

**ANALISIS MASALAH SISTEM ANTRIAN MODEL *MULTI
PHASE* PADA KANTOR SAMSAT YOGYAKARTA**

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar Sarjana Sains



Disusun Oleh :
Manggala Aldi Putranto
NIM. 09305141048

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2014

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

ANALISIS MASALAH SISTEM ANTRIAN MODEL *MULTI PHASE* PADA KANTOR SAMSAT YOGYAKARTA

Oleh

Manggala Aldi Putranto

NIM. 09305141048

Telah disetujui tanggal 3 April 2014

Untuk diujikan di hadapan Dewan Pengaji Skripsi

Program Studi Matematika

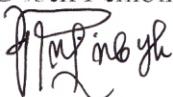
Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Menyetujui,

Dosen Pembimbing



Nikenashih Binatari, M. Si.

NIP. 19841019 200812 2 005

HALAMAN PENGESAHAN

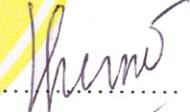
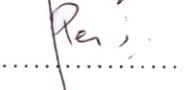
Skripsi yang berjudul:

“ANALISIS MASALAH SISTEM ANTRIAN MODEL MULTI PHASE PADA KANTOR SAMSAT YOGYAKARTA”

Yang disusun oleh:

Nama : Manggala Aldi Putranto
NIM : 09305141048
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 15 April 2014 dan dinyatakan LULUS.

		DEWAN PENGUJI		
Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal	
<u>Nikenasih B., M. Si.</u> NIP.198410192008122005	Ketua Penguji		15-5-2014	
<u>Atmini Dhoruri, M. S.</u> NIP.196007101986012001	Sekretaris Penguji		15-5-2014	
<u>Dr. Dhoriva U. W.</u> NIP.196603311993032001	Penguji Utama		15-5-2014	
<u>Retno Subekti, M. Sc.</u> NIP.19811116200512002	Penguji Pendamping		15-5-2014	

Yogyakarta, 8 Juli 2014
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan,



Dr. Hartono
NIP. 196203291987021002

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini saya:

Nama : Manggala Aldi Putranto
NIM. : 09305141048
Jurusan/Prodi : Pendidikan Matematika/Matematika
Fakultas/Universitas : MIPA/Universitas Negeri Yogyakarta
Judul TAS : Analisis Masalah Sistem Antrian Model *Multi Phase* pada Kantor SAMSAT Yogyakarta

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan oleh orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata tulis penulisan karya tulis ilmiah yang telah lazim.

Apabila ternyata terbukti pernyataan saya ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya, dan saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan yang berlaku.

Yogyakarta, 3 April 2014



Manggala Aldi Putranto
NIM. 09305141048

MOTTO

Barangsiaapa bersungguh-sungguh pasti akan mendapatkan hasil

*Yesterday is history, tomorrow is mystery, but today is a gift.
That's why this day is called present*

There are no accident

Excercise is the best teacher

PERSEMBAHAN

Karya ini ku persembahkan untuk

*Bapak saya, Bambang Indrajanto, Ibu saya, Saminingsih, dan adikku, Gita
Pramudya Saraswati yang selama ini telah mendampingi, mendoakan, dan untuk
semua yang sudah diberikan yang tidak bisa disebutkan satu persatu.*

Rosa Ardiyati yang selalu menginspirasi

*Teman-teman seperjuangan, Bagas, Chadel, Lulus, Tika, Intan, Didi, dan semua
teman-teman MATSUB'09 yang tak terlupakan.*

Teman-teman Genk Ceria yang selalu bersama

ANALISIS MASALAH SISTEM ANTRIAN MODEL *MULTI PHASE* PADA KANTOR SAMSAT YOGYAKARTA

Oleh
Manggala Aldi Putranto
NIM. 09305141048

ABSTRAK

Pada proses pembayaran pajak kendaraan 1 tahunan di SAMSAT Yogyakarta telah diketahui bahwa sistem antriannya menggunakan model *multi phase* yaitu sistem antrian yang terdiri dari *server* yang tersusun secara seri atau terdiri dari beberapa *phase*. SAMSAT Yogyakarta memiliki target waktu untuk penyelesaian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan selama 10 menit. Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk menjelaskan model antrian, mendeskripsikan hasil analisis, dan mencari solusi optimal sistem antrian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di SAMSAT Yogyakarta.

Penelitian dalam skripsi ini diawali dengan membuat desain sistem antrian SAMSAT Yogyakarta. Kemudian, dilakukan pengambilan data pada tiap loket berupa banyak kedatangan dan keberangkatan tiap 5 menit. Data yang didapat tersebut kemudian diuji dengan SPSS untuk mengetahui apakah data tersebut terdistribusi Poisson atau tidak. Setelah diketahui data terdistribusi Poisson, dilanjutkan dengan menentukan model antrian pada tiap *phase* dan menentukan laju kedatangan dan keberangkatan tiap loket pelayanan. Langkah selanjutnya adalah melakukan analisis ukuran performa dari tiap *phase* yaitu berupa rata-rata banyaknya *customer* dalam sistem, rata-rata banyaknya *customer* dalam antrian, rata-rata lama *customer* dalam sistem, dan rata-rata lama *customer* dalam antrian. Untuk memenuhi target waktu pembayaran pajak kendaraan satu tahunan kurang dari 10 menit maka dilakukan pembuatan program optimalisasi sistem antrian menggunakan *software* Microsoft Excel.

Hasil analisis menyatakan bahwa *phase* 1 dengan model $M/M/1:FCFS/\infty/\infty$, *phase* 2 dengan model $M/M/2:FCFS/\infty/\infty$, dan *phase* 3 dengan model $M/M/1:FCFS/\infty/\infty$ serta rata-rata lama pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di SAMSAT Yogyakarta selama 40,9 menit. Setelah dioptimalkan, didapatkan solusi alternatif dari permasalahan antrian di SAMSAT Yogyakarta berupa penambahan *server*. Kombinasi *server* yang optimal adalah menyusun 2 loket paralel di *phase* 1, menyusun 3 loket paralel di *phase* 2, dan menyusun 2 loket paralel di *phase* 3. Solusi ini berhasil memenuhi target kurang dari 10 menit dengan lama waktu 7,203 menit.

Kata kunci: antrian *multi phase*, *overload queue*, antrian samsat.

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisis Masalah Sistem Antrian Model *Multi Phase* pada Kantor SAMSAT Yogyakarta” ini guna memenuhi persyaratan untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa penulisan ini tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Hartono, M. Si., sebagai Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kesempatan penulis dalam menyelesaikan studi.
2. Dr. Suyanta, M. Si., sebagai Wakil Dekan I FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan skripsi.
3. Dr. Sugiman, sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kemudahan dalam pengurusan administrasi selama penulisan skripsi.
4. Dr. Agus Maman Abadi, sebagai Penasehat Akademik sekaligus Ketua Program Studi Matematika yang telah memberikan informasi dan pengarahan dalam penyusunan tugas akhir skripsi.
5. Nikenasih Binatari, M. Si., sebagai Dosen Pembimbing yang telah memberikan pengarahan, nasehat, dan motivasi dalam menyusun skripsi.

6. Atmini Dhoruri, M. S., Dr. Dhoriva U. W., dan Retno Subekti, M. Sc., sebagai Dosen Penguji yang telah memberikan saran-saran dalam penulisan skripsi.
7. Seluruh dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan ilmu kepada penulis.
8. Semua pihak terkait yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan maupun kesalahan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak demi perbaikan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembaca.

Yogyakarta, 3 April 2014

Manggala Aldi Putranto

NIM. 09305141048

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PERSETUJUAN.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
HALAMAN PERNYATAAN	iv
HALAMAN MOTTO DAN PERSEMBAHAN.....	v
HALAMAN ABSTRAK.....	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR SIMBOL.....	xi
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR LAMPIRAN	xiv
BAB I PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Batasan Masalah	7
C. Perumusan Masalah	8
D. Tujuan Penelitian	8
E. Manfaat Penulisan.....	8
BAB II LANDASAN TEORI	
A. Definisi Peluang.....	10
B. Variabel Acak	11
C. Distribusi Poisson	13
D. Distribusi Eksponensial	14
E. Proses Antrian	15
F. Elemen Model Antrian.....	15
1. Kapasitas Sistem	15
2. Disiplin Pelayanan	16
3. Perilaku <i>Customer</i>	17
4. Desain Pelayanan	17
5. Sumber Pemanggilan	20
G. Aturan Distribusi Eksponensial	20
H. Model Kelahiran dan Kematian Murni	22

1. Model Kelahiran Murni	23
2. Model Kematian Murni.....	29
I. Model Antrian Poisson yang Digeneralisasi	35
J. Antrian Poisson Khusus	38
1. <i>Steady State</i> Ukuran Performa	41
2. Model Antrian Satu <i>Server</i> dengan Kapasitas Sistem Tak Terbatas.....	44
3. Model Antrian c <i>Server</i> dengan Kapasitas Sistem Tak Terbatas.....	48
K. Antrian <i>Multi Phase (Simple Tandem Queue)</i>	51
L. Tingkat Kedatangan	52
BAB III METODE PENELITIAN	
A. Kerangka Pemikiran.....	55
B. Lokasi dan Waktu Penelitian	57
C. Metode Pengumpulan Data.....	57
1. Metode Wawancara	57
2. Metode Observasi	62
D. Teknik Analisis Data.....	64
BAB IV HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	
A. Hasil Penelitian	72
1. Uji Distribusi.....	72
2. Penentuan Model Tiap <i>Phase</i>	78
B. Pembahasan.....	78
1. Laju Kedatangan dan Keberangkatan	79
2. Program Optimalisasi Sistem Antrian	85
3. Analisis Performa Sistem Antrian di SAMSAT Yogyakarta	99
4. Optimalisasi Sistem Antrian di SAMSAT Yogyakarta	100
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN	
A. Kesimpulan	106
B. Saran	107
DAFTAR PUSTAKA	109
LAMPIRAN	111

DAFTAR SIMBOL

λ	: Laju kedatangan <i>customer</i>
λ_{eff}	: Laju kedatangan efektif pada sistem
λ_{loss}	: Laju kedatangan yang tidak masuk pada sistem
μ	: Laju keberangkatan <i>customer</i>
n	: Banyaknya <i>customer</i> dalam sistem
λ_n	: Laju kedatangan saat n <i>customer</i> dalam sistem
μ_n	: Laju keberangkatan saat n <i>customer</i> dalam sistem
$f(t)$: Fungsi densitas peluang dari interval waktu t
$p_n(t)$: Peluang terjadi n kejadian saat waktu t
Δt	: Elemen penambah waktu.
$o(\Delta t)$: Banyaknya kejadian yang dapat diabaikan saat $\Delta t \rightarrow 0$
λ_f	: Laju kedatangan <i>customer</i> pada <i>phase</i> ke- f
μ_f	: Laju keberangkatan <i>customer</i> pada <i>phase</i> ke- f
μ_{fg}	: Laju kedatangan <i>customer</i> pada <i>phase</i> ke- f dan <i>server</i> ke- g
$\overline{\mu_f}$: Rata-rata laju keberangkatan <i>customer</i> pada <i>phase</i> ke- f
N	: Total jumlah pembayar pajak yang datang
I	: Jumlah interval waktu
K_i	: Jumlah <i>customer</i> yang datang pada interval I_i
N	: Jumlah <i>customer</i> yang datang selama I interval
c	: Jumlah <i>server</i>
c_f	: Jumlah <i>server</i> pada <i>phase</i> ke- f
T	: Waktu penggunaan sistem
$W_{s_{total}}$: Rata-rata waktu <i>customer</i> dalam sistem
Wq_{total}	: Rata-rata waktu <i>customer</i> dalam antrian
Ls_{total}	: Rata-rata jumlah <i>customer</i> dalam sistem
Lq_{total}	: Rata-rata jumlah <i>customer</i> dalam antrian
W_{s_f}	: Rata-rata waktu <i>customer</i> dalam sistem <i>phase</i>

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Hubungan distribusi eksponensial dan Poisson	29
Tabel 2.2	Frekuensi jumlah kedatangan <i>customer</i> di beberapa interval	54
Tabel 3.1	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada loket 2A per 5 menit.....	65
Tabel 3.2	Perbandingan $f(x)$ dan $f_0(x)$	66
Tabel 3.3	Perbandingan $S_N(X)$ dan $F_0(X)$	67
Tabel 3.4	<i>Output</i> data kedatangan <i>customer</i> pada program SPSS	69
Tabel 4.1	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada loket 2A per 5 menit.....	73
Tabel 4.2	Jumlah keberangkatan <i>customer</i> pada loket 2A per 5 menit	74
Tabel 4.3	Jumlah keberangkatan <i>customer</i> pada loket 4A1 per 5 menit	75
Tabel 4.4	Jumlah keberangkatan <i>customer</i> pada loket 4A2 per 5 menit	76
Tabel 4.5	Jumlah keberangkatan pada loket 5A per 5 menit	77
Tabel 4.6	Kedatangan <i>customer</i> pada <i>phase</i> 1 berdasarkan interval waktu.....	79
Tabel 4.7	Keberangkatan <i>customer</i> pada <i>phase</i> 1 berdasarkan interval waktu	80
Tabel 4.8	Keberangkatan <i>customer</i> pada loket 4A1 berdasarkan interval waktu.....	82
Tabel 4.9	Keberangkatan <i>customer</i> pada loket 4A2 berdasarkan interval waktu.....	82
Tabel 4.10	Keberangkatan <i>customer</i> pada <i>phase</i> 3 berdasarkan interval waktu.....	84
Tabel 4.11	Laju kedatangan dan keberangkatan <i>customer</i> pada sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta.....	85
Tabel 4.12	Laju pelayanan tiap <i>server</i>	85
Tabel 4.13	Simulasi antrian berdasarkan jumlah <i>customer</i> yang selesai.....	94
Tabel 4.14	Simulasi antrian berdasarkan waktu penggunaan sistem	97
Tabel 4.15	Laju kedatangan dan keberangkatan pada sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta.....	99
Tabel 4.16	Ukuran performa sistem antrian SAMSAT Yogyakarta.....	100
Tabel 4.17	Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 1	101
Tabel 4.18	Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 2	102
Tabel 4.19	Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 3	103
Tabel 4.20	Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 4	104

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1	Poster Sasaran Mutu di SAMSAT Yogyakarta.....	7
Gambar 2.1	Model sistem antrian <i>Single Chanel – Single Phase</i>	18
Gambar 2.2	Model sistem antrian <i>Single Channel – Multi Phase</i>	18
Gambar 2.3	Model sistem antrian <i>Multi Channel – Single Phase</i>	19
Gambar 2.4	Model sistem antrian <i>Multi Channel – Multi Phase</i>	20
Gambar 2.5	Diagram transisi	36
Gambar 2.6	Representasi sistem antrian <i>c server</i> disusun paralel	40
Gambar 2.7	Model Antrian Tandem	51
Gambar 2.8	Frekuensi jumlah kedatangan di beberapa interval	52
Gambar 3.1	Kerangka pemikiran	56
Gambar 3.2	Denah sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta	58
Gambar 3.3	Denah Sistem Antrian Pembayaran Pajak Kendaraan Tahunan di SAMSAT Yogyakarta	59
Gambar 3.4	Alur Proses Pembayaran Pajak Tahunan dan 5 Tahunan.....	61
Gambar 3.5	Seleksi tombol Kolmogorov-Smirnov pada program SPSS	70
Gambar 3.6	Penentuan distribusi dan seleksi data pada tes	70
Gambar 3.7	Tampilan <i>output</i> tes Kolmogorov-Smirnov pada program SPSS	71
Gambar 4.1	Kesamaan antara μ_1 dan λ_2	81
Gambar 4.2	Kesamaan antara μ_2 dan λ_3	79
Gambar 4.3	Algoritma pemrograman program utama	88
Gambar 4.4	Algoritma pemrograman program <i>phase</i>	91
Gambar 4.5	Sistem antrian yang optimal	105

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Hasil Tes Kolmogorov-Smirnov dengan Program SPSS	112
Lampiran 2. Nilai Kritis dari D pada Tes Kolmogorov-Smirnov Satu Sampel..	114
Lampiran 3. Tampilan Program Optimalisasi Sistem Antrian	115
Lampiran 4. Penjelasan Input Program Optimalisasi Sistem Antrian	116
Lampiran 5. Penjelasan Proses Program Optimalisasi Sistem Antrian	117
Lampiran 6. Penjelasan Output Program Optimalisasi Sistem Antrian	120

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Mengantri adalah suatu kegiatan dalam kehidupan sehari-hari untuk mendapatkan suatu pelayanan. Seperti halnya ketika mengantri untuk bisa makan di restoran atau rumah makan maka diharuskan mengantri untuk mendapatkan pelayanan. Fenomena mengantri ini bukanlah terjadi pada manusia saja tapi pada hampir semua objek seperti halnya data yang mengantri untuk diproses dalam suatu mesin, pesawat yang berputar-putar secara bertumpuk sebelum diijinkan untuk *landing* di bandara dan mobil-mobil yang berhenti di lampu lalu lintas (Taha, 2007:550).

Peristiwa mengantri merupakan kejadian alami dan peristiwa ini merupakan kondisi yang tidak nyaman bagi manusia. Peristiwa mengantri akan menjadi masalah dimana pada masa modern semua dituntut untuk serba cepat seperti pada lalu lintas data, telekomunikasi, dunia industri, dan lain-lain. Modernisasi mengakibatkan manusia cenderung untuk menghilangkan proses mengantri sehingga segala perubahan dilakukan. Perubahan itu cenderung mendorong manusia untuk mendapatkan semua yang diinginkan dengan instan, seperti makan di warung tanpa harus memasak di rumah, berangkat kerja dengan mobil tanpa harus berjalan kaki dari rumah, mencari informasi dengan *surfing* internet tanpa harus membeli koran, dan sebagainya. Tak hanya itu, berbagai perubahan tersebut juga menuju kepada semua lembaga dan perusahaan terutama badan pemerintah yang menyangkut pelayanan publik. Penyelenggaraan pelayanan publik merupakan suatu bagian yang cukup penting karena di dalamnya

berlangsung interaksi yang cukup intensif antara warga negara dengan pemerintah. Kualitas produk dan proses penyelenggaraan pelayanan publik dapat diamati, dirasakan, dan dinilai secara langsung oleh masyarakat. Pelayanan publik merupakan tanggung jawab pemerintah maka kualitas pelayanan publik yang diselenggarakan oleh pemerintah ini menjadi salah satu indikator dari kualitas pemerintahan (Agus Dwiyanto, 2006:143).

UU No 25 Tahun 2009 tentang Pelayanan Publik pasal 1 menyebutkan bahwa pengertian pelayanan publik adalah kegiatan atau rangkaian kegiatan dalam rangka pemenuhan kebutuhan pelayanan sesuai dengan peraturan perundang-undangan bagi setiap warga negara dan penduduk atas barang, jasa, dan/atau pelayanan administratif yang disediakan oleh penyelenggara pelayanan publik. Berbagai tuntutan perubahan itu telah dijawab serius oleh pemerintah yang tertulis pada UU No.25 Tahun 2009 yang merupakan salah satu upaya perbaikan pelayanan publik. Dalam undang-undang tersebut disebutkan juga mengenai standar pelayanan yang telah dibakukan dalam pelayanan publik, ruang lingkup pelayanan publik serta acuan pelaksanaan dan penyelenggaranya. Kualitas pelayanan adalah salah satu indikator keberhasilannya. Kualitas pelayanan dapat dilihat dan dirasakan langsung oleh masyarakat dan hal ini dapat dinilai langsung oleh masyarakat pada bagian pelayanan.

Bagian pelayanan pada umumnya berupa loket-loket yang minimal dioperasikan oleh seorang pegawai yang ditugaskan untuk melayani suatu keperluan masyarakat. Bagian ini mudah terkena kritik dari masyarakat karena merupakan bagian yang tampak di mata mereka. Kinerja dan berbagai fasilitas pelayanan akan dirasakan dan tampak dimata masyarakat. Reputasi badan tersebut

dipertaruhkan untuk mempertahankan kepercayaan masyarakat. Maka dari itu, akan lebih baik jika pada bagian pelayanan selalu diutamakan dengan melakukan peningkatan kualitas pelayanan. Loket pelayanan tidak serta merta hanya sebuah loket dan pegawai tapi beberapa faktor lain ikut berperan serta didalamnya seperti kapasitas tempat duduk, kinerja pegawai, penataan tempat, lama pelayanan, dan lain-lain. Faktor-faktor tersebut menjadi perhatian masyarakat dalam menilai kualitas badan tersebut serta perlu diperhatikan dalam melakukan pengembangan pelayanan publik terutama pada sistem antrian loket pelayanannya. Pada Kantor SAMSAT Yogyakarta terutama pada pelayanan pengesahan pajak kendaraan, masih tampak beberapa kekurangan antara lain seperti masyarakat yang tampak ramai mengantri, tidak mendapatkan tempat duduk saat mengantri, mengeluh atas lama waktu pembayaran pajak, dan lain sebagainya. Hal ini perlu dipertimbangkan mengingat citra lembaga yang harus dipertahankan. SAMSAT Yogyakarta merespon positif kekurangan-kekurangan ini dengan meningkatkan mutu pelayanannya. Hal ini dapat diamati pada sebuah poster yang berasal dari SAMSAT Yogyakarta. Untuk menyelesaikan pengesahan satu tahun, SAMSAT Yogyakarta memiliki target waktu pemrosesan 10 menit yang mana sebelumnya 15 menit. Berdasarkan hal ini peneliti tertarik untuk mencoba menyelesaikan permasalahan sistem antrian ini dengan prioritas yaitu waktu 10 menit per orang dalam memperpanjang STNK satu tahunan.

Apabila masalah ini dipandang dari ilmu matematika, inti permasalahan ini merupakan masalah sistem antrian yang kurang efektif karena terjadinya antrian yang cukup panjang atau *overloaded*. Para masyarakat yang mengantri tidak mendapatkan tempat duduk adalah akibat dari lama mengantri dan kurangnya

kapasitas sistem. Oleh karena itu masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan teori antrian.

Teori antrian (*Queueing Theory*) merupakan studi probabilistik kejadian garis tunggu (*waiting lines*), yakni suatu garis tunggu dari *customer* yang memerlukan layanan dari sistem yang ada. Antrian terjadi karena adanya keterbatasan sumber pelayanan, yang umumnya berkaitan dengan terbatasnya *server* karena alasan ekonomi. Jika jumlah *server* yang disediakan terbatas, memungkinkan terjadi antrian yang terlalu lama, sehingga orang dapat memutuskan untuk meninggalkan antrian tersebut. Hal ini merupakan suatu kerugian bagi pihak perusahaan karena kehilangan *customer*. Agar tidak kehilangan *customer*, maka pihak perusahaan harus menyediakan *server* yang mencukupi, tetapi dilain pihak perusahaan harus mengeluarkan biaya yang lebih besar (Sinalungga, 2008:238). Oleh karena itu, agar tidak terjadi kerugian dibutuhkan analisis sistem antrian di perusahaan tersebut. Ada dua metode dalam menentukan analisis pada sistem antrian yaitu dengan menggunakan *cost model* dan *aspiration-level model* (Taha, 2007:597). Kedua model ini meninjau analisis dari sistem antrian dari dua faktor yaitu *cost model* dari sisi biaya sedangkan *aspiration-level model* dari sisi waktu. Masalah yang terjadi pada Kantor SAMSAT Yogyakarta digolongkan pada *aspiration-level model*. Masalah terjadi bukan karena Kantor SAMSAT Yogyakarta kehilangan *customer* atau masyarakat tapi mengenai waktu pelayanan. Citra suatu lembaga akan menjadi buruk apabila pelayanannya kurang memuaskan bagi para *customer* dimana faktor waktu pembayaran yang terlalu lama menjadi masalahnya.

Dalam tugas akhir ini akan dibahas mengenai sistem antrian pada loket pelayanan Kantor SAMSAT Yogyakarta. Pada loket pelayanan terdapat masyarakat yang mengantre untuk mendapatkan pelayanan. Pelayanan untuk keperluan pembayaran pajak kendaraan bermotor. Pada sistem ini terjadi dua kegiatan pembayaran pajak yang berbeda, yaitu pembayaran pajak kendaraan tahunan dan pembayaran pajak 5 tahun. Untuk pembayaran pajak kendaraan tahunan, tahapan-tahapan yang harus dilewati adalah:

1. Mengumpulkan fotokopi KTP, BPKB, STNK serta menunjukkan BPKB dan KTP asli.
2. Mengambil struk pembayaran pajak lalu membayarkan sejumlah uang.
3. Menunjukkan struk pembayaran yang telah lunas dan didapatkan STNK yang telah diperbarui.

Untuk pembayaran pajak kendaraan 5 tahun, tahapan-tahapan yang harus dilewati adalah:

1. Melakukan cek fisik dan mengambil formulir cek fisik untuk diisi oleh petugas.
2. Mengambil formulir data kendaraan lalu diisi sesuai STNK kendaraan.
3. Mengumpulkan fotokopi KTP, BPKB, STNK, formulir data kendaraan serta menunjukkan BPKB dan KTP asli.
4. Mengambil struk pembayaran pajak lalu membayarkan sejumlah uang.
5. Menunjukkan struk pembayaran yang telah lunas dan didapatkan STNK yang telah diperbarui.
6. Menunjukkan STNK yang telah diperbarui dan didapatkan plat nomor baru.

Tahapan yang harus dilalui kedua pembayaran pajak ini tampak berbeda tapi pada intinya akan melalui jalur yang sama yaitu sama-sama melewati loket

pelayanan. Loket pelayanan terdiri dari beberapa bagian yaitu loket pengumpulan berkas (fotokopi KTP, STNK, BPKB), loket pembayaran pajak dan loket pengembalian STNK.

Berdasarkan apa yang telah diketahui di atas bahwa model sistem antrian pada loket pelayanan Kantor SAMSAT Yogyakarta adalah model sistem antrian *multi phase*. Model ini menggambarkan bahwa seseorang yang ingin menyelesaikan prosedur pembayaran pajak harus melewati tiga tahapan (*phase*) yang berbeda.

Beberapa penelitian telah dilakukan untuk menganalisis sistem antrian *multi phase* antara lain penelitian yang dilakukan oleh Ima Wahyudi (2010) dari Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga tentang "Penerapan Model Antrian Dua Fase" dan Sugeng Haryono (2010) dari Universitas Negeri Malang tentang "Analisis Antrian Single Channel-Multi Phase pada Loket Penerbitan Surat Izin Mengemudi (SIM)".

Penelitian yang dilakukan oleh Ima Wahyudi, menganalisis sistem antrian di Rumah Sakit Mata "Dr. Yap" Yogyakarta. Tujuan dari penelitian tersebut adalah untuk menunjukkan penerapan dan keunggulan dari sistem antrian dua fase. Hasil penelitian didapatkan bahwa sistem antrian di Rumah Sakit "Dr. Yap" Yogyakarta telah efektif. Pada penelitian yang dilakukan oleh Sugeng Haryono , menganalisis sistem antrian di SAMSAT Kota Kediri pada proses pembuatan SIM. Tujuan dari penelitian tersebut adalah untuk mengetahui tingkat performa dari sistem antrian yang telah diterapkan yaitu sistem antrian dua fase. Hasil dari penelitian tersebut didapatkan bahwa sistem antrian di SAMSAT Kota Kediri telah efektif.

SAMSAT Yogyakarta memiliki target kedepan untuk meningkatkan mutu pelayanannya. Hal ini dapat diamati pada sebuah poster yang berasal dari SAMSAT Yogyakarta. Untuk menyelesaikan pengesahan satu tahun, SAMSAT Yogyakarta memiliki target waktu pemrosesan 10 menit yang mana sebelumnya 15 menit. Berdasarkan hal ini peneliti tertarik untuk mencoba menyelesaikan permasalahan sistem antrian ini dengan prioritas yaitu waktu 10 menit per orang dalam memperpanjang STNK satu tahunan.



Gambar 1.1 Poster Sasaran Mutu di SAMSAT Yogyakarta

Maka dari itu, penulis tertarik untuk menganalisis sistem antrian di Kantor Samsat Yogyakarta dengan mengambil judul "Analisis Masalah Sistem Antrian Model *Multi Phase* pada Sistem Antrian pada Kantor SAMSAT Yogyakarta".

B. Batasan Masalah

Penelitian tentang analisis sistem antrian *multi phase* di SAMSAT Yogyakarta ini hanya menganalisis sistem antrian pada proses pembayaran pajak kendaraan satu tahunan. Sistem antrian tersebut berupa 4 loket pelayanan yaitu

loket 2A, loket 4A1, loket 4A2, dan loket 5A. Faktor yang digunakan untuk menganalisis sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta adalah waktu kedatangan dan waktu keberangkatan pelanggan dari tiap loket.

C. Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah diatas, maka dirumuskan pokok permasalahan dari penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana model sistem antrian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di Kantor SAMSAT Yogyakarta?
2. Bagaimana hasil analisis sistem antrian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di Kantor Samsat Yogyakarta?

D. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

1. Menjelaskan model sistem antrian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di Kantor SAMSAT Yogyakarta.
2. Mendeskripsikan hasil analisis sistem antrian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di Kantor SAMSAT Yogyakarta.
3. Mencari solusi optimal sistem antrian pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di Kantor SAMSAT Yogyakarta

E. Manfaat Penulisan

Penulisan tugas akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut:

1. Bagi mahasiswa, dapat menambah pengetahuan mengenai teori antrian tentang antrian *multi phase* sehingga dapat digunakan sebagai bahan acuan untuk membuat karya ilmiah yang terkait dengan teori antrian.
2. Bagi lembaga, dapat menambah referensi mengenai penerapan teori antrian khususnya mengenai tipe antrian *multi phase*
3. Bagi Kantor Samsat Yogyakarta, dapat mengetahui karakteristik yang dihasilkan dari penelitian serta penerapannya dalam pengambilan keputusan untuk pengoptimalan sistem antrian pada loket pelayanan.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Definisi Peluang

Diberikan sebuah percobaan pada ruang sampel S dengan objek pemodelan adalah menetapkan tiap kejadian A dengan bilangan riil $P(A)$ atau disebut peluang dari A yang akan memberikan ukuran dari kemungkinan bahwa A akan terjadi pada percobaan. Secara matematis, $P(A)$ adalah himpunan fungsi. Dengan kata lain, $P(A)$ adalah sebuah fungsi dimana *domain*-nya adalah kumpulan dari kejadian dan *range*-nya adalah himpunan bagian dari bilangan riil. Beberapa himpunan fungsi tidak cocok untuk menyatakan suatu probabilitas kedalam suatu kejadian. Oleh karena itu, diberikan definisi berikut.

Definisi 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992:9)

Untuk suatu percobaan dengan S sebagai ruang sampel dan A, A_1, A_2, \dots mewakili kejadian yang mungkin. Himpunan fungsi yang berhubungan dengan nilai riil $P(A)$ dengan tiap kejadian A disebut fungsi himpunan peluang dan $P(A)$ disebut peluang dari A jika syarat berikut dipenuhi:

$$0 \leq P(A) \text{ untuk tiap } A \quad (2.1)$$

$$P(S) = 1 \quad (2.2)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad (2.3)$$

jika A, A_1, A_2, \dots adalah kejadian yang terpisah satu sama lain.

B. Variabel Acak

Variabel acak ini digunakan untuk mengembangkan model matematika dalam mendeskripsikan peluang dari suatu peristiwa yang terjadi dalam ruang sampel. Persamaan matematika dirnyatakan dengan suatu nilai numerik daripada gambar, kepala, warna, atau tanda-tanda lainnya. Dengan demikian, hal ini tepat sekali untuk mendefinisikan suatu fungsi yaitu variabel acak yang menghubungkan tiap peristiwa atau kejadian dalam percobaan dengan bilangan riil. Kita dapat menyatakan suatu model probabilitas untuk percobaan-percobaan dalam variabel acak dimana hasil akhirnya sudah dalam kuantitas numerik.

Berikut merupakan beberapa definisi dan teorema dalam teori peluang tentang variabel acak yang digunakan dalam penulisan skripsi ini.

Definisi 2.2 (Bain & Engelhardt, 1992:53)

Sebuah variabel acak X adalah fungsi yang didefinisikan atas ruang sampel S yang menghubungkan bilangan riil $X(e) = x$ dengan setiap kemungkinan e di S .

Definisi 2.3 (Bain & Engelhardt, 1992:56)

Jika kumpulan dari semua kemungkinan variabel acak X adalah dapat dihitung, $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ atau x_1, x_2, \dots , maka X disebut variabel acak diskrit. Fungsinya adalah

$$f(x) = P[X = x] \quad x = x_1, x_2, \dots \quad (2.4)$$

yang menyatakan bahwa probabilitas untuk tiap kemungkinan nilai x akan disebut fungsi densitas peluang.

Teorema 2.1 (Bain & Engelhardt, 1992:57)

Sebuah fungsi $f(x)$ adalah fungsi densitas peluang diskrit jika dan hanya jika fungsi tersebut untuk himpunan bilangan riil tak hingga yang dapat dihitung x_1, x_2, \dots memenuhi syarat

$$f(x_i) \geq 0 \quad (2.5)$$

dan

$$\sum_{x_i} f(x_i) = 1 \quad (2.6)$$

dimana berlaku untuk semua nilai x_i .

Bukti:

Syarat (2.5) mengikuti fakta dimana nilai dari fungsi densitas peluang adalah sebuah probabilitas dan tidak negatif. Karena x_1, x_2, \dots menunjukkan semua nilai yang mungkin dari X maka kejadian $[X = x_1], [X = x_2], \dots$ merupakan pembatas yang mendalam dari ruang sampel. Dengan demikian,

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \sum_{x_i} P[X = x_i] = 1$$

untuk semua x_i . Hal ini mengakibatkan fungsi densitas peluang harus memenuhi syarat (2.5) dan (2.6) dan fungsi yang memenuhi syarat-syarat tersebut akan memberikan probabilitas yang sesuai dengan definisi 2.1.

Definisi 2.7 (Bain & Engelhardt, 1992:58)

Fungsi distribusi kumulatif dari variabel acak X didefinisikan untuk semua bilangan riil x dengan

$$F(x) = P[X \leq x] \quad (2.7)$$

Definisi 2.8 (Bain & Engelhardt, 1992:61)

Jika X adalah variabel acak diskrit dengan fungsi densitas peluang $f(x)$, maka nilai harapan dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_x xf(x) \quad (2.8)$$

Definisi 2.9 (Bain & Engelhardt, 1992:64)

Variabel acak X dikatakan variabel acak kontinyu jika ada fungsi $f(x)$ yang merupakan fungsi densitas peluang dari X . Dengan demikian, fungsi distribusi kumulatifnya dapat direpresentasikan

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (2.9)$$

Definisi 2.10 (Bain & Engelhardt, 1992:67)

Jika X variabel acak kontinyu dengan fungsi densitas peluang $f(x)$ maka nilai harapan dari X didefinisikan

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \quad (2.10)$$

jika integral pada persamaan (2.7) adalah konvergen. Jika sebaliknya, maka $E(X)$ tidak ada.

C. Distribusi Poisson

Suatu eksperimen yang menghasilkan jumlah sukses yang terjadi pada interval waktu ataupun daerah yang spesifik dikenal sebagai eksperimen Poisson.

Interval waktu tersebut dapat berupa menit, hari, minggu, bulan, maupun tahun, sedangkan daerah yang spesifik dapat berarti garis, luas, sisi, maupun material (Dimyati, 1999:309).

Definisi 2.11 (Bain & Engelhardt, 1992:103)

Variabel acak diskrit X dikatakan terdistribusi Poisson dengan parameter $\mu > 0$ jika memiliki fungsi densitas peluang yang berbentuk

$$f(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (2.11)$$

D. Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial digunakan untuk menggambarkan distribusi waktu pada fasilitas jasa, dimana waktu pelayanan tersebut diasumsikan bersifat bebas. Artinya, waktu untuk melayani pendatang tidak bergantung pada lama waktu yang telah dihabiskan untuk melayani pendatang sebelumnya, dan tidak bergantung pada jumlah pendatang yang menunggu untuk dilayani.(Djauhari, 1997:175-176)

Definisi 2.12 (Osaki, 1992:42)

Fungsi densitas peluang dari distribusi eksponensial yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.12)$$

dimana λ adalah parameter. Fungsi distribusi kumulatifnya yaitu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \end{cases} \quad (2.13)$$

E. Proses Antrian

Prinsip utama pada situasi mengantri adalah *customer* dan *server*. Kedatangan *customer* pada suatu fasilitas pelayanan dari suatu sumber populasi, dapat terjadi dua kemungkinan yaitu *customer* langsung mendapatkan pelayanan dari fasilitas atau harus mengantri diantrian jika fasilitas sibuk. Berdasarkan titik pokok dari analisis antrian, kedatangan dari *customer* diwakili dengan waktu antar kedatangan antara *customer* yang datang berturut-turut dan pelayanan diwakili dengan waktu pelayanan tiap *customer*. Secara umum, waktu antar kedatangan dan pelayanan dapat bersifat suatu kemungkinan atau tidak pasti, sebagaimana *customer* datang pada suatu restoran, atau bersifat telah ditentukan atau dijadwalkan seperti kedatangan pelamar pekerjaan pada suatu wawancara (Taha, 2007:551).

F. Elemen Model Antrian

Komponen-komponen yang dibutuhkan untuk membentuk model matematis dari suatu antrian adalah

1. Kapasitas sistem

Kapasitas sistem adalah maksimum banyak *customer*, baik *customer* yang sedang berada dalam pelayanan maupun dalam antrian, yang ditampung oleh fasilitas pelayanan pada waktu yang sama (Bronson, 1996:310). Hal ini bisa berupa kapasitas yang terbatas seperti pada area tunggu antara dua mesin yang berurutan atau kapasitas yang tak terbatas seperti pada fasilitas pemesanan melalui pos.

2. Disiplin Pelayanan

Sinalungga (2008: 251) dalam bukunya menyatakan bahwa disiplin pelayanan adalah suatu aturan yang dikenalkan dalam memilih customer dari barisan antrian untuk segera dilayani. Ini merupakan faktor penting pada analisis model antrian. Beberapa jenis disiplin pelayanan adalah sebagai berikut:

- a. *First Come First Serve (FCFS)* suatu aturan dimana yang akan dilayani ialah *customer* yang datang terlebih dahulu. Contohnya antrian di suatu kasir sebuah swalayan.
- b. *Last Come First Serve (LCFS)* merupakan antrian dimana yang datang paling akhir adalah yang dilayani paling awal. Contohnya antrian pada satu tumpukan barang di gudang. Barang yang terakhir masuk akan berada ditumpukkan paling atas sehingga harus diambil pertama.
- c. *Service in Acak Order (SIRO)* atau pelayanan dalam urutan acak atau sering dikenal juga *random selection for services (RSS)*, artinya pelayanan atau panggilan didasarkan pada peluang secara acak, tidak mempermasalahkan siapa yang lebih dahulu tiba. Contohnya kertas-kertas undian yang menunggu untuk ditentukan pemenangnya yang diambil secara acak.
- d. *Priority Service (PS)* artinya prioritas pelayanan diberikan kepada mereka yang mempunyai prioritas paling tinggi dibandingkan dengan mereka yang memiliki prioritas paling rendah, meskipun yang terakhir ini sudah lebih dahulu tiba dalam garis tunggu. Kejadian seperti ini bisa disebabkan oleh beberapa hal, misalnya seseorang yang keadaan penyakit yang lebih berat dibanding dengan orang lain dalam sebuah rumah sakit.

3. Perilaku *Customer*

Perilaku customer saat mengantri dapat mempengaruhi analisis pada barisan antrian. Perilaku manusia dalam sistem antrian jika berperan sebagai *customer* sebagai berikut (Gross dan Harris, 1998:3).

- a. *Jockeying* adalah suatu perilaku manusia untuk mengurangi waktu tunggu dengan berpindah dari antrian satu ke yang lainnya.
- b. *Balking* adalah suatu perilaku dimana seseorang tidak masuk dalam antrian dan langsung meninggalkan tempat antrian.
- c. *Reneging* adalah suatu perilaku dimana seseorang masuk dalam antrian, namun belum memperoleh pelayanan, kemudian meninggalkan antrian tersebut.

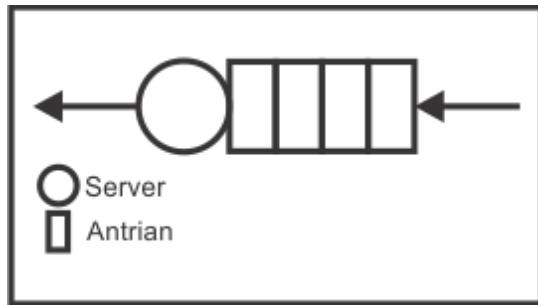
4. Desain Pelayanan

Desain sarana pelayanan dapat diklasifikasikan dalam *channel* dan *phase* yang akan membentuk struktur antrian yang berbeda-beda (Sinalungga,2008:249). Desain dari fasilitas pelayanan bisa berupa *server* yang diatur paralel, seperti kantor pos atau pada teller bank. *Server* bisa juga diatur menjadi bentuk seri, seperti proses pada mesin yang berurutan, atau bisa disusun menjadi sebuah jaringan, seperti *router* pada jaringan komputer (Taha, 2007:552). Berikut adalah model struktur antrian yang sering diterapkan pada suatu sistem antrian:

- a. *Single Channel – Single Phase*

Tipe desain pelayanan ini berarti sistem antrian tersebut hanya memiliki satu *server*. *Single Channel* menunjukkan bahwa hanya ada satu *server* yang bisa

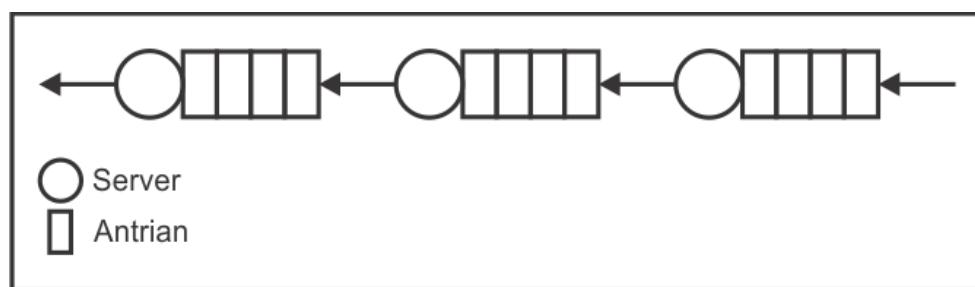
memberikan pelayanan sedangkan *Single Phase* menunjukkan bahwa sistem antrian hanya memiliki satu *phase* pelayanan. Contohnya pada penjualan karcis masuk obyek wisata yang hanya memiliki satu loket saja.



Gambar 2.1 Model Sistem Antrian *Single Chanel – Single Phase*

b. *Single Channel – Multi Phase*

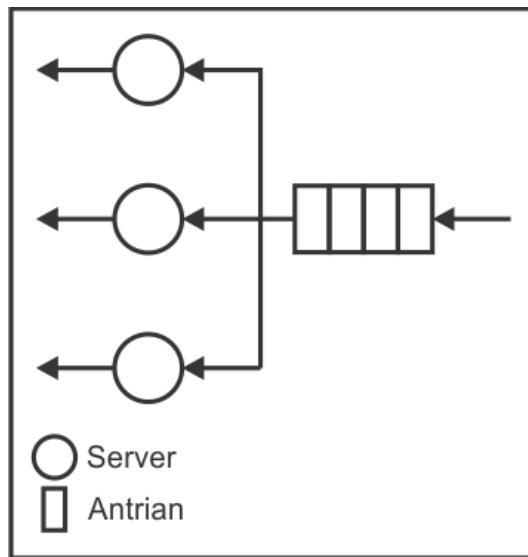
Desain pelayanan ini berarti bahwa sistem antrian tersebut memiliki *server* yang disusun secara berurutan atau seri atau bisa disebut juga disusun menjadi beberapa *phase*. Desain pelayanan seperti ini biasa diterapkan pada saat memperpanjang surat ijin mengemudi (SIM). Untuk memperpanjang SIM tersebut, seseorang diharuskan untuk menyelesaikan proses melalui loket – loket yang tersusun secara berurutan.



Gambar 2.2 Model Sistem Antrian *Single Channel – Multi Phase*

c. *Multi Channel – Single Phase*

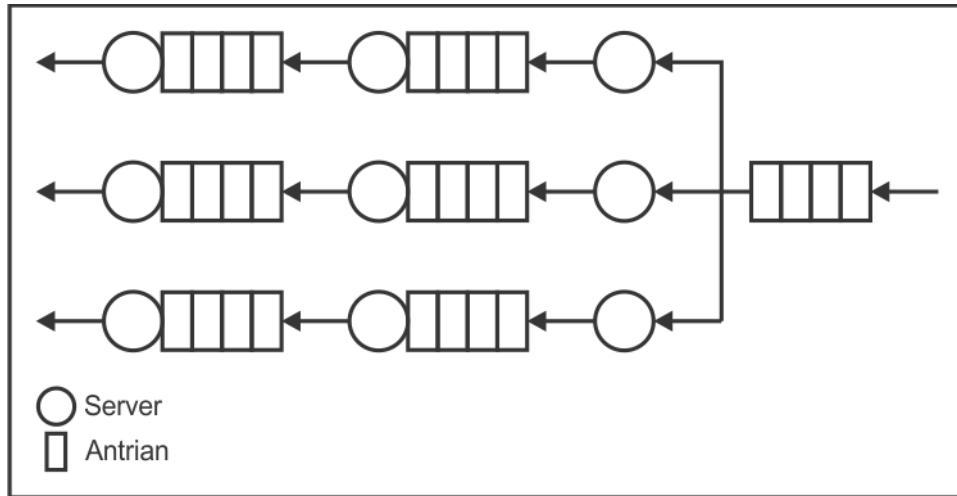
Desain pelayanan ini memiliki *server* yang disusun secara paralel yang dialiri dari satu antrian tunggal. Contohnya seperti saat nasabah mengantri di bank dengan beberapa loket *teller*.



Gambar 2.3 Model Sistem Antrian *Multi Channel – Single Phase*

d. *Multi Channel – Multi Phase*

Desain pelayanan ini memiliki satu antrian tunggal yang melewati beberapa jalur *server* yang tersusun paralel dan tiap jalur *server* tersebut terdapat beberapa *server* yang tersusun seri. Contohnya seperti pendaftaran pasien di rumah sakit. Pasien mendaftar di rumah sakit menuju loket pendaftaran yang terdiri dari beberapa loket. Kemudian, pasien melanjutkannya dengan menuju klinik yang diinginkan.



Gambar 2.4 Model Sistem Antrian *Multi Channel – Multi Phase*

5. Sumber Pemanggilan

Sumber pemanggilan *customer* bisa bersifat terbatas atau tak terbatas.

Sumber yang terbatas (*finite source*) berarti bahwa *customer* yang datang untuk mendapatkan pelayanan terbatas, seperti pada kerusakan pada mesin-mesin yang menunggu servis dari montir mesin tersebut. Sumber yang tak terbatas (*infinite source*) adalah *customer* yang terus datang tanpa henti, seperti panggilan pada sentral telefon (Taha, 2007:552).

G. Aturan Distribusi Eksponensial

Pada sebagian besar kondisi antrian, kedatangan dari *customer* terjadi pada kecenderungan yang benar-benar acak. Kecenderungan yang acak ini berarti bahwa kejadian pada suatu peristiwa yaitu kedatangan *customer* atau penyelesaian pelayanan, tidak dipengaruhi oleh panjang waktu yang telah berlalu sejak terjadinya peristiwa yang pertama kali.

Waktu pelayanan dan antar kedatangan yang acak ini dijelaskan menurut model antrian dengan distribusi eksponensial (Taha, 2007:553), dimana didefinisikan sebagai

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0 \quad (2.14)$$

dimana $f(t)$ merupakan fungsi densitas peluang dari interval waktu t antar kemunculan kejadian yang berurutan dengan parameter λ yang merupakan laju kedatangan unit per satuan waktu. Rata-rata waktu antar kedatangan didapat dengan (Osaki, 1992:43)

$$\begin{aligned} E[T] &= \int_0^{\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &= -te^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Fungsi distribusi kumulatifnya yaitu

$$F(t) = P\{t \leq T\} = \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda T} \quad (2.16)$$

Faktanya bahwa distribusi eksponensial adalah benar-benar acak. Dimisalkan waktu saat ini 08.20 dan kedatangan yang paling awal terjadi pada pukul 08.02, maka kemungkinan bahwa kedatangan selanjutnya terjadi 08.29 adalah sebuah fungsi dari selang waktu antara 08.20 hingga 08.29, dan ini benar-benar tidak terikat pada lama waktu yang telah berlalu sejak terjadinya peristiwa pertama yaitu antara 8:02 hingga 8:20. Hasil ini menunjukkan sifat *forgetfulness* dari distribusi eksponensial.

Dimisalkan distribusi eksponensial, $f(t)$, yang mewakili waktu, t , antara kejadian yang berturut-turut. Jika S adalah interval sejak kejadian dari peristiwa terakhir, maka sifat *forgetfulness* dari eksponensial (Taha, 2007:553) berakibat pada

$$P\{t > T + S | t > S\} = P\{t > T\} \quad (2.17)$$

Untuk membuktikan hasil tersebut, dimisalkan untuk eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$,

$$P\{t > Y\} = 1 - P\{t < Y\} = e^{-\lambda Y}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P\{t > T + S | t > S\} &= \frac{P\{t > T + S, t > S\}}{P\{t > S\}} = \frac{P\{t > T + S\}}{P\{t > S\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(T+S)}}{e^{-\lambda S}} = e^{-\lambda T} \\ &= P\{t > T\} \end{aligned}$$

H. Model Kelahiran dan Kematian Murni

Pada bagian ini berisi dua kondisi antrian yaitu model kelahiran murni dimana hanya kedatangan yang diperbolehkan, dan kematian murni dimana hanya keberangkatan yang berlangsung. Contoh dari model kelahiran murni berasal dari contoh sertifikat kelahiran untuk bayi yang baru lahir. Model kematian murni bisa didemonstrasikan pada pengembalian acak dari stok barang pada sebuah toko.

Distribusi eksponensial biasa menjelaskan waktu antar kedatangan pada model kelahiran murni dan waktu antar keberangkatan pada model kematian murni. Hasil dari pengembangan dua model tersebut adalah untuk menunjukkan

hubungan antara distribusi eksponensial dan Poisson, dengan pengertian bahwa satu distribusi secara otomatis mendefinisikan yang lain.

1. Model Kelahiran Murni

Model kelahiran ini digunakan untuk menentukan solusi dari peluang *steady state* atau dinotasikan p_n dan juga menjelaskan hubungan antara waktu antar kedatangan yang terdistribusi eksponensial dengan rata-rata kedatangan yang terdistribusi Poisson.

Dinotasikan $p_0(t)$ adalah peluang tidak ada kedatangan selama periode waktu t . Diberikan waktu antar kedatangan eksponensial dan laju kedatangan λ *customer* per satuan waktu sehingga

$$\begin{aligned}
 p_0(t) &= P\{\text{waktu antar kedatangan} \geq t\} \\
 &= 1 - P\{\text{waktu antar kedatangan} \leq t\} \\
 &= 1 - (1 - e^{-\lambda t}) \\
 &= e^{-\lambda t}.
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Berdasarkan persamaan (2.18), peluang tidak ada *customer* selama waktu h yang kecil ($h > 0$) adalah

$$p_0(h) = e^{-\lambda h} \tag{2.19}$$

Teorema 2.2 (Purcell, 1987:57)

Andaikan f sebuah fungsi yang memiliki turunan dari semua tingkatan dalam suatu selang $(a - r, a + r)$. Syarat yang perlu dan cukup agar deret Taylor

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + \frac{(x - a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x - a)^3}{3!}f'''(a) + \dots \tag{2.20}$$

Menggambarkan fungsi f pada selang itu, ialah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad (2.21)$$

Dengan $R_n(x)$ suku sisa dalam Rumus Taylor, yaitu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (2.22)$$

Dengan c suatu bilangan dalam selang $(a-r, a+r)$. Pada kejadian khusus apabila $a = 0$, diperoleh deret Maclaurin yaitu

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \dots \quad (2.23)$$

Apabila persamaan (2.19) dinyatakan dalam deret maclaurin (2.23) menjadi

$$\begin{aligned} p_0(h) &= p_0(0) + p_0'(0)(h) + \frac{p_0''(0)}{2!}(h)^2 + \frac{p_0'''(0)}{3!}(h)^3 + \dots \\ &= e^{-\lambda 0} - \lambda e^{-\lambda 0}(h) + \frac{\lambda^2 e^{-\lambda 0}}{2!}(h)^2 - \frac{\lambda^3 e^{-\lambda 0}}{3!}(h)^3 + \dots \\ &= 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (2.24)$$

Definisi 2.13 (Osaki, 1992:65)

Fungsi $f(h)$ dikatakan menjadi $o(h)$ jika

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \quad (2.25)$$

Contoh 2.1

Untuk interval waktu yang kecil $h > 0$, didapatkan

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda h} &= \lambda h - \frac{(\lambda h)^2}{2!} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} - \dots = \lambda h + o(h) \\ e^{-\lambda h} &= 1 - \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2!} - \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \dots = 1 - \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Sesuai dengan contoh 2.1 maka

$$p_0(h) = 1 - \lambda h + o(h) \quad (2.26)$$

Distribusi eksponensial didasarkan pada asumsi bahwa selama $h > 0$, paling tidak satu peristiwa (kedatangan) dapat terjadi (Taha, 2007:557). Dengan demikian, untuk $h \rightarrow 0$,

$$p_1(h) = 1 - p_0(h) = \lambda h + o(h) \quad (2.27)$$

Definisi 2.3 (Gross & Haris, 1998:16)

Pada model kelahiran murni ini mempertimbangkan beberapa hal yaitu *counting process* $\{N(t), t \geq 0\}$, dimana $N(t)$ jumlah kedatangan pada waktu t , $N(0) = 0$, dan dijabarkan 3 asumsi berikut:

(i) Peluang terjadi satu kedatangan antara waktu t dan $t + h$ adalah $\lambda h + o(h)$. Dapat ditulis $P\{\text{terjadi 1 kedatangan antara } t \text{ dan } t + h\} = \lambda h + o(h)$, dimana λ adalah suatu konstanta yang independen dari $N(t)$, dengan $N(t)$ merupakan proses *counting*, h adalah elemen penambah waktu, dan $o(h)$ dinotasikan sebagai banyak kedatangan yang dapat diabaikan jika dibandingkan h dengan $h \rightarrow 0$, sehingga

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

- (ii) Peluang lebih dari 1 kedatangan antara t dan $t + h$ adalah $o(h)$.
- (iii) Jumlah kedatangan dalam interval yang berurutan adalah independen yang berarti bahwa proses kedatangan tiap interval waktu tidak tergantung pada interval waktu sebelumnya.

Untuk memperoleh peluang n kedatangan pada interval waktu t ($p_n(t)$) dimana n merupakan bilangan bulat dan $n \geq 0$ perlu dijabarkan sebagai berikut.

Untuk $n \geq 1$ didapatkan

$$\begin{aligned}
 p_n(t+h) = & P\{n \text{ kedatangan pada } t \text{ dan tidak ada kedatangan pada } h\} \\
 & + P\{n-1 \text{ kedatangan pada } t \text{ dan } 1 \text{ kedatangan pada } h\} \\
 & + P\{n-2 \text{ kedatangan pada } t \text{ dan } 2 \text{ kedatangan pada } h\} + \dots \\
 & + P\{\text{tidak ada kedatangan pada } t \text{ dan } n \text{ kedatangan pada } h\} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan asumsi (i), (ii), dan (iii) pada definisi 2.3 serta melakukan substitusi persamaan (2.26) dan (2.27) pada persamaan (2.28) menjadi

$$p_n(t+h) = p_n(t)[1 - \lambda h + o(h)] + p_{n-1}(t)[\lambda h + o(h)] + o(h), \quad (2.29)$$

dimana pada akhir persamaan (2.29) yaitu $o(h)$ merupakan $P\{n-j \text{ kedatangan pada } t \text{ dan } j \text{ pada } \Delta t; 2 \leq j \leq n\}$.

Untuk $n = 0$ dari persamaan (2.29) diperoleh

$$p_0(t+h) = p_0(t)[1 - \lambda h + o(h)]. \quad (2.30)$$

Dari persamaan (2.29) dan (2.30) dan menggabungkan semua $o(h)$ didapatkan

$$p_0(t+h) - p_0(t) = -\lambda h p_0(t) + o(h) \quad (2.31)$$

dan

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -\lambda h p_n(t) + \lambda h p_{n-1}(t) + o(h) \quad (n \geq 1). \quad (2.32)$$

Persamaan (2.31) dan (2.32) dibagi dengan h dan mengambil limit $h \rightarrow 0$ sehingga diperoleh persamaan

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} \right] = -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h},$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \right] = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \quad (n \geq 1)$$

atau dapat dituliskan

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) \quad (2.33)$$

dan

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) \quad (n \geq 1). \quad (2.34)$$

Untuk $n = 1$ pada persamaan (2.34) didapat:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) + \lambda p_0(t),$$

$$\frac{dp_1(t)}{dt} + \lambda p_1(t) = \lambda p_0(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dp_1(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} p_1(t) = \lambda$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_1(t)) = \lambda$$

$$e^{\lambda t} p_1(t) = \int \lambda dt$$

$$p_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$$

Untuk $n = 2$ didapatkan:

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = -\lambda p_2(t) + \lambda p_1(t),$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} + \lambda p_2(t) = \lambda p_1(t) = \lambda \lambda t e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dp_2(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} p_2(t) = \lambda^2 t$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_2(t)) = \lambda^2 t$$

$$e^{\lambda t} p_2(t) = \int \lambda^2 t dt$$

$$p_2(t) = \frac{1}{2} \lambda^2 t^2 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2 \cdot 1} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

Untuk $n = 3$ didapatkan:

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = -\lambda p_3(t) + \lambda p_2(t),$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} + \lambda p_3(t) = \lambda p_2(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^2}{2!} e^{-\lambda t}$$

$$e^{\lambda t} \frac{dp_3(t)}{dt} + \lambda e^{\lambda t} p_3(t) = \frac{1}{2} \lambda^3 t^2$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\lambda t} p_3(t)) = \frac{1}{2} \lambda^3 t^2$$

$$e^{\lambda t} p_3(t) = \int \frac{1}{2} \lambda^3 t^2 dt$$

$$p_3(t) = \frac{1}{6} \lambda^3 t^3 e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3 \cdot 2 \cdot 1} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^3}{3!} e^{-\lambda t}$$

Sehingga dapat diambil rumus umum, yaitu

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

dimana merupakan fungsi densitas peluang berdistribusi Poisson. $p_n(t)$ merupakan peluang n kedatangan yang terjadi secara acak pada interval waktu t yang mengikuti distribusi Poisson dengan parameter λt . Dari persamaan (2.15) diketahui bahwa waktu antar kedatangan yang dinotasikan $\frac{1}{\lambda}$ terdistribusi eksponensial. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa waktu antar kedatangan $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ yang mengikuti distribusi eksponensial maka jumlah kedatangan per satuan waktu (λ) akan mengikuti distribusi Poisson.

Tabel berikut merangkum hubungan antara distribusi eksponensial dan Poisson dengan rata-rata kedatangan yaitu λ kedatangan per satuan waktu:

Tabel 2.1 Hubungan Distribusi Eksponensial dan Poisson

	Eksponensial	Poisson
Variabel Acak	Waktu antar kedatangan berturut-turut, t	Banyaknya kedatangan, n , selama periode tertentu T
Range	$t \geq 0$	$n = 0, 1, 2, \dots$
Fungsi kepadatan	$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$	$p_n(T) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda T}}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$
Nilai Rata-rata	$\frac{1}{\lambda}$ satuan waktu	λT kedatangan selama T
Peluang kumulatif	$P\{t \leq A\} = 1 - e^{-\lambda A}$	$p_{n \leq N}(T) = p_0(T) + p_1(T) + \dots + p_N(T)$
Peluang tidak ada kedatangan selama periode A	$P\{t > A\} = e^{-\lambda A}$	$p_0(A) = e^{-\lambda A}$

2. Model Kematian Murni

Pada model kematian murni, sistem dimulai dengan N *customer* pada waktu 0 dan tidak ada kedatangan baru yang diperbolehkan. Kejadian yang diperbolehkan hanya keberangkatan saja yang dinotasikan dengan rata-rata μ *customer* per satuan waktu. Pengembangan persamaan diferensial pada peluang $p_n(t)$ dari n *customer* yang tersisa setelah t satuan waktu menggunakan tiga asumsi.

Definisi 2.4(Osaki, 1992:141)

Jika suatu proses stokastik dimana $X(t)$ merupakan jumlah keberangkatan *customer* pada waktu t dengan $t > 0$, merupakan rantai Markov dengan peluang transisi yang tetap dengan *state space* $\{k, k = 0, 1, 2, \dots, n\}$, dengan n bilangan bulat, maka berlaku:

- (i) $X(0) = N$,
- (ii) $P\{X(t + h) - X(t) = -1 | X(t) = k\} = \mu h + o(h)$,
- (iii) $P\{X(t + h) - X(t) \geq -2 | X(t) = k\} = o(h)$,

dengan parameter $\{\mu_k, k = 0, 1, 2, \dots, n\}$.

Kejadian pada proses kematian murni ini sering terjadi pada interval waktu yang tak terbatas. Akan tetapi, pada proses kematian murni ini, sebagian besar N kejadian terjadi pada semua interval waktu kecuali pada status 0 dimana tidak ada satu kejadian yang terjadi. Oleh karena itu, status 0 merupakan status penyerapan.

Misalkan

$$P_n(t) = P\{X(t) = n | X(0) = N\} (n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

adalah peluang transisi dengan menentukan $X(0) = N$ dari asumsi (i) dari definisi 2.4. Dari definisi 2.4 digunakan untuk menentukan nilai $p_n(t + h)$ yaitu sebagai berikut.

$$\begin{aligned} p_n(t + h) &= P\{X(t + h) = n\} \\ &= P\{X(t) = n\} P\{X(t + h) - X(t) = 0 | X(t) = n\} \\ &\quad + P\{X(t) = n + 1\} P\{X(t + h) - X(t) = -1 | X(t) = n + 1\} \\ &\quad + P\{X(t) = n + 2\} P\{X(t + h) - X(t) = -2 | X(t) = n + 2\} + \dots \\ &\quad + P\{X(t) = n + i\} P\{X(t + h) - X(t) = -i | X(t) = n + i\} \\ &= P\{X(t) = n\} P\{X(t + h) - X(t) = 0 | X(t) = n\} \\ &\quad + P\{X(t) = n + 1\} P\{X(t + h) - X(t) = -1 | X(t) = n + 1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=2}^{N-1} P\{X(t) = n+i\} P\{X(t+h) - X(t) = -i \mid X(t) = n+i\} \\
& = p_n(t)[1 - \mu h + o(h)] + p_{n+1}(t)[\mu h + o(h)] + \sum_{i=2}^{N-1} p_{n+i} o(h) \\
& = p_n(t) - \mu h p_n(t) + p_n(t) o(h) + \mu h p_{n+1}(t) + p_{n+1} o(h) \\
& + \sum_{i=2}^{N-1} p_{n+i} o(h) \\
& = p_n(t) - \mu h p_n(t) + \mu h p_{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} p_{n+i} o(h).
\end{aligned}$$

Kemudian dilanjutkan dengan memindahkan $p_n(t)$ ke ruas kiri sehingga didapat

$$p_n(t+h) - p_n(t) = -\mu h p_n(t) + \mu h p_{n+1}(t) + \sum_{i=0}^{N-1} p_{n+i} o(h) \quad (2.36)$$

Persamaan (2.36) dibagi dengan h dan diambil limit $h \rightarrow 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \right] &= \frac{-\mu h p_n(t)}{h} + \frac{\mu h p_{n+1}(t)}{h} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{p_{n+i} o(h)}{h} \\
\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-\mu h p_n(t)}{h} + \frac{\mu h p_{n+1}(t)}{h} + \sum_{i=0}^{N-1} \frac{p_{n+i} o(h)}{h} \right] \\
\frac{dp_n(t)}{dt} &= -\mu p_n(t) + \mu p_{n+1}(t), \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.37)
\end{aligned}$$

Dari (i) definisi 2.4 menyatakan bahwa sistem antrian hanya memiliki N customer dengan tidak adanya penambahan customer atau kedatangan. Jumlah N customer ini membatasi nilai n dari 0 hingga $N-1$. Telah didapatkan persamaan (2.37) dimana telah mencakupi nilai $n = 1, 2, \dots, N-1$. Untuk itu dibutuhkan nilai $p_N(t)$ dan untuk melengkapi persamaan (2.37).

$$p_N(t+h) = P\{X(t+h) = N\}$$

$$\begin{aligned}
p_N(t+h) &= P\{X(t) = N\} P\{X(t+h) - X(t) = 0 \mid X(t) = N\} \\
p_N(t+h) &= p_N(t)(1 - \mu h + o(h)) \\
p_N(t+h) &= p_N(t) - \mu h p_N(t) + p_N(t)o(h) \\
p_N(t+h) - p_N(t) &= -\mu h p_N(t) + p_N(t)o(h)
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Persamaan (2.38) dibagi dengan h dan diambil limit $h \rightarrow 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{p_N(t+h) - p_N(t)}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-\mu h p_N(t)}{h} + \frac{p_N(t)o(h)}{h} \right] \\
\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{p_N(t+h) - p_N(t)}{h} \right] &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-\mu h p_N(t)}{h} + \frac{p_N(t)o(h)}{h} \right] \\
\frac{dp_N(t)}{dt} &= -\mu p_N(t) \\
\frac{dp_N(t)}{p_N(t)} &= -\mu dt \\
\ln(p_N(t)) &= -\mu t \\
p_N(t) &= e^{-\mu t}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Setelah ditemukan nilai $p_N(t)$ maka dapat dilanjutkan persamaan (2.37) dengan nilai $n = N - 1$ yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{N-1}(t)}{dt} &= -\mu p_{N-1}(t) + \mu p_N(t) \\
\frac{dp_{N-1}(t)}{dt} + \mu p_{N-1}(t) &= \mu p_N(t).
\end{aligned}$$

Kemudian disubtitusi $p_N(t) = e^{-\mu t}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{N-1}(t)}{dt} + \mu p_{N-1}(t) &= \mu e^{-\mu t} \\
e^{\mu t} \frac{dp_{N-1}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} p_{N-1}(t) &= \mu \\
\frac{d(e^{\mu t} p_{N-1}(t))}{dt} &= \mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{\mu t} p_{N-1}(t) &= \mu t \\
p_{N-1}(t) &= \mu t e^{-\mu t} \\
p_{N-1}(t) &= \frac{(\mu t)^1}{1!} e^{-\mu t}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Untuk nilai $n = N - 2$ disubtitusi pada persamaan (2.37) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{N-2}(t)}{dt} &= -\mu p_{N-2}(t) + \mu p_{N-1}(t) \\
\frac{dp_{N-2}(t)}{dt} + \mu p_{N-2}(t) &= \mu p_{N-1}(t) \\
\text{Kemudian disubtitusi } p_{N-1}(t) &= \frac{(\mu t)^1}{1!} e^{-\mu t} \text{ sehingga diperoleh} \\
\frac{dp_{N-2}(t)}{dt} + \mu p_{N-2}(t) &= \mu \frac{(\mu t)^1}{1!} e^{-\mu t} \\
e^{\mu t} \frac{dp_{N-2}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} p_{N-2}(t) &= \mu^2 t \\
\frac{d(e^{\mu t} p_{N-2}(t))}{dt} &= \mu^2 t \\
e^{\mu t} p_{N-2}(t) &= \frac{1}{2} \mu^2 t^2 \\
p_{N-2}(t) &= \frac{1}{2} \mu^2 t^2 e^{-\mu t} \\
p_{N-2}(t) &= \frac{(\mu t)^2}{2!} e^{-\mu t}.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Untuk nilai $n = N - 3$ disubtitusi pada persamaan (2.37) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{N-3}(t)}{dt} &= -\mu p_{N-3}(t) + \mu p_{N-2}(t) \\
\frac{dp_{N-3}(t)}{dt} + \mu p_{N-3}(t) &= \mu p_{N-2}(t) \\
\text{Kemudian disubtitusi } p_{N-2}(t) &= \frac{(\mu t)^2}{2!} e^{-\mu t} \text{ sehingga diperoleh}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_{N-3}(t)}{dt} + \mu p_{N-3}(t) &= \mu \frac{(\mu t)^2}{2!} e^{-\mu t} \\
e^{\mu t} \frac{dp_{N-3}(t)}{dt} + \mu e^{\mu t} p_{N-3}(t) &= \frac{1}{2} \mu^3 t^2 \\
\frac{d(e^{\mu t} p_{N-3}(t))}{dt} &= \frac{1}{2} \mu^3 t^2 \\
e^{\mu t} p_{N-3}(t) &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} \mu^3 t^3 \\
p_{N-3}(t) &= \frac{1}{6} \mu^3 t^3 e^{-\mu t} \\
p_{N-3}(t) &= \frac{(\mu t)^3}{3!} e^{-\mu t}. \tag{2.42}
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.39), (2.40), (2.41), dan (2.42) maka dapat diambil rumus umum **truncated Poisson** (Taha, 2007:561) yaitu

$$p_n(t) = \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!}, n = 1, 2, \dots, N. \tag{2.43}$$

Untuk menentukan nilai $p_0(t)$ dapat digunakan teorema 2.1 dengan nilai n dibatasi dari 0 sampai N sehingga didapatkan persamaan

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^N p_n(t) &= 1 \\
p_0(t) + \sum_{n=1}^N p_n(t) &= 1 \\
p_0(t) &= 1 - \sum_{n=1}^N p_n(t) \\
p_0(t) &= 1 - \sum_{n=1}^N \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} \tag{2.44}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (2.44) disederhanakan terlebih dahulu persamaan dalam sigma sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \frac{(\mu t)^{N-n} e^{-\mu t}}{(N-n)!} &= e^{-\mu t} \sum_{n=1}^N \frac{(\mu t)^{N-n}}{(N-n)!} \\
&= e^{-\mu t} \left(\frac{(\mu t)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{(\mu t)^{N-2}}{(N-2)!} + \cdots + \frac{(\mu t)^{N-(N-1)}}{(N-(N-1))!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\mu t)^{N-N}}{(N-N)!} \right) \\
&= e^{-\mu t} \left(\frac{(\mu t)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{(\mu t)^{N-2}}{(N-2)!} + \cdots + \frac{(\mu t)^1}{(1)!} + \frac{(\mu t)^0}{(0)!} \right) \\
&= e^{-\mu t} \left(\frac{(\mu t)^0}{(0)!} + \frac{(\mu t)^1}{(1)!} + \cdots + \frac{(\mu t)^{N-2}}{(N-2)!} + \frac{(\mu t)^{N-1}}{(N-1)!} \right) \\
&= e^{-\mu t} \left(\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mu t)^n}{(n)!} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mu t)^n}{(n)!} e^{-\mu t} \tag{2.45}
\end{aligned}$$

Setelah disederhanakan, persamaan (2.45) disubtitusikan kembali kedalam

persamaan (2.44) sehingga diperoleh

$$p_0(t) = 1 - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(\mu t)^n}{(n)!} e^{-\mu t} \tag{2.46}$$

I. Model Antrian Poisson yang Digeneralisasi

Pada bagian ini dikembangkan model antrian umum yang menggabungkan aspek laju kedatangan dan keberangkatan yang terdistribusi Poisson serta waktu antar kedatangan dan pelayanan yang terdistribusi eksponensial. Pengembangan dari model yang digeneralisasi didasarkan pada *steady state* yang didapatkan setelah sistem beroperasi untuk waktu yang cukup lama. Akan tetapi, analisis ini berbeda dengan perilaku perpindahan yang dapat ditemukan diawal pengoperasian

suatu sistem. Suatu alasan untuk tidak mendiskusikan perilaku perpindahan sementara pada bagian ini adalah analisis yang rumit. Alasan lain adalah proses antrian ini sebagian besar terjadi pada kondisi terbentuknya *steady state*.

Model yang digeneralisasi berlaku bahwa rata-rata kedatangan dan keberangkatan merupakan **pernyataan terikat** yang berarti bahwa dua aspek tersebut bergantung pada banyak *customer* pada fasilitas pelayanan. Sebagai contoh, para pengendara harus mempercepat pembayaran tiket masuk gerbang tol selama jam sibuk. Contoh lain terjadi di toko dengan sejumlah mesin dimana laju kerusakan berkurang seiring dengan jumlah mesin rusak meningkat (karena hanya mesin yang beroperasi yang bisa menghasilkan kerusakan baru).

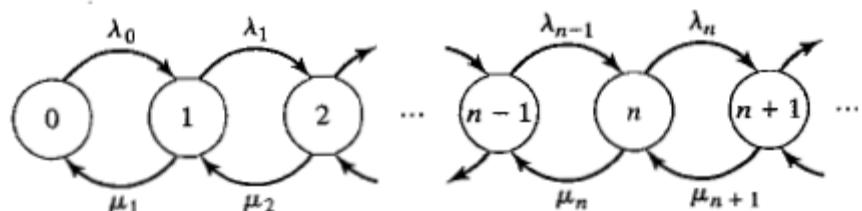
Didefinisikan

n = Banyak *customer* pada sistem (pada antrian dan pelayanan)

λ_n = Rata-rata kedatangan n *customer* dalam sistem

μ_n = Rata-rata keberangkatan n *customer* dalam sistem

p_n = Peluang status yang kuat dari n *customer* dalam sistem



Gambar 2.5 Diagram Transisi

Model yang digeneralisasi menghasilkan p_n sebagai fungsi dari λ_n dan μ_n . Peluang ini biasanya untuk mengetahui ukuran performa dari sistem, seperti rata-rata panjang antrian, rata-rata waktu mengantri, dan rata-rata penggunaan fasilitas.

Peluang p_n ditentukan dengan menggunakan **diagram transisi**. Berikut penjelasan dari diagram transisi (Taha, 2007:564).

- (i) Sistem antrian pada status n ketika banyak *customer* pada sistem adalah n .
- (ii) Peluang lebih dari satu peristiwa yang terjadi selama interval h yang kecil mendekati nol dinyatakan $h \rightarrow 0$. Ini berarti bahwa untuk $n > 0$, status n dapat diganti hanya hingga 2 status yang mungkin:
 - a. $n - 1$ ketika keberangkatan terjadi pada laju μ_n
 - b. $n + 1$ ketika kedatangan terjadi pada laju λ_n
- (iii) Status 0 dapat berganti ke status 1 ketika terjadi kedatangan pada laju λ_0 .
- (iv) Pada μ_0 adalah tidak terdefinisi karena tidak ada keberangkatan dapat terjadi jika sistem kosong.

Dibawah kondisi status yang kuat, untuk $n > 0$, laju yang masuk dan keluar dari status n harus sama. Berdasarkan fakta bahwa status n dapat diganti hanya ke status $n - 1$ dan $n + 1$, didapatkan

$$\left(\begin{array}{l} \text{laju yang diharapkan} \\ \text{masuk status } n \end{array} \right) = \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} \quad (2.47)$$

Dengan cara yang sama,

$$\left(\begin{array}{l} \text{laju yang diharapkan} \\ \text{keluar status } n \end{array} \right) = (\lambda_n + \mu_n) p_n \quad (2.48)$$

Karena laju yang diharapkan masuk status n (2.47) dan keluar status n (2.48) adalah sama, maka didapatkan **persamaan keseimbangan**:

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.49)$$

Dari gambar 2.5, persamaan keseimbangan (2.49) disubtitusi dengan $n = 0$ didapatkan

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$

sehingga

$$p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) p_0$$

Lalu, untuk $n = 1$ disubtitusi pada (2.49) didapatkan

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1$$

Disubtitusi dengan $p_1 = \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) p_0$ didapatkan

$$\lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) \left(\frac{\lambda_0}{\mu_1}\right) p_0$$

$$\lambda_0 \mu_1 p_0 + \mu_1 \mu_2 p_2 = \lambda_0 \lambda_1 p_0 + \lambda_0 \mu_1 p_0$$

$$\mu_1 \mu_2 p_2 = \lambda_0 \lambda_1 p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

Untuk $n = 2$ disubtitusi pada persamaan (2.49) dan disederhanakan maka didapatkan

$$p_3 = \left(\frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1}\right) p_0$$

Oleh karena itu, didapatkan rumus umum untuk p_n yaitu

$$p_n = \left(\frac{\lambda_n \dots \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \dots \mu_3 \mu_2 \mu_1}\right) p_0 \quad (2.50)$$

Dengan diketahuinya persamaan p_n maka diketahui semua peluang kejadian terdapat *customer* dalam sistem. Oleh karena itu, bisa digunakan teorema 2.1 untuk mencari nilai p_0 .

J. Antrian Poisson Khusus

Gambar 2.6 menggambarkan situasi antrian Poisson khusus dengan c *server* yang paralel. Seorang *customer* mengantri untuk dipilih dari antrian untuk mulai mendapatkan pelayanan dengan *server* pertama yang tersedia. Laju kedatangan pada sistem adalah λ *customer* per satuan waktu. Semua *server* yang paralel adalah sama, berarti bahwa laju pelayanan untuk setiap *server* adalah μ *customer* per satuan waktu. Banyak *customer* pada sistem terdiri dari *customer* yang sedang dilayani dan *customer* yang sedang mengantri.

Untuk mendeskripsikan suatu model antrian maka dibutuhkan suatu notasi yang merangkum semua karakteristik yang berpengaruh. Notasi tersebut adalah notasi **Kendall** yang kemudian ditambahkan oleh **A. M. Lee** (Taha,2007:569). Notasi tersebut memiliki susunan

$$(a/b/c):(d/e/f)$$

dimana

a = Distribusi kedatangan (M, E_k, D, GI)

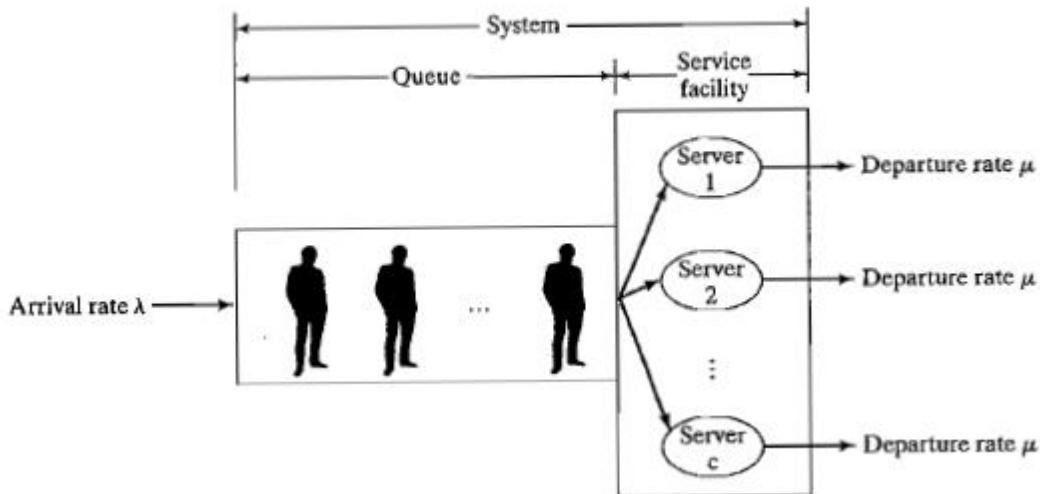
b = Distribusi keberangkatan (M, E_k, D, G)

c = Jumlah *server* paralel ($c = 1, 2, \dots, \infty$)

d = Disiplin antrian (*FCFS, LCFS, SIRO, GD*)

e = Banyak maksimal (terbatas atau tidak terbatas) *customer* yang diijinkan dalam sistem (pada antrian dan saat pelayanan)

f = kapasitas dari sumber pemanggilan (terbatas atau tidak terbatas)



Gambar 2.6 Representasi sistem antrian dengan c server yang paralel

Notasi standar untuk mewakili distribusi kedatangan dan keberangkatan

(simbol a dan b) adalah

M = Distribusi Markovian (atau Poisson) pada kedatangan atau keberangkatan
 (atau setara dengan distribusi antar kedatangan atau waktu pelayanan yang
 eksponensial)

D = Distribusi Deterministik dimana waktu kedatangan atau keberangkatan
customer telah ditentukan atau terjadwal

E_k = Distribusi Erlang dengan k phase (penjumlahan dari distribusi eksponensial
 yang tidak saling terikat)

GI = Distribusi umum waktu antar kedatangan

G = Distribusi umum waktu pelayanan

Notasi disiplin antrian (simbol d) yaitu

1. FCFS (*First come, first served*) merupakan disiplin antrian dengan aturan *customer* yang pertama datang adalah yang pertama dilayani.

2. LCFS (*Last come, first served*) merupakan disiplin antrian dengan aturan *customer* yang terakhir datang adalah yang pertama dilayani.
3. SIRO (*Service in acak order*) merupakan disiplin antrian dengan pemberian pelayanan kepada *customer* secara acak.
4. GD (*General Discipline*) merupakan disiplin antrian secara umum berlaku pada sebagian besar sistem antrian (apabila tidak ada disiplin khusus yang mengikat) yaitu *customer* yang pertama datang adalah yang pertama dilayani.

Untuk menggambarkan penggunaan dari notasi, model $(M/D/10):(GD/20/\infty)$ menggunakan distribusi kedatangan Poisson (atau waktu antar kedatangan eksponensial), distribusi pelayanan yang telah terjadwal, terdapat 10 *server* paralel, disiplin antrian secara umum (GD), kapasitas sistem yaitu 20 *customer*, dan kapasitas dari sumber pemanggilan *customer* tidak terbatas.

Sebelum mempresentasikan secara rinci keutamaan dari antrian Poisson, akan ditunjukkan bagaimana *steady state* ukuran performa dari situasi antrian yang digeneralisasi dari probabilitas *steady state* p_n .

1. *Steady State* Ukuran Performa

Biasanya yang paling sering digunakan pada ukuran performa di suatu antrian adalah

$$L_s = \text{Nilai harapan banyak } customer \text{ dalam sistem}$$

$$L_q = \text{Nilai harapan banyak } customer \text{ dalam antrian}$$

$$W_s = \text{Nilai harapan waktu } customer \text{ dalam sistem}$$

$$W_q = \text{Nilai harapan waktu } customer \text{ dalam antrian}$$

n = Banyaknya *customer* dalam sistem

\bar{c} = Kepadatan *customer* pada *server*

Peluang *steady state* untuk ukuran atau parameter suatu sistem adalah dengan menentukan ukuran keefektifan sistem itu sendiri. Dua ukuran tersebut adalah nilai harapan dalam sistem dan nilai harapan dalam antrian. Dimisalkan N adalah suatu variabel acak dari banyak *customer* dalam sistem dan L_s merupakan nilai harapannya (Gross & Harris, 1998:59). Dengan demikian, dapat dituliskan

$$L_s = E[N] = \sum_{n=0}^{\infty} np_n \quad (2.51)$$

Nilai harapan banyaknya *customer* antri (L_q) merupakan jumlah dari perkalian *customer* dalam antrian dengan peluang n *customer* (Hillier & Lieberman. 2011: 852), dinyatakan dengan

$$L_q = E[N_q] = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c)p_n \quad (2.52)$$

Hubungan antara L_s dan W_s dikenal sebagai ***Little's formula*** (Little, 1961:383) yaitu

$$L = \lambda W \quad (2.53)$$

dimana

L = banyaknya unit yang diharapkan berada dalam sistem

W = waktu yang diharapkan untuk suatu unit berada dalam sistem

$1/\lambda$ = selang waktu yang diharapkan antara dua kedatangan yang berurutan ke dalam sistem.

Hubungan antara L_q dan W_q dari ***Little's formula*** (Little, 1961:383) yaitu

$$L_q = \lambda W_q \quad (2.54)$$

dimana

L_q = banyaknya unit yang diharapkan berada dalam antrian

W_q = waktu yang diharapkan untuk suatu unit berada dalam antrian

$1/\lambda$ = selang waktu yang diharapkan antara dua kedatangan yang berurutan ke dalam sistem.

Dimisalkan $L = L_s$, $W = W_s$ serta $\lambda = \lambda_{eff}$ dari (2.53) dan (2.54)

sehingga didapatkan (Taha, 2007:570)

$$L_s = \lambda_{eff} W_s \quad (2.55)$$

$$L_q = \lambda_{eff} W_q \quad (2.56)$$

Hubungan ini berlaku pada kondisi yang cukup umum. Parameter λ_{eff} adalah laju kedatangan efektif pada sistem yang berarti tidak ada kedatangan *customer* yang terbuang atau tidak bisa masuk sistem. Parameter λ_{eff} sama dengan laju kedatangan λ ketika semua kedatangan *customer* dapat masuk ke sistem. Sebaliknya, jika beberapa *customer* tidak dapat masuk karena sistem penuh maka $\lambda_{eff} < \lambda$ atau dengan kata lain ada *customer* yang terbuang (λ_{loss}). Jika λ_{loss} adalah kedatangan *customer* yang terbuang, maka hubungan λ_{eff} dan λ dapat direpresentasikan sebagai berikut

$$\lambda = \lambda_{eff} + \lambda_{loss} \quad (2.57)$$

Hubungan langsung antara W_s dan W_q dapat diketahui dengan definisi berikut (Taha, 2007:570),

$$\left(\begin{array}{l} \text{Nilai harapan banyak} \\ \text{customer pada sistem} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{Nilai harapan banyak} \\ \text{customer pada antrian} \end{array} \right) + (\text{Waktu pelayanan})$$

didapatkan

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad (2.58)$$

Selanjutnya, akan didapatkan hubungan antara L_s ke L_q dengan mengalikan kedua sisi dari formula terakhir dengan λ_{eff} , dimana dari *Little's formula* menghasilkan (Taha, 2007:570)

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.59)$$

Dari definisi, perbedaan antara rata-rata pada sistem, L_s , dan jumlah rata-rata pada antrian, L_q , harus sama dengan kepadatan *customer* pada *server*, \bar{c} , (Taha, 2007:570) sehingga

$$\bar{c} = L_s - L_q = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.60)$$

Misalkan c adalah banyak *server*, bisa didapatkan kepadatan server (ρ) dimana

$$\rho = \frac{\bar{c}}{c} = \frac{\lambda_{eff}}{\mu} \quad (2.61)$$

2. Model Antrian Satu *Server* dengan Kapasitas Sistem Tak Terbatas

Model ini memiliki notasi Kendall yaitu (M/M/1):(GD/ ∞/∞) dimana waktu antar kedatangan dan pelayanan terdistribusi eksponensial, hanya terdapat satu *server*, asumsi *customer* mengantri dengan tipe antrian secara umum (*General Discipline*), kapasitas sistem tidak terbatas, dan sumber pemanggilan yang tak terbatas.

Dengan menggunakan notasi pada model yang digeneralisasikan, didapat

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \\ \mu_n &= \mu \end{aligned} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jika laju kedatangan efektif pada sistem disimbolkan λ_{eff} dan laju kedatangan yang tidak dapat masuk ke dalam sistem disimbolkan λ_{loss} maka $\lambda_{eff} = \lambda$ dan $\lambda_{loss} = 0$, karena semua *customer* yang datang dapat masuk kedalam sistem dan tidak ada *customer* yang terbuang. Misal $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ atau ρ bisa dikatakan kepadatan *customer* pada *server*, pernyataan untuk p_n dari persamaan (2.50) menjadi

$$p_n = \rho^n p_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

Untuk menentukan nilai dari p_0 , digunakan teorema 2.1 dengan menyubtitusi nilai p_n dari persamaan (2.62) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n &= 1 \\ p_0 + \rho^1 p_0 + \rho^2 p_0 + \rho^3 p_0 + \dots + \rho^n p_0 &= 1 \\ p_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^n) &= 1 \end{aligned}$$

Misalkan $\rho < 1$, deret geometrinya akan memiliki jumlah terbatas $\left(\frac{1}{1-\rho}\right)$,

sehingga

$$\begin{aligned} p_0 \left(\frac{1}{1-\rho} \right) &= 1 \\ p_0 &= 1 - \rho \end{aligned} \quad (2.63)$$

Rumus umum untuk p_n dengan menyubtitusi persamaan (2.62) pada persamaan (2.63) sehingga didapat

$$p_n = (1 - \rho) \rho^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\rho < 1) \quad (2.64)$$

Asal mula matematis dari p_n mengangkat kondisi $\rho < 1$ atau $\lambda < \mu$ agar sistem tidak *overload* dan *steady state* bisa ditentukan. Jika $\lambda \geq \mu$, maka deret geometri tidak akan konvergen dan *steady state* peluang p_n tidak ada. Hasil ini mengatakan bahwa jika laju pelayanan lebih besar daripada laju kedatangan maka

panjang antrian akan terus bertambah dan tidak ada *steady state*. Ukuran performa L_s didapatkan dengan menggunakan persamaan (2.51) yang disubtitusi dengan persamaan (2.64) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
L_s &= \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n \\
&= (1-\rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \\
&= (1-\rho)(0 + \rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \dots) \\
&= (1-\rho)\rho(1 + 2\rho + 3\rho^2 + \dots) \\
&= (1-\rho)\rho \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \\
&= (1-\rho)\rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}(\rho^n) \\
&= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \\
&= (1-\rho)\rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{1-\rho} \right) \\
&= (1-\rho)\rho \frac{1}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} \tag{2.65}
\end{aligned}$$

Karena $\lambda_{eff} = \lambda$ dimana tidak ada batas laju kedatangan, maka ukuran performa yang tersisa ditentukan dengan hubungan-hubungan pada **Little's formula**. Untuk menentukan W_s digunakan persamaan (2.55) dengan menyubtitusi persamaan L_s (2.65) yaitu

$$L_s = \lambda W_s$$

$$\begin{aligned}
W_s &= \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} \\
&= \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(\frac{\lambda\mu}{\mu} - \frac{\lambda^2}{\mu}\right)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(\frac{\lambda\mu-\lambda^2}{\mu}\right)} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda\mu - \lambda^2} \\
&= \frac{1}{\mu - \lambda}
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Untuk menentukan W_q dapat digunakan *Little's formula* yaitu persamaan (2.58)

yang kemudian disubtitusikan nilai W_s (2.66) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
W_s &= W_q + \frac{1}{\mu} \\
W_q &= W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{\mu - (\mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)\mu} = \frac{\mu - \mu + \lambda}{(\mu - \lambda)\mu} \\
&= \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu} = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)\mu} \times \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu}} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\frac{(\mu-\lambda)\mu}{\mu}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\mu} \\
&= \frac{\rho}{(1 - \rho)\mu}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Untuk menentukan L_q dapat digunakan *Little's formula* yaitu persamaan (2.56)

yang kemudian disubtitusikan nilai W_q (2.67) sehingga didapat

$$\begin{aligned}
L_q &= \lambda W_q = \lambda \frac{\rho}{(1 - \rho)\mu} \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \frac{\rho}{(1 - \rho)} \\
&= \rho \frac{\rho}{(1 - \rho)} \\
&= \frac{\rho^2}{1 - \rho}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Untuk menentukan kepadatan *customer* pada *server* atau dinotasikan \bar{c} dapat digunakan persamaan (2.60) yaitu

$$\begin{aligned}
\bar{c} &= L_s - L_q = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{\rho^2}{1 - \rho} \\
&= \frac{\rho - \rho^2}{1 - \rho} = \frac{\rho(1 - \rho)}{1 - \rho} = \rho
\end{aligned} \tag{2.69}$$

3. Model Antrian *c Server* dengan Kapasitas Sistem Tak Terbatas

Model ini memiliki notasi Kendall yaitu (M/M/c):(GD/ ∞/∞) dimana waktu antar kedatangan dan pelayanan terdistribusi eksponensial, terdapat *c server*, asumsi *customer* mengantri dengan tipe antrian secara umum (*General Discipline*), kapasitas sistem tidak terbatas, dan sumber pemanggilan yang tak terbatas.

Laju kedatangan adalah λ dan laju pelayanan per *server* adalah μ . Karena tidak ada batasan jumlah kedatangan *customer* dalam sistem maka, $\lambda_{eff} = \lambda$. Karena *c server* yang disusun paralel mengakibatkan bertambahnya laju fasilitas pelayanan. Pada model yang tergeneralisasi, λ_n dan μ_n didefinisikan sebagai

$$\lambda_n = \lambda, \quad n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

sehingga

$$p_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{\mu(2\mu)(3\mu) \dots (n\mu)} p_0 = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{n!} p_0, & n < c \\ \frac{\lambda^n}{(\prod_{i=1}^c i\mu)(c\mu)^{n-c}} p_0 = \frac{\lambda^n}{c! c^{n-c} \mu^n} p_0 = \frac{\rho^n}{c! c^{n-c}} p_0, & n \geq c \end{cases} \quad (2.70)$$

Dimisalkan $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, dan diasumsikan $\frac{\rho}{c} < 1$ agar sistem tidak overload dan

tercipta *steady state*. Nilai dari p_0 ditentukan dari persamaan (2.70) yang disubtitusi pada teorema 2.1 sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} p_0 &= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n-c} \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^c}{c!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} \right) \right\}^{-1}, \frac{\rho}{c} < 1 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Untuk mencari L_q dapat ditentukan dengan menyelesaikan persamaan (2.52) yaitu

$$L_q = \sum_{n=c}^{\infty} (n - c) p_n.$$

Dimisalkan $k = n - c$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_{k+c} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k+c}}{c! c^k} p_0 \\ &= \frac{\rho^c p_0}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^k}{c^k} = \frac{\rho^c p_0}{c!} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k-1}}{c^{k-1}} \times \frac{\rho}{c} \\ &= \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^{k-1}}{c^{k-1}} = \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c} \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{\rho}{c}\right)^{k-1} \\ &= \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{c}\right)} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k = \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c} \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{c}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c} \frac{d}{d \left(\frac{\rho}{c} \right)} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}} = \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c \left(1 - \frac{\rho}{c} \right)^2} \\
&= \frac{\rho^{c+1} p_0}{c! c \left(\frac{c-\rho}{c} \right)^2} = \frac{\rho^{c+1} p_0}{(c-1)! c^2 \frac{(c-\rho)^2}{c^2}} \\
&= \frac{\rho^{c+1} p_0}{(c-1)! (c-\rho)^2}
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Untuk menentukan nilai L_s , dapat digunakan persamaan (2.60) dengan

menyubtitusi L_q

$$L_s = L_q + \rho = \frac{\rho^{c+1} p_0}{(c-1)! (c-\rho)^2} + \rho. \tag{2.73}$$

Nilai dari W_s dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.55) dengan menyubtitusikan persamaan (2.50) atau nilai L_s sehingga

$$\begin{aligned}
L_s &= \lambda W_s \\
W_s &= \frac{L_s}{\lambda} = \frac{\frac{\rho^{c+1} p_0}{(c-1)! (c-\rho)^2} + \rho}{\lambda} \\
&= \frac{\rho \rho^c p_0}{\lambda (c-1)! (c-\rho)^2} + \frac{\rho}{\lambda} \\
&= \frac{\rho^c p_0}{\mu (c-1)! (c-\rho)^2} + \frac{1}{\mu}.
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Untuk nilai W_q dapat ditentukan dengan menyubtitusi nilai W_s atau persamaan (2.74) ke persamaan (2.58) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
W_s &= W_q + \frac{1}{\mu} \\
W_q &= W_s - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho^c p_0}{\mu (c-1)! (c-\rho)^2} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{\rho^c p_0}{\mu (c-1)! (c-\rho)^2}.
\end{aligned} \tag{2.75}$$

K. Antrian Multi Phase (Simple Tandem Queue)

Kata *tandem* merupakan susunan beberapa obyek yang membentuk suatu barisan dan menghadap pada arah yang sama. Jaringan antrian *tandem* memiliki *phase* yang memiliki fungsi berbeda-beda. *Customer* yang datang harus melewati semua *phase* sebelum meninggalkan sistem. Pada ilustrasi jaringan antrian *tandem* ini digunakan antrian 3 *phase* tanpa *feedback* (www.iitd.vlab.co.in). Setiap *phase* diasumsikan merupakan model M/M/1.



Gambar 2.7 Ilustrasi Antrian Tandem

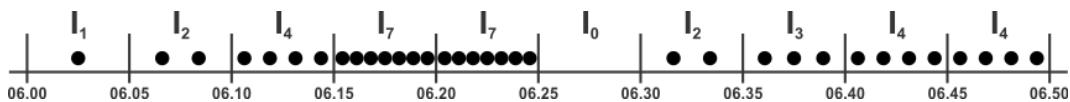
Laju kedatangan *customer* adalah λ dan laju pelayanan pada titik i adalah μ_i . Misalkan $\rho_i = \frac{\lambda}{\mu_i}$. Oleh karena itu, *steady state* dari antrian *tandem* (www.iitd.vlab.co.in) adalah:

- $p(k_1, k_2, k_3) = P(k_i \text{ customer pada titik } i, i = 1,2,3) = \prod_{i=1}^3 \rho_i^{k_i} (1 - \rho_i)$
- Nilai harapan banyak *customer* pada titik i (Ls_i): $\frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$, $i = 1,2,3$
- Nilai harapan banyak *customer* pada sistem (Ls): $\sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}$
- Nilai harapan banyak *customer* mengantri pada titik i (Lq_i): $\frac{\rho_i^2}{1 - \rho_i}$, $i = 1,2,3$
- Nilai harapan banyak *customer* mengantri pada sistem (Lq): $\sum_{i=1}^3 \frac{\rho_i^2}{1 - \rho_i}$
- Nilai harapan waktu *customer* mengantri pada titik i (Wq_i): $\frac{\rho_i}{\mu_i - \lambda}$
- Nilai harapan waktu *customer* pada titik i (Ws_i): $\frac{1}{\mu_i - \lambda}$

- Nilai harapan waktu *customer* pada sistem (*Ws*) : $\sum_{i=1}^3 \frac{1}{\mu_i - \lambda}$
- Kepadatan *customer* pada titik i : $\frac{\lambda}{\mu_i}$
- Kedatangan pada titik i : λ_i

L. Tingkat Kedatangan

Pengamatan A. K. Erlang di Copenhagen Telephone dimana pola permintaan *customer* telepon yang meminta sambungan dalam kurun waktu yang tidak terputus (*continuous of time*) dapat dibagi ke dalam beberapa interval waktu yang sama (*fixed interval*). Dalam hal ini, permintaan *customer* terdistribusi secara acak pada masing-masing interval waktu tetap dalam kurun waktu yang tidak terputus dan disebut sebagai proses *Poisson* (Siswanto, 2007:219). Berikut ilustrasi dari proses *Poisson* tersebut.



Gambar 2.8 Frekuensi jumlah kedatangan di beberapa interval

Jika I merupakan jumlah interval waktu maka

$$I = \sum_{i=1}^n I_i \quad (2.76)$$

dimana I_i adalah interval ke- i . Jika N merupakan banyak *customer* yang datang selama I interval dan pada interval I_i terdapat K_i *customer* maka banyak *customer* selama kurun waktu I adalah

$$N = \sum_{i=1}^n K_i \cdot I_i \quad (2.77)$$

dimana K_i adalah banyak *customer* yang datang pada interval I_i . Jika tiap interval dibagi menjadi n subinterval dengan asumsi dan proses yang sama, maka kedatangan pada tiap interval waktu tetap tersebut dapat dinyatakan dengan distribusi *Poisson* (Siswanto, 2007:220). Dengan demikian, rata-rata kedatangan atau tingkat kedatangan *customer* pada tiap interval waktu tersebut dapat diestimasi dengan

$$\lambda = \frac{N}{I} \quad (2.78)$$

Dari gambar 2.8, terdapat 34 *customer* yang kedatangannya terbagi menjadi 10 interval dalam kurun waktu 50 menit dari jam 06.00-06.50. Masing-masing interval selama 5 menit. Distribusi kedatangan *customer* pada masing-masing interval dijelaskan sebagai berikut.

1. Interval yang memiliki 0 *customer* (I_0) sebanyak 1 interval
2. Interval yang memiliki 1 *customer* (I_1) sebanyak 1 interval
3. Interval yang memiliki 2 *customer* (I_2) sebanyak 2 interval
4. Interval yang memiliki 3 *customer* (I_3) sebanyak 1 interval
5. Interval yang memiliki 4 *customer* (I_4) sebanyak 3 interval
6. Interval yang memiliki 7 *customer* (I_7) sebanyak 2 interval

Tabel 2.2 Frekuensi jumlah kedatangan *customer* di beberapa interval

Interval	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada interval I_i (K_i)	Frekuensi atau jumlah interval (I_i)	Jumlah <i>customer</i> yang datang selama kurun waktu I_i ($K_i \times I_i$)
I_0	0	1	0
I_1	1	1	1
I_2	2	2	4
I_3	3	1	3
I_4	4	3	12
I_7	7	2	14
		$I = 10$	$N = 34$

Tingkat kedatangan *customer* atau *arrival rate* kasus ini sesuai dengan persamaan (2.78) adalah:

$$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{34}{10} = 3,4$$

Karena interval waktu 5 menit, maka tingkat kedatangan *customer* adalah 3,4 orang per 5 menit. Jika menggunakan satuan waktu per 1 menit maka nilai λ menjadi $3,4/5$ atau 0,68 orang per menit.

BAB III

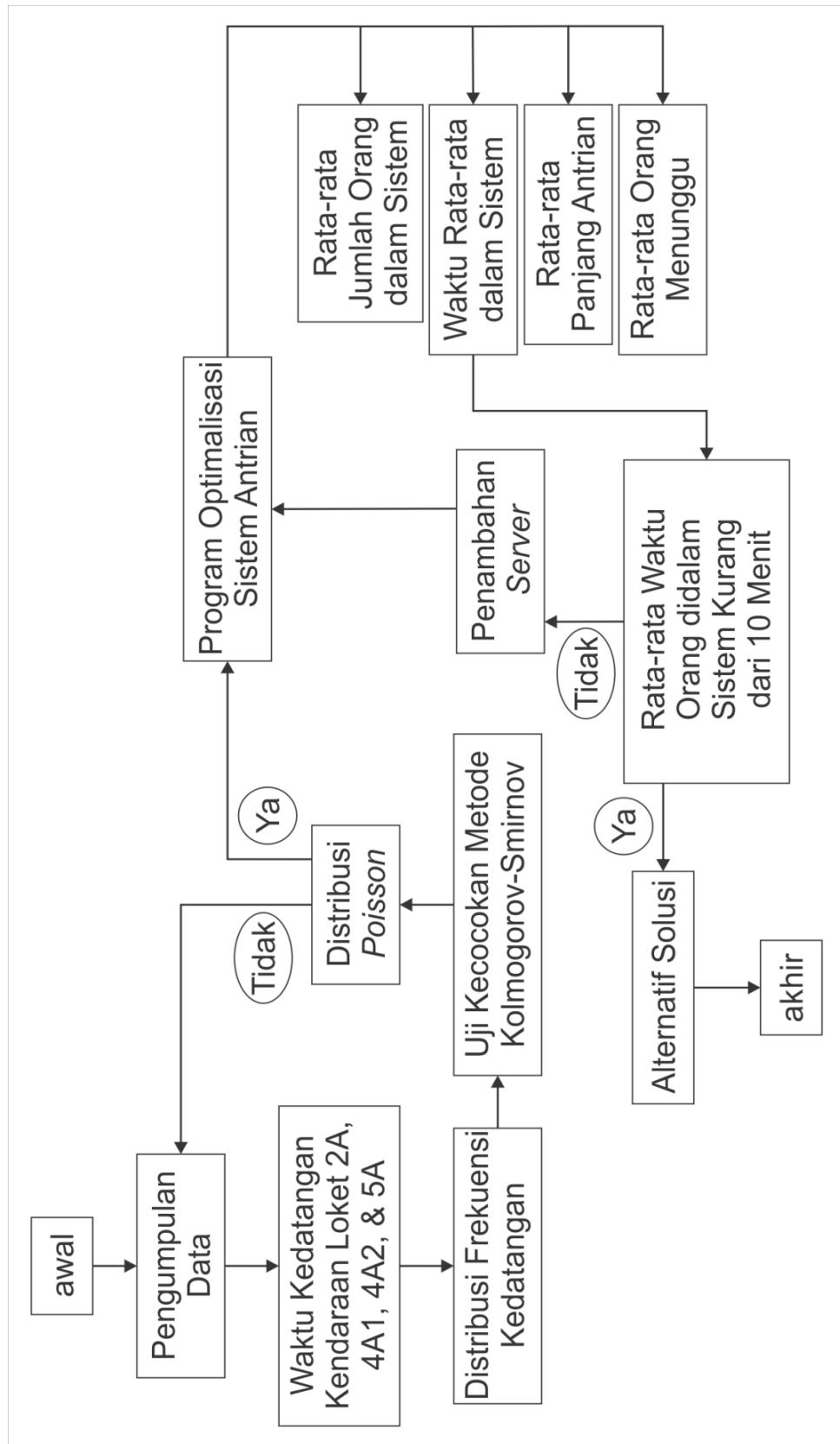
METODE PENELITIAN

A. Kerangka Pemikiran

Untuk melakukan suatu penelitian perlu adanya kerangka pemikiran sebagai penuntun untuk menjelaskan konsep dari penelitian itu sendiri. Kerangka pemikiran akan memudahkan para pembaca secara jelas dan ringkas mengenai apa yang dilakukan peneliti.

Hal pertama yang dilakukan peneliti adalah mengumpulkan data-data serta informasi tentang sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta. Data-data tersebut kemudian diproses secara ilmiah dengan metode-metode yang didapat sesuai dengan teori antrian pada literatur yang tersedia.

Berdasarkan analisis data yang dilakukan peneliti, diharapkan bisa mengidentifikasi permasalahan pada sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta. Setelah diketahui masalah pada sistem antrian tersebut, peneliti membuat suatu pemecahan masalah dimana diharapkan solusi tersebut merupakan yang terbaik dan bisa diterima oleh semua pihak. Berikut desain penelitian yang dilakukan pada penulisan skripsi ini.



Gambar 3.1 Kerangka Pemikiran

B. Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian dilakukan di Satuan Manunggal Satu Atap (SAMSAT) Kota Yogyakarta yang beralamat di Jalan Tentara Pelajar 15, Yogyakarta, Daerah Istimewa Yogyakarta. Waktu penelitian dilakukan satu hari pada hari Sabtu, 9 November 2013 mulai dari pukul 08.00-11.00 WIB.

. Pemilihan SAMSAT Kota Yogyakarta sebagai lokasi penelitian didasarkan pada beberapa hal. Yang pertama adalah letaknya yang berada di Yogyakarta sehingga memudahkan peneliti dalam melakukan hubungan antara UNY dengan SAMSAT Kota Yogyakarta. Yang kedua adalah SAMSAT Kota Yogyakarta memiliki sistem antrian yang cukup kompleks dilihat dari antriannya yang padat serta alur antrian yang memiliki beberapa *phase*. Setelah ditentukannya SAMSAT Kota Yogyakarta sebagai lokasi penelitian, penulis mengajukan proposal ke BAPEDA Kota Yogyakarta. Surat izin penelitian yang didapat dari BAPEDA kemudian dilanjutkan ke SAMSAT Kota Yogyakarta.

C. Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data dalam penelitian ini dibagi menjadi 3 cara yaitu wawancara, observasi dan studi literatur.

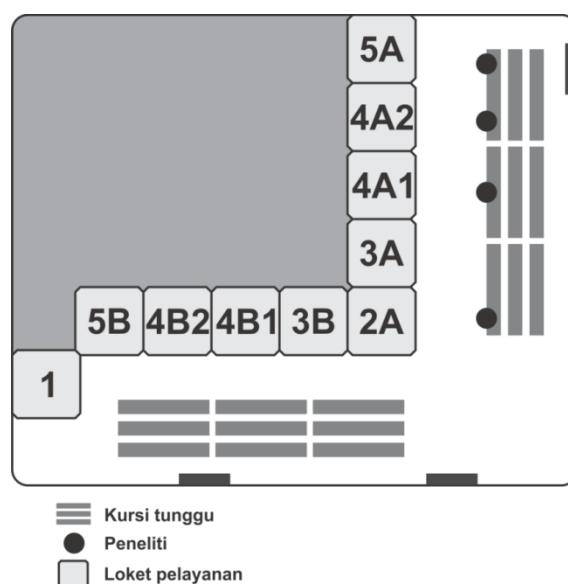
1. Metode Wawancara

Metode wawancara ini dilakukan untuk mendapatkan informasi-informasi mengenai sistem antrian yang diterapkan di SAMSAT Yogyakarta. Wawancara ini ditujukan kepada Kepala Seksi Pendaftaran yaitu Bapak Totok Jaka Suwarta. Tujuan dari metode wawancara ini adalah:

- a. Untuk mengetahui tugas-tugas dari loket pelayanan
- b. Untuk mengetahui permasalahan sistem antrian yang terjadi di SAMSAT Yogyakarta
- c. Untuk memperoleh desain sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta

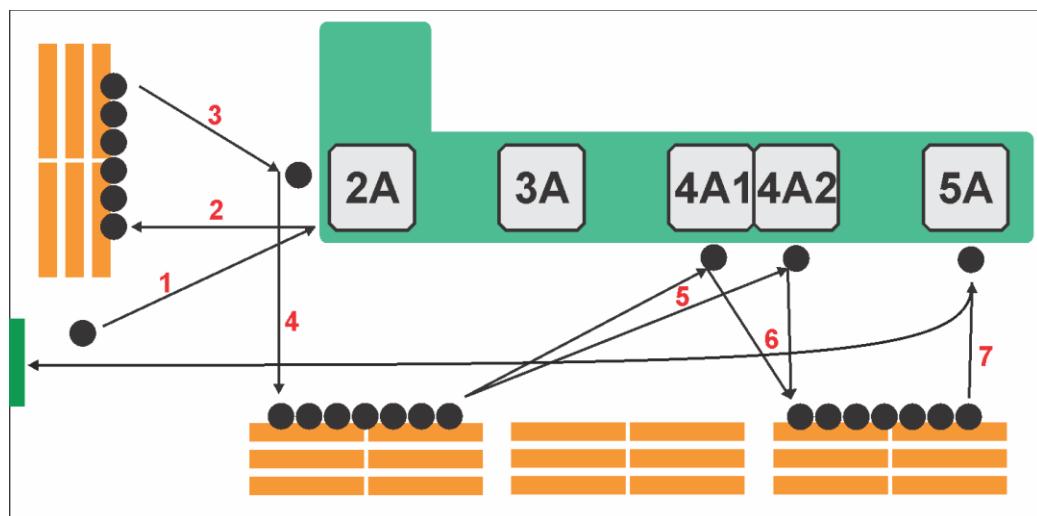
Dari wawancara tersebut didapatkan kinerja loket pelayanan di SAMSAT Yogyakarta. Kinerja loket pelayanan ini dibutuhkan untuk memenuhi beberapa kondisi yang digunakan untuk menentukan ukuran performa sistem antrian. Kondisi yang berlaku pada suatu sistem antrian berpengaruh pada penentuan parameter yang dihasilkan dari pengumpulan data. Parameter yang dibutuhkan adalah λ yaitu banyak kedatangan *customer* per satuan waktu serta μ yaitu banyak *customer* yang dilayani per satuan waktu. Untuk mendapatkan parameter-parameter tersebut maka dilakukan pengamatan pada setiap loket yaitu frekuensi kedatangan dan keberangkatan pembayar pajak pada tiap loket pelayanan setiap 5 menit.

Dari hasil wawancara didapatkan desain sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta.



Gambar 3.2 Denah Sistem Antrian di SAMSAT Yogyakarta

Sistem antrian ini terbagi menjadi dua bagian, yaitu bagian A yang menangani pembayaran pajak kendaraan tahunan serta ganti STNK 5 tahunan dan bagian B yang menangani mutasi, pendaftaran baru, STNK hilang, pindah alamat, ganti nomor polisi dan balik nama. Dalam penelitian ini yang diamati adalah loket-loket yang melayani pajak kendaraan tahunan yaitu pada bagian A.



Gambar 3.3 Denah Sistem Antrian Pembayaran Pajak Kendaraan Tahunan di SAMSAT Yogyakarta

Bagian A terdiri dari beberapa loket yaitu 2A, 3A, 4A1, 4A2, dan 5A yang melakukan pekerjaan yang berbeda-beda. Para pembayar pajak harus melewati semua *phase* atau loket-loket tersebut untuk menyelesaikan keperluannya. Adapun alur yang harus dilewati oleh pembayar pajak adalah sebagai berikut:

1. Loket 2A

Pembayar pajak mengantri lalu mengumpulkan KTP, STNK, BPKB dan fotokopi dari masing-masing berkas tersebut di loket 2A. Setelah itu, pembayar pajak mendapatkan nomor urut dan berkas-berkas yang asli seperti KTP, STNK, dan BPKB.

2. Loket 4A1 dan 4A2

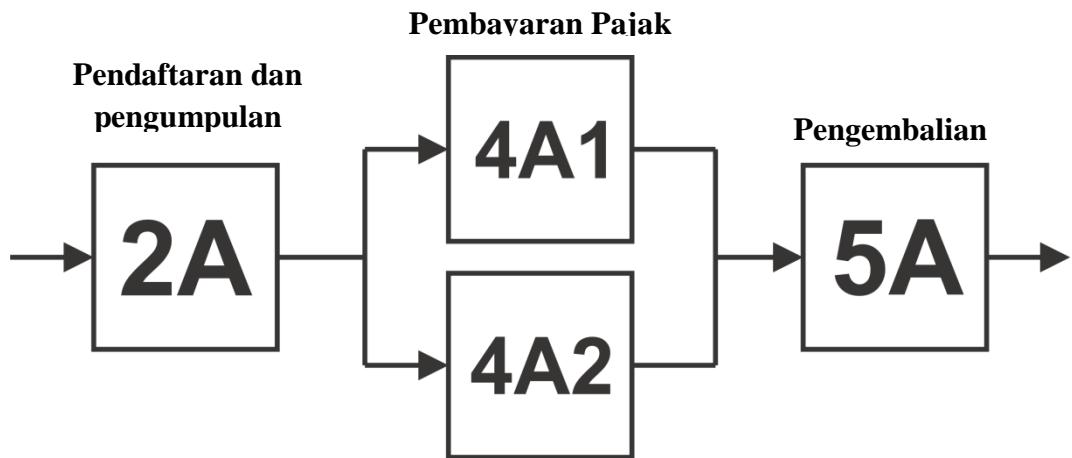
Pembayar pajak mengantri di bangku yang telah tersedia untuk menunggu panggilan dari loket 4A1 atau 4A2. Loket-loket ini merupakan kerjasama dengan Bank BPD yang melayani pembayaran pajak. Petugas memanggil beberapa nomor urut dan pembayar pajak maju ke depan loket untuk antri. Pembayar pajak akan menerima struk yang berisi jumlah pajak yang harus dibayarkan kemudian membayar sesuai dengan jumlah yang tertera. Setelah itu, pembayar pajak mendapatkan notis pajak yang selanjutnya digunakan untuk mengambil STNK.

3. Loket 5A

Setelah selesai membayar pajak, pembayar pajak mengantri di bangku yang telah disediakan untuk menunggu panggilan dari loket 5A. Kemudian petugas memanggil beberapa nomor urut dan pembayar pajak maju ke depan loket untuk antri. Lalu pembayar pajak tersebut mengambil STNK dengan menunjukkan notis pajak.

Selain informasi mengenai kinerja loket pelayanan, didapatkan juga faktor pengambilan keputusan. SAMSAT Yogyakarta memiliki target kedepan untuk meningkatkan mutu pelayanannya. Untuk menyelesaikan pengesahan STNK kendaraan satu tahunan, SAMSAT Yogyakarta memiliki target waktu pemrosesan 10 menit dimana waktu standar sebelumnya 15 menit. Oleh karena itu, pengambilan keputusan didasarkan pada lama waktu pembayaran pajak kendaraan satu tahunan agar kurang dari 10 menit. Hal ini yang kemudian menjadi faktor penentu keefektifan pada sistem antrian SAMSAT Yogyakarta.

Hasil wawancara serta studi literatur menghasilkan model sistem antrian yang berlaku di SAMSAT Yogyakarta. Penentuan model ini hanya terbatas pada Loket-loket A yaitu yang mengurus pajak tahunan dan 5 tahunan. Berikut desain model sistem antriannya.



Gambar 3.4 Alur Proses Pembayaran Pajak Tahunan dan 5 Tahunan

Dari skema ini dapat diketahui bahwa sistem antrian ini merupakan model *multi phase* dimana nilai μ *server* berikutnya menjadi λ di *server* berikutnya atau bisa dikatakan *dependent* antara *server* satu dengan *server* lainnya.

Sebelum dianalisis lebih lanjut, sistem antrian tersebut harus dipartisi sesuai dengan model-model dasar. Model *multi phase* ini terdiri dari tiga *phase* sebagai berikut:

1. Loket 2A (*Phase* Pertama)

Pada loket 2A ini termasuk model antrian *single server* atau model antrian dengan 1 *server*, *customer* mengantri dengan tipe antrian *GD* (*General Discipline*) dan sumber pemanggilan serta kapasitas sistem tak terbatas.

2. Loket 4A1 dan 4A2 (*Phase* Kedua)

Setelah pembayar pajak dari loket 2A, kemudian bercabang menuju 2 loket yaitu 4A1 dan 4A2. Hal ini akan membawa ke model antrian *multi server* atau model dengan lebih dari 1 *server* yaitu berupa 2 *server*, *customer* mengantri dengan tipe antrian GD (*General Discipline*) dan sumber pemanggilan serta kapasitas sistem tak terbatas.

3. Loket 5A (*Phase Ketiga*)

Pada *phase* terakhir ini, yaitu loket 5A termasuk pada model antrian *single server*, *customer* mengantri dengan tipe antrian GD (*General Discipline*) dan sumber pemanggilan serta kapasitas sistem tak terbatas.

2. Metode Observasi

Metode observasi ini bertujuan untuk mendapatkan data primer yang merupakan data frekuensi kedatangan dan keberangkatan *customer* pada tiap loket tiap 5 menit. Sebelum dilakukan pengambilan data, terlebih dahulu dibuat perencanaan pengambilan data.

Telah diketahui bahwa parameter yang dibutuhkan adalah λ yaitu laju kedatangan *customer* per satuan waktu dan μ yaitu laju keberangkatan *customer* yang dilayani per satuan waktu. Untuk mendapatkan λ dapat dilakukan dengan mencatat banyak kedatangan per 5 menit dan demikian juga dengan μ , yaitu dengan mencatat banyak keberangkatan per 5 menit.

Berdasarkan gambar 3.4, yang harus diamati adalah waktu kedatangan pada loket 2A, 4A1, 4A2, dan 5A dan waktu selesai pelayanan pada loket 2A, 4A1, 4A2, dan 5A. Hal ini membutuhkan setidaknya 6 *surveyor* untuk mengamati 6 obyek pengamatan. Akan tetapi, bisa dilihat dari skema tersebut bahwa waktu

kedatangan di fase yang terdiri dari loket 4A1 dan 4A2 sama dengan waktu selesai pelayanan di loket 2A. Kesamaan tersebut berlaku juga untuk waktu selesai pelayanan di fase yang terdiri dari loket 4A1 dan 4A2 dengan waktu kedatangan di loket 5A. Hal ini mengakibatkan efisiensi tenaga *surveyor* menjadi 4 orang dengan 4 obyek pengamatan. Empat obyek pengamatan tersebut adalah frekuensi kedatangan di loket 2A, frekuensi keberangkatan di loket 2A, 4A1, 4A2 dan 5A.

Untuk teknis pengambilan data sebagai berikut:

1. *Surveyor* pertama bertugas untuk mencacah banyak pembayar pajak yang memasuki loket 2A per 5 menit.
2. *Surveyor* kedua bertugas untuk mencacah banyak pembayar pajak yang selesai dari loket 2A per 5 menit.
3. *Surveyor* ketiga bertugas untuk mencacah banyak pembayar pajak yang selesai dari loket 4A1 dan 4A2 per 5 menit.
4. *Surveyor* keempat bertugas untuk mencacah banyak pembayar pajak yang selesai dari loket 5A per 5 menit.

Pengambilan data ini dilakukan oleh 4 orang *surveyor* yang merupakan mahasiswa Universitas Negeri Yogyakarta yaitu:

- a. Nama : Manggala Aldi Putranto
Program Studi/NIM : Matematika / 09305141048
- b. Nama : Chandra Hadi Saputra
Program Studi/NIM : Matematika / 09305141021
- c. Nama : Lulus Arya Ripfanna
Program Studi/NIM : Matematika / 09305141001
- d. Nama : Gita Pramudya Saraswati

D. Teknik Analisis Data

Data mengenai frekuensi kedatangan pembayar pajak tiap 5 menit yang telah didapat, dianalisis menggunakan Kolmogorov Smirnov untuk mengecek data tersebut terdistribusi *Poisson*.

Dimisalkan $F_0(X)$ merupakan fungsi distribusi frekuensi kumulatif dari suatu distribusi dibawah asumsi H_0 dan $S_N(X)$ merupakan distribusi frekuensi kumulatif dari pengamatan terhadap N sampel acak. Kolmogorov-Smirnov tes ini memiliki tujuan untuk mencocokkan data sampel dengan distribusi teoritik yang telah ditentukan pada H_0 sehingga diharapkan untuk setiap nilai dari X , $S_N(X)$ selalu berada disekitar $F_0(X)$. Diharapkan pula dengan asumsi H_0 , perbedaan nilai antara $S_N(X)$ dan $F_0(X)$ menjadi kecil dan tak lebih dari batas kesalahan. Tes Kolmogorov-Smirnov ini menggunakan acuan berupa nilai deviasi terbesar. Nilai terbesar dari $|F_0(X) - S_N(X)|$ disebut deviasi maksimum (D) dengan rumus (Siegel, 1956:48)

$$D = \text{maximum} |F_0(X) - S_N(X)| \quad (3.1)$$

Untuk perhitungan tes Kolmogorov-Smirnov terdapat beberapa langkah sebagai berikut (Siegel, 1956:50):

1. Menentukan fungsi distribusi kumulatif teoritisnya atau distribusi yang diharapkan yang dinyatakan dalam asumsi H_0 .
2. Menyusun tabel pembanding berupa distribusi kumulatif secara berpasangan-pasangan dari interval $S_N(X)$ dengan interval pembanding $F_0(X)$.
3. Untuk tiap X pada distribusi kumulatifnya dilakukan $F_0(X) - S_N(X)$.

4. Menentukan nilai D dengan rumus (3.1).
5. Menentukan nilai D^* dengan menggunakan tabel 6 pada lampiran 2.

Berdasarkan nilai D^* , jika nilai p lebih kecil atau sama dengan α maka tolak H_0 .

Penerapan dari tes Kolmogorov-Smirnov diilustrasikan dengan contoh berikut.

Contoh 3.1

Data kedatangan *customer* tiap 5 menit dalam waktu 185 menit sebagai berikut.

Tabel 3.1 Jumlah kedatangan *customer* pada loket 2A per 5 menit

waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi
1 - 5	7	66 - 70	1	131 - 135	0
6 - 10	6	71 - 75	10	136 - 140	3
11 - 15	12	76 - 80	11	141 - 145	3
16 - 20	12	81 - 85	8	146 - 150	7
21 - 25	14	86 - 90	5	151 - 155	0
26 - 30	8	91 - 95	9	156 - 160	5
31 - 35	11	96 - 100	7	161 - 165	0
36 - 40	5	101 - 105	3	166 - 170	2
41 - 45	8	106 - 110	5	171 - 175	4
46 - 50	11	111 - 115	8	176 - 180	3
51 - 55	2	116 - 120	4	181 - 185	3
56 - 60	12	121 - 125	2		
61 - 65	10	126 - 130	6		

Jika taraf nyata yang digunakan 5%, apakah data tersebut terdistribusi Poisson?

Jawab:

1. Dimisalkan H_0 : Data terdistribusi Poisson

H_1 : Data tidak terdistribusi Poisson

2. Terlebih dahulu mengurutkan data mulai dari yang terkecil sehingga didapatkan 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 14. Sebelum membuat tabel perbandingan

$S_N(X)$ dan $F_0(X)$ terlebih dahulu menentukan peluang terjadinya X kejadian dari hasil pengamatan ($f(x)$) dan peluang terjadinya X kejadian yang mengikuti distribusi Poisson ($f_0(x)$). Untuk menentukan $f_0(x)$, dapat digunakan persamaan (2.11) sebagai fungsi distribusi Poisson.

Tabel 3.2 Perbandingan $f(x)$ dan $f_0(x)$

x	frekuensi	$f(x)$	$f_0(x)$
0	3	$f(0) = \frac{3}{37} = 0.081081$	$f_0(0) = 0.00216543$
1	1	$f(1) = \frac{1}{37} = 0.027027$	$f_0(1) = 0.01328522$
2	3	$f(2) = \frac{3}{37} = 0.081081$	$f_0(2) = 0.04075331$
3	5	$f(3) = \frac{5}{37} = 0.135135$	$f_0(3) = 0.08334236$
4	2	$f(4) = \frac{2}{37} = 0.054054$	$f_0(4) = 0.12782917$
5	4	$f(5) = \frac{4}{37} = 0.108108$	$f_0(5) = 0.15684984$
6	2	$f(6) = \frac{2}{37} = 0.054054$	$f_0(6) = 0.1603825$
7	3	$f(7) = \frac{3}{37} = 0.081081$	$f_0(7) = 0.1405669$
8	4	$f(8) = \frac{4}{37} = 0.108108$	$f_0(8) = 0.10779961$
9	1	$f(9) = \frac{1}{37} = 0.027027$	$f_0(9) = 0.07348502$
10	2	$f(10) = \frac{2}{37} = 0.054054$	$f_0(10) = 0.04508405$
11	3	$f(11) = \frac{3}{37} = 0.081081$	$f_0(11) = 0.02514516$
12	3	$f(12) = \frac{3}{37} = 0.081081$	$f_0(12) = 0.01285575$
13	0	$f(13) = \frac{0}{37} = 0$	$f_0(13) = 0.00606706$
14	1	$f(14) = \frac{1}{37} = 0.027027$	$f_0(14) = 0.00265873$
15	0	$f(15) = \frac{0}{37} = 0$	$f_0(15) = 0.00108744$
16	0	$f(16) = \frac{0}{37} = 0$	$f_0(16) = 0.00041698$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
37	0	0	0

Berikut tabel perbandingan antara $S_N(X)$ dan $F_0(X)$ untuk menyelesaikan persamaan (3.1).

Tabel 3.3 Perbandingan $S_N(X)$ dan $F_0(X)$

interval	$S_N(X)$	$F_0(X)$	$S_N(X) - F_0(X)$	$F_0(X) - S_N(X)$	$ F_0(X) - S_N(X) $
$x < 0$	0	0	0	0	0
$0 \leq x < 1$	0,081081	0,00216543	0,07891565	-0,07891565	0,078915649
$1 \leq x < 2$	0,108108	0,01545065	0,09265745	-0,09265745	0,092657454
$2 \leq x < 3$	0,189189	0,05620397	0,13298522	-0,13298522	0,132985221
$3 \leq x < 4$	0,324324	0,13954633	0,18477799	-0,18477799	0,184777992
$4 \leq x < 5$	0,378378	0,2673755	0,11100288	-0,11100288	0,11100288
$5 \leq x < 6$	0,486486	0,42422534	0,06226115	-0,06226115	0,062261146
$6 \leq x < 7$	0,540541	0,58460784	-0,0440673	0,044067295	0,044067295
$7 \leq x < 8$	0,621622	0,72517473	-0,10355311	0,103553112	0,103553112
$8 \leq x < 9$	0,72973	0,83297435	-0,10324462	0,103244618	0,103244618
$9 \leq x < 10$	0,756757	0,90645937	-0,14970261	0,149702613	0,149702613
$10 \leq x < 11$	0,810811	0,95154342	-0,14073261	0,140732614	0,140732614
$11 \leq x < 12$	0,891892	0,97668858	-0,08479669	0,084796693	0,084796693
$12 \leq x < 13$	0,972973	0,98954433	-0,01657136	0,016571358	0,016571358
$13 \leq x < 14$	0,972973	0,99561139	-0,02263842	0,022638415	0,022638415
$14 \leq x < 15$	1	0,99827012	0,00172988	-0,00172988	0,001729882
$15 \leq x < 16$	1	0,99935756	0,00064244	-0,00064244	0,000642438
$16 \leq x < 17$	1	0,99977454	0,00022546	-0,00022546	0,000225461
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$37 \leq x < 38$	1	1	0	0	0
$38 \leq x$	1	1	0	0	0

3. Untuk tiap X pada distribusi kumulatifnya dilakukan $F_0(X) - S_N(X)$
4. Nilai D ditentukan dengan rumus (3.1) sehingga didapatkan nilai maksimum dari $|F_0(X) - S_N(X)|$ yaitu 0,184777992
5. Nilai D^* ditentukan dengan menggunakan tabel 6 pada lampiran 2. Berdasarkan taraf signifikansi 5%, $N = 37$, dan tabel pada lampiran 1 didapatkan

$$D^* = \frac{1,36}{\sqrt{37}} = 0.223583$$

Sebelum menentukan nilai p terlebih dahulu menentukan Kolmogorov-Smirnov Z. Kolmogorov-Smirnov Z merupakan hasil akar kuadrat dari jumlah

sampel N dan perbedaan absolut terbesar antara fungsi distribusi kumulatif empiris dan teoritis (Yu, Zheng, Zhao & Zheng, 2008:138). Nilai Z ini hampir sama dengan akar kuadrat dari jumlah sampel N dikali D *Absolute*

$$Z \approx \sqrt{N} \times |D| \quad (3.2)$$

Untuk mencari Z dapat digunakan persamaan (3.2) sehingga didapat

$$Z \approx \sqrt{37} \times |0,184777992|$$

$$Z \approx 1.123961$$

Nilai p dapat dicari dengan menggunakan formula Smirnov setelah nilai Kolmogorov-Smirnov Z diketahui, yaitu sebagai berikut (Corder & Foreman, 2009:27)

- a. Jika $0 \leq Z < 0,27$; $p = 1$
- b. Jika $0,27 \leq Z < 1$; $p = 1 - [(2,506628/Z)(Q_1 + Q_1^9 + Q_1^{25})]$
- c. Jika $1 \leq Z < 3,1$; $p = 2(Q_2 - Q_2^4 + Q_2^9 - Q_2^{16})$
- d. Jika $Z \geq 3,1$; $p = 0$

dimana $Q_1 = e^{-1233701(Z^{-2})}$ dan $Q_2 = e^{-2(Z^2)}$.

Telah diketahui $Z = 1.123961$ dan sesuai dengan syarat $1 \leq Z < 3,1$ sehingga didapatkan $p = 2(Q_2 - Q_2^4 + Q_2^9 - Q_2^{16})$ dengan $Q_2 = 0,07993231$.

Subtitusi Q_2 pada $2(Q_2 - Q_2^4 + Q_2^9 - Q_2^{16})$ didapatkan nilai $p = 0,159783$.

Berdasarkan aturan tes Kolmogorov-Smirnov bila nilai $p > \alpha$ maka H_0 diterima, sebaliknya jika nilai $p \leq \alpha$ maka tolak H_0 . Hasil perhitungan menunjukkan bahwa $p > \alpha$ dimana $0,159783 > 0,05$ sehingga H_0 diterima.

Hasil perhitungan dengan tes Kolmogorov-Smirnov secara matematis ini sesuai dengan program SPSS dimana dengan data yang sama diperoleh

Tabel 3.4 *Output* data kedatangan *customer* pada program SPSS

		lamda_2A_5menit
N		37
Poisson Parameter ^{a,b}	Mean	6.1351
Most Extreme Differences	Absolute	.185
	Positive	.185
	Negative	-.150
Kolmogorov-Smirnov Z		1.124
Asymp. Sig. (2-tailed)		.160

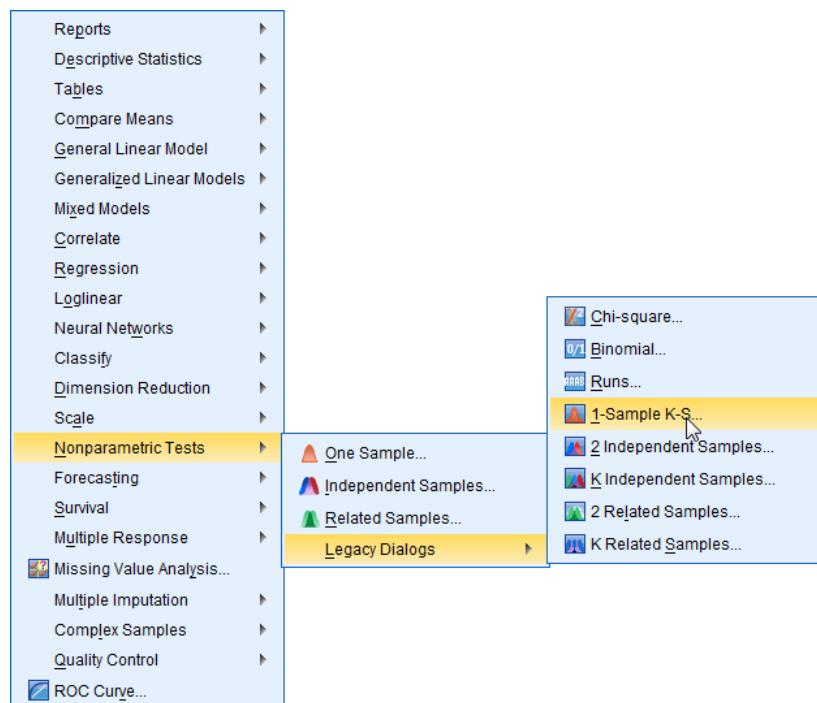
Asymtotic significance 2-tailed (p – value) pada tabel 3.3 menunjukkan 0,160. Hal ini sama dengan penggerjaan secara matematis dimana *Asymtotic significance 2-tailed* merupakan nilai $p = 0,159783$.

Contoh 3.2

Berikut contoh langkah-langkah uji distribusi data dengan tes Kolmogorov-Smirnov pada program SPSS (Subekti & Binatari, 2013).

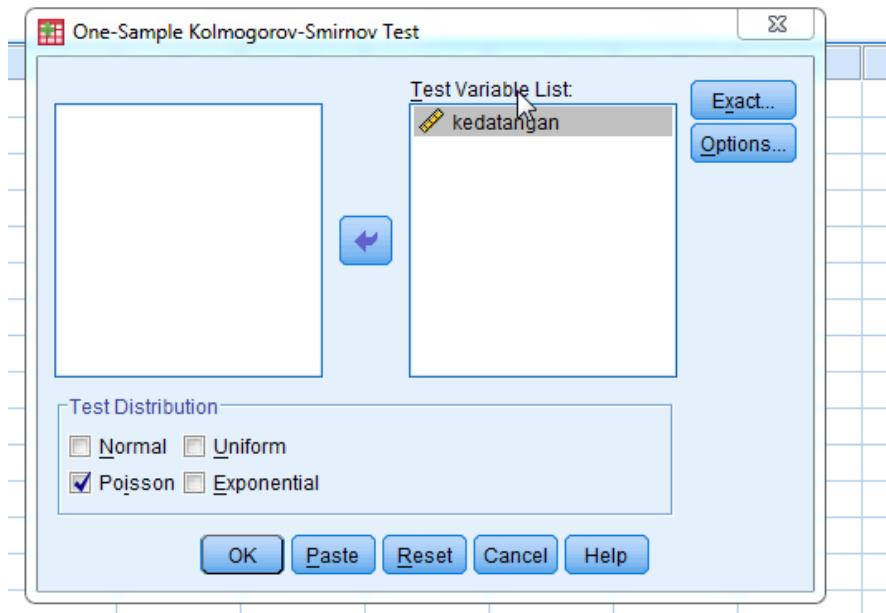
1. Masukkan data

2. Klik *Analyze > Nonparametric Tests > Legacy Dialogs > 1-Sample K-S*



Gambar 3.5 Seleksi tombol Kolmogorov-Smirnov pada program SPSS

3. Pindahkan data yang akan diuji dan pada pilihan *test distribution* pilih Poisson



Gambar 3.6 Penentuan distribusi dan seleksi data pada tes

Kolmogorov-Smirnov pada program SPSS

4. Klik *OK*

One-Sample Kolmogorov-Smirnov Test

		data1
N		10
Poisson Parameter ^{a,b}	Mean	63.10
Most Extreme Differences	Absolute	.498
	Positive	.498
	Negative	-.400
Kolmogorov-Smirnov Z		1.575
Asymp. Sig. (2-tailed)		.014

a. Test distribution is Poisson.

Gambar 3.7 Tampilan *output* tes Kolmogorov-Smirnov pada program SPSS

5. Pada gambar output di atas tampak bahwa Asymp. Sig (*p – value*) adalah 0,14 dimana lebih dari nilai $\alpha = 0,05$. Oleh karena itu, data terdistribusi Poisson.

Pada pengujian distribusi dari data-data frekuensi kedatangan dan keberangkatan *customer* tiap 5 menit, akan digunakan program SPSS untuk mempermudah proses perhitungan.

BAB IV

HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

A. Hasil Penelitian

Hasil penelitian didapatkan data-data kedatangan dan keberangkatan *customer* pada loket pelayanan tiap 5 menit serta desain sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta. Pada bagian ini dibagi menjadi dua subbab yaitu uji distribusi dan penentuan model *phase*.

1. Uji Distribusi

Data yang diambil dari Kantor SAMSAT Yogyakarta merupakan banyak kedatangan pada loket 2A dan banyak keberangkatan pada loket 4A1, 4A2, dan 5A tiap 5 menit. Untuk menerapkan teori antrian pada data yang sudah diambil, terlebih dahulu dilakukan pengujian apakah data tersebut yaitu jumlah kedatangan dan keberangkatan terdistribusi Poisson atau tidak.

1. Uji Distribusi Kedatangan Loket 2A

Pada Loket 2A bagian kedatangan ini yang diamati hanya jumlah kedatangan ke Loket 2A per 5 menit. Berikut tabel pengamatannya

Tabel 4.1 Jumlah kedatangan *customer* pada loket 2A per 5 menit

waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi
1 - 5	7	66 - 70	1	131 - 135	0
6 - 10	6	71 - 75	10	136 - 140	3
11 - 15	12	76 - 80	11	141 - 145	3
16 - 20	12	81 - 85	8	146 - 150	7
21 - 25	14	86 - 90	5	151 - 155	0
26 - 30	8	91 - 95	9	156 - 160	5
31 - 35	11	96 - 100	7	161 - 165	0
36 - 40	5	101 - 105	3	166 - 170	2
41 - 45	8	106 - 110	5	171 - 175	4
46 - 50	11	111 - 115	8	176 - 180	3
51 - 55	2	116 - 120	4	181 - 185	3
56 - 60	12	121 - 125	2		
61 - 65	10	126 - 130	6		

Data tersebut diuji menggunakan program SPSS dengan langkah-langkah pada contoh 3.2 dengan data pada tabel 4.1 dimana H_0 adalah data jumlah kedatangan pada loket 2A per 5 menit terdistribusi Poisson. Berdasarkan hasil analisis program SPSS pada tabel 1 lampiran 1, didapatkan nilai *Asymptotic significance (2-tailed)* atau *p-value* sebesar 0,160 yang lebih besar dari $\alpha = 0,05$. Dengan demikian, karena $p > \alpha$ maka H_0 diterima atau dengan kata lain data jumlah kedatangan pada loket 2A per 5 menit terdistribusi Poisson

2. Uji Distribusi Keberangkatan Loket 2A

Pada Loket 2A bagian keberangkatan ini yang diamati hanya jumlah keberangkatan pembayar pajak dari Loket 2A per 5 menit. Berikut tabel pengamatannya

Tabel 4.2 Jumlah keberangkatan *customer* pada loket 2A per 5 menit

waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi
1 - 5	6	66 - 70	7	131 - 135	2
6 - 10	5	71 - 75	6	136 - 140	4
11 - 15	12	76 - 80	3	141 - 145	4
16 - 20	16	81 - 85	5	146 - 150	6
21 - 25	6	86 - 90	3	151 - 155	6
26 - 30	2	91 - 95	4	156 - 160	6
31 - 35	3	96 - 100	2	161 - 165	10
36 - 40	4	101 - 105	4	166 - 170	2
41 - 45	5	106 - 110	1	171 - 175	3
46 - 50	4	111 - 115	7	176 - 180	6
51 - 55	5	116 - 120	6	181 - 185	4
56 - 60	7	121 - 125	15		
61 - 65	3	126 - 130	4		

Data tersebut diuji menggunakan program SPSS dengan langkah-langkah pada contoh 3.2 dengan data pada tabel 4.2 dimana H_0 adalah data jumlah keberangkatan pada loket 2A per 5 menit terdistribusi Poisson. Berdasarkan hasil analisis program SPSS pada tabel 2 lampiran 1, didapatkan nilai *Asymptotic significance (2-tailed)* atau *p-value* sebesar 0,806 yang lebih besar dari $\alpha = 0,05$. Dengan demikian, karena $p > \alpha$ maka H_0 diterima atau dengan kata lain data jumlah keberangkatan pada loket 2A per 5 menit terdistribusi Poisson.

3. Uji Distribusi Keberangkatan Loket 4A1

Pada Loket 4A1 yang diamati hanya jumlah keberangkatan pembayar pajak dari Loket 4A1 per 5 menit. Berikut tabel pengamatannya

Tabel 4.3 Jumlah keberangkatan *customer* pada loket 4A1 per 5 menit

waktu	frekuensi	waktu	frekuensi	waktu	frekuensi
1 - 5	3	61 - 65	4	121 - 125	2
6 - 10	4	66 - 70	5	126 - 130	1
11 - 15	3	71 - 75	4	131 - 135	6
16 - 20	6	76 - 80	3	136 - 140	4
21 - 25	4	81 - 85	4	141 - 145	5
26 - 30	4	86 - 90	2	146 - 150	2
31 - 35	2	91 - 95	4	151 - 155	4
36 - 40	4	96 - 100	5	156 - 160	3
41 - 45	4	101 - 105	1	161 - 165	3
46 - 50	3	106 - 110	3	166 - 170	3
51 - 55	6	111 - 115	2	171 - 175	3
56 - 60	3	116 - 120	3	176 - 180	1

Data tersebut diuji menggunakan program SPSS dengan langkah-langkah pada contoh 3.2 dengan data pada tabel 4.3 dimana H_0 adalah data jumlah keberangkatan pada loket 4A1 per 5 menit terdistribusi Poisson. Berdasarkan hasil analisis program SPSS pada tabel 3 lampiran 1, didapatkan nilai *Asymptotic significance (2-tailed)* atau *p-value* sebesar 0,735 yang lebih besar dari $\alpha = 0,05$. Dengan demikian, karena $p > \alpha$ maka H_0 diterima atau dengan kata lain data jumlah keberangkatan pada loket 4A1 per 5 menit terdistribusi Poisson

4. Uji Distribusi Keberangkatan Loket 4A2

Pada Loket 4A2 yang diamati hanya jumlah keberangkatan pembayar pajak dari Loket 4A2 per 5 menit. Berikut tabel pengamatannya

Tabel 4.4 Jumlah keberangkatan *customer* pada loket 4A2 per 5 menit

waktu	frekuensi	waktu	frekuensi	waktu	frekuensi
1 - 5	3	61 - 65	3	121 - 125	1
6 - 10	3	66 - 70	6	126 - 130	0
11 - 15	5	71 - 75	4	131 - 135	2
16 - 20	6	76 - 80	3	136 - 140	6
21 - 25	3	81 - 85	5	141 - 145	3
26 - 30	4	86 - 90	3	146 - 150	5
31 - 35	3	91 - 95	0	151 - 155	3
36 - 40	5	96 - 100	3	156 - 160	5
41 - 45	5	101 - 105	0	161 - 165	5
46 - 50	6	106 - 110	0	166 - 170	2
51 - 55	4	111 - 115	5	171 - 175	4
56 - 60	3	116 - 120	4		

Data tersebut diuji menggunakan program SPSS dengan langkah-langkah pada contoh 3.2 dengan data pada tabel 4.4 dimana H_0 adalah data jumlah keberangkatan pada loket 4A2 per 5 menit terdistribusi Poisson. Berdasarkan hasil analisis program SPSS pada tabel 4 lampiran 1, didapatkan nilai *Asymptotic significance (2-tailed)* atau *p – value* sebesar 0,66 yang lebih besar dari $\alpha = 0,05$. Dengan demikian, karena $p > \alpha$ maka H_0 diterima atau dengan kata lain data jumlah keberangkatan pada loket 4A2 per 5 menit terdistribusi Poisson.

5. Uji Distribusi Keberangkatan Loket 5A

Pada Loket 5A yang diamati hanya jumlah keberangkatan pembayar pajak dari Loket 5A per 5 menit. Berikut tabel pengamatannya

Tabel 4.5 Jumlah keberangkatan *customer* pada loket 5A per 5 menit

waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi	Waktu	frekuensi
1 - 5	2	61 - 65	6	121 - 125	3
6 - 10	7	66 - 70	11	126 - 130	0
11 - 15	9	71 - 75	4	131 - 135	0
16 - 20	7	76 - 80	12	136 - 140	0
21 - 25	9	81 - 85	2	141 - 145	0
26 - 30	10	86 - 90	3	146 - 150	2
31 - 35	0	91 - 95	4	151 - 155	9
36 - 40	4	96 - 100	0	156 - 160	13
41 - 45	4	101 - 105	6	161 - 165	1
46 - 50	6	106 - 110	6	166 - 170	10
51 - 55	8	111 - 115	4	171 - 175	6
56 - 60	4	116 - 120	5		

Data tersebut diuji menggunakan program SPSS dengan langkah-langkah pada contoh 3.2 dengan data pada tabel 4.5 dimana H_0 adalah data jumlah keberangkatan pada loket 5A per 5 menit terdistribusi Poisson. Berdasarkan hasil analisis program SPSS pada tabel 5 lampiran 1 didapatkan nilai *Asymptotic significance (2-tailed)* atau *p – value* sebesar 0,291 yang lebih besar dari $\alpha = 0,05$. Dengan demikian, karena $p > \alpha$ maka H_0 diterima atau dengan kata lain data jumlah keberangkatan pada loket 5A per 5 menit terdistribusi Poisson.

Telah diketahui dari uji Poisson terhadap data banyak kedatangan dan keberangkatan per 5 menit dari setiap loket di SAMSAT Yogyakarta bahwa data tersebut terdistribusi Poisson. Hal ini mengakibatkan distribusi kedatangan dan keberangkatan pada semua *phase* berdistribusi Markovian (Poisson).

2. Penentuan Model Tiap *Phase*

Sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta termasuk dalam model *multi phase* dimana terdiri dari beberapa *server* yang disusun secara seri atau bisa dikatakan terdiri dari beberapa *phase*. Hasil uji distribusi didapatkan bahwa proses kedatangan dan keberangkatan tiap *phase* terdistribusi Poisson. Hasil uji distribusi ini digabungkan dengan hasil wawancara dengan menggunakan aturan Kendall-Lee didapatkan model pada tiap *phase* sebagai berikut:

1. *Phase 1* yaitu Loket 2A yang berupa model M/M/1:GD/ ∞/∞
2. *Phase 2* yaitu Loket 4A1 dan 4A2 yang berupa model M/M/2:GD/ ∞/∞
3. *Phase 3* yaitu Loket 5A yang berupa model M/M/1:GD/ ∞/∞

B. Pembahasan

Pada bagian ini akan memproses data-data yang telah didapat. Data mengenai frekuensi kedatangan dan keberangkatan *customer* pada loket pelayanan tiap 5 menit akan digunakan untuk menentukan laju kedatangan dan keberangkatan dari tiap *phase*. Hasil identifikasi model pada tiap *phase* pada sistem antrian SAMSAT Yogyakarta akan digunakan untuk membuat suatu program untuk mengoptimalkan sistem antrian tersebut. Oleh karena itu, pada bagian ini dibagi menjadi tiga yaitu laju kedatangan dan keberangkatan, program optimalisasi sistem antrian, dan analisis performa sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta.

1. Laju Kedatangan dan Keberangkatan

Tiap-tiap *phase* pada sistem antrian SAMSAT Yogyakarta memiliki model yang berbeda-beda dan data yang berbeda pula. Perbedaan ini membuat metode perhitungan pada tiap *phase* berbeda pula. Salah satu faktor yang berpengaruh adalah data frekuensi kedatangan dan keberangkatan *customer* tiap 5 menit. Dari data tersebut dapat ditentukan laju kedatangan (λ) dan laju pelayanannya (μ) yang nantinya akan digunakan untuk menentukan ukuran performa dari sistem antrian itu sendiri.

1. *Phase 1 (Loket 2A)*

Phase 1 merupakan model dari Loket 2A yang bernotasi Kendall M/M/1:GD/ ∞ / ∞ . Banyak kedatangan yang terjadi pada suatu selang waktu bisa dibagi menjadi beberapa interval waktu tetap yang lebih kecil (Siswanto, 2007:221).

Tabel 4.6 Kedatangan *customer* pada *phase 1* berdasarkan interval waktu

Interval	Jumlah kedatangan pembayar pajak interval $I_i(K_i)$	Frekuensi atau jumlah interval (I_i)	Jumlah <i>customer</i> yang datang selama kurun waktu I_i ($K_i \times I_i$)
I_0	0	3	0
I_1	1	1	1
I_2	2	3	6
I_3	3	5	15
I_4	4	2	8
I_5	5	4	20
I_6	6	2	12
I_7	7	3	21
I_8	8	4	32
I_9	9	1	9
I_{10}	10	2	20
I_{11}	11	3	33
I_{12}	12	3	36
I_{14}	14	1	14
		$I = 37$	$N = 227$

Laju kedatangan *customer* pada Loket 2A dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.78) yang disubtitusi nilai N dan I dari tabel 4.11 sehingga didapatkan

$$\lambda = \frac{N}{I} = \frac{227}{37} = 6,135$$

Karena interval waktu tetap 5 menit, maka laju kedatangan pada Loket 2A per 5 menit adalah 6,135. Maka dari itu, laju kedatangan Loket 2A per menit adalah $6,135/5=1,227$ atau lebih tepatnya 1,227 orang per menit. Didapatkan $\lambda_1 = 1,227$ yang merupakan laju kedatangan *phase* 1. Untuk mencari laju pelayanan Loket 2A, bisa didapat dari tabel berikut

Tabel 4.7 Keberangkatan *customer* pada *phase* 1 berdasarkan interval waktu

Interval	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada interval I_i (K_i)	Frekuensi atau jumlah interval (I_i)	Jumlah <i>customer</i> yang datang selama kurun waktu I_i ($K_i \times I_i$)
I_1	1	1	1
I_2	2	4	8
I_3	3	5	15
I_4	4	8	32
I_5	5	4	20
I_6	6	8	48
I_7	7	3	21
I_{10}	10	1	10
I_{12}	12	1	12
I_{15}	15	1	15
I_{16}	16	1	16
		$I = 37$	$N = 198$

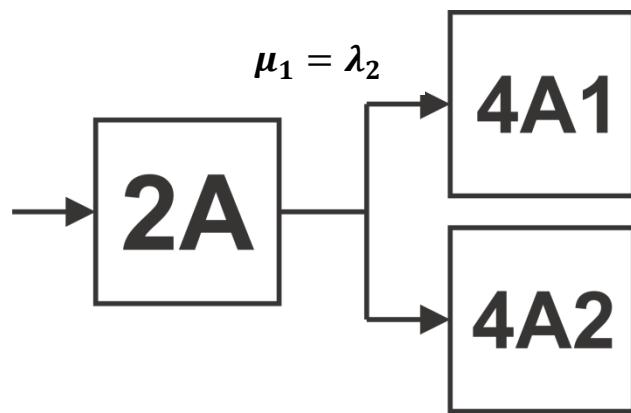
Laju keberangkatan *customer* pada Loket 2A dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.78) yang disubtitusi nilai N dan I dari tabel 4.7 sehingga didapatkan

$$\mu = \frac{N}{I} = \frac{198}{37} = 5,351$$

Karena interval waktu tetap 5 menit, maka laju pelayanan pada Loket 2A per 5 menit adalah 5,351. Maka dari itu, laju pelayanan Loket 2A per menit adalah $5,351/5=1,07$ atau lebih tepatnya 1,07 orang per menit. Didapatkan $\mu_1 = 1,07$ yang merupakan laju pelayanan *phase 1*.

2. **Phase 2 (Loket 4A1 dan 4A2)**

Phase 2 ini merupakan model dari Loket 4A1 dan 4A2 yang tersusun paralel sehingga bernotasi Kendall M/M/2:GD/ ∞/∞ . *Phase 2* merupakan kelanjutan dari *phase 1* yang terdiri dari Loket 2A.



Gambar 4.1 Kesamaan antara μ_1 dan λ_2

Hal ini mengakibatkan laju pelayanan *phase 1* atau μ_1 sama dengan laju kedatangan ke *phase 2* atau λ_2 sehingga $\mu_1 = \lambda_2 = 1,07$.

Pada *phase* ini dimana model antriannya berupa *multi server*, dibutuhkan nilai rata-rata laju pelayanan *server* atau $\bar{\mu}_2$ dari Loket 4A1 dan 4A2. Oleh karena itu, perlu dilakukan pencarian nilai laju pelayanan Loket 4A1 (μ_{21}) dan 4A2 (μ_{22}). Untuk mencari laju pelayanan Loket 4A1, bisa didapat dari tabel berikut

Tabel 4.8 Keberangkatan *customer* pada loket 4A1 berdasarkan interval waktu

Interval	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada interval I_i (K_i)	Frekuensi atau jumlah interval (I_i)	Jumlah <i>customer</i> yang datang selama kurun waktu I_i ($K_i \times I_i$)
I_1	1	3	3
I_2	2	5	10
I_3	3	11	33
I_4	4	11	44
I_5	5	3	15
I_6	6	3	18
$I = 36$		$N = 123$	

Laju keberangkatan *customer* pada Loket 4A1 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.78) yang disubtitusi nilai N dan I dari tabel 4.8 sehingga didapatkan

$$\mu = \frac{N}{I} = \frac{123}{36} = 3,417$$

Karena interval waktu tetap 5 menit, maka laju pelayanan pada Loket 4A1 per 5 menit adalah 3,417. Maka dari itu, laju pelayanan Loket 4A1 per menit adalah $3,417/5=0,683$ atau lebih tepatnya, rata-rata kedatangan 1 *customer* setiap $5/3,417=1,463$ menit. Didapatkan $\mu_{21} = 0,683$ yang merupakan laju pelayanan Loket 4A1. Untuk mencari laju pelayanan Loket 4A2, didapat dari tabel 4.9.

Tabel 4.9 Keberangkatan *customer* pada loket 4A2 berdasarkan interval waktu

Interval	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada interval I_i (K_i)	Frekuensi atau jumlah interval (I_i)	Jumlah <i>customer</i> yang datang selama kurun waktu I_i ($K_i \times I_i$)
I_0	0	4	0
I_1	1	1	1
I_2	2	2	4
I_3	3	11	33
I_4	4	5	20
I_5	5	8	40
I_6	6	4	24
$I = 35$		$N = 122$	

Laju keberangkatan *customer* pada Loket 4A2 dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.78) yang disubtitusi nilai N dan I dari tabel 4.9 sehingga didapatkan

$$\mu = \frac{N}{I} = \frac{122}{35} = 3,486$$

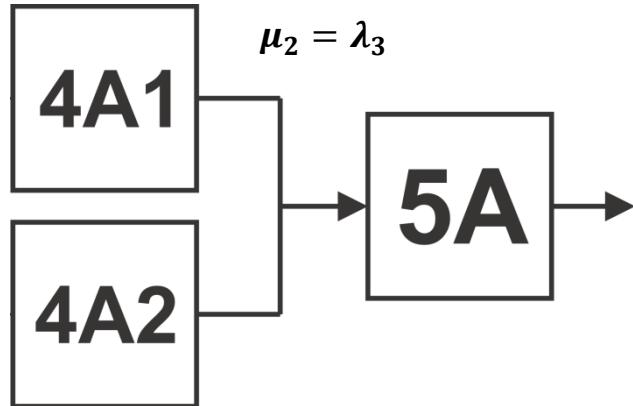
Karena interval waktu tetap 5 menit, maka laju pelayanan pada Loket 4A2 per 5 menit adalah 3,486. Maka dari itu, laju pelayanan Loket 4A2 per menit adalah $3,486/5=0,697$ atau lebih tepatnya, rata-rata kedatangan 1 *customer* setiap $5/3,486=1,434$ menit. Didapatkan $\mu_{22} = 0,697$ yang merupakan laju pelayanan Loket 4A2. Dimisalkan $\bar{\mu}_2$ adalah rata-rata laju pelayanan *server* dari Loket 4A1 dan 4A2 sehingga didapatkan

$$\bar{\mu}_2 = \frac{\mu_{22} + \mu_{21}}{2} = \frac{0,683 + 0,6971}{2} = 0,6907$$

Simbol $\bar{\mu}_2$ digunakan untuk perhitungan pada *phase* 2 saat model M/M/c:GD/ ∞/∞ dengan c lebih dari 2 terbentuk. Laju pelayanan *phase* 2 (μ_2) adalah penjumlahan dari laju pelayanan 2 *server* pada *phase* 2 sehingga didapatkan $\mu_2 = \mu_{22} + \mu_{21} = 0,683 + 0,6971 = 1,380$.

3. *Phase 3 (Loket 5A)*

Phase 3 ini merupakan model dari Loket 5A bernotasi Kendall M/M/1:GD/ ∞/∞ . *Phase* 3 merupakan kelanjutan dari *phase* 2 yang terdiri dari Loket 4A1 dan 4A2.



Gambar 4.2 Kesamaan antara μ_2 dan λ_3

Hal ini mengakibatkan laju kedatangan *phase* 3 atau λ_3 sama dengan laju pelayanan *phase* 2 atau μ_2 sehingga $\mu_2 = \lambda_3 = 1,380$. Untuk mencari laju pelayanan Loket 5A, bisa didapat dari tabel berikut

Tabel 4.10 Keberangkatan *customer* pada *phase* 3 berdasarkan interval waktu

Interval	Jumlah kedatangan <i>customer</i> pada interval I_i (K_i)	Frekuensi atau jumlah interval (I_i)	Jumlah <i>customer</i> yang datang selama kurun waktu I_i ($K_i \times I_i$)
I_0	0	6	0
I_1	1	1	1
I_2	2	3	6
I_3	3	2	6
I_4	4	6	24
I_5	5	1	5
I_6	6	5	30
I_7	7	2	14
I_8	8	1	8
I_9	9	3	27
I_{10}	10	2	20
I_{11}	11	1	11
I_{12}	12	1	12
I_{13}	13	1	13
$I = 35$			$N = 177$

Laju keberangkatan *customer* pada Loket 5A dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.78) yang disubstitusi nilai N dan I dari tabel 4.10 sehingga didapatkan adalah

$$\mu = \frac{N}{I} = \frac{177}{35} = 5,051$$

Karena interval waktu tetap 5 menit, maka laju pelayanan pada Loket 5A per 5 menit adalah 5,051. Maka dari itu, laju pelayanan Loket 5A per menit adalah $5,051/5=1,0114$ atau lebih tepatnya 1,0114 orang per menit. Didapatkan $\mu_3 = 1,0114$ yang merupakan laju pelayanan *phase 3*.

Berikut rangkuman laju kedatangan dan laju keberangkatan pada 3 *phase* di sistem antrian SAMSAT Yogyakarta.

Tabel 4.11 Laju kedatangan dan keberangkatan *customer* pada sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Laju kedatangan (λ_f)	1,22703	1,07027	1,38048
Laju keberangkatan (μ_f)	1,07027	1,38048	1.01143

Hasil analisis lain yaitu laju pelayanan tiap *server* antara lain sebagai berikut.

Tabel 4.12 Laju pelayanan tiap *server*

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Rata-rata laju pelayanan tiap <i>server</i> pada <i>phase f</i> ($\bar{\mu}_f$)	1,07027	0,6907	1.01143

2. Program Optimalisasi Sistem Antrian

Program ini bertujuan untuk mengoptimalkan penggunaan sistem antrian dengan mencari salah satu bentuk solusi alternatifnya. Penentuan solusi alternatif

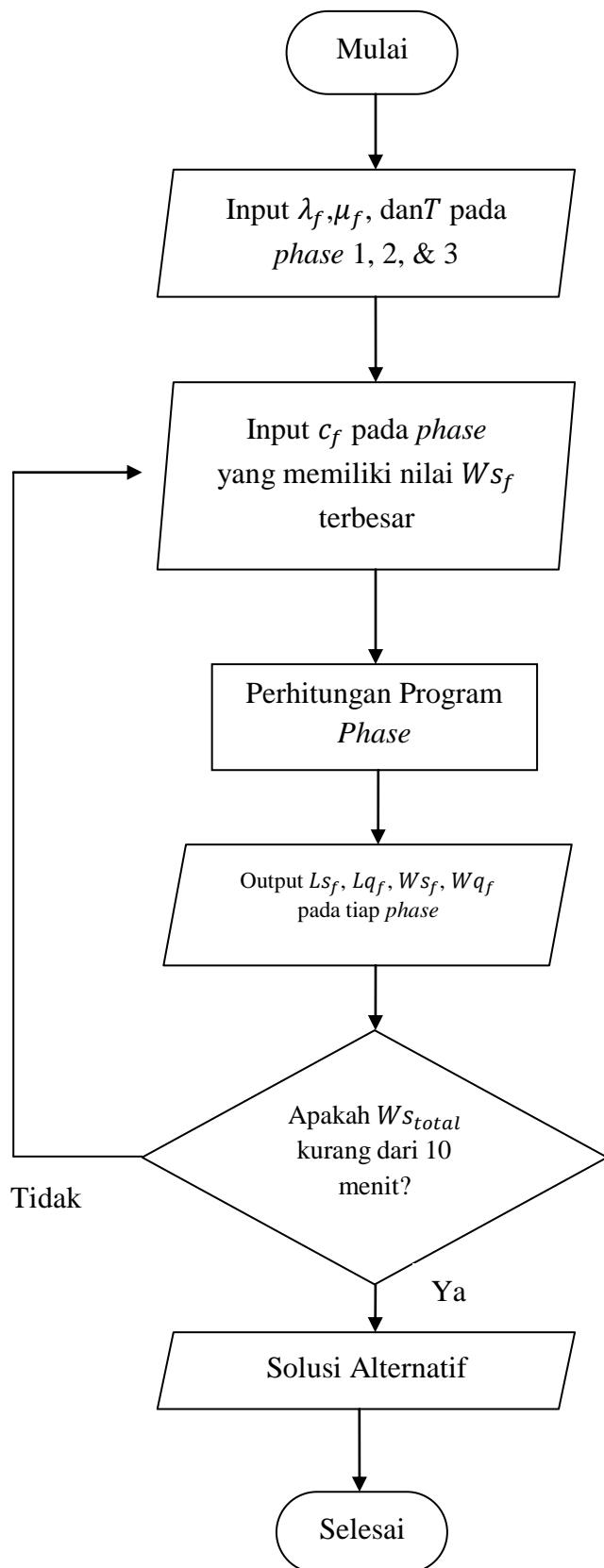
didasarkan pada rata-rata waktu *customer* dalam sistem antrian dimana SAMSAT Yogyakarta menetapkan target kurang dari 10 menit untuk pembayaran pajak kendaraan tahunan. Untuk mengurangi rata-rata waktu *customer* dalam sistem, dibutuhkan suatu langkah untuk mempercepat kinerja sistem yaitu dengan melakukan penambahan *server*. Penambahan *server* ini didasarkan pada target waktu. Apabila rata-rata waktu *customer* dalam sistem masih lebih dari 10 menit maka dilakukan penambahan *server* pada *phase* yang memiliki rata-rata waktu *customer* dalam *phase* paling lama. Pada bagian ini dibahas menjadi dua bagian yaitu program utama dan program *phase*.

2. Program Utama

Program utama ini bertujuan untuk mengoptimalkan sistem antrian secara keseluruhan sehingga rata-rata *customer* dalam sistem antrian kurang dari waktu yang ditentukan. Berdasarkan hasil wawancara dan pengumpulan data, target lama pembayaran pajak kendaraan satu tahunan di SAMSAT Yogyakarta rata-ratanya kurang dari 10 menit. Hasil ini menegaskan kembali bahwa penelitian ini hanya meninjau dari segi waktu saja bukan dari biaya operasional atau biaya *customer* yang terbuang.

Program utama adalah program yang terdiri dari tiga program *phase* dimana telah diketahui bahwa sistem antrian SAMSAT Yogyakarta terdiri dari tiga *phase*. Ketiga program *phase* ini menghasilkan ukuran performa dari masing-masing *phase*. Program utama hanya mengambil ukuran performa berupa rata-rata waktu *customer* dalam sistem dari tiap *phasenya* (Ws_f). Program utama menjumlahkan Ws_1 , Ws_2 , dan Ws_3 sehingga hasilnya dilambangkan dengan

Ws_{total} . Jika Ws_{total} kurang dari 10 menit maka sistem antrian tersebut sudah optimal. Apabila Ws_{total} lebih dari 10 menit maka sistem antrian tersebut belum optimal. Cara mengoptimalkannya adalah dengan melakukan penambahan *server* pada *phase* yang memiliki nilai Ws_f terbanyak. Penambahan *server* terus dilakukan hingga Ws_{total} kurang dari 10 menit tercapai. Penerapan rumus dari ketiga metode tersebut di *software* Microsoft Excel telah diletakkan pada bagian lampiran dan berikut algoritmanya.



Gambar 4.3 Algoritma Pemrograman Program Utama

3. Program *Phase*

Program *phase* ini memiliki tugas untuk menghitung ukuran performa dari tiap *phase* dengan menggunakan 4 variabel yaitu laju kedatangan pada fase f (λ_f), laju keberangkatan pada fase f (μ_f), banyak *server* pada fase f (c_f), dan waktu penggunaan sistem antrian (T). Pada sistem antrian di SAMSAT Yogyakarta terdiri dari dua model M/M/1:GD / ∞/∞ dan satu model M/M/2:GD/ ∞/∞ . Model antrian M/M/1 dan M/M/c memiliki beberapa asumsi yang harus dipenuhi antara lain sebagai berikut.

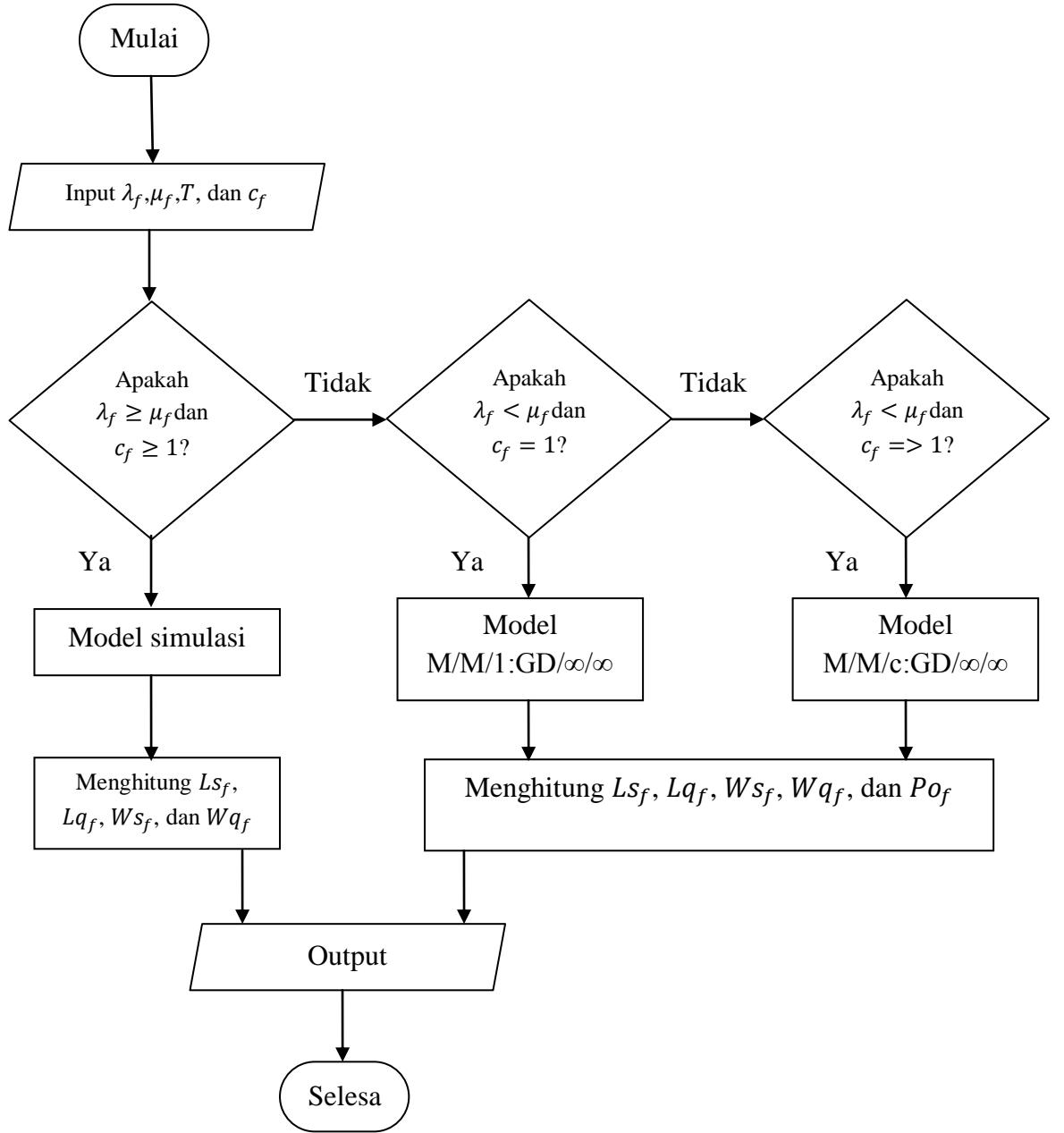
1. Pada model M/M/1 dan M/M/c secara berturut-turut harus memenuhi $\lambda_f < \mu_f$ dan $\lambda_f < c\mu_f$.
2. Pada model M/M/1 server yang digunakan hanya 1 dan model M/M/c server yang digunakan lebih dari 1.
3. Waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan terdistribusi eksponensial.

Telah dijelaskan pada bagian program utama bahwa cara untuk mengoptimalkan sistem antrian adalah dengan melakukan penambahan *server* pada *phase* yang memiliki nilai W_{Sf} paling banyak. Penambahan *server* akan berpengaruh pada *phase* tersebut sehingga menyebabkan terjadinya perubahan model. Misalkan terdapat *phase* dengan model M/M/1. *Phase* tersebut ternyata memiliki nilai W_{Sf} yang paling besar daripada *phase* yang lain sehingga harus dilakukan penambahan *server*. Hal ini menyebabkan jumlah *server* pada *phase* tersebut dari 1 menjadi 2 *server*. Oleh karena itu, model yang digunakan tidak lagi M/M/1 melainkan model M/M/c. Pada kasus lain misalkan terdapat *phase* model M/M/1 namun dengan nilai $\lambda_f < \mu_f$. Kasus ini tidak dapat diselesaikan dengan

formula yang ada pada model M/M/1 dan M/M/c karena tidak sesuai dengan syarat $\lambda_f < \mu_f$ atau $\lambda_f < c\mu_f$. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu model lain yang dapat digunakan untuk menyelesaikan kasus dengan karakteristik $\lambda_f > \mu_f$ dan $c \geq 1$. Selain itu, dibutuhkan juga suatu klasifikasi agar penentuan ukuran performanya dapat diselesaikan dengan model-model yang cocok dengan kasus tersebut. Klasifikasi tersebut antara lain sebagai berikut.

1. Jika $\lambda_f \geq \mu_f$ dan $c_f \geq 1$ maka digunakan model simulasi
2. Jika $\lambda_f < \mu_f$ dan $c_f = 1$ maka digunakan model M/M/1:GD/ ∞/∞ .
3. Jika $\lambda_f < c\mu_f$ dan $c_f > 1$ maka digunakan model M/M/c:GD/ ∞/∞ .

Setelah dikategorikan, program akan melakukan perhitungan untuk mencari ukuran performa dengan model yang cocok dengan kasus tersebut. Berikut algoritma pemrograman dari program *phase*.



Gambar 4.4 Algoritma Pemrograman Program *Phase*

Dari gambar 4.4, *output* yang dihasilkan adalah ukuran performa dari *phase* tersebut yaitu Ls_f , Lq_f , Ws_f , dan Wq_f . Ukuran performa yang selanjutnya digunakan oleh program utama adalah Ws_f . Berikut deskripsi dari 3 model tersebut.

a. Model M/M/1:GD/ ∞/∞

Model ini akan dioperasikan oleh program jika keadaan pada *phase* tersebut sebagai berikut:

- a. Laju kedatangan lebih kecil daripada laju keberangkatan ($\lambda_f < \mu_f$)
- b. Jumlah *server* hanya 1 ($c_f = 1$)

Input-nya berupa laju kedatangan (λ_f) dan laju keberangkatan (μ_f).

Rumus yang digunakan model ini seperti yang terdapat pada landasan teori yaitu sebagai berikut:

$$\rho_f = \frac{\lambda_f}{\mu_f}$$

$$Ls_f = \frac{\rho_f}{1 - \rho_f}$$

$$Ws_f = \frac{Ls_f}{\lambda_f} = \frac{1}{\mu_f(1 - \rho_f)} = \frac{1}{\mu_f - \lambda_f}$$

$$Wq_f = Ws_f - \frac{1}{\mu_f} = \frac{\rho_f}{\mu_f(1 - \rho_f)}$$

$$Lq_f = \lambda Wq_f = \frac{\rho_f^2}{1 - \rho_f}$$

b. Model M/M/c:GD/ ∞/∞

Model ini akan dioperasikan oleh program jika keadaan pada *phase* tersebut sebagai berikut:

- a. Laju kedatangan lebih kecil daripada laju keberangkatan ($\lambda_f < \mu_f$)
- b. Banyak *server* lebih dari 1 ($c_f > 1$)

Input-nya berupa laju kedatangan (λ_f), laju keberangkatan (μ_f), dan banyak *server* (c_f). Untuk model M/M/c:GD/ ∞/∞ , dibutuhkan rata-rata laju

pelayanan tiap *server* pada *phase f* ($\bar{\mu}_f$). Rumus yang digunakan model ini seperti yang terdapat pada landasan teori yaitu sebagai berikut:

$$\rho_f = \frac{\lambda_f}{(\bar{\mu}_f)}$$

$$Po_f = \left\{ \sum_{n=0}^{c_f-1} \frac{\rho_f^n}{n!} + \frac{\rho_f^{c_f}}{c_f!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho_f}{c_f}} \right) \right\}^{-1}, \frac{\rho_f}{c_f} < 1$$

$$Lq_f = \frac{\rho_f^{c_f+1}}{(c_f - 1)! (c_f - \rho_f)^2} Po_f$$

$$Ls_f = Lq_f + \rho_f = \frac{\rho^{c_f+1} p_0}{(c_f - 1)! (c_f - \rho_f)^2} + \rho_f$$

$$Ws_f = \frac{Ls_f}{\lambda_f} = \frac{\rho_f^{c_f} p_0}{\bar{\mu}_f (c_f - 1)! (c_f - \rho_f)^2} + \frac{1}{\bar{\mu}_f}$$

$$Wq_f = Ws_f - \frac{1}{\bar{\mu}_f} = \frac{\rho_f^{c_f} p_0}{\bar{\mu}_f (c_f - 1)! (c_f - \rho_f)^2}$$

c. Model Simulasi

Model simulasi ini menggunakan laju kedatangan dan keberangkatan yang diaplikasikan langsung seperti kejadian nyata. Model simulasi ini digunakan jika pada *phase* yang terjadi $\lambda_f \geq \mu_f$. *Input*-nya berupa laju kedatangan pada fase *f* (λ_f), laju keberangkatan pada fase *f* (μ_f), waktu penggunaan sistem (*T*), dan banyak *server* pada fase *f* (c_f).

Jumlah kedatangan lebih besar daripada keberangkatan sehingga *customer* yang datang harus menunggu dan bisa mendapatkan pelayanan setelah *customer* didepannya selesai dilayani. Apabila kapasitas sistem terbatas maka terjadilah *overload* atau kelebihan muatan sehingga tidak akan terjadi *steady-state* atau

kondisi yang tetap. Untuk menyiasati hal ini dan juga membuat metode ini mirip dengan kejadian nyatanya maka peristiwa ini dibatasi dengan waktu penggunaan sistem yang terbatas. Hal ini sama dengan yang terjadi di lapangan dimana terdapat jam pelayanan dari 08.00-11.00 WIB.

Model simulasi digunakan tidak hanya 1 *server* saja tetapi juga untuk c *server*. Dimisalkan μ_f adalah penjumlahan dari laju pelayanan c *server* pada *phase f* dan μ_{fg} adalah laju pelayanan *server g* pada *phase f* sehingga

$$\mu_f = \sum_{g=1}^c \mu_{fg} , \quad f = 1, 2, 3$$

Berikut tabel simulasi proses antrian untuk menentukan rata-rata waktu *customer* dalam sistem *phase* (Ws_f) dan rata-rata waktu *customer* dalam antrian *phase* (Wq_f).

Tabel 4.13 Simulasi antrian berdasarkan jumlah *customer* yang selesai

Datang (orang ke-)	Dilayani (orang ke-)	Waktu antri (detik)	Selesai (orang ke-)	Waktu tiap <i>customer</i> dalam sistem (detik)
1	1	0	-	-
2	2	$\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}$	1	$\frac{1}{\mu}$
3	3	$2 \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)$	2	$\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)$
4	4	$3 \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)$	3	$\frac{1}{\mu} + 2 \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$(k + 1)$	$k \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)$	k	$\frac{1}{\mu} + (k - 1) \cdot \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)$

Dari tabel 4.13 diperoleh banyaknya *customer* yang selesai (k) sama dengan waktu penggunaan sistem antrian (T) dibagi dengan lama pelayanan $\left(\frac{1}{\mu}\right)$ sehingga didapat

$$k = \frac{T}{\left(\frac{1}{\mu}\right)}$$

Berdasarkan tabel 4.13, waktu total *customer* (T_s) dalam sistem dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) + \left(\frac{1}{\mu} + 2 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) + \left(\frac{1}{\mu} + 3 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) + \dots \\ &\quad + \left(\frac{1}{\mu} + (k-1) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\mu} + 2 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{1}{\mu} + 3 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) + \dots + \frac{1}{\mu} \\ &\quad + (k-1) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= k \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) (0 + 1 + 2 + 3 + \dots + k-1) \\ &= k \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{k}{2} \right) (k-1) \\ &= k \left(\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{k-1}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

Rata-rata waktu *customer* dalam sistem $phase f$ (W_{S_f}) sama dengan waktu total *customer* dalam sistem (T_s) dibagi dengan banyaknya *customer* yang selesai (k) sehingga didapatkan

$$W_{S_f} = \frac{T_s}{k}$$

$$Ws_f = \frac{k \left(\frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{k-1}{2} \right) \right)}{k} = \frac{1}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{k-1}{2} \right)$$

Berdasarkan tabel 4.13, waktu total *customer* dalam antrian (T_q) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} T_q &= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) + 2 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) + 3 \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) + \cdots + k \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) (1 + 2 + 3 + \cdots + k) \\ &= k \left(\frac{k+1}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Berdasarkan tabel 4.13 didapat banyaknya *customer* yang dilayani yaitu $k + 1$ *customer*. Rata-rata waktu *customer* dalam antrian *phase f* (Wq_f) sama dengan waktu total *customer* dalam antrian (T_q) dibagi dengan banyaknya *customer* yang dilayani ($k + 1$) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} Wq_f &= \frac{T_q}{k+1} \\ Wq_f &= \frac{k \left(\frac{k+1}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right)}{k+1} = \left(\frac{k}{2} \right) \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Berikut tabel 4.14 mengenai simulasi antrian untuk menentukan rata-rata banyak *customer* dalam antrian *phase* (Lq_f) dan rata-rata banyak *customer* dalam sistem *phase* (Ls_f). Untuk memudahkan perhitungan, dimisalkan waktu antar kedatangan yaitu $\lambda' = \frac{60}{\lambda}$ dan waktu pelayanan $\mu' = \frac{60}{\mu}$.

Tabel 4.14 Simulasi antrian berdasarkan waktu penggunaan sistem

Waktu	Banyak kedatangan	Banyak orang yang dilayani	Banyak orang yang selesai	Banyak orang yang mengantri	Banyak orang dalam sistem
60	$\frac{60}{\lambda'}$	$\frac{60}{\mu'}$	$\frac{60}{\mu'} - 1$	$\frac{60}{\lambda'} - \frac{60}{\mu'}$	$\frac{60}{\lambda'} - \frac{60}{\mu'} + 1$
120	$\frac{120}{\lambda'}$	$\frac{120}{\mu'}$	$\frac{120}{\mu'} - 1$	$\frac{120}{\lambda'} - \frac{120}{\mu'}$	$\frac{120}{\lambda'} - \frac{120}{\mu'} + 1$
180	$\frac{180}{\lambda'}$	$\frac{180}{\mu'}$	$\frac{180}{\mu'} - 1$	$\frac{180}{\lambda'} - \frac{180}{\mu'}$	$\frac{180}{\lambda'} - \frac{180}{\mu'} + 1$
240	$\frac{240}{\lambda'}$	$\frac{240}{\mu'}$	$\frac{240}{\mu'} - 1$	$\frac{240}{\lambda'} - \frac{240}{\mu'}$	$\frac{240}{\lambda'} - \frac{240}{\mu'} + 1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$60T$	$\frac{60T}{\lambda'}$	$\frac{60T}{\mu'}$	$\frac{60T}{\mu'} - 1$	$\frac{60T}{\lambda'} - \frac{60T}{\mu'}$	$\frac{60T}{\lambda'} - \frac{60T}{\mu'} + 1$

Berdasarkan tabel 4.14 total banyak *customer* yang mengantri (X_q) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 X_q &= \frac{60}{\lambda'} - \frac{60}{\mu'} + \frac{120}{\lambda'} - \frac{120}{\mu'} + \frac{180}{\lambda'} - \frac{180}{\mu'} + \dots + \frac{60T}{\lambda'} - \frac{60T}{\mu'} \\
 &= 60 \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + 120 \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + 180 \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + \dots + 60T \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) \\
 &= (60 + 120 + 180 + \dots + 60T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) \\
 &= \frac{T}{2} (2 \cdot 60 + (T-1)60) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) \\
 &= \frac{T}{2} (60 + 60T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) \\
 &= 30T(1+T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right)
 \end{aligned}$$

Rata-rata banyak *customer* dalam antrian (Lq_f) sama dengan banyak *customer* yang mengantri (X_q) dibagi dengan waktu penggunaan sistem antrian (T) sehingga didapatkan

$$Lq_f = \frac{X_q}{T}$$

$$Lq_f = \frac{30T(1 + T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right)}{T} = 30(1 + T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right)$$

Berdasarkan tabel 4.14, total banyak *customer* dalam sistem (X_s) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$X_s = \left(\frac{60}{\lambda'} - \frac{60}{\mu'} + 1 \right) + \left(\frac{120}{\lambda'} - \frac{120}{\mu'} + 1 \right) + \cdots + \left(\frac{60T}{\lambda'} - \frac{60T}{\mu'} + 1 \right)$$

$$= \frac{60}{\lambda'} - \frac{60}{\mu'} + 1 + \frac{120}{\lambda'} - \frac{120}{\mu'} + 1 + \cdots + \frac{60T}{\lambda'} - \frac{60T}{\mu'} + 1$$

$$= 60 \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + 1 + 120 \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + 1 + \cdots + 60T \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + 1$$

$$= (60 + 120 + 180 + \cdots + 60T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + \sum_{i=1}^T 1$$

$$= \left(\frac{T}{2} \right) (2 \cdot 60 + (T - 1)60) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + T$$

$$= \left(\frac{60T}{2} \right) (2 + T - 1) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + T$$

$$= (30T)(1 + T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + T$$

Rata-rata banyak *customer* dalam sistem *phase f* (Ls_f) sama dengan banyak *customer* dalam sistem (X_s) dibagi dengan waktu penggunaan sistem antrian (T) sehingga didapatkan

$$Ls_f = \frac{X_s}{T}$$

$$LS_f = \frac{(30T)(1+T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + T}{T} = 30(1+T) \left(\frac{1}{\lambda'} - \frac{1}{\mu'} \right) + 1.$$

3. Analisis Performa Sistem Antrian di SAMSAT Yogyakarta

Sistem antrian SAMSAT Yogyakarta akan dianalisis dengan menggunakan program ini untuk mengetahui tingkat keefektifan dari sistem antrian tersebut. Penganalisisan sistem antrian ini membutuhkan beberapa hasil pengolahan data. Hasil pengolahan data tersebut antara lain seperti pada tabel berikut.

Tabel 4.15 Laju kedatangan dan keberangkatan pada sistem antrian
di SAMSAT Yogyakarta

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
Laju kedatangan (λ_f)	1,22703	1,07027	1,38048
Laju keberangkatan (μ_f)	1,07027	1,38048	1.01143

Selain itu, dibutuhkan juga waktu penggunaan sistem atau “jam buka” SAMSAT Yogyakarta yaitu mulai dari pukul 08.00-11.00 WIB (3 jam = 180 menit). Data-data tersebut kemudian dimasukkan dalam program pada baris input sehingga diperoleh hasil seperti tabel 4.16.

Tabel 4.16 Ukuran performa sistem antrian SAMSAT Yogyakarta

T (menit)	PHASE 1		PHASE 2		PHASE 3		TOTAL
	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
180							
input	1.227027	1.07027		0.690238		1.011429	
output	1.227027	1.07027	1.07027	1.380476	1.380476	1.011429	
server	1		2		1		
Ls	15.1865085		3.886900827		34.3987716		53.47218
Lq	14.1865085		2.336319948		33.3987716		49.9216
Ws	12.37247628		3.631701185		24.91653714		40.92071
Wq	11.49781545		2.182925755		24.05999321		37.74073
dilayani	193.6486		249.485716		183.05722		
selesai	192.6486		248.485716		182.05722		
P0	-		0.126576224		-		
rho	1.146464911		1.550580879		1.364877021		
penggunaan sistem	1.146464911		0.77529044		1.364877021		
Maksimal orang antri	28.21626		-		66.428496		

Berdasarkan tabel 4.21 menunjukkan bahwa nilai rata-rata *customer* dalam sistem antrian (Ws_{total}) selama 40,9 menit. Hal ini masih jauh dari target yaitu kurang dari 10 menit sehingga dibutuhkan suatu solusi alternatif untuk memenuhi target.

4. Optimalisasi Sistem Antrian di SAMSAT Yogyakarta

Telah diketahui bahwa sistem antrian belum memenuhi target waktu pembayaran pajak yang kurang dari 10 menit. Dengan adanya hal ini maka diperlukan suatu optimalisasi kinerja loket-loket pelayanan itu sendiri. Seperti yang terdapat pada *flowchart* program utama bahwa untuk memenuhi target maka *server* pada tiap *phase* harus diperbanyak untuk mempercepat kinerja. Jika sistem antrian masih belum memenuhi target maka harus dimasukkan input baru dengan

penambahan *server*. Jika sistem antrian sudah memenuhi target, maka kombinasi banyak *server* itulah yang merupakan solusi alternatif yang optimal.

Langkah 1

Tabel 4.17 Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 1

T (menit)	PHASE 1		PHASE 2		PHASE 3		TOTAL
	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
180							
input	1.227027	1.07027		0.690238		1.011429	
output	1.227027	1.07027	1.07027	1.380476	1.380476	1.011429	
server	1			2		1	
L_s	15.1865085		3.886900827		34.3987716		53.47218
L_q	14.1865085		2.336319948		33.3987716		49.9216
W_s	12.37247628		3.631701185		24.91653714		40.92071
W_q	11.49781545		2.182925755		24.05999321		37.74073
dilayani	193.6486		249.485716		183.05722		
selesai	192.6486		248.485716		182.05722		
P₀	-		0.126576224		-		
rho	1.146464911		1.550580879		1.364877021		
penggunaan sistem	1.146464911		0.77529044		1.364877021		
Maksimal orang antri	28.21626		-		66.428496		

Dari tabel 4.17 tampak bahwa sistem antrian masih belum memenuhi target yaitu $W_{s_{total}}$ kurang dari 10 menit. Hal ini diperlihatkan dari nilai $W_{s_{total}}$ sebanyak 40,92071 menit. Oleh karena itu, *phase* dengan W_{s_f} terbanyak perlu ditambahkan *server* baru untuk mempercepat proses antrian. Penambahan 1 *server* dilakukan pada *phase* 3 dimana nilai W_{s_f} selama 24,91654 menit.

Langkah 2

Tabel 4.18 Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 2

T (menit)	PHASE 1		PHASE 2		PHASE 3		TOTAL
	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
180							
input	1.227027	1.07027		0.690238		1.011429	
output	1.227027	1.07027	1.07027	1.380476	1.380476	2.022858	
server	1		2		2		
Ls	15.1865085		3.886900827		2.554621075		21.62803
Lq	14.1865085		2.336319948		1.189744055		17.71257
Ws	12.37247628		3.631701185		1.850536123		17.85471
Wq	11.49781545		2.182925755		0.861835977		14.54258
dilayani	193.6486		249.485716		365.11444		
selesai	192.6486		248.485716		364.11444		
P0	-		0.126576224		0.188750726		
rho	1.146464911		1.550580879		1.364877021		
penggunaan sistem	1.146464911		0.77529044		0.68243851		
Maksimal orang antri	28.21626		-		-		

Dari tabel 4.18 tampak bahwa sistem antrian masih belum memenuhi target yaitu Ws_{total} kurang dari 10 menit. Hal ini diperlihatkan dari nilai Ws_{total} sebanyak 17,85471 menit. Oleh karena itu, *phase* dengan Ws_f terbanyak perlu ditambahkan *server* baru untuk mempercepat proses antrian. Penambahan 1 *server* dilakukan pada *phase* 1 dimana nilai Ws_f selama 12,37248 menit.

Langkah 3

Tabel 4.19 Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 3

T (menit)	PHASE 1		PHASE 2		PHASE 3		TOTAL
	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
180							
input	1.227027	1.07027		0.690238		1.011429	
output	1.227027	2.14054	2.14054	1.380476	1.380476	2.022858	
server	2		2		2		TOTAL
Ls	1.707562016		69.7857739		2.554621075		74.04796
Lq	0.561097106		68.7857739		1.189744055		70.53662
Ws	1.391625462		32.5530158		1.850536123		35.79518
Wq	0.457281792		31.95723602		0.861835977		33.27635
dilayani	386.2972		249.485716		365.11444		
selesai	385.2972		248.485716		364.11444		
P0	0.271267951		-		0.188750726		
rho	1.146464911		3.101161759		1.364877021		
penggunaan sistem	0.573232455		1.550580879		0.68243851		
Maksimal orang antri	-		136.811484		-		

Dari tabel 4.19 tampak bahwa sistem antrian masih belum memenuhi target yaitu Ws_{total} kurang dari 10 menit. Hal ini diperlihatkan dari nilai Ws_{total} sebanyak 35,7952 menit. Oleh karena itu, *phase* dengan Ws_f terbanyak perlu ditambahkan *server* baru untuk mempercepat proses antrian. Penambahan 1 *server* dilakukan pada *phase* 2 dimana nilai Ws_f selama 32,55301 menit.

Langkah 4

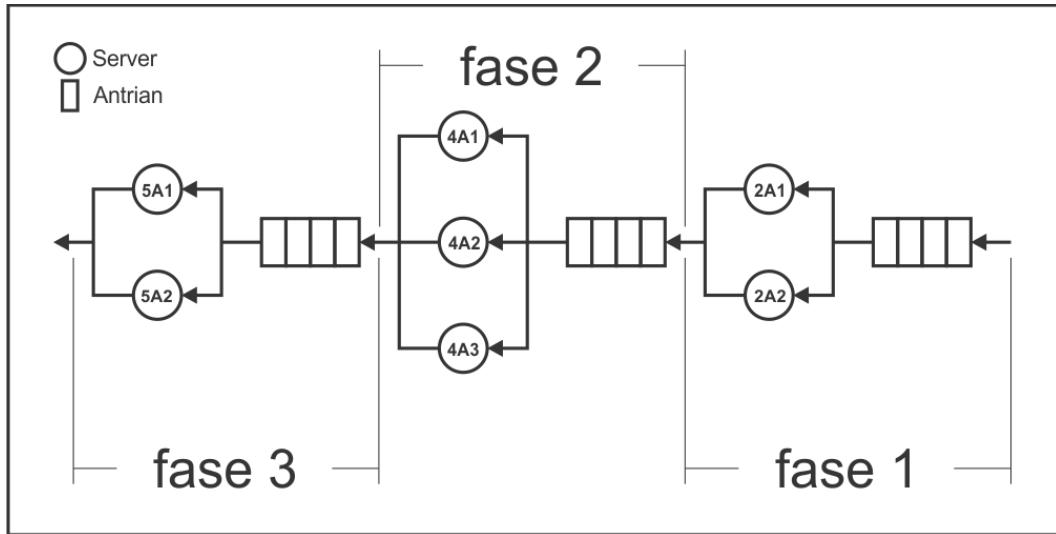
Tabel 4.20 Optimalisasi sistem antrian SAMSAT Yogyakarta langkah 4

T (menit)	PHASE 1		PHASE 2		PHASE 3		TOTAL
	Lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
180							
input	1.227027	1.07027		0.690238		1.011429	
output	1.227027	2.14054	2.14054	2.070714	2.070714	2.022858	
server	2		3		2		
Ls	1.501080824		7.31922585		5.33099515		14.1513
Lq	0.354615913		6.31922585		4.33099515		11.00484
Ws	1.223347835		3.410902526		2.568628556		7.202879
Wq	0.289004164		2.935854037		2.079990948		5.304849
dilayani	386.2972		373.728574		365.11444		
selesai	385.2972		372.728574		364.11444		
P0	0.171442574		-		-		
rho	1.146464911		3.101161759		2.047315531		
kepadatan sistem	0.573232455		1.033720586		1.023657765		
Maksimal orang antri	-		12.568626		8.614134		

Dari tabel 4.20 tampak bahwa sistem antrian sudah memenuhi target yaitu Ws_{total} kurang dari 10 menit. Hal ini diperlihatkan dari nilai Ws_{total} selama 7,20288 menit. Oleh karena itu, sistem antrian dengan kombinasi *server* seperti berikut merupakan salah satu solusi alternatif yang optimal.

1. *Phase 1* terdiri dari 2 *server*
2. *Phase 2* terdiri dari 3 *server*
3. *Phase 3* terdiri dari 2 *server*

Berikut adalah ilustrasi dari sistem antrian yang sudah optimal.



Gambar 4.5 Sistem antrian yang optimal

Berdasarkan tabel 4.20, untuk mencapai Ws_{total} kurang dari 10 menit, dibutuhkan laju pelayanan yang lebih besar di tiap *phase* dari sebelumnya. Hal ini dilakukan dengan penambahan *server* pada *phase* yang memiliki Ws_f paling besar. Pada tabel 4.20 juga dapat diambil kesimpulan bahwa untuk mencapai Ws_{total} kurang dari 10 menit, nilai laju pelayanan tiap-tiap *phase* tidak jauh berbeda. Keseimbangan laju pelayanan inilah yang membuat sistem antrian terus berjalan tanpa ada antrian yang panjang. Apabila ada satu *phase* yang memiliki laju pelayanan paling kecil dan perbedaannya sangat signifikan dari laju pelayanan *phase* lain, maka pasti *phase* tersebut akan memiliki Ws_f atau waktu *customer* dalam sistem *phase* paling lama.

BAB V

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan analisis sistem antrian pada Kantor SAMSAT Yogyakarta, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

- a. Sistem antrian di Kantor SAMSAT Yogyakarta termasuk ke dalam model *multi phase* atau sistem antrian dengan *server* yang disusun secara berurutan atau seri. Sistem antrian ini terdiri dari 3 *phase* yaitu sebagai berikut:
 1. *Phase 1* merupakan model M/M/1:GD/ ∞/∞ atau *phase* yang terdiri dari 1 *server*
 2. *Phase 2* merupakan model M/M/2:GD/ ∞/∞ atau *phase* yang terdiri dari 2 *server*
 3. *Phase 3* merupakan model M/M/1:GD/ ∞/∞ atau *phase* yang terdiri dari 1 *server*
- b. Hasil analisis dengan teori antrian menunjukkan bahwa sistem antrian SAMSAT Yogyakarta terbukti belum efektif dalam kinerjanya untuk memenuhi target waktu pembayaran pajak satu tahunan selama 10 menit. Hal ini dibuktikan dengan nilai WS_{total} selama 40,9207 menit atau dengan kata lain, waktu yang dibutuhkan untuk membayar pajak kendaraan satu tahunan sekitar 40 menit 55 detik per orang. Ukuran performa lainnya yaitu:
 - a. Rata-rata waktu pembayar pajak dalam antrian (Wq_{total}) yaitu selama 37,741 menit atau sekitar 37 menit 44 detik per orang.

- b. Rata-rata banyak pembayar pajak dalam sistem (Ls_{total}) yaitu sebanyak 53,4722 orang atau sekitar 54 orang per menit.
- c. Rata-rata banyak pembayar pajak dalam antrian (Lq_{total}) yaitu sebanyak 49,922 orang 50 orang per menit.
- c. Bentuk solusi alternatif yang dihasilkan setelah dianalisis dengan 4 langkah penambahan *server* adalah 2 *server* pada *phase 1*, 3 *server* pada *phase 2*, dan 2 *server* pada *phase 3*. Dengan menggunakan kombinasi *server* tersebut, maka waktu pembayaran pajaknya (W_s) menjadi 7,203 menit tiap orang. Ukuran performa lainnya yaitu:
 - a. Rata-rata waktu pembayar pajak mangantri (Wq_{total}) yaitu selama 5,305 menit tiap orangnya.
 - b. Rata-rata banyak pembayar pajak dalam sistem (Ls_{total}) yaitu sebanyak 14,1513 orang tiap menitnya.
 - c. Rata-rata banyak pembayar pajak dalam antrian (Lq_{total}) yaitu sebanyak 11 orang tiap menitnya.

B. Saran

Pada penulisan skripsi ini, penulis hanya menjelaskan tentang sistem antrian model *multi phase* di SAMSAT Yogyakarta dengan analisis yang mengacu pada waktu *customer* dalam sistem. Bagi pembaca yang berminat, penulis menyarankan untuk:

1. Menerapkan program optimalisasi pada sistem antrian di lembaga-lembaga atau perusahaan lain yang menerapkan sistem antrian *multi phase*

2. Menggunakan program optimalisasi dengan acuan target berupa efisiensi biaya operasional dan waktu *customer* yang terbuang karena mengantri
3. Menerapkan sistem antrian dengan asumsi model antrian dengan kapasitas sistem terbatas

DAFTAR PUSTAKA

- Agus Dwiyanto. 2006. *Mewujudkan Good Governance Melalui Pelayanan Publik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Bain, L & Engelhardt. (1992). *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*: Second Edition. California: Duxbury Press.
- Bronson, R. 1996. *Teori dan Soal-Soal Operations Research* (Terjemahan HansWospakrik). Jakarta: Erlangga.
- Corder, G. W. & Foreman, D. I. (2009). *Nonparametric statistics for non-statisticians: A step-by-step approach*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Eris Kusnadi. 2012. *Uji Normalitas dengan Kolmogorov-Smirnov Test pada PSPP*. Diakses dari <http://eriskusnadi.wordpress.com/2012/04/07/iji-normalitas-dengan-kolmogorov-smirnov-test-pada-pspp/> pada tanggal 10 April 2014 pukul 01.46 WIB.
- Gross, D & Haris, C. M. 2008. *Fundamental of Queueing Theory*: Fourth edition. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Little, J. D. C. 1961. A proof for the queuing formula $L = \lambda W$. *Operations Research* 9. Hal. 383-387.
- Osaki, Shunji. 1992. *Applied Stochastic System Modeling*. Heidelberg: Springer.
- Purcell, E J & Valberg, Dale. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jakarta: Erlangga.
- Retno S. & Nikenasih B. 2013. *Modul Praktikum Teori Antrian*. Diakses <http://staff.uny.ac.id/sites/default/files/pendidikan/Nikenasih%20Binatari,%20S.Si.,%20M.Si./MODUL%20PRAKTIKUM%20TEORI%20ANTRIAN%20-%20FIX%20terakhir.pdf> pada tanggal 10 April 2014 pukul 01.41 WIB.
- Siegel, Sidney. 1956. *Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences*. New York: McGraw-Hill.
- Simple Tandem Queue*. Diakses dari www.iitd.vlab.co.in/?sub=65&brch=182&sim=843&cnt=1 pada tanggal 2 April 2014 pukul 05.12 WIB.

- Sinalungga, S. 2008. *Pengantar Teknik Industri*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Siswanto. 2007. *Operations Research*. Bogor: Penerbit Erlangga.
- Sugito & Moch A. M. 2011. *Distribusi Poisson dan Distribusi Eksponensial dalam Proses Stokastik*. Diakses eprints.undip.ac.id/33678/1/8artikel6_Sugito.pdf pada tanggal 20 Mei 2014 pukul 19.43 WIB.
- Taha, H. 2007. *Operations Research and Introduction*. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- UU No. 25 Tahun 2009 tentang Pelayanan Publik.
- Yu, H., Zheng, D., Zhao, B. Y., & Zheng, W. (2008). Understanding user behaviour in large-scale video-on-demand systems. In L. Song (Ed.), *Innovation together: Microsoft Research Asia academic research collaboration* (pp. 125-147). New York: Springer.

LAMPIRAN

Lampiran 1

Hasil Tes Kolmogorov-Smirnov dengan Program SPSS

Tabel 1 Output SPSS data kedatangan Loket 2A

		lamda_2A_5menit
N		37
Poisson Parameter ^{a,,b}	Mean	6.1351
Most Extreme Differences	Absolute	.185
	Positive	.185
	Negative	-.150
Kolmogorov-Smirnov Z		1.124
Asymp. Sig. (2-tailed)		.160

Tabel 2 Output SPSS data keberangkatan Loket 2A

		mu_2A_5menit
N		37
Poisson Parameter ^{a,,b}	Mean	5.3514
Most Extreme Differences	Absolute	.105
	Positive	.105
	Negative	-.072
Kolmogorov-Smirnov Z		.641
Asymp. Sig. (2-tailed)		.806

Tabel 3 Output SPSS data keberangkatan Loket 4A1

		mu_4A1_5menit
N		36
Poisson Parameter ^{a,,b}	Mean	3.4167
Most Extreme Differences	Absolute	.114
	Positive	.092
	Negative	-.114
Kolmogorov-Smirnov Z		.686
Asymp. Sig. (2-tailed)		.735

Tabel 4 Output SPSS data keberangkatan Loket 4A2

		mu_4A2_5menit
N		35
Poisson Parameter ^{a,,b}	Mean	3.4857
Most Extreme Differences	Absolute	.123
	Positive	.084
	Negative	-.123
Kolmogorov-Smirnov Z		.731
Asymp. Sig. (2-tailed)		.660

Tabel 5 Output SPSS data keberangkatan Loket 5A

		mu_5A_5menit
N		35
Poisson Parameter ^{a,,b}	Mean	5.0571
Most Extreme Differences	Absolute	.166
	Positive	.166
	Negative	-.157
Kolmogorov-Smirnov Z		.981
Asymp. Sig. (2-tailed)		.291

Lampiran 2

Tabel 6 Nilai Kritis dari D pada Tes Satu Sampel

Kolmogorov-Smirnov

(Siegel, 1956:251)

Ukuran sampel (N)	Tingkat signifikan dari $D = \text{maximum} F_0(X) - S_N(X) $				
	0.2	0.15	0.1	0.05	0.01
1	0.900	0.925	0.950	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.510	0.565	0.669
6	0.410	0.436	0.470	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.360	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.410	0.490
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.450
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.250	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.20	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
Lebih dari 35	$\frac{1,07}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,14}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,22}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{N}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{N}}$

Lampiran 3

Tampilan Program Optimalisasi Sistem Antrian

PROGRAM OPTIMALISASI SISTEM ANTRIAN MULTIPHASE (3 FASE)																		
TABEL INPUT & OUTPUT																		
TABEL SIGMA																		
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
2	input T (menit)	FASE 1	FASE 2	FASE 3					0	(2A)	1	(4A1A2)	1	(5A)			1	
3	180	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu		1	2.14646	1.146465	8.90976	3.101162	3.04732	2.047316			
4	input laju server	1.22703	1.07027		0.69024			1.01143	TOTAL	2				4.808602				
5	laju tiap fase	1.22703	2.14054	2.14054	2.07071	2.07071	2.02286											
6	server	2		3		3		2									4	
7	Ls	1.707562016		7.31922585		5.33099515		14.35778									5	
8	Lq	0.561097106		6.31922585		4.33099515		11.21132									6	
9	Ws	1.391625462		3.410902526		2.568628556		7.371157									7	
10	Wq	0.457281792		2.935854037		2.079990948		5.473127									8	
11	dilayani	386.2972		373.728374		365.11444											9	
12	selesai	385.2972		372.728374		364.11444											10	
13	P0	0.271267951		-													11	
14	rho	1.146464911		3.101161759		2.047315531											12	
15	penggunaan sistem	0.573232455		1.033720586		1.023657765											13	
16	Maksimal orang antri	-		12.568626		8.614134											14	
17																	15	
18																		

Lampiran 4

Penjelasan Input Program Optimalisasi Sistem Antrian

Sesuai yang telah dijelaskan di Bab IV bahwa ada 4 *input* yang harus terpenuhi yaitu berupa laju kedatangan (λ_f), laju keberangkatan (μ_f), waktu penggunaan sistem (T), dan banyak *server* (c_f). Sistem antrian SAMSAT Yogyakarta memiliki 3 *phase* dalam penyelesaian pembayaran pajak satu tahunan sehingga *input*-nya adalah sebagai berikut.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	PROGRAM OPTIMALISASI SISTEM ANTRIAN									
2	TABEL INPUT & OUTPUT									
3	T (menit)	FASE 1		FASE 2		FASE 3		TOTAL		
4	180	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu			
5	input	1.22703	1.07027			0.69024		1.01143		
6	output	1.22703	2.14054	2.14054	2.07071	2.07071	2.02286			
7	server	2		3		2				
8		1.707560046		7.01000505		5.00000515		14.05770		

Penjelasan:

- Cell B4: Waktu penggunaan sistem (T)
- Cell C5: Laju kedatangan pada *phase* 1 (λ_1)
- Cell D5: Laju pelayanan pada *server phase* 1 (μ_1)
- Cell C7: Jumlah *server phase* 1 (c_1)
- Cell F5: Laju pelayanan pada *server phase* 2 (μ_2)
- Cell E7: Jumlah *server phase* 2 (c_2)
- Cell H5: Laju pelayanan pada *server phase* 3 (μ_3)
- Cell G7: Jumlah *server phase* 3 (c_3)

Lampiran 5

Penjelasan Proses Program Optimalisasi Sistem Antrian

Pada program ini ada beberapa *cell* yang digunakan untuk membantu melakukan perhitungan. Kemudian hasil dari perhitungan tersebut digunakan oleh *formula* pada *cell* output. Adapun beberapa *cell* tersebut sebagai berikut.

A	B	C	D	E	F	G	H
PROGRAM OPTIMALISASI SISTEM ANTRIAN							
TABEL INPUT & OUTPUT							
	T (menit)	FASE 1		FASE 2		FASE 3	
180	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
input	1.22703	1.07027		0.69024		1.01143	
output	1.22703	2.14054	2.14054	2.07071	2.07071	2.02286	
server	2		3		2		

Penjelasan:

- a. *Cell* C6: Laju kedatangan pada *phase* 1 (λ_1)

Formula: =C5

- b. *Cell* D6: Laju pelayanan pada *phase* 1

Formula: =D5*C7

- c. *Cell* E6: Laju kedatangan pada *phase* 2

Formula: =D6

- d. *Cell* F6: Laju pelayanan pada *phase* 2

Formula: =F5*E7

- e. *Cell* G6: Laju kedatangan pada *phase* 3

Formula: =F6

- f. *Cell* H6: Laju pelayanan pada *phase* 3

Formula: =H5*G7

	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	ULTI PHASE (3 FASE)									
2	TABEL SIGMA									
3	(2A)	0		1 (4A1A2)	0		1	5A	0	1
4	2.1465	1	1.146465	8.9098	1	3.101162	3.0473	1	2.047316	
5		2			2	4.808602			2	
6		3			3				3	
7		4			4				4	

Penjelasan:

a. Cell L4: $\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!}$

Formula: =SUM(M\$1:M\$18)

b. Cell M3: $\frac{\rho^0}{0!}$

Formula: =IF(\$C\$7>=K3+1,((C\$15)^K3)/FACT(K3),"")

c. Cell M4: $\frac{\rho^1}{1!}$

Formula: =IF(\$C\$7>=K4+1,((C\$15)^K4)/FACT(K4),"")

d. Cell N4: $\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!}$

Formula: =SUM(O\$1:O\$18)

e. Cell O3: $\frac{\rho^0}{0!}$

Formula: =IF(\$E\$7>=K3+1,((E\$15)^K3)/FACT(K3),"")

f. Cell O4: $\frac{\rho^1}{1!}$

Formula: =IF(\$E\$7>=K4+1,((E\$15)^K4)/FACT(K4),"")

g. Cell O5: $\frac{\rho^2}{2!}$

Formula: =IF(\$E\$7>=K5+1,((E\$15)^K5)/FACT(K5),"")

h. Cell P4: $\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!}$

Formula: =SUM(Q\$1:Q\$18)

i. Cell Q3: $\frac{\rho^0}{0!}$

Formula:=IF(\$G\$7>=K3+1,((G\$15)^K3)/FACT(K3),"")`

j. Cell Q4: $\frac{\rho^1}{1!}$

Formula: =IF(\$G\$7>=K4+1,((G\$15)^K4)/FACT(K4),"")`

Lampiran 6

Penjelasan Output Program Optimalisasi Sistem Antrian

A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	PROGRAM OPTIMALISASI SISTEM ANTRIAN							
2	TABEL INPUT & OUTPUT							
3	T (menit)							
4	180	lamda	mu	lamda	mu	lamda	mu	
5	input	1.22703	1.07027		0.69024		1.01143	
6	output	1.22703	2.14054	2.14054	2.07071	2.07071	2.02286	
7	server	2		3		2		
8	ls	1.707562016		7.31922585		5.33099515		14.35778
9	lq	0.561097106		6.31922585		4.33099515		11.21132
10	ws	1.391625462		3.410902526		2.568628556		7.371157
11	wq	0.457281792		2.935854037		2.079990948		5.473127
12	dilayani	386.2972		373.728574		365.11444		
13	selesai	385.2972		372.728574		364.11444		
14	p0	0.271267951				-		
15	rho	1.146464911		3.101161759		2.047315531		
16	penggunaan sistem	0.573232455		1.033720586		1.023657765		
17	Maksimal orang antri	-		12.568626		8.614134		

Penjelasan:

Phase 1

- a. Cell C8: Rata-rata jumlah *customer* dalam sistem *phase 1* (Ls_1)

Formula: =IF(C6>=D6,((B\$4)/2)*(2*(C6+1-D6)+((B\$4)-1)*(C6-D6))/(B\$4),IF(C7>1,C9+C15,C15/(1-C15)))

- b. Cell C9: Rata-rata jumlah *customer* dalam antrian *phase 1* (Lq_1)

Formula: =IF(C6>=D6,(((B\$4)+1)/2)*(B\$4)*(C6-D6)/((B\$4)),IF(C7>1,(((C15)^(C7+1))*C14)/((FACT(C7-1))*(C7-C15)^(2)),C11*C6))

- c. Cell C10: Rata-rata waktu *customer* dalam sistem *phase 1* (Ws_1)

Formula: =IF(C6>=D6,(C13/2)*(2*(60/D6)+(C13-1)*(60/D6-60/C6))/(C13*60),IF(C7>1,C8/C6,C8/C6))

d. *Cell C11: Rata-rata waktu customer dalam antrian phase 1 (Wq_1)*

Formula: =IF(C6>=D6,(C12/2)(0+(C12-1)*(60/D6-60/C6))/(C12*60),IF(C7>1,C9/C6,C10-1/D5))*

e. *Cell C12: Jumlah orang yang telah dilayani pada phase 1 ($k + 1$)*

*Formula:=(\\$B\$4*60)/(60/D6)+1*

f. *Cell C13: Jumlah orang yang telah dilayani pada phase 1 (k)*

Formula:=C12-1

g. *Cell C14: Peluang sistem tanpa customer pada phase 1 (P_0)*

Formula:=IF(C6>D6,"-",1/((L4+((C15^C7)/FACT(C7))(1/(1-(C15/C7))))))*

h. *Cell C15: $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_{1g}}$*

Formula:=C6/D5

i. *Cell C16: Persentase sistem sibuk pada phase 1 (P_{b1})*

Formula:=C15/C7

j. *Cell C17: Jumlah maksimal orang mengantri pada phase 1*

Formula:=IF(C6<D6,"-",\\$B\$4(C6-D6))*

Phase 2

a. *Cell E8: Rata-rata jumlah customer dalam sistem phase 2 (Ls_2)*

Formula:=IF(E6>=F6,((\\$B\$4)/2)(2*(E6+1-F6)+((\\$B\$4)-1)*(E6-F6))/(\\$B\$4),IF(E7>1,E9+E15,E15/(1-E15)))*

b. *Cell E9: Rata-rata jumlah customer dalam antrian phase 2 (Lq_2)*

$$\text{Formula:}=\text{IF}(\text{E6}>=\text{F6},((\text{\$B\$4}+1)/2)*(\text{\$B\$4})*(\text{E6}-\text{F6})/(\text{\$B\$4}),\text{IF}(\text{E7}>1,(((\text{E15})^{\text{E7}+1})*\text{E14})/(\text{FACT}(\text{E7}-1))*(\text{E7}-\text{E15})^2),\text{E11}*\text{E6}))$$

- c. *Cell E10: Rata-rata waktu customer dalam sistem phase 2 (Ws_2)*

$$\text{Formula:}=\text{IF}(\text{E6}>=\text{F6},(\text{E13}/2)*(2*(60/\text{F6})+(\text{E13}-1)*(60/\text{F6}-60/\text{E6}))/(\text{E13}*60),\text{IF}(\text{E7}>1,\text{E8}/\text{E6},\text{E8}/\text{E6}))$$

- d. *Cell E11: Rata-rata waktu customer dalam antrian phase 2 (Wq_2)*

$$\text{Formula:}=\text{IF}(\text{E6}>=\text{F6},(\text{E12}/2)*(0+(\text{E12}-1)*(60/\text{F6}-60/\text{E6}))/(\text{E12}*60),\text{IF}(\text{E7}>1,\text{E9}/\text{E6},\text{E10}-1/\text{F5}))$$

- e. *Cell E12: Jumlah orang yang telah dilayani pada phase 2 ($k + 1$)*

$$\text{Formula:}=(\text{\$B\$4}*60)/(60/\text{F6})+1$$

- f. *Cell E13: Jumlah orang yang telah dilayani pada phase 2 (k)*

$$\text{Formula:}=\text{E12}-1$$

- g. *Cell E14: Peluang sistem tanpa customer pada phase 2 (P_0)*

$$\text{Formula:}=\text{IF}(\text{E6}>\text{F6},"-",1/((\text{N4}+((\text{E15}^{\text{E7}})/\text{FACT}(\text{E7}))*((1/(1-(\text{E15}/\text{E7})))))$$

- h. *Cell E15: $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_{2g}}$*

$$\text{Formula:}=\text{E6}/\text{F5}$$

- i. *Cell E16: Persentase sistem sibuk pada phase 2 (P_b)*

$$\text{Formula:}=\text{E15}/\text{E7}$$

- j. *Cell E17: Jumlah maksimal orang mengantri pada phase 2*

$$\text{Formula:}=\text{IF}(\text{E6}<\text{F6},"-",\text{\$B\$4}*(\text{E6}-\text{F6}))$$

Phase 3

- a. *Cell G8*: Rata-rata jumlah *customer* dalam sistem *phase 3* (Ls_3)

Formula:=IF(G6>=H6,((B\$4)/2)(2*(G6+1-H6)+((B\$4)-1)*(G6-H6))/(B\$4),IF(G7>1,G9+G15,G15/(1-G15)))*

- b. *Cell G9*: Rata-rata jumlah *customer* dalam antrian *phase 3* (Lq_3)

Formula:=IF(G6>=H6,((B\$4)+1)/2)(\$B\$4)*(G6-H6)/((B\$4)),IF(G7>1,(((G15)^(G7+1))*G14)/((FACT(G7-1))*(G7-G15)^(2)),G11*G6))*

- c. *Cell G10*: Rata-rata waktu *customer* dalam sistem *phase 3* (Ws_3)

Formula:=IF(G6>=H6,(G13/2)(2*(60/H6)+(G13-1)*(60/H6-60/G6))/(G13*60),IF(G7>1,G8/G6,G8/G6))*

- d. *Cell G11*: Rata-rata waktu *customer* dalam antrian *phase 3* (Wq_3)

Formula:=IF(G6>=H6,(G12/2)(0+(G12-1)*(60/H6-60/G6))/(G12*60),IF(G7>1,G9/G6,G10-1/H5))*

- e. *Cell G12*: Jumlah orang yang telah dilayani pada *phase 3* ($k + 1$)

*Formula:=(B\$4*60)/(60/H6)+1*

- f. *Cell G13*: Jumlah orang yang telah dilayani pada *phase 3* (k)

Formula:=G12-1

- g. *Cell G14*: Peluang sistem tanpa *customer* pada *phase 3* (P_0)

Formula:=IF(G6>H6,"-",1/((P4+((G15^G7)/FACT(G7)))(1/(1-(G15/G7))))))*

- h. *Cell G15*: $\rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_{3g}}$

Formula:=G6/H5

- i. *Cell G16*: Persentase sistem sibuk pada *phase 3* (P_b)

Formula:=G15/G7

- j. *Cell G17*: Jumlah maksimal orang mengantri pada *phase 3*

Formula:=IF(G6<H6,"-",\\$B\$4(G6-H6))*

Total *phase 1, 2, dan 3*

- a. *Cell I8*: Rata-rata jumlah *customer* dalam sistem antrian (Ls_{total})

Formula:=SUM(C8:H8)

- b. *Cell I9*: Rata-rata jumlah *customer* dalam sistem antrian (Lq_{total})

Formula:=SUM(C9:H9)

- c. *Cell I10*: Rata-rata waktu *customer* dalam sistem antrian (Ws_{total})

Formula:=SUM(C10:H10)

- d. *Cell I11*: Rata-rata waktu *customer* dalam sistem antrian (Wq_{total})

Formula:=SUM(C11:H11)