BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas invers matriks dan determinan atas aljabar *max-plus* sehingga didapat karakteristik matriks *invertible*. Jika matriks A *invertible* maka B adalah invers kanan matriks A sehingga memenuhi $A \otimes B = E$ dan B merupakan invers kiri matriks A sehingga memenuhi $B \otimes A = E$. Penyelesaian invers matriks atas aljabar *max-plus* dapat menggunakan berbagai cara, salah satunya dengan menerapkan menentukan subsolusi terbesar. Sebelumnya akan dilakukan langkah pendekatan penyelesaian dalam menerapkan metode ini pada penyelesaian persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ untuk menentukan matriks C sehingga memenuhi $A \otimes C = B$ dengan A dan B adalah matriks atas aljabar *max-plus*. Penyelesaian persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ adalah pengembangan dari penyelesaian persamaan linear $Ax = b$ yang telah menggunakan menentukan subsolusi terbesar.

A. Invers Matriks atas Aljabar Max-Plus

Telah diketahui dalam aljabar linear biasa tidak semua matriks memiliki invers. Dalam aljabar *max-plus,* matriks yang memiliki invers bisa jadi lebih terbatas, sehingga dibutuhkan syarat perlu dan syarat cukup matriks *invertible*. Terlebih dahulu diberikan beberapa definisi sebagai berikut:

Definisi 3.1. (Farlow, 2009:18)

Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* atas aljabar *max-plus* jika $\exists$ matriks B sehingga $A \otimes B = E$, dengan invers dari A dinotasikan $A^{\otimes -1} = B$.

Selanjutnya akan diidentifikasi matriks *invertible* berdasarkan definisi berikut:

Definisi 3.2. (Farlow, 2009: 19)

Sebuah matriks permutasi adalah matriks yang setiap baris ke-i dan setiap kolom ke-j memuat tepat satu entri yaitu e dan entri selain itu adalah ε. Jika $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ adalah permutasi maka matriks permutasi atas aljabar *max-plus* dapat didefinisikan $P_\sigma = [p_{ij}]$ dengan

$$p_{ij} = \begin{cases} e : & i = \sigma(j) \\ \varepsilon : & i \neq \sigma(j) \end{cases}$$

Sehingga kolom ke-j dari P_σ memiliki e pada baris ke-$\sigma(j)$.

Contoh 3.1:

Diberikan matriks permutasi berukuran 2×2

$$P_\sigma = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} \text{ atau } P_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Matriks permutasi $P_\sigma = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$, karena susunan entrinya sama seperti matriks identitas, maka dapat disebut juga sebagai matriks identitas. Oleh karena itu, matriks permutasi yang entri diagonalnya dari kiri ke kanan adalah e dan selain itu ε merupakan matriks identitas (E).

Contoh 3.2:

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, P_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}$

$$P_\sigma \otimes A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 2 & 7 & -2 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Perkalian sebelah kiri dari P_σ mempermutasi baris-baris matriks, sehingga baris ke-i dari A muncul sebagai baris ke-$\sigma(i)$ dari $P_\sigma \otimes A$.

Matriks permutasi P_σ memiliki invers yaitu $P_{\sigma^{-1}}$ dengan $P_{\sigma^{-1}}$ adalah transpose dari P_σ, diperoleh $P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^T}$, sehingga $P_\sigma \otimes P_{\sigma^{-1}} = E$.

Contoh 3.3:

Diberikan $P_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$

$$P_{\sigma^{-1}} = P_{\sigma^T} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$P_\sigma \otimes P_{\sigma^{-1}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} = E$$

Definisi 3.3. (Farlow, 2009:19)

Jika $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\max}, \lambda_i \neq \varepsilon$, maka matriks diagonal didefinisikan berikut:

$$D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \varepsilon & \lambda_2 & \vdots & \varepsilon \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \varepsilon & \varepsilon & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Matriks diagonal $D(\lambda_i)$ memiliki invers yaitu $D(-\lambda_i)$ dengan $-\lambda_i = \lambda_i{}^{\otimes -1}$, sehingga $D(\lambda_i) \otimes D(-\lambda_i) = E$.

Contoh 3.4:

Diberikan matriks diagonal berukuran 3×3

$$D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$$

$$D(-\lambda_i) = \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

$$D(\lambda_i) \otimes D(-\lambda_i) = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} = E$$

Jadi $D(\lambda_i) \otimes D(-\lambda_i) = E$.

Berdasarkan beberapa definisi yang telah diberikan, didapat teorema berikut

Teorema 3.1. (Farlow, 2009:19)

$A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ memiliki invers kanan jika dan hanya jika ada permutasi σ dan nilai $\lambda_i > \varepsilon$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sehingga $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $\exists\, B$, sehingga memenuhi persamaan $A \otimes B = E$, berarti

(1) $\max_k (a_{ik} + b_{ki}) = e = 0$.

Untuk setiap i ada k sehingga $a_{ik} + b_{ki} = e$, didapatkan fungsi $k = \theta(i)$ dengan $a_{i\theta(i)} > \varepsilon$ dan $b_{\theta(i)i} > \varepsilon$.

(2) $\max_k\left(a_{ik} + b_{kj}\right) = \varepsilon = -\infty$ untuk semua $i \neq j$

Berdasarkan (2), didapatkan

(3) $a_{i\theta(j)} = \varepsilon$ untuk semua $i \neq j$.

Karena $a_{i\theta(i)} > \varepsilon = a_{i\theta(j)}$ untuk semua $i \neq j$, maka θ adalah sebuah injeksi dan sebuah permutasi. $a_{i\theta(i)}$ adalah entri tunggal di kolom ke-$\theta(i)$ dari A yaitu bukan ε. Misal $\hat{A} = P_\theta \otimes A$. Baris ke-$\theta(i)$ dari $\hat{A}$ adalah baris ke-i dari A, yang memiliki entri yang lebih besar maka ε di kolom ke-$\theta(i)$.

Dengan demikian, semua entri diagonal $\hat{A}$ yang lebih besar menjadi ε. A hanya memiliki satu entri *non*-ε di setiap kolom, yang juga berlaku untuk $\hat{A}$.

Sehingga didapat $P_\theta \otimes A = \hat{A} = D(\lambda_i)$ dengan $\lambda_i = a_{\theta^{-1}(i)i} > \varepsilon$.

Misal $\sigma = \theta^{-1}$, karena $P_\sigma \otimes P_\theta = P_{\theta^{-1}} \otimes P_\theta = E$, maka

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$$

Jadi terbukti $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$.

(⇐) Asumsikan $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $\lambda_i > \varepsilon$.

Jika pernyataan itu benar maka misal $B = P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i)$, dengan $-\lambda_i = {\lambda_i}^{\otimes -1}$. Sehingga didapat

$$A \otimes B = (P_\sigma \otimes D(\lambda_i)) \otimes (P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i))$$

$$= P_\sigma \otimes (D(\lambda_i) \otimes D(-\lambda_i)) \otimes P_{\sigma^{-1}}$$

$$= P_\sigma \otimes E \otimes P_{\sigma^{-1}}$$

$$= P_\sigma \otimes P_{\sigma^{-1}}$$

$$= E$$

Sehingga $A \otimes B = E$ dan B adalah invers kanan dari A.

■

Berdasarkan teorema 3.1. didapat syarat perlu dan syarat cukup matriks A *invertible* atas aljabar *max-plus* yaitu matriks A *invertible* jika dan hanya jika matriks A adalah matriks diagonal yang dipermutasi dengan $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$. Matriks A yang dapat dibalik berupa matriks yang setiap baris dan setiap kolom memuat tepat satu entri bukan ε dan entri selain itu adalah ε.

Contoh 3.5:

Matriks A *invertible* atas aljabar *max-plus* ditunjukkan berikut

a. Diberikan $P_\sigma = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$, $D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix}$

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix}$$

b. Diberikan $P_\sigma = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix}$, $D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix}$

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh 3.5, karena matriks A adalah matriks diagonal yang dipermutasi maka matriks A *invertible*. P_σ mempermutasi baris-baris matriks diagonal, sehingga baris ke-i dari $D(\lambda_i)$ muncul sebagai baris ke-$\sigma(i)$ dari $P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$.

Ketunggalan invers matriks diberikan pada teorema berikut

Teorema 3.2. (Farlow, 2009:20)

$A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ jika $A \otimes B = E$ maka $B \otimes A = E$ dan B ditentukan secara unik (tunggal) oleh A.

Bukti:

Berdasarkan teorema 3.1. telah diketahui bahwa $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ untuk beberapa nilai $\lambda_i > \varepsilon$ dan permutasi σ. Ambil sebarang $\hat{B} = D(-\lambda_i) \otimes P_{\sigma^{-1}}$ adalah invers kiri dari A. Jika $A \otimes B = E$ maka $\hat{B} = \hat{B} \otimes (A \otimes B) = (\hat{B} \otimes A) \otimes B = E \otimes B = B$, menunjukkan bahwa B tunggal dan ditentukan secara unik (tunggal) oleh A. ∎

Jika invers dari A yaitu $A^{\otimes -1} = B$ berada di sebelah kanan maka B disebut dengan invers kanan dari A sehingga dapat ditulis $A \otimes B = E$. Apabila B berada di sebelah kiri maka B disebut dengan invers kiri dari A sehingga dapat ditulis $B \otimes A = E$. Dengan demikian, matriks A memiliki invers yaitu matriks B dengan solusi tunggal dengan invers kanan juga merupakan invers kiri.

Lemma 3.3. (Farlow, 2009:21)

Jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* maka $A \otimes B$ *invertible.*

Bukti:

Berdasarkan teorema 3.1., dapat ditulis

$A = P_{\sigma a} \otimes D(\lambda_i^a)$ dan $B = D(\lambda_i^b) \otimes P_{\sigma b}$

Maka $A \otimes B = P_{\sigma a} \otimes D(\lambda_i^a) \otimes D(\lambda_i^b) \otimes P_{\sigma b}$

Hasil perkalian dua matriks diagonal adalah matriks diagonal, sehingga didapatkan

$$A \otimes B = P_{\sigma a} \otimes D\left(\lambda_i^a \otimes \lambda_i^b\right) \otimes P_{\sigma b}$$

Sehingga $A \otimes B$ adalah matriks diagonal yang dipermutasi. Oleh karena itu, $A \otimes B$ *invertible.* ■

Contoh 3.6:

Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Karena matriks A dan B adalah matriks diagonal yang dipermutasi maka matriks A dan B *invertible.*

Akan dicari $A \otimes B$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -1 & 2 \otimes 4 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \\ \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 3 \otimes -1 & \varepsilon \otimes 4 \oplus 3 \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon & 6 \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus 2 & \varepsilon \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & 6 \\ 2 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Karena matriks $A \otimes B$ adalah matriks diagonal yang dipermutasi maka $A \otimes B$ *invertible.*

Sifat-sifat dari invers matriks atas aljabar *max-plus* diberikan pada teorema berikut:

Teorema 3.4.

Jika matriks A,$B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* maka diperoleh:

(1) $(A^{\otimes -1})^{\otimes -1} = A$

(2) $(AB)^{\otimes -1} = B^{\otimes -1}A^{\otimes -1}$

(3) $(A^{\otimes -1})^{t} = (A^{t})^{\otimes -1}$

(4) $(A^{n})^{\otimes -1} = (A^{\otimes -1})^{n}$, untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$

(5) $(kA)^{\otimes -1} = \frac{1}{k}A^{\otimes -1}$, untuk $k \neq 0$

Bukti:

(1) $A^{\otimes -1}$ adalah invers dari A sehingga $A^{\otimes -1}A = AA^{\otimes -1} = E$. Akibatnya $(A^{\otimes -1})^{\otimes -1}$ adalah invers dari $A^{\otimes -1}$ sehingga $A^{\otimes -1}(A^{\otimes -1})^{\otimes -1} = E$. Karena $A^{\otimes -1}(A^{\otimes -1})^{\otimes -1} = E = A^{\otimes -1}A$ maka $(A^{\otimes -1})^{\otimes -1} = A$.

(2) Anggap $X = B^{\otimes -1}A^{\otimes -1}$, menunjukkan bahwa $(AB)X = E$. Diperoleh $(AB)X = (AB)B^{\otimes -1}A^{\otimes -1} = A\left(BB^{\otimes -1}\right)A^{\otimes -1} = A(E)A^{\otimes -1} = AA^{\otimes -1} = E = (AB)(AB)^{\otimes -1}$. Jadi $(AB)^{\otimes -1} = B^{\otimes -1}A^{\otimes -1}$.

(3) Anggap $X = (A^{\otimes -1})^{t}$, menunjukkan bahwa $A^{t}X = E$. Dengan membentuk $A^{t}X = A^{t}(A^{\otimes -1})^{t} = (A^{\otimes -1}A)^{t} = E^{t} = E$.

Oleh karena itu, $(A^{t})^{\otimes -1} = X = (A^{\otimes -1})^{t}$.

(4) Anggap $X = (A^{\otimes -1})^{n}$, menunjukkan bahwa $A^{n}X = E$. Dengan membentuk $A^{n}X = A^{n}(A^{\otimes -1})^{n} = (AA^{\otimes -1})^{n} = E^{n} = E$.

Jadi $(A^t)^{\otimes -1} = X = (A^{\otimes -1})^t$.

(5) Anggap $X = \frac{1}{k}A^{\otimes -1}$, menunjukkan bahwa $(kA)X = E$. Dengan membentuk $(kA)\left(\frac{1}{k}A^{\otimes -1}\right) = \frac{1}{k}(kA)\left(A^{\otimes -1}\right) = (\frac{1}{k}k)\left(AA^{\otimes -1}\right) = (1)E = E$. Demikian juga $\left(\frac{1}{k}A^{\otimes -1}\right)(kA) = E$. Sehingga kA dapat dibalik, didapat $(kA)^{\otimes -1} = \left(\frac{1}{k}A^{\otimes -1}\right)$

■

Teorema 3.5. (Farlow, 2009: 21)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dan misal $L_A : \mathbb{R}_{\max}^{n} \to \mathbb{R}_{\max}^{n}$ dengan $L_A(x) = A \otimes x$. Sehingga pernyataan berikut ekuivalen

1. $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ untuk beberapa permutasi dan $\lambda_i > \varepsilon$
2. L_A surjektif
3. A memiliki invers kanan: $A \otimes B = E$
4. A memiliki invers kiri: $B \otimes A = E$
5. L_A injektif

Bukti:

(3 ⟺ 1) Sudah dibuktikan pada teorema 3.1.

(1 ⇒ 2) Ambil sembarang $A \otimes x = P_\sigma \otimes D(\lambda_i) \otimes x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $\lambda_i > \varepsilon$ maka $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$, sehingga $A_{ij} \otimes x_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}^{n}, \forall\, i$ dan j. Jadi terdapat $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n}$ dengan $L_{A_{ij}}\left(x_{ij}\right) = A_{ij} \otimes$

x_{ij}, $\forall\, i$ dan j. Jadi untuk setiap $A \otimes x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ terdapat $x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ sedemikian hingga $L_A(x) = A \otimes x$ yang berarti L_A surjektif.

(2 ⇒ 3) Karena L_A surjektif, jadi untuk setiap $A \otimes x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ terdapat $x \in \mathbb{R}^n_{\max}$ sedemikian hingga $L_A(x) = A \otimes x$. Asumsikan $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $\lambda_i > \varepsilon$. Jika pernyataan itu benar maka misal $B = P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i)$, dengan $-\lambda_i = \lambda_i{}^{\otimes -1}$. Sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
L_A(x) \otimes B &= A \otimes x \otimes B \\
&= (P_\sigma \otimes D(\lambda_i)) \otimes x \otimes (P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i)) \\
&= P_\sigma \otimes (D(\lambda_i) \otimes D(-\lambda_i)) \otimes P_{\sigma^{-1}} \otimes x \\
&= P_\sigma \otimes E \otimes P_{\sigma^{-1}} \otimes x \\
&= (P_\sigma \otimes P_{\sigma^{-1}}) \otimes x \\
&= E \otimes x \\
&= x
\end{aligned}
$$

Karena $A \otimes B = E$, sehingga A memiliki invers kanan yaitu B.

(3 ⇒ 4) Diberikan $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ dengan $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$ dan $\lambda_i > \varepsilon$. Karena $A \otimes B = E$, sehingga A memiliki invers kanan yaitu B dengan $B = P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i)$, dengan $-\lambda_i = \lambda_i{}^{\otimes -1}$. Sehingga didapat

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= (P_\sigma \otimes D(\lambda_i)) \otimes (P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i)) \\
&= P_\sigma \otimes (D(\lambda_i) \otimes D(-\lambda_i)) \otimes P_{\sigma^{-1}} \\
&= P_\sigma \otimes E \otimes P_{\sigma^{-1}} \\
&= P_\sigma \otimes P_{\sigma^{-1}} \\
&= E \\
&= P_{\sigma^{-1}} \otimes P_\sigma
\end{aligned}
$$

$= P_{\sigma^{-1}} \otimes E \otimes P_\sigma$

$= P_{\sigma^{-1}} \otimes (D(-\lambda_i) \otimes (D(\lambda_i)) \otimes P_\sigma$

$= (P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i)) \otimes (P_\sigma \otimes D(\lambda_i))$

$= B \otimes A$

Karena $A \otimes B = E = B \otimes A$, maka invers kanan juga merupakan invers kiri.

(4 ⇒ 5) A memiliki invers kiri yaitu B maka $B \otimes A = E$, sehingga $B \otimes A \otimes x = B \otimes L_A(x)$. Misalkan ambil sembarang $x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n_{\max}$, sedemikian hingga $L_A(x) = L_A(\hat{x})$ yaitu $A \otimes x = A \otimes \hat{x}$ dengan $A \otimes x, A \otimes \hat{x} \in \mathbb{R}^n_{\max}$. Karena $A \otimes x = A \otimes \hat{x}$ maka $x = \hat{x}$. Hal ini berarti $\forall\ i$ dan j berlaku $x_{ij} = \hat{x}_{ij}$. Jadi $x = \hat{x}$ yang berarti L_A injektif.

(5 ⇒ 1) Misal L_A injektif. Untuk setiap i dapat didefinisikan himpunan

$F_i = \{j : a_{ji} > \varepsilon\}$ dan $G_i = \{j : a_{jk} > \varepsilon$ untuk $k \neq i\}$.

dinyatakan $F_i \nsubseteq G_i$, kontradiksi anggap bahwa $F_i \subseteq G_i$.

Akan ditunjukkan kontradiksi dengan L_A injektif.

Diberikan $x = [x_k]$ dengan $x_k = \begin{cases} e : k \neq i \\ \varepsilon : k = i \end{cases}$

Misal $b = A \otimes x = \bigoplus_{k \neq i} a_{*k}$, dengan a_{*k} didefinisikan kolom ke-k dari A.

Misalkan $j \in F_i$, maka $j \in G_i$. Berarti ada $k \neq i$ untuk $a_{jk} > \varepsilon$.

Karena itu, $b_j \geq a_{jk} > \varepsilon$. Karena $a_{ji} > \varepsilon$, maka didapatkan $\beta_j > \varepsilon$ sehingga $\beta_j \otimes a_{ji} \leq b_j$.

Jika $j \notin F_i$ maka $a_{ji} = \varepsilon$. Karena itu, $\beta \otimes a_{ji} \leq b_j, \forall\, j$.

Misal $\beta = \min_{j \in F_i} \beta_j$. Maka $\beta > 0$ dan $\beta \otimes a_{ji} \leq b_j, \forall\, j$.

Dapat dikatakan $\beta \otimes a_{*i} \leq b$. Maka didapatkan

$$A \otimes [x \oplus \beta \otimes e_i] = [A \otimes x] \oplus [\beta \otimes A \otimes e_i]$$

$$= b \oplus \beta \otimes a_{*j} = b.$$

Sehingga untuk $\hat{x} = x \oplus \beta \otimes e_i$, $L_A(\hat{x}) = L_A(x)$.

Tetapi $x_i = \varepsilon < \hat{x} = \beta$, kontradiksi dengan L_A injektif. Jadi terbukti.

Untuk setiap i ada $j = \sigma(i)$ dengan sifat $a_{ji} > \varepsilon$ tetapi $a_{jk} = \varepsilon$ untuk semua $k \neq i$. Dengan kata lain, a_{ji} entri tunggal yang tidak sama dengan ε pada baris $j = \sigma(i)$. Tetapi jika $j = \sigma(i')$ maka $i = i'$. Dengan kata lain, σ injektif yang berarti σ permutasi. Karena itu, setiap baris j ada sebuah kolom unik i $(j = \sigma(i))$ sehingga a_{ji} entri tunggal yang tidak sama dengan ε. Untuk setiap kolom i dan sebarang baris k dengan $k \neq \sigma(i)$, diketahui $k = \sigma(i)$ untuk beberapa $i' \neq i$. Berarti a_{ki} bukan entri unik non-ε pada baris ke-k, sehingga $a_{ji} = \varepsilon$. Karena itu, entri non-ε tunggal di kolom i. Jadi A adalah matriks diagonal yang dipermutasi,

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i), \lambda_i = a_{\sigma(i)i} > \varepsilon$$

■

B. Determinan atas Aljabar Max-Plus

Dalam aljabar linear biasa, telah diketahui bahwa untuk $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(A) = \sum_p \sigma(p) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$, dengan p_n adalah himpunan semua permutasi dari $\{1,2,\dots,n\}$ dan $\sigma(p)$ adalah tanda permutasi σ. Determinan atas aljabar *max-plus* tidak memiliki analog langsung karena tidak memiliki invers aditif. Dua konsep yang terkait yaitu permanen A dan dominan A yang didefinisikan di bawah ini dengan sebagian mengambil alih peran determinan.

Berikut diberikan definisi permanen A dan dominan A.

Definisi 3.4. (Farlow, 2009:23)

Untuk matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, permanen A didefinisikan sebagai $\mathrm{perm}(A) = \bigoplus_{\sigma\in p_n} \bigotimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$, dengan σ dan p_n adalah himpunan semua permutasi $\{1, 2, \dots, n\}$.

Permanen A didefinisikan mirip dengan determinan tetapi semua tanda permutasi σ dihilangkan. Berikut diberikan matriks A berukuran 2× 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Karena $n = 2$ dan $2! = 2$, berarti ada 2 permutasi dari (1,2) dengan daftar hasil permutasi dari $\mathrm{perm}(A)$ ditunjukkan pada Tabel 2. berikut:

Tabel 2. Daftar Hasil Permutasi $n = 2$ dari $\mathrm{perm}(A)$

Permutasi	$\bigotimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$
(1,2)	$a_{11} + a_{22}$
(2,1)	$a_{12} + a_{21}$

Sehingga diperoleh,

$$\text{perm}(A) = \bigoplus_{\sigma \in p_n} \bigotimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$$

$$= \max\{(a_{11} + a_{22}), (a_{12} + a_{21})\}$$

Berikut diberikan matriks A berukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $n = 3$ dan $3! = 6$, berarti ada 6 permutasi dari (1,2,3) dengan daftar hasil permutasi dari $\text{perm}(A)$ ditunjukkan pada Tabel 3. berikut:

Tabel 3. Daftar Hasil Permutasi $n = 3$ dari $\text{perm}(A)$

Permutasi	$\bigotimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$
(1,2,3)	$a_{11} + a_{22} + a_{33}$
(1,3,2)	$a_{11} + a_{23} + a_{32}$
(2,1,3)	$a_{12} + a_{21} + a_{33}$
(2,3,1)	$a_{12} + a_{23} + a_{31}$
(3,1,2)	$a_{13} + a_{21} + a_{32}$
(3,2,1)	$a_{13} + a_{22} + a_{31}$

Sehingga didapat,

$$\text{perm}(A) = \bigoplus_{\sigma \in p_n} \bigotimes_{i=1}^{n} (a_{i\sigma(i)})$$

$$= \max\{(a_{11} + a_{22} + a_{33}), (a_{11}+a_{23} + a_{32}), (a_{12} + a_{21} + a_{33}),$$

$$(a_{12} + a_{23} + a_{31}), (a_{13} + a_{21} + a_{32}), (a_{13} + a_{22} + a_{31})\}$$

Lemma 3.2. (Farlow, 2009:23)

Jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible* maka $perm(A) \neq \varepsilon$.

Bukti:

Matriks *invertible* atas aljabar *max-plus* adalah matriks diagonal yang dipermutasi. Jika A *invertible* maka $\text{perm}(A)$ hanya hasil *max-plus* dari entri-entri diagonal pada matriks diagonal. Oleh karena itu, jika matriks A *invertible* maka $\text{perm}(A) \neq \varepsilon$. ■

Tetapi $\text{perm}(A) \neq \varepsilon$ tidak cukup untuk menjadikan A *invertible.*

Contoh 3.7:

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{perm}(A) &= (4 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 7) \\ &= \max\{4 + 3, 2 + 7\} \\ &= \max\{7,9\} \\ &= 9 \neq \varepsilon \end{aligned}$$

Tetapi matriks A tidak *invertible* karena bukan matriks diagonal yang dipermutasi.

Matriks z^A digunakan untuk menggambarkan dominan. Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ z^A adalah matriks z^A ukuran $n \times n$ dengan entri $z^{a_{ij}}$ dengan z adalah variabel.

Berikut definisi khas $\text{dom}(A)$

$$\text{dom}(A) = \begin{cases} \text{eksponen tertinggi pada } \det(z^A), & \text{jika } \det(z^A) \neq 0 \\ \qquad\qquad \varepsilon & \text{, jika } \det(z^A) = 0 \end{cases}$$

$\text{dom}(A)$ ditentukan oleh hasil determinan dengan perhitungannya seperti determinan dengan tetap menggunakan tanda permutasi σ tetapi skalar matriks A berupa fungsi eksponensial. Matriks z^A diganti menjadi e^s, sehingga didapat definisi berikut:

Definisi 3.5. (Farlow, 2009: 24)

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, matriks e^{sA} memiliki entri $e^{sa_{ij}}$ dengan $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}$ adalah entri pada A.

$$[e^{sA}]_{ij} = e^{sa_{ij}}$$

Sehingga didapat definisi $\text{dom}(A)$ berikut:

$$\text{dom}(A) = \begin{cases} \text{eksponen tertinggi pada } \det(e^{sA}), & \text{jika } \det(e^{sA}) \neq 0 \\ \varepsilon & \text{, jika } \det(e^{sA}) = 0 \end{cases}$$

Berikut diberikan matriks A berukuran 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Karena $n = 2$ dan $2! = 2$, berarti ada 2 permutasi dari (1,2) dengan daftar hasil permutasi dari $\det(e^{sA})$ ditunjukkan Tabel 4. berikut:

Tabel 4. Daftar Hasil Permutasi $n = 2$ dari $\det(e^{sA})$

Permutasi	Banyaknya invers	Klasifikasi	$\sigma(p)$	$\bigotimes_{i=1}^{n} (e^{sa_{ij}}{}_{\sigma(i)})$
(1,2)	0	genap	+	$e^{s(a_{11}+a_{22})}$
(2,1)	1	ganjil	-	$e^{s(a_{12}+a_{21})}$

Sehingga diperoleh,

$$\det(e^{sA}) = e^{s(a_{11}+a_{22})} - e^{s(a_{12}+a_{21})}$$

didapatkan $\mathrm{dom}(A)$ dengan ketentuan

$$\mathrm{dom}(A) = \begin{cases} \text{eksponen tertinggi pada } \det(e^{sA}), & \text{jika } \det(e^{sA}) \neq 0 \\ \varepsilon, & \text{jika } \det(e^{sA}) = 0 \end{cases}$$

Diberikan matriks A berukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $n = 3$ dan $3! = 6$, berarti ada 6 permutasi dari (1,2,3) dengan daftar hasil permutasi dari $\det(e^{sA})$ ditunjukkan pada Tabel 5. berikut:

Tabel 5. Daftar Hasil Permutasi $n = 3$ dari $\det(e^{sA})$

Permutasi	Banyaknya invers	Klasifikasi	$\sigma(p)$	$\bigotimes_{i=1}^{n} (e^{sa_{ij}}{}_{\sigma(i)})$
(1,2,3)	0	genap	+	$e^{s(a_{11}+a_{22}+a_{33})}$
(1,3,2)	1	ganjil	-	$e^{s(a_{11}+a_{23}+a_{32})}$
(2,1,3)	1	ganjil	-	$e^{(sa_{12}+a_{21}+a_{33})}$
(2,3,1)	2	genap	+	$e^{s(a_{12}+a_{23}+a_{31})}$
(3,1,2)	2	genap	+	$e^{s(a_{13}+a_{21}+a_{32})}$
(3,2,1)	3	ganjil	-	$e^{s(a_{13}+a_{22}+a_{31})}$

Sehingga diperoleh,

$$\det(e^{sA}) = e^{s(a_{11}+a_{22}+a_{33})} - e^{s(a_{11}+a_{23}+a_{32})} - e^{(sa_{12}+a_{21}+a_{33})}$$

$$+ e^{s(a_{12}+a_{23}+a_{31})} +$$

$$e^{s(a_{13}+a_{21}+a_{32})} - e^{s(a_{13}+a_{22}+a_{31})}$$

didapatkan $\text{dom}(A)$ dengan ketentuan

$$\text{dom}(A) = \begin{cases} \text{eksponen tertinggi pada } \det(e^{sA}), & \text{jika } \det(e^{sA}) \neq 0 \\ \varepsilon & \text{, jika } \det(e^{sA}) = 0 \end{cases}$$

Karena $\text{perm}(A)$ adalah nilai diagonal maksimum untuk semua permutasi dari kolom A, maka didapat lemma berikut:

Lemma 3.3. (Farlow, 2009: 24)

$\text{dom}(A) \leq \text{perm}(A)$.

Dari nilai diagonal dapat diartikan $\otimes_i^n a_{i\sigma(i)}$ untuk sebarang $\sigma \in p_n$. Hal ini benar karena ketika menghitung dominan bisa terjadi pembatalan yang tidak akan terjadi ketika menghitung permanen. Karena pembatalan, jika $\det(e^{sA}) = 0$ maka $\text{dom}(A)$ dapat menjadi ε.

Contoh 3.8:

Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\text{dom}(A) = \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(2+7)} - e^{s(5+4)} = e^{s9} - e^{s9} = 0$

$\text{perm}(A) = (2 \otimes 7) \oplus (5 \otimes 4)$

$= \max\{2 + 7{,}5 + 4\}$

$= \max\{9{,}9\}$

$= 9$

Contoh 3.9:

Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

$\text{dom}(A) = 9$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(2+6)} - e^{s(5+4)}$

$= e^{s8} - e^{s9} \neq 0$

$\text{perm}(A) = (2 \otimes 6) \oplus (5 \otimes 4)$

$= \max\{2 + 6, 5 + 4\}$

$= \max\{8,9\}$

$= 9$

Berdasarkan contoh 3.8 dan contoh 3.9, maka $\text{dom}(A) \leq \text{perm}(A)$.

Lemma 3.4. (Farlow, 2009: 24)

Jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible* maka $\text{dom}(A) \neq \varepsilon$.

Bukti:

Karena A *invertible* maka A adalah matriks diagonal yang dipermutasi. Sehingga $\text{dom}(A)$ adalah hasil *max-plus* entri-entri diagonal dari matriks diagonal. Jadi $\text{dom}(A) \neq \varepsilon$. ■

Contoh 3.10:

Matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$\text{dom}(A) = 7 > \varepsilon$, karena $\det(e^{sA}) = e^{s4} - e^{s7} \neq 0$.

Tetapi A bukan matriks *invertible* (tidak dapat dibalik).

Dalam aljabar linear biasa, telah diketahui bahwa A *invertible* jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$. Sedangkan dalam aljabar *max-plus*, dapat ditemukan matriks A memiliki $\det(A) \neq 0$ tetapi matriks A bukan matriks *invertible*, sehingga matriks *invertible* dan determinan atas aljabar *max-plus* tidak sepenuhnya analog dengan aljabar linear.

Lemma 3.5. (Farlow, 2009: 25)

Jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* maka $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{perm}(A)$.

Bukti:

Berdasarkan lemma 3.2 dan lemma 3.4, jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* maka A adalah matriks diagonal yang dipermutasi. Sehingga $\mathrm{dom}(A)$ dan $\mathrm{perm}(A)$ adalah hasil *max-plus* entri-entri diagonal dari matriks diagonal. Oleh karena itu, $\mathrm{dom}(A) \neq \varepsilon$ dan $\mathrm{perm}(A) \neq \varepsilon$. Jadi $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{perm}(A)$. ■

Contoh 3.11:

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$

A *invertible*, maka

$\mathrm{dom}(A) = 2 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(2+\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(2-1+1)} + e^{s(\varepsilon-1+\varepsilon)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)} +$

$e^{s(\varepsilon+\varepsilon+1)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)}$

$$= e^{s\varepsilon} - e^{s2} + e^{s\varepsilon} - e^{s\varepsilon} + e^{s\varepsilon} - e^{s\varepsilon} \neq 0$$

$$\text{perm}(A) = (2 \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (2 \otimes (-1) \otimes 1) \oplus (\varepsilon \otimes (-1) \otimes \varepsilon)$$

$$\oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes 1) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon)$$

$$= \max\{2 + \varepsilon + \varepsilon, 2 - 1 + 1, \varepsilon - 1 + \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon + 1, \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\}$$

$$= \max\{\varepsilon, 2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon\} = 2 \neq \varepsilon$$

Sehingga $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 2 \neq \varepsilon$

Dalam aljabar linear biasa, telah diketahui bahwa untuk $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Tetapi dalam aljabar *max-plus*, perhitungan $\text{dom}(A \otimes B)$ dan $\text{perm}(A \otimes B)$ ada kemungkinan $\text{dom}(A \otimes B) \neq \text{dom}(A) \otimes \text{dom}(B)$ dan $\text{perm}(A \otimes B) \neq \text{perm}(A) \otimes \text{perm}(B)$.

Contoh 3.12:

Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Akan dicari $\text{dom}(A)$ dan $\text{perm}(A)$

$\text{dom}(A) = 11$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(2+3+2)} - e^{s(2+1+1)} + e^{s(1+1+4)} - e^{s(1+1+2)} + e^{s(4+1+1)} - e^{s(4+3+4)}$

$$= e^{s7} - e^{s4} + e^{s6} - e^{s4} + e^{s6} - e^{s11} \neq 0$$

$$\text{perm}(A) = (2 \otimes 3 \otimes 2) \oplus (2 \otimes 1 \otimes 1) \oplus (1 \otimes 1 \otimes 4) \oplus (1 \otimes 1 \otimes 2)$$

$$\oplus (4 \otimes 1 \otimes 1) \oplus (4 \otimes 3 \otimes 4)$$

$$= \max\{(2+3+2),(2+1+1),(1+1+4),(1+1+2),(4+1 + 1),(4+3+4)\}$$

$$= \max\{7,4,6,4,6,11\} = 11$$

Akan dicari $\mathrm{dom}(B)$ dan $\mathrm{perm}(B)$

$\mathrm{dom}(B) = 9$

karena $\det(e^{sB}) = e^{s(1+2+3)} - e^{s(1+2+1)} + e^{s(3+2+3)} - e^{s(3+2+3)} + e^{s(4+2+1)} - e^{s(4+2+3)}$

$$= e^{s6} - e^{s4} + e^{s8} - e^{s8} + e^{s7} - e^{s9} \neq 0$$

$$\mathrm{perm}(B) = (1 \otimes 2 \otimes 3) \oplus (1 \otimes 2 \otimes 1) \oplus (3 \otimes 2 \otimes 3) \oplus (3 \otimes 2 \otimes 3) \oplus (4 \otimes 2 \otimes 1) \oplus (4 \otimes 2 \otimes 3)$$

$$= \max\{(1+2+3),(1+2+1),(3+2+3),(3+2+3),(4+2 + 1),(4+2+3)\}$$

$$= \max\{6,4,8,8,7,9\} = 9$$

Sehingga didapat,

$\mathrm{dom}(A) \otimes \mathrm{dom}(B) = 11 \otimes 9 = 11 + 9 = 20$

$\mathrm{perm}(A) \otimes \mathrm{perm}(B) = 11 \otimes 9 = 11 + 9 = 20$

Selanjutnya akan dicari $\mathrm{dom}(A \otimes B)$ dan $\mathrm{perm}(A \otimes B)$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 7 \\ 11 & 5 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{dom}(A \otimes B) = 25$

karena $\det(e^{sAB}) = e^{s(7+5+8)} - e^{s(7+5+7)} + e^{s(5+5+5)} - e^{s(5+11+8)}$

$$+ e^{s(7+11+7)} - e^{s(7+5+5)}$$

$$= e^{s20} - e^{s19} + e^{s15} - e^{s24} + e^{s25} - e^{s17} \neq 0$$

$$\begin{aligned}\mathrm{perm}(A \otimes B) &= (7 \otimes 5 \otimes 8) \oplus (7 \otimes 5 \otimes 7) \oplus (5 \otimes 5 \otimes 5) \\ &\oplus (5 \otimes 11 \otimes 8) \\ &\oplus (7 \otimes 11 \otimes 7) \oplus (7 \otimes 5 \otimes 5) \\ &= \max\{(7+5+8),(7+5+7),(5+5+5),(5+11+8),(7 \\ &+ 11 + 7),(7+5+5)\} \\ &= \max\{20,19,15,24,25,17\} \\ &= 25\end{aligned}$$

Jadi $\mathrm{dom}(A \otimes B) \neq \mathrm{dom}(A) \otimes \mathrm{dom}(B)$ dan $\mathrm{perm}(A \otimes B) \neq \mathrm{perm}(A) \otimes \mathrm{perm}(B)$.

Tetapi kita dapat menyatakan lemma berikut:

Lemma 3.6. ((Farlow, 2009: 26)

Jika $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible* maka $\mathrm{dom}(A \otimes B) = \mathrm{dom}(A) \otimes \mathrm{dom}(B)$ dan $\mathrm{perm}(A \otimes B) = \mathrm{perm}(A) \otimes \mathrm{perm}(B)$.

Contoh 3.13:

Diberikan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}\ invertible,\ A = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 \end{bmatrix}$ dan matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Akan dicari $\mathrm{dom}(A)$ dan $\mathrm{perm}(A)$

$\text{dom}(A) = 7$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(2+5)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon)}$

$$= e^{s7} - e^{s\varepsilon} \neq 0$$

$\text{perm}(A) = (2 \otimes 5) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon)$

$$= \max\{2 + 5, \varepsilon + \varepsilon\}$$

$$= \max\{7, \varepsilon\} = 7$$

Akan dicari $\text{dom}(B)$ dan $\text{perm}(B)$

$\text{dom}(B) = 7$

karena $\det(e^{sB}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(4+3)}$

$$= e^{s\varepsilon} - e^{s7} \neq 0$$

$\text{perm}(B) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (4 \otimes 3)$

$$= \max\{\varepsilon + \varepsilon, 4 + 3\}$$

$$= \max\{\varepsilon, 7\}$$

$$= 7$$

Sehingga didapat,

$\text{dom}(A) \otimes \text{dom}(B) = 7 \otimes 7 = 7 + 7 = 14$

$\text{perm}(A) \otimes \text{perm}(B) = 7 \otimes 7 = 7 + 7 = 14$

Selanjutnya akan dicari $\text{dom}(A \otimes B)$ dan $\text{perm}(A \otimes B)$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \otimes \varepsilon \ \oplus \ \varepsilon \otimes 3 & 2 \otimes 4 \ \oplus \ \varepsilon \otimes \varepsilon \\ \varepsilon \otimes \varepsilon \ \oplus \ 5 \otimes 3 & \varepsilon \otimes 4 \ \oplus \ 5 \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon & 6 \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus 8 & \varepsilon \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$A \otimes B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 6 \\ 8 & \varepsilon \end{bmatrix}$

Sehingga didapat,

$\text{dom}(A \otimes B) = 14$

karena $\det(e^{sAB}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(6+8)}$

$= e^{s\varepsilon} - e^{s14} \neq 0$

$\text{perm}(A \otimes B) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (6 \otimes 8)$

$= \max\{\varepsilon + \varepsilon, 6 + 8\}$

$= \max\{\varepsilon, 14\}$

$= 14$

Jadi jika $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* maka $\text{dom}(A \otimes B) = \text{dom}(A) \otimes \text{dom}(B)$ dan $\text{perm}(A \otimes B) = \text{perm}(A) \otimes \text{perm}(B)$.

Perluasan matriks A *invertible* dalam aljabar linear ke aljabar *max-plus* ditunjukkan berikut:

$$(\mathbb{R}, +, \times) \rightarrow (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$$

a. Matriks A *invertible* dalam aljabar linear

Aljabar linear adalah himpunan $\mathbb{R}$ dilengkapi dengan operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\times)$ yang dinotasikan $(\mathbb{R}, +, \times)$. Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan $[A]_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{R}$, $\forall\, i, j = 1,2, \dots, n$. Matriks A *invertible* jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

b. Matriks A *invertible* dalam aljabar *max-plus*

Aljabar *max-plus* adalah himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dilengkapi dengan operasi $\oplus$ sebagai operasi maksimum dan $\otimes$ sebagai operasi penjumlahan yang dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$. Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dengan $[A]_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}$, $\forall\, i, j = 1,2, \dots, n$. Jika matriks A *invertible* maka $\mathrm{dom}(A) \neq \varepsilon$ sehingga $\det(e^{sA}) \neq 0$. Tetapi jika $\det(e^{sA}) \neq 0$ maka belum tentu matriks A *invertible.*

Sehingga, didapatkan jika matriks A *invertible* maka determinannya bukan 0.

C. Penyelesaian persamaan linear *max-plus* $\boldsymbol{A \otimes C = B}$

Berdasarkan cara menentukan subsolusi terbesar untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $Ax = b$ yang mempunyai subsolusi terbesar $\hat{x}$ dengan $-\hat{x} = A^t \otimes (-b)$. Jika $\hat{x}$ memenuhi persamaan $A\hat{x} = b$, maka $\hat{x}$ merupakan solusi. Cara ini akan dikembangkan pada penyelesaian sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ untuk menentukan matriks C sehingga memenuhi $A \otimes C = B$.

Persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ dengan matriks $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ adalah matriks persegi. Karena $\oplus$ adalah operasi maksimum dan $\otimes$ adalah operasi penjumlahan, maka didapatkan $A \otimes C \leq B, \forall\, i, j \in n$, sehingga dapat ditulis:

$$a_{ij} + \hat{c}_{ij} \leq b_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{c}_{ij} \leq b_{ij} - a_{ij}$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{c}_{ij} \leq \min\{b_{ij} - a_{ij}, i, j \in \underline{n}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\hat{c}_{ij} \geq \max\{-b_{ij} + a_{ij}, i, j \in \underline{n}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\hat{c}_{ij} \geq \max\{a_{ji} + (-b_{ij}), i, j \in \underline{n}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\hat{C} = A^t \otimes (-B)$$

Jadi sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ memiliki subsolusi terbesar $\hat{C}$ dengan

$$-\hat{C} = A^t \otimes (-B)$$

Jika $\hat{C}$ memenuhi persamaan $A \otimes \hat{C} = B$, maka $\hat{C}$ merupakan solusi.

Contoh 3.14:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

Akan ditentukan matriks C sebagai solusi persamaan:

$$A \otimes C = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Terlebih dahulu dicari subsolusi terbesar dari persamaan di atas, yaitu:

$$-\hat{C} = A^t \otimes (-B)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -6 & -8 \\ -7 & -9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \oplus -3 & -5 \oplus -5 \\ -4 \oplus 0 & -6 \oplus -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Jadi subsolusi terbesarnya adalah

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes \hat{C} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \otimes 3 \ \oplus 2 \otimes 0 & 3 \otimes 5 \ \oplus 2 \otimes 2 \\ 4 \otimes 3 \ \oplus 7 \otimes 0 & 4 \otimes 5 \ \oplus 7 \otimes 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \oplus 2 & 8 \oplus 4 \\ 7 \oplus 7 & 9 \oplus 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \hat{C} = B$$

Jadi $\hat{C}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ merupakan solusi tunggal.

Sehingga didapat matriks C = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ yang merupakan penyelesaian sistem persaman di atas.

Cara menentukan subsolusi terbesar dapat diterapkan pada penyelesaian persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ untuk menentukan matriks C sehingga memenuhi $A \otimes C = B$. Pengembangan penggunaan cara ini pada sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ dimaksudkan sebagai langkah pendekatan penyelesaian dalam menerapkan metode ini pada penyelesaian persamaan $A \otimes B = E$ untuk menentukan matriks B invers dari A sehingga memenuhi $A \otimes B = E$.

D. Penyelesaian Invers Matriks atas Aljabar Max-plus

Matriks *invertible* memiliki invers kanan dan invers kiri. Penyelesaian sistem persamaan linear *max-plus* untuk menentukan invers matriks dapat menerapkan cara berikut:

1. Menentukan subsolusi terbesar

a. Penyelesaian Invers Kanan

Berdasarkan penyelesaian sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes C = B$ dengan menentukan subsolusi terbesar yang memiliki subsolusi terbesar $\hat{C}$ dengan $-\hat{C} = A^t \otimes (-B)$ sehingga didapatkan matriks C yang memenuhi persamaan $A \otimes \hat{C} = B$ maka $\hat{C}$ merupakan solusi. Selanjutnya, cara menentukan subsolusi terbesar akan diterapkan pada penyelesaian sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes B = E$ untuk menentukan matriks B.

Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ *invertible* dengan E adalah matriks identitas memiliki invers kanan yaitu matriks B sehingga memenuhi persamaan $A \otimes B = E$. Karena $\oplus$ adalah operasi maksimum dan $\otimes$ adalah operasi penjumlahan, didapat $A \otimes B \leq E, \forall\, i, j \in n$, sehingga dapat ditulis:

$$
\begin{aligned}
& a_{ij} + \hat{b}_{ij} \leq e_{ij} \\
\Leftrightarrow\quad & \hat{b}_{ij} \leq e_{ij} - a_{ij} \\
\Leftrightarrow\quad & \hat{b}_{ij} \leq \min\{e_{ij} - a_{ij}, i, j \in \underline{n}\} \\
\Leftrightarrow\quad & -\hat{b}_{ij} \geq \max\{-e_{ij} + a_{ij}, i, j \in \underline{n}\} \\
\Leftrightarrow\quad & -\hat{b}_{ij} \geq \max\{a_{ji} + (-e_{ij}), i, j \in \underline{n}\} \\
\Leftrightarrow\quad & -\hat{B} = A^t \otimes (-E)
\end{aligned}
$$

Sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes B = E$ memiliki subsolusi terbesar $\hat{B}$ dengan

$$-\hat{B} = A^t \otimes (-E)$$

Sehingga didapat matriks $\hat{B}$ yang memenuhi persamaan $A \otimes \hat{B} = E$, maka matriks $\hat{B}$ merupakan solusi tunggal sebagai invers matriks A.

Contoh 3.15:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

A *invertible*, maka

$\text{dom}(A) = 11 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(4+7)}$

$= e^{s\varepsilon} - e^{s11} \neq 0$

$\text{perm}(A) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (4 \otimes 7)$

$= \max\{\varepsilon + \varepsilon, 4 + 7\}$

$= \max\{\varepsilon, 11\}$

$= 11 \neq \varepsilon$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 11 \neq \varepsilon$

Akan ditentukan matriks B invers kanan dari A sebagai solusi persamaan:

$A \otimes B = E$

$\begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$

Terlebih dahulu dicari subsolusi terbesar dari persamaan $A \otimes B = E$, yaitu:

$-\hat{B} = A^t \otimes (-E)$

$= \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 7 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & \infty \\ \infty & e \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \oplus \infty & e \oplus 4 \\ 7 \oplus e & \infty \oplus e \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \infty & 4 \\ 7 & \infty \end{bmatrix}$$

Jadi subsolusi terbesarnya adalah

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 7 \otimes -7 & \varepsilon \otimes -4 \oplus 7 \otimes \varepsilon \\ 4 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -7 & 4 \otimes -4 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e & \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \hat{B} = E$$

Jadi $\hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$ merupakan solusi tunggal.

Sehingga didapat invers kanan dari matriks A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$ yang merupakan penyelesaian sistem persaman di atas.

Contoh 3.16:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{bmatrix}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$

A *invertible*, maka

$\mathrm{dom}(A) = 10 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(\varepsilon+5+\varepsilon)} + e^{s(2+5+3)} - e^{s(2+\varepsilon+\varepsilon)} +$

$$e^{s(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon+3)}$$

$$= e^{s\varepsilon} - e^{s\varepsilon} + e^{s10} - e^{s\varepsilon} + e^{s\varepsilon} - e^{s\varepsilon} \neq 0$$

$$\begin{aligned}\text{perm}(A) &= (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (\varepsilon \otimes 5 \otimes \varepsilon) \oplus (2 \otimes 5 \otimes 3) \oplus (2 \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \\ &\quad \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes 3) \\ &= \max\{\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + 5 + \varepsilon, 2 + 5 + 3, 2 + \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon \\ &\quad + 3\} \\ &= \max\{\varepsilon, \varepsilon, 10, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon\} = 10 \neq \varepsilon\end{aligned}$$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 10 \neq \varepsilon$

Akan ditentukan matriks B invers kanan dari A sebagai solusi persamaan:

$$A \otimes B = E$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Terlebih dahulu dicari subsolusi terbesar dari persamaan $A \otimes B = E$, yaitu:

$$\begin{aligned} -\hat{B} &= A^t \otimes (-E) \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & \infty & \infty \\ \infty & e & \infty \\ \infty & \infty & e \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \infty \oplus e & e \oplus 2 \oplus e & e \oplus \infty \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus e \oplus \infty & e \oplus \varepsilon \oplus \infty & e \oplus e \oplus 5 \\ 3 \oplus e \oplus e & \infty \oplus \varepsilon \oplus e & \infty \oplus e \oplus \varepsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \infty & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 5 \\ 3 & \infty & \infty \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi subsolusi terbesarnya adalah

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes \hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 3 \otimes -3 & \varepsilon \otimes -2 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 3 \otimes \varepsilon & \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -5 \oplus 3 \otimes \varepsilon \\ 2 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -3 & 2 \otimes -2 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon & 2 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -5 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \\ \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 5 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -3 & \varepsilon \otimes -2 \oplus 5 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon & \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 5 \otimes -5 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus e & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus e \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \hat{B} = E$$

Jadi $\hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ merupakan solusi.

Sehingga didapat invers kanan dari matriks A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ yang merupakan penyelesaian sistem persaman di atas.

b. Penyelesaian Invers Kiri

Penyelesaian sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes B = E$ telah dapat diselesaikan dengan cara menentukan subsolusi terbesar, didapat B invers kanan dari A sebagai solusi tunggal. Jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible,* maka A juga memiliki invers kiri yaitu matriks B sehingga memenuhi $B \otimes A = E$. Sehingga matriks B sebagai invers kanan juga merupakan invers kiri dari A.

Contoh 3.17:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, $A = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{bmatrix}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$.

A *invertible*, maka

$\operatorname{dom}(A) = 10$

$\operatorname{perm}(A) = 10$

Jadi $\operatorname{dom}(A) = \operatorname{perm}(A) = 10 \neq \varepsilon$

Akan ditentukan matriks B invers kiri dari A sebagai solusi persamaan:

$$B \otimes A = E$$

$$B \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Berdasarkan contoh 3.16 didapat solusi invers kanan dari A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$, karena invers kanan juga merupakan invers kiri maka invers kiri dari A juga matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Selanjutnya dapat dicek

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus e & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$B \otimes A = E$

Jadi didapat solusi invers kiri dari matriks A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -5 \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ yang merupakan penyelesaian sistem persaman di atas.

2. Karakterisasi Invers Matriks

a. Penyelesaian Invers Kanan

Berdasarkan Teorema 3.1., jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible,* A adalah matriks diagonal yang dipermutasi yaitu $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ maka A memiliki invers kanan yaitu matriks B sehingga memenuhi $A \otimes B = E$, dengan matriks B dapat ditentukan berikut

$$\begin{aligned} B &= A^{\otimes -1} \\ &= P_{\sigma^{-1}} \otimes D(-\lambda_i) \\ &= [P_\sigma \otimes D(-\lambda_i)]^T \end{aligned}$$

Sehingga didapat matriks B adalah transpose dari invers matriks diagonal yang dipermutasi.

Contoh 3.18:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} A &= P_\sigma \otimes D(\lambda_i) \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes 4 \oplus e \otimes \varepsilon & \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus e \otimes 7 \\ e \otimes 4 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon & e \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus 7 \\ 4 \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Karena A merupakan matriks diagonal yang dipermutasi maka A *invertible.*

Sehingga didapat perhitungan $\text{dom}(A)$ dan $\text{perm}(A)$, yaitu

$\text{dom}(A) = 11 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(4+7)}$

$= e^{s\varepsilon} - e^{s11} \neq 0$

$\text{perm}(A) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (4 \otimes 7)$

$= \max\{\varepsilon + \varepsilon, 4 + 7\}$

$= \max\{\varepsilon, 11\}$

$= 11 \neq \varepsilon$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 11 \neq \varepsilon$

Selanjutnya akan ditentukan invers kanan A yaitu matriks B

$$B = [P_\sigma \otimes D(-\lambda_i)]^T$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -4 & \varepsilon \\ \varepsilon & -7 \end{pmatrix}\right]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes -4 \oplus e \otimes \varepsilon & \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus e \otimes -7 \\ e \otimes -4 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon & e \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -7 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus -7 \\ -4 \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & -7 \\ -4 & \varepsilon \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes \varepsilon \ \oplus 7 \otimes -7 & \varepsilon \otimes -4 \ \oplus 7 \otimes \varepsilon \\ 4 \otimes \varepsilon \ \oplus \varepsilon \otimes -7 & 4 \otimes -4 \ \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e & \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = E$$

Jadi didapat invers kanan dari A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

b. Penyelesaian Invers Kiri

Jika $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible*, A adalah matriks diagonal yang dipermutasi yaitu $A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$ maka A memiliki invers kiri yaitu matriks B sehingga memenuhi $B \otimes A = E$. Berdasarkan teorema 3.2, telah diketahui invers kanan juga merupakan invers kiri, sehingga matriks *invertible* memiliki invers kanan dan invers kiri dengan solusi tunggal dengan $A \otimes B = E = B \otimes A$. Sehingga matriks B sebagai invers kanan juga merupakan invers kiri dari A.

Contoh 3.19:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & e \\ e & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 & \varepsilon \\ \varepsilon & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Karena A merupakan matriks diagonal yang dipermutasi maka A *invertible.*

Sehingga didapat perhitungan $\text{dom}(A)$ dan $\text{perm}(A)$, yaitu

$\text{dom}(A) = 11$

$\text{perm}(A) = 11$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 11 \neq \varepsilon$

Berdasarkan contoh 3.18 didapat invers kanan dari A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$, karena invers kanan juga merupakan invers kiri maka invers kiri dari A juga matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Selanjutnya dapat dicek

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 7 \\ 4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes \varepsilon \ \oplus -4 \otimes 4 & \varepsilon \otimes 7 \ \oplus -4 \otimes \varepsilon \\ -7 \otimes \varepsilon \ \oplus \varepsilon \otimes 4 & -7 \otimes 7 \ \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e & \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = E$$

Jadi didapat invers kiri dari A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 \\ -7 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

3. Identifikasi Hasil Penyelesaian

a. Penyelesaian Invers Kanan

Berdasarkan contoh-contoh hasil penyelesaian $A \otimes B = E$ diperoleh matriks B invers kanan dari matriks A, dapat diidentifikasi bahwa matriks B dapat ditentukan dengan cara berikut:

$$B = A^{\otimes -1} = A^T \text{ dengan } a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$$

Contoh 3.20:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix}$$

Karena A merupakan matriks diagonal yang dipermutasi maka A *invertible*, sehingga

$\text{dom}(A) = 7 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(5+2)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon)}$

$$= e^{s7} - e^{s\varepsilon} \neq 0$$

$\text{perm}(A) = (5 \otimes 2) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon)$

$$= \max\{5 + 2, \varepsilon + \varepsilon\}$$

$$= \max\{7, \varepsilon\}$$

$$= 7 \neq \varepsilon$$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 7 \neq \varepsilon$

Akan ditentukan matriks B invers kanan dari A sebagai solusi persamaan:

$$A \otimes B = E$$

$$\begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B = A^{\otimes -1} = A^T \text{ dengan } a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$$

Sehingga,

$$B = \begin{bmatrix} -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes -5 \ \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon & 5 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes -2 \\ \varepsilon \otimes -5 \ \oplus 2 \otimes \varepsilon & \varepsilon \otimes \varepsilon \oplus 2 \otimes -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = E$$

Jadi didapat invers kanan dari matriks A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix}$.

b. Penyelesaian Invers Kiri

Matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ *invertible* memiliki invers kiri. Jika diberikan matriks A atas aljabar *max-plus*, E adalah matriks identitas, maka matriks B adalah invers kiri dari matriks A sehingga memenuhi $B \otimes A = E$.

Berdasarkan teorema 3.2, telah diketahui matriks A *invertible* memiliki invers kanan dan invers kiri dengan solusi tunggal dengan $A \otimes B = E = B \otimes A$. Sehingga matriks B sebagai invers kanan juga merupakan invers kiri dari A. Perhitungan invers kanan dari matriks A, yaitu $B = A^t$ dengan $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon \ , & \text{jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$ juga bisa berlaku untuk menentukan invers kiri.

Contoh 3.21:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Karena A merupakan matriks diagonal yang dipermutasi maka A *invertible*, sehingga

$\mathrm{dom}(A) = 11 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(7+4)}$

$= e^{s\varepsilon} - e^{s11} \neq 0$

$\mathrm{perm}(A) = (\varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (7 \otimes 4)$

$= \max\{\varepsilon + \varepsilon, 7 + 4\}$

$= \max\{\varepsilon, 11\}$

$= 11 \neq \varepsilon$

Jadi $\mathrm{dom}(A) = \mathrm{perm}(A) = 11 \neq \varepsilon$

Akan ditentukan matriks B invers kiri dari A sebagai solusi persamaan:

$$B \otimes A = E$$

$$B \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 7 & \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B = A^{\otimes -1} = A^T \text{ dengan } a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon, & \text{jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$$

Sehingga,

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -7 \\ -4 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -7 \\ -4 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 4 \\ 7 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \otimes \varepsilon \ \oplus -7 \otimes 7 & \varepsilon \otimes 4 \oplus -7 \otimes \varepsilon \\ -4 \otimes \varepsilon \oplus \varepsilon \otimes 7 & -4 \otimes 4 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e & \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = E$$

Jadi didapat invers kiri dari matriks A yaitu matriks $B = \begin{bmatrix} -5 & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 \end{bmatrix}$.

Berdasarkan ketiga cara yang telah dibahas, penyelesaian menentukan matriks invers kanan dan invers kiri menggunakan ketiga cara akan dibandingkan sebagai berikut:

Contoh 3.22:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ dengan $E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda_i)$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus 2 \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ 3 \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks diagonal yang dipermutasi maka A *invertible*, sehingga $\mathrm{dom}(A) = 9 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = e^{s(\varepsilon+\varepsilon+4)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)} + e^{s(3+\varepsilon+\varepsilon)} - e^{s(3+2+4)} +$

$$e^{s(\varepsilon+2+\varepsilon)} - e^{s(\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon)}$$

$$= e^{s\varepsilon} - e^{s\varepsilon} + e^{s\varepsilon} - e^{s9} + e^{s\varepsilon} - e^{s\varepsilon} \neq 0$$

$$\text{perm}(A) = (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes 4) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (3 \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon) \oplus (3 \otimes 2 \otimes 4)$$

$$\oplus (\varepsilon \otimes 2 \otimes \varepsilon) \oplus (\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \varepsilon)$$

$$= \max\{\varepsilon + \varepsilon + 4, \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, 3 + \varepsilon + \varepsilon, 3 + 2 + 4, \varepsilon + 2 + \varepsilon, \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\}$$

$$= \max\{\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, 9, \varepsilon, \varepsilon\} = 9 \neq \varepsilon$$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 9 \neq \varepsilon$

Akan ditentukan matriks B invers dari A, sebagai invers kanan sekaligus invers kiri dari matriks A.

Cara 1. Menentukan subsolusi terbesar

Terlebih dahulu dicari subsolusi terbesar dari persamaan $A \otimes B = E$, yaitu:

$$-\hat{B} = A^t \otimes (-E)$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & 3 & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & \infty & \infty \\ \infty & e & \infty \\ \infty & \infty & e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \infty \oplus e & e \oplus 3 \oplus e & e \oplus \infty \oplus \varepsilon \\ 2 \oplus \varepsilon \oplus \infty & \infty \oplus \varepsilon \oplus e & \infty \oplus e \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus e \oplus \infty & e \oplus \varepsilon \oplus \infty & e \oplus e \oplus 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \infty & 3 & \infty \\ 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 4 \end{bmatrix}$$

Jadi subsolusi terbesarnya adalah

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

Cara 2. Karakterisasi invers matriks

$$B = [P_\sigma \otimes D(-\lambda_i)]^T$$

$$= \left[\begin{pmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{pmatrix}\right]^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus -2 \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ -3 \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus -4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & \varepsilon \\ -3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

Cara 3. Identifikasi hasil penyelesaian

$$B = A^{\otimes -1} = A^T \text{ dengan } a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & \text{jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon \quad, & \text{jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$$

Sehingga,

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan perhitungan dengan ketiga cara didapatkan hasil matriks invers yang sama, yaitu

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = E$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon \oplus e \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & e \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon \\ \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus \varepsilon & \varepsilon \oplus \varepsilon \oplus e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = E$$

Jadi $A \otimes B = B \otimes A = E$

Sehingga didapat matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -3 & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & -4 \end{bmatrix}$ sebagai invers kanan sekaligus invers kiri dari A.

Jika matriks A *invertible* maka matriks B adalah invers matriks A dengan solusi tunggal sehingga memenuhi $A \otimes B = B \otimes A = E$. Berdasarkan hasil perhitungan untuk menentukan matriks B, ketiga cara yang diterapkan menghasilkan matriks invers yang sama. Pada proses perhitungan untuk menentukan matriks B dengan membandingkan ketiga cara, didapat cara ketiga yaitu $B = A^{\otimes -1} = A^T$ dengan $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, \text{ jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon \quad, \text{ jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$ lebih praktis dan menghemat waktu dibandingkan dengan memakai cara yang lain. Penggunaan cara kedua yaitu $B = [P_\sigma \otimes D(-\lambda_i)]^T$ akan lebih efektif dan efisien jika telah diketahui matriks permutasi dan matriks diagonal yang membentuk matriks A *invertible*.

Contoh 3.23:

Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ berukuran 5×5.

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon \end{bmatrix}, \text{dengan } E = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

Karena A adalah matriks diagonal yang dipermutasi maka A *invertible*, sehingga

$\text{dom}(A) = 22 \neq \varepsilon$

karena $\det(e^{sA}) = 22 \neq 0$

$\text{perm}(A) = 22 \neq \varepsilon$

Jadi $\text{dom}(A) = \text{perm}(A) = 22 \neq \varepsilon$

didapat matriks B invers dari A, yaitu

$$B = A^{\otimes -1} = A^T \text{ dengan } a_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, \text{ jika } a_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon \quad, \text{ jika } a_{ij} = \varepsilon \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat dicek

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = E$$

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & 7 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 8 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix}$$

$$B \otimes A = E$$

Jadi $A \otimes B = B \otimes A = E$.

Sehingga didapat matriks $B = \begin{bmatrix} \varepsilon & -4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ -2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -7 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -8 \\ \varepsilon & \varepsilon & -1 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ sebagai invers kanan sekaligus invers kiri dari A.