
04-04-2014	41.25	41.39	39.64	39.87	51409600	39.59	-0.02814281	-0.028799361	0.000829403
03-04-2014	41.29	41.29	40.71	41.01	30139600	40.72	-0.00831504	-0.008971589	8.04894E-05
02-04-2014	41.44	41.66	41.17	41.35	28666700	41.06	-0.00170337	-0.002359921	5.56923E-06
01-04-2014	41.15	41.59	41.07	41.42	32605000	41.13	0.01050969	0.00985314	9.70844E-05
31-03-2014	40.43	41.5	40.4	40.99	46886300	40.7	0.016848763	0.016192213	0.000262188
28-03-2014	39.79	40.64	39.68	40.3	43472700	40.02	0.023768502	0.023111952	0.000534162
27-03-2014	39.74	39.97	39.34	39.36	35369200	39.08	-0.01094298	-0.011599527	0.000134549
26-03-2014	40.48	40.71	39.6	39.79	41977500	39.51	-0.01382453	-0.014481076	0.000209702
25-03-2014	40.66	40.99	39.96	40.34	43193100	40.06	-0.00398605	-0.004642604	2.15538E-05
24-03-2014	40.34	40.64	39.86	40.5	46098400	40.22	0.008489439	0.007832889	6.13542E-05
21-03-2014	40.72	40.94	40.01	40.16	80721800	39.88	-0.00425373	-0.004910278	2.41108E-05
20-03-2014	39.25	40.65	39.24	40.33	59269800	40.05	0.026823471	0.026166921	0.000684708
19-03-2014	39.47	39.55	38.91	39.27	35597200	38.99	-0.00715567	-0.007812216	6.10307E-05
18-03-2014	38.26	39.9	38.22	39.55	64063900	39.27	0.038681007	0.038024457	0.001445859
17-03-2014	37.9	38.41	37.79	38.05	20479600	37.78	0.00904021	0.00838366	7.02858E-05
14-03-2014	37.65	38.14	37.51	37.7	27195600	37.44	-0.00479617	-0.005452722	2.97322E-05
13-03-2014	38.42	38.45	37.64	37.89	32169700	37.62	-0.01005034	-0.010706886	0.000114637
12-03-2014	37.8	38.43	37.79	38.27	30494100	38	0.006600684	0.005944134	3.53327E-05

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
11-03-2014	37.87	38.23	37.72	38.02	25216400	37.75	0.005045821	0.004389271	1.92657E-05
10-03-2014	37.99	38.01	37.72	37.82	19006600	37.56	-0.00186195	-0.0025185	6.34284E-06
07-03-2014	38.28	38.36	37.69	37.9	26591600	37.63	-0.00662166	-0.007278214	5.29724E-05
06-03-2014	38.14	38.24	37.89	38.15	23582200	37.88	0.001056524	0.000399974	1.59979E-07
05-03-2014	38.25	38.27	37.93	38.11	20520100	37.84	-0.00789686	-0.008553406	7.31608E-05
04-03-2014	38.2	38.48	38.07	38.41	26802400	38.14	0.016389476	0.015732926	0.000247525
03-03-2014	37.92	38.13	37.49	37.78	29717500	37.52	-0.01376411	-0.014420664	0.000207956
28-02-2014	37.98	38.46	37.82	38.31	41215000	38.04	0.01190018	0.01124363	0.000126419
27-02-2014	37.45	37.89	37.23	37.86	33903400	37.59	0.010160515	0.009503965	9.03254E-05
26-02-2014	37.58	37.74	37.19	37.47	41041800	37.21	-0.00187945	-0.002535997	6.43128E-06
25-02-2014	37.61	37.85	37.35	37.54	30736500	37.28	-0.00401553	-0.004672082	2.18284E-05
24-02-2014	37.69	37.98	37.54	37.69	32085100	37.43	-0.00745279	-0.008109339	6.57614E-05
21-02-2014	37.94	38.35	37.86	37.98	38021300	37.71	0.005851081	0.005194531	2.69831E-05
20-02-2014	37.57	37.87	37.4	37.75	27526100	37.49	0.006422286	0.005765736	3.32437E-05
19-02-2014	37.22	37.75	37.21	37.51	29750400	37.25	0.002419031	0.001762481	3.10634E-06
18-02-2014	37.63	37.78	37.41	37.42	32834000	37.16	0.002155173	0.001498623	2.24587E-06
14-02-2014	37.39	37.78	37.33	37.62	31407500	37.08	0.000269724	-0.000386826	1.49635E-07
13-02-2014	37.33	37.86	37.33	37.61	37635500	37.07	0.003783788	0.003127238	9.77962E-06
12-02-2014	37.35	37.6	37.3	37.47	27051800	36.93	0.008156652	0.007500102	5.62515E-05
11-02-2014	36.88	37.26	36.86	37.17	32141400	36.63	0.009876623	0.009220073	8.50098E-05
10-02-2014	36.63	36.8	36.29	36.8	26767000	36.27	0.006639029	0.005982479	3.579E-05
07-02-2014	36.32	36.59	36.01	36.56	33260500	36.03	0.010322312	0.009665762	9.3427E-05
06-02-2014	35.8	36.25	35.69	36.18	35351800	35.66	0.010146648	0.009490098	9.0062E-05

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
05-02-2014	36.29	36.47	35.8	35.82	55814400	35.3	-0.01490257	-0.015559117	0.000242086
04-02-2014	36.97	37.19	36.25	36.35	54697900	35.83	-0.00334355	-0.004000103	1.60008E-05
03-02-2014	37.74	37.99	36.43	36.48	64063100	35.95	-0.03686424	-0.037520792	0.00140781
31-01-2014	36.95	37.89	36.56	37.84	93162300	37.3	0.02634948	0.02569293	0.000660127
30-01-2014	36.79	36.88	36.23	36.86	35036300	36.33	0.005520301	0.004863751	2.36561E-05
29-01-2014	35.98	36.88	35.9	36.66	52745900	36.13	0.010573276	0.009916726	9.83415E-05
28-01-2014	36.12	36.39	35.75	36.27	36205500	35.75	0.006735922	0.006079372	3.69588E-05
27-01-2014	36.87	36.89	35.98	36.03	44420800	35.51	-0.02145228	-0.022108828	0.0004888
24-01-2014	37.45	37.55	36.53	36.81	76395500	36.28	0.020607803	0.019951253	0.000398052
23-01-2014	36.09	36.13	35.52	36.06	43954000	35.54	0.003664557	0.003008007	9.0481E-06
22-01-2014	36.26	36.32	35.75	35.93	21904300	35.41	-0.00675488	-0.007411431	5.49293E-05
21-01-2014	36.82	36.82	36.06	36.17	31567300	35.65	-0.00587332	-0.006529871	4.26392E-05
17-01-2014	36.83	36.83	36.15	36.38	46267500	35.86	-0.0138468	-0.014503351	0.000210347
16-01-2014	36.69	37	36.31	36.89	38018700	36.36	0.003581764	0.002925214	8.55688E-06
15-01-2014	35.9	36.79	35.85	36.76	44812600	36.23	0.027138328	0.026481778	0.000701285
14-01-2014	34.73	35.88	34.63	35.78	41623300	35.26	0.022369731	0.021713181	0.000471462
13-01-2014	35.99	36.02	34.83	34.98	45901900	34.48	-0.02971647	-0.030373022	0.00092252
10-01-2014	35.9	36.15	35.75	36.04	40548800	35.52	0.014176591	0.013520041	0.000182792
09-01-2014	35.88	35.91	35.4	35.53	36516300	35.02	-0.0065462	-0.007202752	5.18796E-05
08-01-2014	36	36.14	35.58	35.76	59971700	35.25	-0.01799318	-0.018649726	0.000347812
07-01-2014	36.33	36.49	36.21	36.41	35802800	35.89	0.007832208	0.007175658	5.14901E-05
06-01-2014	36.85	36.89	36.11	36.13	43603700	35.61	-0.02139268	-0.022049226	0.000486168
03-01-2014	37.2	37.22	36.6	36.91	31134800	36.38	-0.0068484	-0.007504954	5.63243E-05

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
02-01-2014	37.35	37.4	37.1	37.16	30632200	36.63	-0.00653064	-0.007187185	5.16556E-05
31-12-2013	37.4	37.58	37.22	37.41	17503500	36.87	0.003259987	0.002603437	6.77788E-06
30-12-2013	37.22	37.38	36.9	37.29	16290500	36.75	0	-0.00065655	4.31058E-07
27-12-2013	37.58	37.62	37.17	37.29	14563000	36.75	-0.00407333	-0.004729875	2.23717E-05
26-12-2013	37.2	37.49	37.17	37.44	17612800	36.9	0.009530365	0.008873815	7.87446E-05
24-12-2013	36.72	37.17	36.64	37.08	14243000	36.55	0.012665368	0.012008818	0.000144212
23-12-2013	36.81	36.89	36.55	36.62	25128700	36.09	-0.00497513	-0.005631685	3.17159E-05
20-12-2013	36.2	36.93	36.19	36.8	62649100	36.27	0.015000281	0.014343731	0.000205743
19-12-2013	36.51	36.55	36.08	36.25	34160100	35.73	-0.00891619	-0.009572742	9.16374E-05
18-12-2013	36.36	36.6	35.53	36.58	63192100	36.05	0.001665742	0.001009192	1.01847E-06
17-12-2013	36.94	37.11	36.33	36.52	45687700	35.99	-0.01022815	-0.010884697	0.000118477
16-12-2013	36.73	37	36.54	36.89	31734200	36.36	0.005515734	0.004859184	2.36117E-05
13-12-2013	37.42	37.45	36.62	36.69	40066100	36.16	-0.01427811	-0.014934662	0.000223044
12-12-2013	37.64	37.64	37.18	37.22	36012800	36.68	-0.01057637	-0.01123292	0.000126178
11-12-2013	38.06	38.3	37.39	37.61	39853400	37.07	-0.01313164	-0.013788187	0.000190114
10-12-2013	38.61	38.9	38.02	38.11	37828600	37.56	-0.0155861	-0.016242653	0.000263824
09-12-2013	38.56	38.87	38.37	38.71	30286000	38.15	0.00895214	0.00829559	6.88168E-05
06-12-2013	38.42	38.55	37.99	38.36	36457300	37.81	0.009566908	0.008910358	7.93945E-05
05-12-2013	38.85	38.88	37.18	38	116305000	37.45	-0.02452978	-0.025186331	0.000634351
04-12-2013	38.21	38.98	38.12	38.94	51983600	38.38	0.016286149	0.015629599	0.000244284
03-12-2013	38.14	38.49	38.08	38.31	52109800	37.76	-0.00370077	-0.004357321	1.89862E-05
02-12-2013	38.09	38.78	38.06	38.45	42950400	37.9	0.008479118	0.007822568	6.11926E-05
29-11-2013	37.82	38.29	37.82	38.13	22090400	37.58	0.013933773	0.013277223	0.000176285

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
27-11-2013	37.57	37.76	37.49	37.6	26002100	37.06	0.006768673	0.006112123	3.73581E-05
26-11-2013	37.57	37.65	37.35	37.35	34465300	36.81	-0.00784742	-0.008503972	7.23175E-05
25-11-2013	37.93	37.95	37.57	37.64	30646800	37.1	0.001888575	0.001232025	1.51788E-06
22-11-2013	37.53	37.68	37.33	37.57	27982000	37.03	0.004601443	0.003944893	1.55622E-05
21-11-2013	37.27	37.53	37.26	37.4	23064700	36.86	0.008445766	0.007789216	6.06719E-05
20-11-2013	36.92	37.41	36.86	37.08	32229900	36.55	0.009345862	0.008689312	7.55042E-05
19-11-2013	36.85	37.23	36.67	36.74	44275000	36.21	-0.00495869	-0.005615238	3.15309E-05
18-11-2013	37.35	37.58	37.07	37.2	53277500	36.39	-0.01689413	-0.017550685	0.000308027
15-11-2013	37.95	38.02	37.72	37.84	50601300	37.01	-0.00485176	-0.005508312	3.03415E-05
14-11-2013	37.87	38.13	37.72	38.02	46183700	37.19	-0.00375738	-0.004413935	1.94828E-05
13-11-2013	36.98	38.16	36.9	38.16	44957600	37.33	0.021116107	0.020459557	0.000418593
12-11-2013	37.38	37.6	37.2	37.36	31651600	36.55	-0.00600111	-0.006657659	4.43244E-05
11-11-2013	37.69	37.78	37.35	37.59	26872500	36.77	-0.00515395	-0.005810501	3.37619E-05
08-11-2013	37.67	37.78	37.34	37.78	36737800	36.96	0.007604599	0.006948049	4.82754E-05
07-11-2013	37.96	38.01	37.43	37.5	60437400	36.68	-0.01810126	-0.018757814	0.000351856
06-11-2013	37.24	38.22	37.06	38.18	88948800	37.35	0.041268323	0.040611773	0.001649316
05-11-2013	35.79	36.71	35.77	36.64	51681900	35.84	0.019155515	0.018498965	0.000342212
04-11-2013	35.59	35.98	35.55	35.94	28060700	35.16	0.011729501	0.011072951	0.00012261
01-11-2013	35.67	35.69	35.39	35.53	40264600	34.75	0.003170488	0.002513938	6.31989E-06
31-10-2013	35.66	35.69	35.34	35.41	41682300	34.64	-0.00345822	-0.004114767	1.69313E-05
30-10-2013	35.53	35.79	35.43	35.54	36997700	34.76	0.000287728	-0.000368822	1.36029E-07
29-10-2013	35.63	35.72	35.26	35.52	31702200	34.75	-0.00115042	-0.001806967	3.26513E-06
28-10-2013	35.61	35.73	35.27	35.57	38383600	34.79	-0.00458848	-0.00524503	2.75103E-05

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
25-10-2013	35.88	36.29	35.47	35.73	113494000	34.95	0.058017152	0.057360602	0.003290239
24-10-2013	33.82	34.1	33.57	33.72	53209700	32.98	-0.00121212	-0.001868671	3.49193E-06
23-10-2013	34.35	34.49	33.67	33.76	58600500	33.02	-0.02423454	-0.024891094	0.000619567
22-10-2013	35.02	35.1	34.52	34.58	40438500	33.83	-0.01175447	-0.01241102	0.000154033
21-10-2013	34.98	35.2	34.91	34.99	27433500	34.23	0.000876808	0.000220258	4.85138E-08
18-10-2013	34.82	34.99	34.33	34.96	41811700	34.2	0.001170275	0.000513725	2.63914E-07
17-10-2013	34.45	34.99	34.37	34.92	31359200	34.16	0.008230499	0.007573949	5.73647E-05
16-10-2013	34.6	34.9	34.56	34.64	35111600	33.88	0.004140793	0.003484243	1.21399E-05
15-10-2013	34.67	34.99	34.47	34.49	47097800	33.74	0.00118624	0.00052969	2.80571E-07
14-10-2013	33.9	34.5	33.78	34.45	27757900	33.7	0.009241383	0.008584833	7.36994E-05
11-10-2013	33.68	34.14	33.68	34.13	30033300	33.39	0.011143015	0.010486465	0.000109966
10-10-2013	33.31	33.89	33.26	33.76	42875100	33.02	0.020499418	0.019842868	0.000393739
09-10-2013	33.07	33.35	32.96	33.07	35878600	32.35	0.001856436	0.001199886	1.43973E-06
08-10-2013	33.31	33.33	32.8	33.01	41017600	32.29	-0.00863403	-0.009290585	8.6315E-05
07-10-2013	33.6	33.71	33.2	33.3	35069300	32.57	-0.01734939	-0.018005943	0.000324214
04-10-2013	33.69	33.99	33.62	33.88	33008100	33.14	0.000603682	-5.28675E-05	2.79497E-09
03-10-2013	33.88	34	33.42	33.86	38703800	33.12	-0.00180996	-0.002466505	6.08365E-06
02-10-2013	33.36	34.03	33.29	33.92	46946800	33.18	0.00999554	0.00933899	8.72167E-05
01-10-2013	33.35	33.61	33.3	33.58	36718700	32.85	0.009174376	0.008517826	7.25534E-05
30-09-2013	33	33.31	32.7	33.28	39839500	32.55	0.000307267	-0.000349283	1.21999E-07
27-09-2013	32.88	33.75	32.87	33.27	55348000	32.54	0.014860955	0.014204405	0.000201765
26-09-2013	32.64	33	32.59	32.77	28504000	32.06	0.008142857	0.007486307	5.60448E-05
25-09-2013	32.49	32.8	32.4	32.51	28907500	31.8	0.001888575	0.001232025	1.51788E-06

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
24-09-2013	32.87	32.87	32.15	32.45	40685000	31.74	-0.00909525	-0.009751799	9.50976E-05
23-09-2013	32.54	32.97	32.5	32.74	39826100	32.03	-0.00124805	-0.0019046	3.6275E-06
20-09-2013	33.41	33.48	32.69	32.79	102904900	32.07	-0.02585555	-0.026512099	0.000702891
19-09-2013	33.48	33.68	33.32	33.64	42026600	32.91	0.00977107	0.00911452	8.30745E-05
18-09-2013	32.99	33.4	32.83	33.32	64099900	32.59	0.01172853	0.01107198	0.000122589
17-09-2013	33.42	33.47	32.9	32.93	84716500	32.21	0.00404418	0.00338763	1.1476E-05
16-09-2013	33.38	33.5	32.73	32.8	52839700	32.08	-0.007144	-0.007800547	6.08485E-05
13-09-2013	32.77	33.07	32.51	33.03	40899000	32.31	0.010266072	0.009609522	9.23429E-05
12-09-2013	32.72	32.78	32.59	32.69	32860200	31.98	-0.00156226	-0.002218806	4.9231E-06
11-09-2013	32.57	32.93	32.53	32.74	39087500	32.03	0.010987397	0.010330847	0.000106726
10-09-2013	31.9	32.4	31.79	32.39	56881200	31.68	0.022666573	0.022010023	0.000484441
09-09-2013	31.22	31.79	31.2	31.66	49628500	30.97	0.016276401	0.015619851	0.00024398
06-09-2013	31.31	31.39	31.13	31.15	75434900	30.47	-0.00262209	-0.003278643	1.07495E-05
05-09-2013	31.1	31.44	30.95	31.23	71644900	30.55	0.000982479	0.000325929	1.0623E-07
04-09-2013	31.39	31.47	31.11	31.2	142320600	30.52	-0.02139466	-0.022051207	0.000486256
03-09-2013	31.75	32.07	31.29	31.88	154507000	31.18	-0.04668036	-0.047336912	0.002240783
30-08-2013	33.37	33.48	33.09	33.4	42790200	32.67	-0.00458086	-0.00523741	2.74305E-05
29-08-2013	32.93	33.6	32.8	33.55	45284700	32.82	0.015970855	0.015314305	0.000234528
28-08-2013	33.39	33.6	33	33.02	44257400	32.3	-0.00709551	-0.00775206	6.00944E-05
27-08-2013	33.52	34.1	33.15	33.26	58522300	32.53	-0.02669252	-0.027349066	0.000747971
26-08-2013	34.4	34.67	34.03	34.15	72786800	33.41	-0.01721111	-0.017867657	0.000319253
23-08-2013	35.17	35.2	34	34.75	225493800	33.99	0.070380797	0.069724247	0.004861471
22-08-2013	32.19	32.49	32.1	32.39	31169900	31.68	0.024282343	0.023625793	0.000558178

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
21-08-2013	31.61	32.01	31.54	31.61	37409100	30.92	-0.00032336	-0.000979913	9.60229E-07
20-08-2013	31.44	31.9	31.37	31.62	22979600	30.93	0.007138252	0.006481702	4.20125E-05
19-08-2013	31.76	31.97	31.38	31.39	27902500	30.71	-0.01294098	-0.013597526	0.000184893
16-08-2013	31.79	31.99	31.66	31.8	32866300	31.11	0.000321492	-0.000335058	1.12264E-07
15-08-2013	32	32.18	30.84	31.79	33338000	31.1	-0.01721432	-0.017870874	0.000319368
14-08-2013	32.14	33.36	31.7	32.35	48519600	31.64	0.003482669	0.002826119	7.98695E-06
13-08-2013	32.51	32.55	32.21	32.23	39464100	31.53	-0.01260653	-0.013263083	0.000175909
12-08-2013	32.46	32.97	32.46	32.87	25493700	31.93	0.00533837	0.00468182	2.19194E-05
09-08-2013	32.77	32.9	32.47	32.7	26800700	31.76	-0.00596454	-0.006621094	4.38389E-05
08-08-2013	32.24	33.07	32.05	32.89	59034400	31.95	0.025679014	0.025022464	0.000626124
07-08-2013	31.54	32.1	31.25	32.06	38078600	31.14	0.015208188	0.014551638	0.00021175
06-08-2013	31.55	31.67	31.38	31.58	36331500	30.67	-0.00390498	-0.004561534	2.08076E-05
05-08-2013	31.9	32	31.64	31.7	30984000	30.79	-0.00615187	-0.006808423	4.63546E-05
02-08-2013	31.69	31.9	31.57	31.89	29199900	30.98	0.00712669	0.00647014	4.18627E-05
01-08-2013	32.06	32.09	31.6	31.67	42557900	30.76	-0.00551144	-0.006167992	3.80441E-05
31-07-2013	31.97	32.05	31.71	31.84	43898400	30.93	-0.00032326	-0.000979808	9.60025E-07
30-07-2013	31.78	32.12	31.55	31.85	45799500	30.94	0.0097435	0.00908695	8.25727E-05
29-07-2013	31.47	31.6	31.4	31.54	28870700	30.64	-0.00228199	-0.00293854	8.63501E-06
26-07-2013	31.26	31.62	31.21	31.62	38633600	30.71	0.007189573	0.006533023	4.26804E-05
25-07-2013	31.62	31.65	31.25	31.39	63213000	30.49	-0.01787793	-0.018534484	0.000343527
24-07-2013	32.04	32.19	31.89	31.96	52803100	31.04	0.004196939	0.003540389	1.25344E-05
23-07-2013	31.91	32.04	31.71	31.82	65810400	30.91	-0.00580647	-0.006463018	4.17706E-05
22-07-2013	31.7	32.01	31.6	32.01	79040700	31.09	0.01915954	0.01850299	0.000342361

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
19-07-2013	32.4	32.67	31.02	31.4	248428500	30.5	-0.12091111	-0.121567657	0.014778695
18-07-2013	35.72	35.89	35.22	35.44	49547100	34.42	-0.0086781	-0.009334649	8.71357E-05
17-07-2013	36.34	36.39	35.49	35.74	37285100	34.72	-0.0145821	-0.015238653	0.000232217
16-07-2013	36.01	36.43	35.96	36.27	36378500	35.23	0.002842526	0.002185976	4.77849E-06
15-07-2013	35.66	36.22	35.58	36.17	34142600	35.13	0.013757741	0.013101191	0.000171641
12-07-2013	35.58	35.73	35.28	35.67	35501200	34.65	-0.00057703	-0.001233584	1.52173E-06
11-07-2013	35	35.77	34.9	35.69	53638300	34.67	0.02808023	0.02742368	0.000752058
10-07-2013	34.34	34.81	34.32	34.7	29658800	33.71	0.010137236	0.009480686	8.98834E-05
09-07-2013	34.58	34.6	34.14	34.35	25318500	33.37	0.00059952	-5.70296E-05	3.25238E-09
08-07-2013	34.35	34.59	33.98	34.33	32396900	33.35	0.00360469	0.00294814	8.69153E-06
05-07-2013	34.09	34.24	33.58	34.21	26085900	33.23	0.005734134	0.005077584	2.57819E-05
03-07-2013	33.66	34.37	33.6	34.01	15994400	33.04	0.002120892	0.001464342	2.1443E-06
02-07-2013	34.41	34.44	33.63	33.94	37630000	32.97	-0.01235886	-0.013015411	0.000169401
01-07-2013	34.75	34.99	34.33	34.36	31055400	33.38	-0.00507995	-0.005736495	3.29074E-05
28-06-2013	34.38	34.79	34.34	34.54	65545500	33.55	-0.00238166	-0.003038212	9.23073E-06
27-06-2013	34.52	34.78	34.5	34.62	28993100	33.63	0.007761233	0.007104683	5.04765E-05
26-06-2013	34.12	34.48	33.89	34.35	48665900	33.37	0.019976451	0.019319901	0.000373259
25-06-2013	34.08	34.38	33.46	33.67	44073400	32.71	-0.00122212	-0.001878671	3.5294E-06
24-06-2013	32.94	34.2	32.57	33.72	56109000	32.75	0.013216728	0.012560178	0.000157758
21-06-2013	33.66	33.73	33.05	33.27	85338500	32.32	-0.00647651	-0.007133057	5.08805E-05
20-06-2013	34.26	34.33	33.37	33.49	54493700	32.53	-0.03236333	-0.033019876	0.001090312
19-06-2013	34.96	35.09	34.59	34.59	30816200	33.6	-0.01124605	-0.011902599	0.000141672
18-06-2013	34.97	35.17	34.9	34.98	28616500	33.98	-0.00058841	-0.001244958	1.54992E-06

Date	Open	High	Low	Close	Volume	Adj Close	Nilai Return	(7) - (rt)	(8)^2
17-06-2013	34.69	35.16	34.63	35	49670100	34	0.017505268	0.016848718	0.000283879
14-06-2013	34.55	34.69	34.25	34.4	53192600	33.41	-0.00923588	-0.009892427	9.78601E-05
13-06-2013	34.99	35.02	34.59	34.72	45654900	33.72	-0.00826939	-0.008925941	7.96724E-05
12-06-2013	35.14	35.27	34.85	35	37372700	34	0.00471699	0.00406044	1.64872E-05
11-06-2013	35.05	35.18	34.68	34.84	39435900	33.84	-0.01786546	-0.018522013	0.000343065
10-06-2013	35.51	35.65	35.14	35.47	35994500	34.45	-0.00578873	-0.006445278	4.15416E-05
07-06-2013	35.25	35.78	35.06	35.67	40757300	34.65	0.020114364	0.019457814	0.000378607
06-06-2013	34.84	35.11	34.49	34.96	37618500	33.96	0.00531445	0.0046579	2.1696E-05
05-06-2013	34.6	34.89	34.43	34.78	46025100	33.78	-0.00619745	-0.006854002	4.69773E-05
04-06-2013	35.62	35.74	34.77	34.99	65529500	33.99	-0.01691989	-0.01757644	0.000308931
03-06-2013	34.92	35.63	34.83	35.59	51252600	34.57			
						Jumlah	0.165450699		0.001693088
						Rata-rata (rt)	0.00065655		

Berdasarkan rumus penaksiran volatilitas historis pada Persamaan (2.70) dan bantuan tabel diatas akan diperoleh nilai volatilitasnya yaitu sebesar 0.041229036.

Lampiran II

Data Harga Opsi saham Beli Saham Microsoft Corporation (MSFT) di Pasar Opsi saham

Pengamatan Tanggal 1 Juni 2014[2]

(Data Harga Dalam Dollar)

Call Options						Expire at close Saturday, August 16, 2014	
Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
29.00	MSFT140816C00029000	**10.57**	0.00	11.70	12.05	5	5
34.00	MSFT140816C00034000	**7.00**	↑ 1.20	6.75	7.10	59	30
35.00	MSFT140816C00035000	**6.00**	↑ 0.70	5.80	6.15	33	125,625
36.00	MSFT140816C00036000	**4.45**	0.00	4.90	5.20	8	1,727
37.00	MSFT140816C00037000	**3.65**	0.00	4.00	4.30	275	2,547
38.00	MSFT140816C00038000	**3.32**	↑ 0.64	3.25	3.45	16	2,682
39.00	MSFT140816C00039000	**2.59**	↑ 0.48	2.56	2.63	139	2,711
40.00	MSFT140816C00040000	**1.90**	↑ 0.36	1.91	1.95	3,292	8,383
41.00	MSFT140816C00041000	**1.36**	↑ 0.32	1.35	1.37	1,507	6,450
42.00	MSFT140816C00042000	**0.92**	↑ 0.26	0.90	0.93	2,332	6,672
43.00	MSFT140816C00043000	**0.58**	↑ 0.18	0.58	0.60	2,376	8,216

[2] http://finance.yahoo.com/q/op?s=MSFT&m=2014-07-19 diakses tanggal 1 Juni 2014 pukul 09.03 WIB

Lampiran III

Data Harga Opsi saham Jual Saham Microsoft Corporation (MSFT) di Pasar Opsi saham

Pengamatan Tanggal 1 Juni 2014[3]

(Data Harga Dalam Dollar)

Put Options Expire at close Saturday, August 16, 2014

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
29.00	MSFT140816P00029000	**0.03**	0.00	0.01	0.03	49	95
34.00	MSFT140816P00034000	**0.08**	↓ 0.02	0.08	0.11	3	602
35.00	MSFT140816P00035000	**0.13**	↓ 0.03	0.12	0.15	9	9,403
36.00	MSFT140816P00036000	**0.19**	↓ 0.05	0.19	0.20	128	1,354
37.00	MSFT140816P00037000	**0.29**	↓ 0.07	0.28	0.30	140	8,477
38.00	MSFT140816P00038000	**0.44**	↓ 0.10	0.43	0.45	22	8,457
39.00	MSFT140816P00039000	**0.66**	↓ 0.15	0.65	0.67	462	6,066
40.00	MSFT140816P00040000	**0.98**	↓ 0.21	0.97	1.00	430	4,365
41.00	MSFT140816P00041000	**1.43**	↓ 0.28	1.41	1.43	188	5,330
42.00	MSFT140816P00042000	**2.04**	↓ 0.43	1.96	1.99	111	5,508
43.00	MSFT140816P00043000	**3.30**	0.00	2.62	2.69	29	5,620

[3] http://finance.yahoo.com/q/op?s=MSFT&m=2014-07-19 diakses tanggal 1 Juni 2014 pukul 09.03 WIB

LAMPIRAN IV

Simulasi Error Solusi Pendekatan Hingga Suku Pertama Pada Model Black-Scholes Terhadap Solusi Eksak

```
clear
clc
S=0:1:40;
S0=S(3);
K=1;
T=0.1;
t=0;
sigma=0.25;
[M,N]=size(S);
r=0.07;
for i=1:N
    d1=(log(S(i)/K)+(r+(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
t)));
    A(1,i)=d1;
    d2=(log(S(i)/K)+(r-(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
t)));
    B(1,i)=d2;
    PB=normcdf(d1,0,1);
    C(1,i)=PB;
    QB=normcdf(d2,0,1);
    D(1,i)=QB;
    u=exp(-r*(T-t));
    J(1,i)=u;
    VB(i)=S(i)*PB-K*u*QB;
    CC=[S(i),VB(i)];
    F(1,i)=VB(i);
end
for i=1:N
    m=(S(i)/K-1)/sigma*sqrt(T-t);
    P(1,i)=m;
    QB=normcdf(m);
    Q(1,i)=QB;
    QC=normpdf(m);
    R(1,i)=QC;
    VC(i)=(S(i)-K)*QB+sigma*sqrt(T-t)*K*QC;
    CD=[S(i),VC(i)];
    Z(1,i)=VC(i);
end
for i=1:N
    e(i)=VB(i)-VC(i);
    E(1,i)=e(i);
end
plot(S',E','Linewidth',2)
grid on
xlabel('Harga Saham (S)','fontsize',14,'fontweight','b');
ylabel('EROR','fontsize',14,'fontweight','b');
```

LAMPIRAN V

Simulasi Simulasi Error Solusi Pendekatan Hingga Suku Keduaa Pada Model Black-Scholes Terhadap Solusi Eksak

```
Clear
clc
E=10;
r=0.02;
sigma=0.04;
tau=0.1;
S=0:1:40;
[X,Y]=size(S);
y=-5:1:5;
for i=1:Y
    d1=(log(S(i)/E)+(r+0.5*sigma^2)*(tau))/(sigma*sqrt(tau));
    A(1,i)=d1;
    d2=d1-sigma*sqrt(tau);
    B(1,i)=d2;
    N1=0.5*(1+erf(d1/sqrt(2)));
    C(1,i)=N1;
    N2=0.5*(1+erf(d2/sqrt(2)));
    D(1,i)=N2;
    C(i)=S(i)*N1-E*exp(-r*(tau))*N2;
    DD=[S(i),C(i)];
    F(1,i)=C(i);
    c=(S(i)/E-1)/(sigma*sqrt(tau));
    P(1,i)=c;
    CB=normcdf(c);
    Q(1,i)=CB;
    CP=normpdf(c);
    R(1,i)=CP;
    VC(i)=(S(i)-E+r*E*(tau))*CB+(sigma*sqrt(tau)*(S(i)+E)*CP);
    DD=[S(i),VC(i)];
    Z(1,i)=VC(i);
    J(1,i)=(C(i)-VC(i));
end
plot(S',J','linewidth',2)
```

LAMPIRAN VI

Simulasi Grafik Nilai Opsi saham Beli Model Black-Scholes Tanpa Dividen (Biru) dan Dengan Dividen (Hijau)

```
clear
clc
S=0:1:40;
S0=S(15);
K=20;
T=0.1;
t=0;
sigma=0.25;
[M,N]=size(S);
r=0.07;
d=0.15;
for i=1:N
    d1=(log(S(i)/K)+(r+(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    A(1,i)=d1;
    d2=(log(S(i)/K)+(r-(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    B(1,i)=d2;
    PB=normcdf(d1);
    C(1,i)=PB;
    QB=normcdf(d2);
    D(1,i)=QB;
    d3=(log(S(i)/K)+(r-d+(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    E(1,i)=d1;
    d4=(log(S(i)/K)+(r-d-(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    F(1,i)=d2;
    PC=normcdf(d3);
    G(1,i)=PB;
    QC=normcdf(d4);
    H(1,i)=QC;
    u=exp(-r*(T-t));
    J(1,i)=u;
    VB(i)=S(i)*PB-K*u*QB;
    VC(i)=S(i)*exp(-d*(T-t))*PC-K*u*QC;
    CC=[S(i),VB(i)];
    DD=[S(i),VC(i)];
    P(1,i)=VB(i);
    Q(1,i)=VC(i);
end
plot(S',P',S',Q','Linewidth',2)
grid on
xlabel('Harga Saham (S)','fontsize',14,'fontweight','b');
ylabel('Harga Opsi saham','fontsize',14,'fontweight','b');
```

LAMPIRAN VII

Simulasi Grafik Nilai Opsi saham Jual Model Black-Scholes Tanpa Dividen (Biru) dan Dengan Dividen (Hijau)

```
clear
clc
S=0:1:40;
S0=S(15);
K=20;
T=0.1;
t=0;
sigma=0.25;
[M,N]=size(S);
r=0.07;
d=0.15;
for i=1:N
    d1=(log(S(i)/K)+(r+(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    A(1,i)=d1;
    d2=(log(S(i)/K)+(r-(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    B(1,i)=d2;
    PB=1-normcdf(d1);
    C(1,i)=PB;
    QB=1-normcdf(d2);
    D(1,i)=QB;
    d3=(log(S(i)/K)+(r-d+(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    E(1,i)=d1;
    d4=(log(S(i)/K)+(r-d-(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    F(1,i)=d2;
    PC=1-normcdf(d3);
    G(1,i)=PB;
    QC=1-normcdf(d4);
    H(1,i)=QB;
    u=exp(-r*(T-t));
    J(1,i)=u;
    VB(i)=K*u*QB-S(i)*PB;
    VC(i)=K*u*QC-S(i)*exp(-d*(T-t))*PC;
    CC=[S(i),VB(i)];
    DD=[S(i),VC(i)];
    P(1,i)=VB(i);
    Q(1,i)=VC(i);
end
plot(S',P',S',Q','Linewidth',2)
grid on
xlabel('Harga Saham (S)','fontsize',14,'fontweight','b');
ylabel('Harga Opsi saham','fontsize',14,'fontweight','b');
```

LAMPIRAN VIII

Simulasi Grafik Nilai Opsi saham Beli Model *CEV* Tanpa Dividen (Biru) dan dengan Dividen (Hijau)

```
clear
clc
S=0:1:40;
S0=S(10);
[M,N]=size(S);
r=0.07;
d=0.35;
gamma=[0:0.01:1.99];
for j=1:N
    K=20;
    kapa=sqrt((S0/K)^(2-gamma(j)));
    T=.1;
    t=0;
    mu=0;
    sigma=0.25;
end
for i=1:N
    X=kapa*(S(i)/K-1)/sigma*sqrt(T-t);
    G(1,i)=X;
    PV = normcdf(X,mu,sigma);
    H(1,i)=PV;
    YV = normpdf(X,mu,sigma);
    I(1,i)=YV;
    L1=S(i)-K+r*K*(T-t);
    J(1,i)=L1;
    L2=kapa*sigma*sqrt(T-t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4);
    R(1,i)=L2;
   VC(i)=(S(i)-K+r*K*(T-t))*PV+kapa*sigma*sqrt(T-
   t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4)*YV;
    VD(i)=(S(i)-K+(r-d)*K*(T-t))*PV+kapa*sigma*sqrt(T-
   t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4)*YV;
    BB=[S(i),VC(i)];
    BC=[S(i),VD(i)];
    W(1,i)=VC(i);
    Z(1,i)=VD(i);
end
plot(S',W',S',Z','Linewidth',2)
grid on
xlabel('Harga Saham (S)','fontsize',14,'fontweight','b');
ylabel('Harga Opsi saham','fontsize',14,'fontweight','b');
```

LAMPIRAN IX

Simulasi Grafik Nilai Opsi saham Jual Model *CEV* Tanpa Dividen (Biru) dan dengan Dividen (Hijau)

```
clear
clc
S=0:0.5:40;
S0=S(10);
[M,N]=size(S);
r=0.07;
d=0.35;
gamma=[0:0.01:1.99];
for j=1:N
    K=20;
    kapa=sqrt((S0/K)^(2-gamma(j)));
end
for i=1:N
    T=.1;
    t=0;
    mu=0;
    sigma=0.25;
    d1=(log(S(i)/K)+(r+(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
t)));
    A(1,i)=d1;
    d2=(log(S(i)/K)+(r-(0.5*square(sigma))*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
t)));
    B(1,i)=d2;
    PB=normcdf(-d1);
    C(1,i)=PB;
    QB=normcdf(-d2);
    D(1,i)=QB;
    u=exp(-r*(T-t));
    E(1,i)=u;
    VB(i)=K*u*QB-S(i)*PB;
    BB=[S(i),VB(i)];
    F(1,i)=VB(i);
    X=kapa*(S(i)/K-1)/sigma*sqrt(T-t);
    G(1,i)=X;
    P = normcdf(X,mu,sigma);
    H(1,i)=P;
    Y = normpdf(X,mu,sigma);
    I(1,i)=Y;
    L1=S(i)-K+r*K*(T-t);
    d1=(log(S(i)/K)+(r-d+0.5*square(sigma)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
    t)));
    A(1,i)=d1;
   d2=(log(S(i)/K)+(r-d-0.5*square(sigma)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
   t)));
    B(1,i)=d2;
    PB=normcdf(-d1);
    L2=kapa*sigma*sqrt(T-t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4);
```

```
    R(1,i)=L2;
    VC(i)=((S(i)-K+r*K*(T-t))*P+kapa*sigma*sqrt(T-
   t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4)*Y)+K*u-S(i);
    CC=[S(i),VC(i)];
    W(1,i)=VC(i);
    P = normcdf(X,mu,sigma);
    H(1,i)=P;
    Y = normpdf(X,mu,sigma);
    I(1,i)=Y;
    L1=S(i)-K+r*K*(T-t);
    d1=(log(S(i)/K)+(r-d+0.5*square(sigma)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
   t)));
    A(1,i)=d1;
   d2=(log(S(i)/K)+(r-d-0.5*square(sigma)*(T-t))/(sigma*sqrt(T-
   t)));
    B(1,i)=d2;
    PB=normcdf(-d1);
    L2=kapa*sigma*sqrt(T-t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4);
    R(1,i)=L2;
    VC(i)=((S(i)-K+r*K*(T-t))*P+kapa*sigma*sqrt(T-
   t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4)*Y)+K*u-S(i);
    VD(i)=((S(i)-K+(r-d)*K*(T-t))*P+kapa*sigma*sqrt(T-
   t)*((gamma(j)*S(i)+(4-gamma(j)))*K/4)*Y)+K*u-S(i);
    CC=[S(i),VC(i)];
    CD=[S(i),VD(i)];
    W(1,i)=VC(i);
    Z(1,i)=VD(i);
end
plot(S',W',S',Z','LineWidth',2)
grid on
xlabel('Harga Saham (S)','fontsize',14,'fontweight','b');
ylabel('Harga Opsi saham','fontsize',14,'fontweight','b');
```

LAMPIRAN X

Simulasi Perhitungan Nilai Opsi saham Model Black-Scholes dan *CEV* tanpa Dividen

```
function varargout = PMNO(varargin)
% PMNO M-file for PMNO.fig
%      PMNO, by itself, creates a new PMNO or raises the existing
%      singleton*.
%
%      H = PMNO returns the handle to a new PMNO or the handle to
%      the existing singleton*.
%
%      PMNO('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the
local
%      function named CALLBACK in PMNO.M with the given input
arguments.
%
%      PMNO('Property','Value',...) creates a new PMNO or raises the
%      existing singleton*.  Starting from the left, property value
pairs are
%      applied to the GUI before PMNO_OpeningFcn gets called.  An
%      unrecognized property name or invalid value makes property
application
%      stop.  All inputs are passed to PMNO_OpeningFcn via varargin.
%
%      *See GUI Options on GUIDE's Tools menu.  Choose "GUI allows
only one
%      instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help PMNO

% Last Modified by GUIDE v2.5 22-Jun-2014 05:26:34

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @PMNO_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @PMNO_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
```

```
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT


% --- Executes just before PMNO is made visible.
function PMNO_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin   command line arguments to PMNO (see VARARGIN)

% Choose default command line output for PMNO
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes PMNO wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);


% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = PMNO_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout  cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;



function s_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to s (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
saham=str2num(get(handles.s, 'string'));
handles.saham=saham;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of s as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of s as
a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function s_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to s (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
eks=str2num(get(handles.edit2, 'string'));
handles.eks=eks;
guidata(hObject, handles)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit2 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit2
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
tb=str2num(get(handles.edit3, 'string'));
handles.tb=tb;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
```

```
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
v=str2num(get(handles.edit4, 'string'));
handles.v=v;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit4 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit4
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
umur=str2num(get(handles.edit5, 'string'));
handles.umur=umur;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit5 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit5
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
% hObject    handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit6 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit6
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit7_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit7 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit7
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit7_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
```

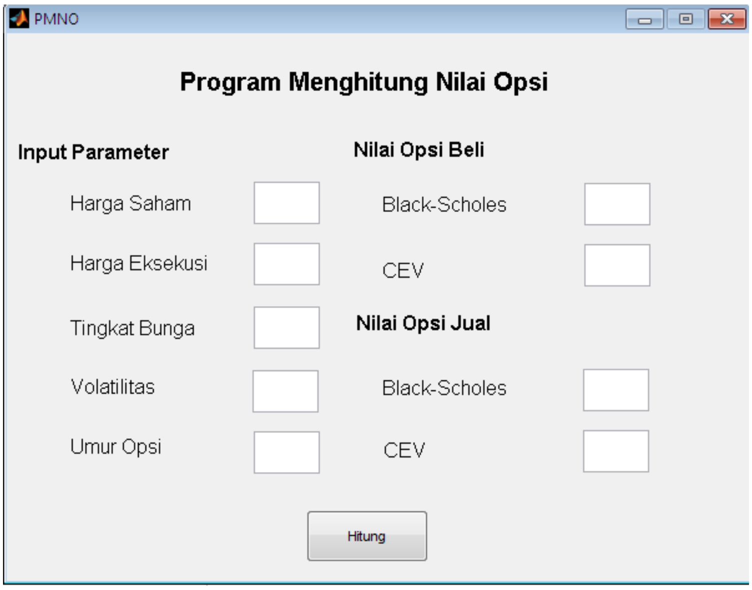
```
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit8_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit8 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit8 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit8
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit8_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit8 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit9_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit9 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit9 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit9
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit9_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit9 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end


% --- Executes on button press in togglebutton1.
function togglebutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to togglebutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%Black-Scholes
saham=handles.saham;
eks=handles.eks;
tb=handles.tb;
v=handles.v;
umur=handles.umur;
t=0;
d1=(log(saham/eks)+(tb+(0.5*square(v))*(umur-t))/(v*sqrt(umur-t)));
d2=(log(saham/eks)+(tb-(0.5*square(v))*(umur-t))/(v*sqrt(umur-t)));
PB=normcdf(d1);
PC=normcdf(-d1);
QB=normcdf(d2);
QC=normcdf(-d2);
u=exp(-tb*(umur-t));
BB=saham*PB-eks*u*QB;
BC=eks*u*QC-saham*PC;

%CEV
for j=2
    kapa=sqrt((saham/eks)^(2-gamma(j)));
end
mu=0.6;
X=kapa*(saham/eks-1)/v*sqrt(umur-t);
PV=normcdf(X,mu,v);
YV = normpdf(X,mu,v);
L1=saham-eks+tb*eks*(umur-t);
L2=kapa*v*sqrt(umur-t)*((gamma(j)*saham+(4-gamma(j)))*eks/4);
VB=L1*PV+L2*YV;
VC=L1*PV+L2*YV+eks-saham;
%tampil output
set(handles.edit6, 'string', BB);
set(handles.edit7, 'string', VB);
set(handles.edit8, 'string', BC);
set(handles.edit9, 'string', VC);
% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of togglebutton1
```

LAMPIRAN XI

Simulasi Perhitungan Nilai Opsi saham Model Black-Scholes dan *CEV* tanpa Dividen

A. Tampilan program untuk menghitung nilai opsi saham sebelum memasukkan parameter



B. Tampilan program untuk menghitung nilai opsi saham setelah memasukkan parameter

LAMPIRAN XII

Simulasi Perhitungan Nilai Opsi saham Model Black-Scholes dan *CEV* dengan Dividen

```
function varargout = PMNOD(varargin)
% PMNOD M-file for PMNOD.fig
%      PMNOD, by itself, creates a new PMNOD or raises the existing
%      singleton*.
%
%      H = PMNOD returns the handle to a new PMNOD or the handle to
%      the existing singleton*.
%
%      PMNOD('CALLBACK',hObject,eventData,handles,...) calls the
local
%      function named CALLBACK in PMNOD.M with the given input
arguments.
%
%      PMNOD('Property','Value',...) creates a new PMNOD or raises
the
%      existing singleton*.  Starting from the left, property value
pairs are
%      applied to the GUI before PMNOD_OpeningFcn gets called.  An
%      unrecognized property name or invalid value makes property
application
%      stop.  All inputs are passed to PMNOD_OpeningFcn via
varargin.
%
%      *See GUI Options on GUIDE's Tools menu.  Choose "GUI allows
only one
%      instance to run (singleton)".
%
% See also: GUIDE, GUIDATA, GUIHANDLES

% Edit the above text to modify the response to help PMNOD

% Last Modified by GUIDE v2.5 22-Jun-2014 20:43:37

% Begin initialization code - DO NOT EDIT
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',       mfilename, ...
                   'gui_Singleton',  gui_Singleton, ...
                   'gui_OpeningFcn', @PMNOD_OpeningFcn, ...
                   'gui_OutputFcn',  @PMNOD_OutputFcn, ...
                   'gui_LayoutFcn',  [] , ...
                   'gui_Callback',   []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargout
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
```

```
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end
% End initialization code - DO NOT EDIT


% --- Executes just before PMNOD is made visible.
function PMNOD_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)
% This function has no output args, see OutputFcn.
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% varargin   command line arguments to PMNOD (see VARARGIN)

% Choose default command line output for PMNOD
handles.output = hObject;

% Update handles structure
guidata(hObject, handles);

% UIWAIT makes PMNOD wait for user response (see UIRESUME)
% uiwait(handles.figure1);


% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = PMNOD_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)
% varargout  cell array for returning output args (see VARARGOUT);
% hObject    handle to figure
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Get default command line output from handles structure
varargout{1} = handles.output;



function s_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to s (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
saham=str2num(get(handles.s, 'string'));
handles.saham=saham;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of s as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of s as
a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function s_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to s (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit2_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
eks=str2num(get(handles.edit2, 'string'));
handles.eks=eks;
guidata(hObject, handles)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit2 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit2
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit3_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
tb=str2num(get(handles.edit3, 'string'));
handles.tb=tb;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
```

```
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit4_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
v=str2num(get(handles.edit4, 'string'));
handles.v=v;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit4 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit4
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit4_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit5_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
umur=str2num(get(handles.edit5, 'string'));
handles.umur=umur;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit5 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit5
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit5_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
```

```
% hObject    handle to edit5 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit10_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit10 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
d=str2num(get(handles.edit10, 'string'));
handles.d=d;
guidata(hObject, handles)
% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit10 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of
edit10 as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit10_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit10 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function edit6_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit6 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit6
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit6_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit6 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called
```

```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit7_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit7 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit7
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit7_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit7 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit8_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit8 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit8 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit8
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit8_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit8 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called
```

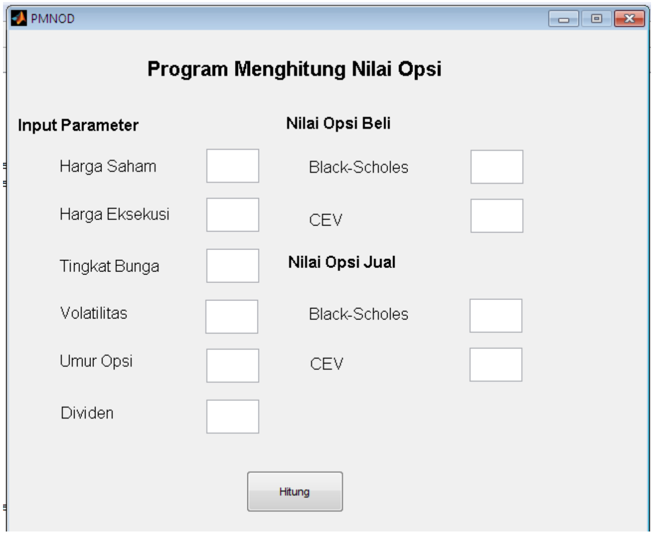
```
% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end



function edit9_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit9 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit9 as text
%        str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit9
as a double


% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function edit9_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit9 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    empty - handles not created until after all CreateFcns
called

% Hint: edit controls usually have a white background on Windows.
%       See ISPC and COMPUTER.
if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in togglebutton1.
function togglebutton1_Callback(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to togglebutton1 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%Black-Scholes
saham=handles.saham;
eks=handles.eks;
tb=handles.tb;
v=handles.v;
umur=handles.umur;
d=handles.d;
t=0;
d1=(log(saham/eks)+(tb-d+(0.5*square(v))*(umur-t))/(v*sqrt(umur-
t)));
d2=(log(saham/eks)+(tb-d-(0.5*square(v))*(umur-t))/(v*sqrt(umur-
t)));
PB=normcdf(d1);
PC=normcdf(-d1);
QB=normcdf(d2);
QC=normcdf(-d2);
u=exp(-tb*(umur-t));
```

```
BB=saham*exp(-d*(umur-t))*PB-eks*u*QB;
BC=eks*u*QC-saham*exp(-d*(umur-t))*PC;

%CEV
for j=2
    kapa=sqrt((saham/eks)^(2-gamma(j)));
end
mu=0.6;
X=kapa*(saham/eks-1)/v*sqrt(umur-t);
PV=normcdf(X,mu,v);
YV = normpdf(X,mu,v);
L1=saham-eks+tb*eks*(umur-t);
L2=kapa*v*sqrt(umur-t)*((gamma(j)*saham+(4-gamma(j)))*eks/4);
VB=L1*PV+L2*YV;
VC=L1*PV+L2*YV+eks-saham;
%tampil output
set(handles.edit6, 'string', BB);
set(handles.edit7, 'string', VB);
set(handles.edit8, 'string', BC);
set(handles.edit9, 'string', VC);
% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of togglebutton1
```

LAMPIRAN XIII

Simulasi Perhitungan Nilai Opsi saham Model Black-Scholes dan *CEV* dengan Dividen

A. Tampilan program untuk menghitung nilai opsi saham sebelum memasukkan parameter



B. Tampilan program untuk menghitung nilai opsi saham setelah memasukkan parameter

LAMPIRAN XIV

Contoh Surat Kontrak Opsi Saham

STOCK OPTION AGREEMENT[4]

THE SECURITY REPRESENTED BY THIS CERTIFICATE HAS BEEN ACQUIRED FOR INVESTMENT AND NOT WITH A VIEW TO, OR IN CONNECTION WITH, THE SALE OR DISTRIBUTION THEREOF. NO SUCH SALE OR DISPOSITION MAY BE EFFECTED WITHOUT AN EFFECTIVE REGISTRATION STATEMENT RELATED THERETO OR AN OPINION OF COUNSEL SATISFACTORY TO THE COMPANY THAT SUCH REGISTRATION IS NOT REQUIRED UNDER THE [ACT], AS AMENDED.

This Stock Option Agreement (“Agreement”) is made and entered into as of the date of grant set forth below (the “Date of Grant”)

BETWEEN:	**[COMPANY NAME]** (the "Company), a corporation organized and existing under the laws of the [STATE/PROVINCE], with its head office located at:
AND:	**[OPTIONEE NAME]** (the "Optionee"), an individual with his main address at:

Capitalized terms not defined herein shall have the meaning ascribed to them in the Company’s [YEAR OF PLAN] Stock Option & Incentive Plan (the “Plan”).

Total Option Shares:

Exercise Price Per Share:

Date of Grant:

First Vesting Date:

Expiration Date for Exercise of Options:

4 https://www.google.co.id/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=5&cad=rja&uact=8&ved=0CFEQFjAE&url=http%3A%2F%2Fcnnetc.googlecode.com%2Ffiles%2FSTOCK%2520OPTION%2520AGREEMENT.doc&ei=H9bHU4z1Asy0uATy4oCIBw&usg=AFQjCNEfipZNq1Rlj1enBvOksBeZ9kpepw&sig2=tmCrycVYnYubu-jtSqjV3g&bvm=bv.71198958,d.c2E

Type of Stock Option:

(Check one): [ ] Incentive Stock Option

[ ] Statutory Stock Option

1. GRANT OF OPTION

The Company hereby grants to Optionee an option (the “Option”) to purchase the total number of shares of Common Stock of the Company set forth above (the “Shares”) at the Exercise Price Per Share set forth above (the “Exercise Price”), subject to all of the terms and conditions of this Agreement and the Plan. If designated as an Incentive Stock Option above, the Option is intended to qualify as an “incentive stock option” (“ISO”) within the meaning of Section [NUMBER] of the [CODE], as amended (the “Code”). Only Employees of the Company shall receive ISOs.

2. EXERCISE PRICE

The Exercise Price, is not less than the fair market value per share of Common Stock on the date of grant, as determined by the Board; provided, however, in the event Optionee is an Employee and owns stock representing more than [%] of the total combined voting power of all classes of stock of the Company or of its Parent or Subsidiary corporations immediately before this Option is granted, said exercise price is not less than one hundred ten percent [%] of the fair market value per share of Common Stock on the date of grant as determined by the Board.

3. EXERCISE OF OPTION

This Option shall be exercisable during its term in accordance with the provisions of [PLAN] as follows:

a. Vesting

i. This Option shall not become exercisable as to any of the number of the Shares as follows (check one):
[ ] Four Year Vesting:

Until the date that is [NUMBER] year from the date of grant of the Option (the "Anniversary Date"). On the Anniversary Date, this Option may be exercised to the extent of [%] of the Shares. Upon the expiration of each calendar month from the Anniversary Date, this Option may be exercised to the extent of the product of (a) the total number of Shares set forth at the beginning of this Agreement and (b) the fraction the numerator of which is [NUMBER] and the denominator of which is [NUMBER] (the "Monthly Vesting Amount"), plus the shares as to which the right to exercise the Option has previously accrued but has not been exercised; provided, however, that notwithstanding any of the above, the [%] exercisable on the Anniversary Date and the Monthly Vesting Amount with respect to any calendar month shall become exercisable only if the Employee was an employee of the Company or any Subsidiary of the Company as of the Anniversary Date and the last day of such month, respectively. Any time that the Optionee is on leave or is absent from performing services for the Company shall not be counted towards the vesting provided herein.

[ ] Alternate Vesting Schedule: As follows:

This Option may not be exercised for a fraction of a Share.

ii. In the event of Optionee's death, disability or other termination of employment, the exercisability of the Option is governed by Sections 7, 8 and 9 below, subject to the limitations contained in subsection 3(i)(d).
iii. In no event may this Option be exercised after the date of expiration of the term of this Option as set forth in Section 11 below.

b. Method of Exercise
This Option shall be exercisable by written notice which shall state the election to exercise the Option, the number of Shares in respect of which the Option is being exercised, and such other representations and agreements as to the holder's investment intent with respect to such shares of Common Stock as may be required by the Company pursuant to the provisions of the Plan. Such written notice shall be signed by Optionee and shall be delivered in person or by certified mail to the President, Secretary or Chief Financial Officer of the Company. The written notice shall be accompanied by payment of the exercise price.

No Shares will be issued pursuant to the exercise of an Option unless such issuance and such exercise shall comply with all relevant provisions of law and the requirements of any stock exchange upon which the Shares may then be listed. Assuming such compliance, for income tax purposes the Shares shall be considered transferred to the Optionee on the date on which the Option is exercised with respect to such Shares.

c. Adjustments, Merger, etc. The number and class of the Shares and/or the exercise price specified above are subject to appropriate adjustment in the event of changes in the capital stock of the Company by reason of stock dividends, split-ups or combinations of shares, reclassifications, mergers, consolidations, reorganizations or liquidations. Subject to any required action of the shareholders of the Company, if the Company shall be the surviving corporation in any merger or consolidation, this Option (to the extent that it is still outstanding) shall pertain to and apply to the securities to which a holder of the same number of shares of Common Stock that are then subject to this Option would have been entitled. A dissolution or liquidation of the Company, or a merger or consolidation in which the Company is not the surviving corporation, will cause this Option to terminate, unless the agreement or merger or consolidation shall otherwise provide, provided that the Optionee shall, if the Board expressly authorizes, in such event have the right immediately prior to such dissolution or liquidation, or merger or consolidation, to exercise this Option in whole or part. To the extent that the foregoing adjustments relate to stock or securities of the Company, such adjustments shall be made by the Board, whose determination in that respect shall be final, binding and conclusive.

4. OPTIONEE'S REPRESENTATIONS

a. By receipt of this Option, by its execution, and by its exercise in whole or in part, Optionee represents to the Company that Optionee understands that:
b. Both this Option and any Shares purchased upon its exercise are securities, the issuance by the Company of which requires compliance with federal and state securities laws;
c. These securities are made available to Optionee only on the condition that Optionee makes the representations contained in this Section 4 to the Company;
d. Optionee has made a reasonable investigation of the affairs of the Company sufficient to be well informed as to the rights and the value of these securities;
e. Optionee understands that the securities have not been registered under the [ACT], as amended (the "Act") in reliance upon one or more specific exemptions contained in the Act, which may include reliance on [RULE] promulgated under the Act, if available, or which may depend upon (a) Optionee's bona fide investment intention in acquiring these securities; (b) Optionee's intention to hold these securities in compliance with federal and state securities laws; (c) Optionee having no present intention of selling or transferring any part thereof (recognizing that the Option is not transferable) in violation of applicable federal and state securities laws; and (d) there being certain restrictions on transfer of the Shares subject to the Option;
f. Optionee understands that the Shares subject to this Option, in addition to other restrictions on transfer, must be held indefinitely unless subsequently registered under the Act, or unless an exemption from registration is available; that [RULE], the usual exemption from registration, is only available after the satisfaction of certain holding periods and in the presence of a public market for the Shares; that there is no certainty that a public market for the Shares will exist, and that otherwise it will be necessary that the Shares be sold pursuant to another exemption from registration which may be difficult to satisfy; and
g. Optionee understands that the certificate representing the Shares will bear a legend prohibiting their transfer in the absence of their registration or the opinion of counsel for the Company that registration is not

required, and a legend prohibiting their transfer in compliance with applicable state securities laws unless otherwise exempted.

5. METHOD OF PAYMENT

Payment of the purchase price shall be made by cash, check or, in the sole discretion of the Board at the time of exercise, promissory notes or other Shares of Common Stock having a fair market value on the date of surrender equal to the aggregate purchase price of the Shares being purchased.

6. RESTRICTIONS ON EXERCISE

This Option may not be exercised if the issuance of such Shares upon such exercise or the method of payment of consideration for such Shares would constitute a violation of any applicable law or regulation. As a condition to the exercise of this Option, the Company may require Optionee to make any representation and warranty to the Company as may be required by any applicable law or regulation.

7. TERMINATION OF STATUS AS AN EMPLOYEE

In the event of termination of Optionee's Continuous Status as an Employee for any reason other than death or disability, Optionee may, but only within [NUMBER] days after the date of such termination (but in no event later than the date of expiration of the term of this Option as set forth in Section 11 below), exercise this Option to the extent that Optionee was entitled to exercise it at the date of such termination. To the extent that Optionee was not entitled to exercise this Option at the date of such termination, or if Optionee does not exercise this Option within the time specified herein, this Option shall terminate.

8. DISABILITY OF OPTIONEE

In the event of termination of Optionee's Continuous Status as an Employee as a result of Optionee's disability, Optionee may, but only within [NUMBER] months from the date of termination of employment (but in no event later than the date of expiration of the term of this Option as set forth in Section 11 below), exercise this Option to the extent Optionee was entitled to exercise it at the date of such termination; provided, however that if the disability is not total and permanent and the Optionee exercises the option within the period provided above but more than three months after the date of termination, this Option shall automatically be deemed to be a Non-statutory Stock Option and not an Incentive Stock Option; and provided, further, that if the disability is total and permanent then the Optionee may, but only within [NUMBER] year from the date of termination of employment (but in no event later than the date of expiration of the term of this Option as set forth in Section 11 below), exercise this Option to the extent Optionee was entitled to exercise it at the date of such termination. To the extent that Optionee was not entitled to exercise this Option at the date of termination, or if Optionee does not exercise such Option within the time periods specified herein, this Option shall terminate.

9. DEATH OF OPTIONEE

In the event of the death of Optionee:

a. During the term of this Option while an Employee of the Company and having been in Continuous Status as an Employee since the date of grant of this Option, this Option may be exercised, at any time within [NUMBER] year following the date of death (but, in case of an Incentive Stock Option, in no event later than the date of expiration of this Option as set forth in Section 11 below), by Optionee's estate or by a person who acquired the right to exercise the Option by bequest or inheritance, but only to the extent of the right to exercise that had accrued at the time of death of the Optionee. To the extent that such Employee was not entitled to exercise the Option at the date of death, or if such Employee, estate or other person does not exercise such Option (which such Employee, estate or person was entitled to exercise) within the [NUMBER] years time period specified herein, the Option shall terminate; or

b. During the [NUMBER] day period specified in Section 7 or the [NUMBER] year period specified in Section 8, after the termination of Optionee's Continuous Status as an Employee, this Option may be exercised, at any time within [NUMBER] year following the date of death (but, in the case of an Incentive Stock Option, in no event later than the date of expiration of the term of this Option as set forth in Section 11 below), by Optionee's estate or by a person who acquired the right to exercise this Option by bequest or inheritance, but only to the extent of the right to exercise that had accrued at the date of termination. To the extent that such Employee was not entitled to exercise this Option at the date of death, or if such Employee, estate or other person does not exercise such Option (which such Employee, estate or person was entitled to exercise) within the [NUMBER] year time period specified herein, this Option shall terminate.

10. NON-TRANSFERABILITY OF OPTION

This Option may not be transferred in any manner otherwise than by will or by the laws of descent or distribution and may be exercised during the lifetime of Optionee, only by Optionee. The terms of this Option shall be binding upon the executors, administrators, heirs, successors and assigns of Optionee.

11. TERM OF OPTION

This Option may not be exercised more than [NUMBER OF YEARS] years from the date of grant of this Option, and may be exercised during such term only in accordance with the Plan and terms of this Option; provided, however, that the term of this option, if it is a Non-statutory Stock Option, may be extended for the period set forth in Section 9(a) or Section 9(b) in the circumstances set forth in such Sections.

12. EARLY DISPOSITION OF STOCK; TAXATION UPON EXERCISE OF OPTION

If Optionee is an Employee and the Option qualifies as an ISO, Optionee understands that, if Optionee disposes of any Shares received under this Option within [NUMBER] years after the date of this Agreement or within [NUMBER] year after such Shares were transferred to Optionee, Optionee will be treated for federal income tax purposes as having received ordinary income at the time of such disposition in any amount generally measured as the difference between the price paid for the Shares and the lower of the fair market value of the Shares at the date of exercise or the fair market value of the Shares at the of disposition. Any gain recognized on such premature sale of the Shares in excess of the amount treated as ordinary income will be characterized as capital gain. Optionee hereby agrees to notify the Company in writing within [NUMBER] days after the date of any such disposition. Optionee understands that if Optionee disposes of such Shares at any time after the expiration of such two-year and one-year holding periods, any gain on such sale will be treated as long-term capital gain laws subject to meeting various qualifications. If Optionee is a Consultant or this is a Non-statutory Stock Option, Optionee understands that, upon exercise of this Option, Optionee will recognize income for tax purposes in an amount equal to the excess of the then fair market value of the Shares over the exercise price. Upon a resale of such shares by the Optionee, any difference between the sale price and the fair market value of the Shares on the date of exercise of the Option will be treated as capital gain or loss. Optionee understands that the Company will be required to withhold tax from Optionee's current compensation in some of the circumstances described above; to the extent that Optionee's current compensation is insufficient to satisfy the withholding tax liability, the Company may require the Optionee to make a cash payment to cover such liability as a condition to exercise of this Option.

13. TAX CONSEQUENCES

The Optionee understands that any of the foregoing references to taxation are based on federal income tax laws and regulations now in effect, and may not be applicable to the Optionee under certain circumstances. The Optionee may also have adverse tax consequences under state or local law. The Optionee has reviewed with the Optionee's own tax advisors the federal, state, local and foreign tax consequences of the transactions contemplated by this Agreement. The Optionee is relying solely on such advisors and not on any statements or representations of the Company or any of its agents. The Optionee understands that the Optionee (and not the Company) shall be responsible for the Optionee's own tax liability that may arise as a result of the transactions contemplated by this Agreement.

14. SEVERABILITY; CONSTRUCTION

In the event that any provision in this Option shall be invalid or unenforceable, such provision shall be severable from, and such invalidity or unenforceability shall not be construed to have any effect on, the remaining provisions of this Option. This Option shall be construed as to its fair meaning and not for or against either party.

15. DAMAGES
The parties agree that any violation of this Option (other than a default in the payment of money) cannot be compensated for by damages, and any aggrieved party shall have the right, and is hereby granted the privilege, of obtaining specific performance of this Option in any court of competent jurisdiction in the event of any breach hereunder.

16. GOVERNING LAW
This Option shall be deemed to be made under and governed by and construed in accordance with the laws of the State of [STATE]. Jurisdiction for any disputes hereunder shall be solely in [CITY], [STATE].

17. DELAY
No delay or failure on the part of the Company or the Optionee in the exercise of any right, power or remedy shall operate as a waiver thereof, nor shall any single or partial exercise by any of them of any right, power or remedy preclude other or further exercise thereof, or the exercise of any other right, power or remedy.

18. RESTRICTIONS
Notwithstanding anything herein to the contrary, Optionee understands and agrees that Optionee shall not dispose of any of the Shares, whether by sale, exchange, assignment, transfer, gift, devise, bequest, mortgage, pledge, encumbrance or otherwise, except in accordance with the terms and conditions of this Section 18, and Optionee shall not take or omit any action which will impair the absolute and unrestricted right, power, authority and capacity of Optionee to sell Shares in accordance with the terms and conditions hereof.

Any purported transfer of Shares by Optionee that violates any provision of this Section 18 shall be wholly void and ineffectual and shall give to the Company or its designee the right to purchase from Optionee all but not less than all of the Shares then owned by Optionee for a period of [NUMBER] days from the date the Company first learns of the purported transfer at the Agreement Price and on the Agreement Terms. If the Shares are not purchased by the Company or its designee, the purported transfer thereof shall remain void and ineffectual and they shall continue to be subject to this Agreement.

The Company shall not cause or permit the transfer of any Shares to be made on its books except in accordance with the terms hereof.

a. 1) Permitted Transfers

i. Optionee may sell, assign or transfer any Shares held by the Optionee but only by complying with the provisions of subsection (b)(1) of this Section 18.
ii. Optionee may sell, assign or transfer any Shares held by the Optionee without complying with the provisions of subsection (b)(1) by obtaining the prior written consent of the Company's

shareholders owning [%] of the then issued and outstanding shares of the Company's Common Stock (determined on a fully diluted basis) or a majority of the members of the Board of Directors of the Company, provided that the transferee agrees in writing to be bound by the provisions of this Option and the transfer is made in accordance with any other restrictions or conditions contained in the written consent and in accordance with applicable federal and state securities laws.

iii. Upon the death of Optionee, Shares held by the Optionee may be transferred to the personal representative of the Optionee's estate without complying with the provisions of subsection (b)(1). Shares so transferred shall be subject to the other provisions of this Option, including in particular subsection (b)(2).

a. 2) No Pledge

Unless a majority of the members of the Board of Directors consent, Shares may not be pledged, mortgaged or otherwise encumbered to secure indebtedness for money borrowed or any other obligation for which the Optionee is primarily or secondarily liable.

a. 3) Stock Certificate Legend

Each stock certificate for Shares issued to the Optionee shall have conspicuously written, printed, typed or stamped upon the face thereof, or upon the reverse thereof with a conspicuous reference on the face thereof, one or both of the following legend:

i. THE SHARES REPRESENTED BY THIS CERTIFICATE HAVE BEEN ISSUED WITHOUT REGISTRATION UNDER THE SECURITIES ACT OF 1933, AS AMENDED, AND MAY NOT BE TRANSFERRED IN THE ABSENCE OF REGISTRATION THEREUNDER OR AN APPLICABLE EXEMPTION FROM THE REGISTRATION REQUIREMENTS OF SUCH ACT. SUCH SHARES MAY NOT BE SOLD, ASSIGNED, TRANSFERRED, OR OTHERWISE DISPOSED OF IN ANY MANNER EXCEPT IN ACCORDANCE WITH AND SUBJECT TO THE TERMS OF THE STOCK OPTION AGREEMENT, A COPY OF WHICH IS ON FILE AT THE PRINCIPAL OFFICE OF THE COMPANY. UNLESS A MAJORITY OF THE MEMBERS OF THE BOARD OF DIRECTORS CONSENT, SUCH STOCK OPTION AGREEMENT PROHIBITS ANY PLEDGE, MORTGAGE OR OTHER ENCUMBRANCE OF SUCH SHARES TO SECURE ANY OBLIGATION OF THE HOLDER HEREOF. EVERY CREDITOR OF THE HOLDER HEREOF AND ANY PERSON ACQUIRING OR PURPORTING TO ACQUIRE THIS CERTIFICATE OR THE SHARES HEREBY EVIDENCED OR ANY INTEREST THEREIN IS HEREBY NOTIFIED OF THE

EXISTENCE OF SUCH STOCK OPTION AGREEMENT, AND ANY ACQUISITION OR PURPORTED ACQUISITION OF THIS CERTIFICATE OR THE SHARES HEREBY EVIDENCED OR ANY INTEREST THEREIN SHALL BE SUBJECT TO ALL RIGHTS AND OBLIGATIONS OF THE PARTIES TO SUCH STOCK OPTION AGREEMENT AS THEREIN SET FORTH.

ii. IT IS UNLAWFUL TO CONSUMMATE A SALE OR TRANSFER OF THIS SECURITY, OR ANY INTEREST THEREIN, OR TO RECEIVE ANY CONSIDERATION THEREFOR, WITHOUT THE PRIOR WRITTEN CONSENT OF THE COMMISSIONER OF CORPORATIONS OF THE STATE OF [STATE/PROVINCE], EXCEPT AS PERMITTED IN THE COMMISSIONER'S RULES.

b. 1) Sales of Shares

i. Company's Right of First Refusal. In the event that the Optionee shall desire to sell, assign or transfer any Shares held by the Optionee to any other person (the "Offered Shares") and shall be in receipt of a bona fide offer to purchase the Offered Shares ("Offer"), the following procedure shall apply. The Optionee shall give to the Company written notice containing the terms and conditions of the Offer, including, but not limited to (a) the number of Offered Shares; (b) the price per Share; (c) the method of payment; and (d) the name(s) of the proposed purchaser(s).

An offer shall not be deemed bona fide unless the Optionee has informed the prospective purchaser of the Optionee's obligation under this Option and the prospective purchaser has agreed to become a party hereunder and to be bound hereby. The Company is entitled to take such steps as it reasonably may deem necessary to determine the validity and bona fide nature of the Offer.

Until [NUMBER] days after such notice is given, the Company or its designee shall have the right to purchase all of the Offered Shares at the price offered by the prospective purchaser and specified in such notice. Such purchase shall be on the Agreement Terms, as defined in subsection (b)(4).

ii. Failure of Company or its Designee to Purchase Offered Shares. If all of the Offered Shares are not purchased by the Company and/or its designee within the [NUMBER]-day period granted for such purchases, then any remaining Offered Shares may be sold, assigned or transferred pursuant to the Offer; provided, that the Offered Shares are so transferred within [NUMBER] days of the expiration of the [NUMBER]-day period to the person or persons named in, and under the terms and conditions of, the bona fide Offer described in the notice to the Company; and provided further, that such persons agree to execute and deliver to the Company a written agreement, in form and content satisfactory to the Company, agreeing to be bound by the terms and conditions of this Option.

b. 2) Manner of Exercise

Any right to purchase hereunder shall be exercised by giving written notice of election to the Optionee, the Optionee's personal representative or any other selling person, as the case may be, prior to the expiration of such right to purchase.

b. 3) Agreement Price

The "Agreement Price" shall be the higher of (A) the fair market value of the Shares to be purchased determined in good faith by the Board of Directors of the Company and (B) the original exercise price of the Shares to be purchased.

b. 4) Agreement Terms

"Agreement Terms" shall mean and include the following:

i. Delivery of Shares and Closing Date. At the closing, the Optionee, the Optionee's personal representative or such other selling person, as the case may be, shall deliver certificates representing the Shares, properly endorsed for transfer, and with the necessary documentary and transfer tax stamps, if any, affixed, to the purchaser of such Shares. Payment of the purchase price therefore shall concurrently be made to the Optionee, the Optionee's personal representative or such other selling person, as provided in subsection (ii) of this subsection (b)(4). Such delivery and payment shall be made at the principal office of the Company or at such other place as the parties mutually agree.
ii. Payment of Purchase Price. The Company shall pay the purchase price to the Optionee at the closing.

b. 5) Right to Purchase Upon Certain Other Events

The Company or its designee shall have the right to purchase all, but not less than all, of the Shares held by the Optionee at the Agreement Price and on the Agreement Terms for a period of [NUMBER] days after any of the following events:

i. an attempt by a creditor to levy upon or sell any of the Optionee's Shares;
ii. the filing of a petition by the Optionee under the [COUNTRY] Bankruptcy Code or any insolvency laws;
iii. the filing of a petition against Optionee under any insolvency or bankruptcy laws by any creditor of the Optionee if such petition is not dismissed within [NUMBER] days of filing;

iv. the entry of a decree of divorce between the Optionee and the Optionee's spouse; or
v. If Optionee is an employee of the Company, upon the termination of Optionee's services as an employee.

The Optionee shall provide the Company written notice of the occurrence of any such event within [NUMBER] days of such event.

c. 1) Termination

The provisions of this Section 18 shall terminate and all rights of each such party hereunder shall cease except for those which shall have theretofore accrued upon the occurrence of any of the following events:

i. cessation of the Company's business;
ii. bankruptcy, receivership or dissolution of the Company;
iii. ownership of all of the issued and outstanding shares of the Company by a single shareholder of the Company;
iv. written consent or agreement of the shareholders of the Company holding 50% of the then issued and outstanding shares of the Company;
v. consent or agreement of a majority of the members of the Board of Directors of the Company; or
vi. registration of any class of equity securities of the Company pursuant to Section [NUMBER] of the [ACT], as amended.

c. 2) Amendment

This Section 18 may be modified or amended in whole or in part by a written instrument signed by shareholders of the Company holding [%] of the outstanding shares of Common Stock or a majority of the members of the Board of Directors of the Company.

19. MARKET STANDOFF

Unless the Board of Directors otherwise consents, Optionee agrees hereby not to sell or otherwise transfer any Shares or other securities of the Company during the [NUMBER]-day period following the effective date of a registration statement of the Company filed under the Act; provided, however, that such restriction shall apply only to the first two registration statements of the Company to become effective under the Act which includes securities to be sold on behalf of the Company to the public in an underwritten public offering under the Act. The Company may impose stop-transfer instructions with respect to securities subject to the foregoing restrictions until the end of such [NUMBER]-day period.

20. COMPLETE AGREEMENT

This Agreement constitutes the entire agreement between the parties with respect to its subject matter, and supersedes all other prior or contemporaneous agreements and understandings both oral or written; subject, however, that in the event of any conflict between this Agreement and the Plan, the Plan shall govern. This

Agreement may only be amended in a writing signed by the Company and the Optionee.

21. PRIVILEGES OF STOCK OWNERSHIP

Participant shall not have any of the rights of a shareholder with respect to any Shares until Optionee exercises the Option and pay the Exercise Price.

22. NOTICES

Any notice required to be given or delivered to the Company under the terms of this Agreement shall be in writing and addressed to the Corporate Secretary of the Company at its principal corporate offices. Any notice required to be given or delivered to Optionee shall be in writing and addressed to Optionee at the address indicated above or to such other address as such party may designate in writing from time to tome to the Company. All notices shall be deemed to have been given or delivered upon: personal delivery; [NUMBER] days after deposit in the [COUNTRY] mail by certified or registered mail (return receipt requested); [NUMBER] business day after deposit with any return receipt express courier (prepaid); or [NUMBER] business day after transmission by fax.

DATE OF GRANT: [DATE]

[NAME OF CORPORATION]

____

NAME AND TITLE

OPTIONEE ACKNOWLEDGES AND AGREES THAT THE VESTING OF SHARES PURSUANT TO SECTION 3 HEREOF IS EARNED ONLY BY CONTINUING SERVICE AS AN EMPLOYEE OR CONSULTANT AT THE WILL OF THE COMPANY (NOT THROUGH THE ACT OF BEING HIRED, BEING GRANTED THIS OPTION OR ACQUIRING SHARES HEREUNDER). OPTIONEE FURTHER ACKNOWLEDGES AND AGREES THAT THIS OPTION, THE COMPANY'S PLAN WHICH IS INCORPORATED HEREIN BY REFERENCE, THE TRANSACTIONS CONTEMPLATED HEREUNDER AND THE VESTING SCHEDULE SET FORTH HEREIN DO NOT CONSTITUTE AN EXPRESS OR IMPLIED PROMISE OF CONTINUED ENGAGEMENT AS AN EMPLOYEE OR CONSULTANT FOR THE VESTING PERIOD, FOR ANY PERIOD, OR AT ALL, AND SHALL NOT INTERFERE WITH OPTIONEE'S RIGHT OR THE COMPANY'S RIGHT TO TERMINATE OPTIONEE'S EMPLOYMENT OR CONSULTING RELATIONSHIP AT ANY TIME, WITH OR WITHOUT CAUSE.

Optionee acknowledges receipt of a copy of the Plan, represents that Optionee is familiar with the terms and provisions thereof, and hereby accepts this Option subject to all of the terms and provisions thereof. Optionee has reviewed the Plan and this Option in their entirety, has had an opportunity to obtain the advice of counsel prior to executing this Option and fully understands all provisions of this Option. Optionee hereby agrees to accept as binding, conclusive and final all decisions or interpretations of the Board or of the Committee upon any questions arising under the Plan.

Dated: [DATE]

____

OPTIONEE

CONSENT OF SPOUSE

The undersigned spouse of the Optionee to the foregoing Stock Option Agreement acknowledges on his or her own behalf that: I have read the foregoing Stock Option Agreement and I know its contents. I hereby consent to and approve of the provisions of the Stock Option Agreement, and agree that the Shares issued upon exercise of the options covered thereby and my interest in them are subject to the provisions of the Stock Option Agreement and that I will take no action at any time to hinder operation of the Stock Option Agreement on those Shares or my interest in them.

____

NAME OF SPOUSE

[ADDRESS], [CITY], [STATE], [ZIP]

(SEAL)