BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diuraikan mengenai matriks (meliputi definisi matriks, operasi matriks, determinan dan invers matriks), aljabar *max-plus*, matriks atas aljabar *max-plus*, dan penyelesaian sistem persamaan linear m*ax-plus* $Ax = b$.

A. Matriks

1. Definisi Matriks

Definisi 2.1. (Anton, 1987: 22)

Sebuah matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan.

Bilangan-bilangan dalam susunan matriks dinamakan entri. Matriks terdiri dari entri-entri yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk persegi panjang dengan panjang dan lebar menunjukkan banyak baris dan banyak kolom. Matriks yang memiliki m baris dan n kolom disebut matriks berukuran $m \times n$. Bentuk umum dari matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ atau } \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$$

Entri yang menempati baris ke-i dan kolom ke-j disebut entri (i, j) dan ditulis sebagai $[A]_{ij} = \left[a_{ij}\right]$ dengan a_{ij} sebagai skalar. Matriks yang terdiri dari 1 baris dan n kolom ditulis $1\times n$ disebut dengan matriks baris dan yang terdiri atas n baris dan 1 kolom disebut matriks kolom.

Sebuah matriks dengan n baris dan n kolom dinamakan matriks kuadrat (persegi) berorde n dan entri-entri $a_{11},\ a_{22},\ldots,a_{nn}$ dikatakan berada pada diagonal utama dari A. Sehingga bentuk matriks A dituliskan berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Operasi Matriks

a. Penjumlahan matriks

Definisi 2.2. (Anton, 1987: 23)

Jika A dan B adalah sebarang dua matriks yang ukurannya sama, maka jumlah $A + B$ adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam matriks A dan B, jika ukuran matriksnya berbeda maka tidak dapat ditambahkan.

Contoh 2.1:

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

didapat $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$

sedangkan $A + C$ dan $B + C$ tidak didefinisikan.

b. Perkalian matriks

Definisi 2.3. (Anton, 1987: 25)

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$, maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut, untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari AB, pilihlah baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B, kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dan kemudian tambahkanlah hasil kali yang dihasilkan.

Perkalian A dan B terdefinisi jika dan hanya jika banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B.

Contoh 2.2:

Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

dengan mengalikannya akan menghasilkan

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Jadi $AB \neq BA$

c. Transpos matriks

Definisi 2.4. (Anton, 1987: 27)

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka transpos A dinyatakan oleh A^T dan didefinisikan dengan matriks $n \times m$ yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A, dan seterusnya.

Matriks $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

transpos matriks A adalah $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

3. Determinan

Misalkan A matriks persegi, fungsi determinan A sering ditulis sebagai determinan yang dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Fungsi determinan adalah suatu fungsi yang mengasosiasikan matriks dengan bilangan real. Misal diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ maka $\det(A) = ad - bc$. Determinan matriks berupa skalar yang hanya terdefinisi untuk matriks bujur sangkar.

Berikut diberikan definisi determinan secara umum.

Definisi 2.5.

Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$ dan determinan dari A dinyatakan dengan skalar yaitu sebagai berikut:

$$\det(A) = \sum_{p} \sigma(p)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$$

penjumlahan dilakukan sampai $n!$ permutasi $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ dari $(1, 2, \ldots, n)$. Setiap $a_{1p_1} a_{2p_2} \ldots a_{np_n}$ memuat tepat satu entri dari setiap baris dan setiap kolom dari A. Jika $\sigma(p) = +1$ dikatakan permutasi genap yaitu jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang genap dan $\sigma(p) = -1$ dikatakan permutasi ganjil yaitu jumlah inversi seluruhnya adalah sebuah bilangan bulat yang ganjil.

Sebelumnya perlu diketahui definisi dari permutasi berikut

Definisi 2.6. (Anton, 1987: 59)

Permutasi himpunan bilangan-bilangan bulat $\{1, 2, \ldots, n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat menurut suatu aturan tanpa menghilangkan atau mengulangi bilangan-bilangan tersebut.

Umumnya, himpunan $\{1, 2, \ldots, n\}$ akan mempunyai $n(n-1)(n-2) \ldots 2 \cdot 1 = n!$ permutasi yang berbeda. Untuk menyatakan permutasi umum dari himpunan $\{1,2, \ldots, n\}$, maka dapat ditulis $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, p_1 adalah bilangan bulat pertama dalam permutasi, p_2 adalah bilangan bulat kedua dan seterusnya. Sebuah invers (inversi) dikatakan terjadi dalam permutasi $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ jika sebuah bilangan bulat yang lebih besar mendahului sebuah bilangan bulat yang lebih kecil. Jumlah invers seluruhnya yang terjadi dalam permutasi dapat diperoleh sebagai berikut:

1. Carilah banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari p_1 dan yang membawa p_1 dalam permutasi tersebut
2. Carilah banyaknya bilangan bulat yang lebih kecil dari p_2 dan yang membawa p_2 dalam permutasi tersebut
3. Teruskan proses perhitungan ini untuk $p_3, \dots, p_{n-1}$.

Jumlah bilangan-bilangan ini akan sama dengan jumlah invers seluruhnya dalam permutasi tersebut.

Diberikan matriks A berukuran 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $n = 3$ dan $3! = 6$, berarti ada 6 permutasi dari (1,2,3) dengan daftar hasil permutasi dari $\det(A)$ ditunjukkan pada Tabel 1. berikut:

Tabel 1. Daftar Hasil Permutasi $n = 3$ dari $\det(A)$

Permutasi $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$	Banyaknya invers	Klasifikasi	$\sigma(p)$	$a_{1p_1}a_{2p_2} \dots a_{np_n}$
(1,2,3)	0	genap	+	$a_{11}a_{22}a_{33}$
(1,3,2)	1	ganjil	-	$a_{11}a_{23}a_{32}$
(2,1,3)	1	ganjil	-	$a_{12}a_{21}a_{33}$
(2,3,1)	2	genap	+	$a_{12}a_{23}a_{31}$
(3,1,2)	2	genap	+	$a_{13}a_{21}a_{32}$
(3,2,1)	3	ganjil	-	$a_{13}a_{22}a_{31}$

Sehingga didapat

$$\det(A) = \sum_p \sigma(p)\, a_{1p_1}a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31}$$

Contoh 2.3:

Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

Akan dicari $\det(A)$

$$\det(A) = \sum_p \sigma(p)\, a_{1p_1}a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$= (1 \times 5 \times 9) - (1 \times 8 \times 6) - (4 \times 2 \times 9) + (4 \times 8 \times 3)$$

$$+ (7 \times 2 \times 6)$$

$$- (7 \times 5 \times 3)$$

$$= 45 - 48 - 72 + 96 + 84 - 105$$

$$= 0$$

Untuk matriks A berukuran $n \times n$ dengan $\det(A) = 0$ maka matriks A dikatakan singular, sehingga matriks A tidak memiliki invers. Sedangkan matriks A dikatakan nonsingular, jika $\det(A) \neq 0$ maka matriks A memiliki invers, sehingga matriks A *invertible*.

Berikut ciri-ciri matriks yang determinannya adalah 0, yaitu

1. Matriks 0
2. Baris 0 atau kolom 0
3. Matriks simetri
4. Baris merupakan kelipatan baris yang lain atau kolom merupakan kelipatan kolom yang lain

4. Invers Matriks

Definisi 2.7. (Anton, 1987: 34)

Jika A adalah matriks persegi, A dikatakan *invertible* maka ada matriks B dan B dinamakan invers dari A sehingga memenuhi $AB = BA = I$.

Karena B adalah invers dari A maka $B = A^{-1}$. Jadi $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Contoh 2.4:

Matriks $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Jadi $AB = BA = I$

Suatu matriks A memiliki invers atau tidak memiliki invers dapat diketahui dengan menunjukkan determinan dari matriks A bukan nol. Syarat matriks A memiliki invers ditunjukkan pada teorema berikut:

Teorema 2.1. (Anton, 1987: 74)

Matriks A dapat dibalik jika dan hanya jika $\det(A) \neq 0$.

Bukti:

Jika A dapat dibalik maka $I = AA^{-1}$ sehingga $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$. Jadi $\det(A) \neq 0$. ■

Ketunggalan invers matriks ditunjukkan pada contoh berikut:

Contoh 2.5:

Diberikan matriks A, dengan $B = A^{-1}$ dan $C = A^{-1}$.

Akan ditunjukkan $B = C$

$$\begin{aligned} & AB = I \\ \Leftrightarrow \quad & CAB = CI \\ \Leftrightarrow \quad & (CA)B = C \\ \Leftrightarrow \quad & IB = C \\ \Leftrightarrow \quad & B = C \end{aligned}$$

Karena $B = C$, maka invers matriks tunggal.

Sifat-sifat dari invers matriks diberikan pada teorema berikut:

Teorema 2.2.

Untuk matriks A dan B berukuran $n \times n$ *invertible* maka diperoleh:

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$

(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Bukti:

(1) Dari definisi, A^{-1} adalah invers dari A sehingga $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

Akibatnya $(A^{-1})^{-1}$ adalah invers dari A^{-1} sehingga $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = I$.

Karena $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = A^{-1}A = I_n$ maka $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) Anggap $X = B^{-1}A^{-1}$ dan menunjukkan bahwa $(AB)X = I$. Diperoleh $(AB)X = (AB)B^{-1}A^{-1} = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n = AB(AB)^{-1}$.

Jadi $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) Anggap $X = (A^{-1})^t$ dan menunjukkan bahwa $A^tX = I_n$. Dengan membentuk $A^tX = A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I_n^t = I_n$. Oleh karena itu, $(A^t)^{-1} = X = (A^{-1})^t$. ■

B. Aljabar Max-Plus

Definisi 2.8. Baccelli (2001: 102)

Aljabar *max-plus* adalah himpunan ℝ ∪ {-∞} yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu ⊕ dan ⊗, operasi maksimum dinotasikan dengan ⊕ dan operasi penjumlahan dinotasikan dengan ⊗. Selanjutnya (ℝ ∪ {-∞}, ⊕, ⊗) dinotasikan dengan $\mathbb{R}_{\max}$ dan {-∞} dinotasikan dengan *ε*. Untuk $a, b \in \mathbb{R}_{\max}$, didefinisikan dua operasi ⊕ dan ⊗, yaitu:

$$a \oplus \mathrm{b} = \max(\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

$$a \otimes \mathrm{b} = \mathrm{a} + \mathrm{b}$$

Contoh 2.6:

Diberikan $a = 2, b = 5$

$$2 \oplus 5 = \max(2,5) = 5 = \max(5,2) = 5 \oplus 2$$

$$2 \otimes 5 = 2 + 5 = 7 = 5 + 2 = 5 \otimes 2$$

Dalam aljabar *max-plus*, $e = 0$ merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$, sehingga

$$a \otimes e = e \otimes a = a + 0 = a, \forall\, a \in \mathbb{R}_{\max}.$$

Elemen $\varepsilon = -\infty$ merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$, maka

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = \max(a, -\infty) = a, \text{ untuk } a \in \mathbb{R}_{\max}.$$

Jadi operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat komutatif.

Struktur aljabar dari $\mathbb{R}_{\max}$ adalah semiring, yaitu:

1. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif dengan elemen netral $\{-\infty\}$.
2. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan grup komutatif dengan elemen identitas 0.
3. Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat distributif.
4. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu

   $\forall\, a \in \mathbb{R}_{\max}, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$

C. Matriks atas Aljabar Max-Plus

Himpunan matriks $m \times n$ untuk $m, n \in \mathbb{N}$ atas $\mathbb{R}_{\max}$ dinotasikan $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dengan m menunjukkan baris dan n menunjukkan kolom. Sebagaimana dalam aljabar linear, matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ atau } \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$$

Entri baris ke-i dan kolom ke-j matriks A dinotasikan dengan $[A]_{ij}$ atau $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}$. Penjumlahan dan perkalian pada matriks atas aljabar *max-plus* didefinisikan dengan cara mengganti operasi $+$ menjadi $\oplus$ (maksimum) dan operasi $\times$ menjadi $\otimes$ (penjumlahan).

Operasi $\oplus$ dan $\otimes$ atas $\mathbb{R}_{\max}$ dapat diperluas untuk operasi-operasi matriks pada $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ seperti pada kedua definisi berikut:

Definisi 2.9. (Rudhito, 2004: 4)

Diberikan $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n} = \{A = [A]_{ij} = [a_{ij}] | a_{ij} \in \mathbb{R}_{\max}$ untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n\}$

1) Diketahui $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}, A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$. Didefinisikan $\alpha \otimes A$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:

   $(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$ untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$

2) Diketahui $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$. Didefinisikan $A \oplus B$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:

   $(A \oplus B)_{ij} = [A]_{ij} \oplus [B]_{ij}$ untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$

   $A \otimes B$ adalah matriks yang unsur ke-ij-nya:

   $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{p} ([A]_{ik} \otimes [B]_{kj})$ untuk $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$

Definisi 2.10. (Farlow, 2009: 12)

a) Diberikan $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, penjumlahannya didefinisikan sebagai operasi maksimum dengan notasi $\oplus$, maka $A \oplus B$ dengan

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij})$$

b) Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times k}$ dan $B \in \mathbb{R}_{max}^{k\times n}$, perkaliannya didefinisikan sebagai operasi penjumlahan dengan notasi $\otimes$, maka $A \otimes B$ dengan

$$[A \otimes B]_{il} = \bigoplus_{j=1}^{k} (a_{ij} \otimes b_{jl}) = \max_{j\in\{1,2,\dots,k\}}(a_{ij} + b_{jl})$$

c) Transpose matriks dinotasikan dengan A^T dan didefinisikan seperti dalam aljabar linear $[A^T]_{ij} = [A]_{ji}$.

d) Matriks identitas dalam aljabar max-plus berukuran $n \times n$ yaitu E_n yang didefinisikan sebagai berikut:

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e = 0 & \text{, jika } i = j \\ \varepsilon = -\infty & \text{, jika } i \neq j \end{cases}$$

Matriks identitas merupakan identitas terhadap operasi $\otimes$. $A \otimes E_n = A$ untuk semua $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dan $E_m \otimes A = A$ untuk semua $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times m}$. Matriks identitas E digunakan jika ukuran matriksnya sudah jelas.

e) Untuk matriks persegi (bujur sangkar) dan k bilangan bulat positif, pangkat ke-k dari A dinotasikan dengan $A^{\otimes k}$ yang didefinisikan dengan

$$A^{\otimes k} = \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_{k\ kali}$$

Untuk $k = 0, A^{\otimes 0} = E_n$

f) Untuk sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan sebarang skalar $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}$, $\alpha \otimes A$ didefinisikan dengan

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes [A]_{ij}$$

Contoh 2.7:

Diberikan $A = \begin{pmatrix} e & 4 \\ -2 & \varepsilon \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $\alpha = 2$

$$\alpha \otimes A = 2 \otimes \begin{pmatrix} e & 4 \\ -2 & \varepsilon \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \otimes e & 2 \otimes 4 \\ 2 \otimes -2 & 2 \otimes \varepsilon \\ 2 \otimes 3 & 2 \otimes 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 + e & 2 + 4 \\ 2 + (-2) & 2 + \varepsilon \\ 2 + 3 & 2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ e & \varepsilon \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Contoh 2.8:

Diberikan $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, maka

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 4 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(5,4) & \max(-1, e) \\ \max(1,2) & \max(2,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B \oplus A = \begin{pmatrix} 4 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(4,5) & \max(e, -1) \\ \max(2,1) & \max(3,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Jadi $A \oplus B = B \oplus A = \begin{pmatrix} 5 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (5 \otimes 4) \oplus (-1 \otimes 2) & (5 \otimes e) \oplus (-1 \otimes 3) \\ (1 \otimes 4) \oplus (2 \otimes 2) & (1 \otimes e) \oplus (2 \otimes 3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \max(5 + 4, -1 + 2) & \max(5 + e, -1 + 3) \\ \max(1 + 4, 2 + 2) & \max(1 + e, 2 + 3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \max(9,1) & \max(5,2) \\ \max(5,4) & \max(1,5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B \otimes A = \begin{pmatrix} 4 & e \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (4 \otimes 5) \oplus (e \otimes 1) & (4 \otimes -1) \oplus (e \otimes 2) \\ (2 \otimes 5) \oplus (3 \otimes 1) & (2 \otimes -1) \oplus (3 \otimes 2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \max(4+5, e+1) & \max(4+(-1), e+2) \\ \max(2+5, 3+1) & \max(2+(-1), 3+2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \max(9,1) & \max(3,2) \\ \max(7,4) & \max(1,5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Jadi $A \otimes B \neq B \otimes A$

Karena $A \oplus B = B \oplus A$, maka operasi $\oplus$ pada matriks atas aljabar *max-plus* bersifat komutatif. Sedangkan operasi $\otimes$ tidak komutatif karena $A \otimes B \neq B \otimes A$.

Sifat-sifat matriks dapat dinyatakan pada teorema berikut:

Teorema 2.3. (Subiono, 2010: 14)

Beberapa sifat berikut berlaku untuk sebarang matriks A, B dan C dengan ukuran yang bersesuaian dan operasi matriks terdefinisi

i. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (asosiatif)

ii. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ (asosiatif)

iii. $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$ (distributif)

iv. $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$ (distributif)

v. $A \oplus A = A$ (idempoten)

Bukti :

Akan dibuktikan untuk (ii) dan (iii), sedangkan bukti yang lainnya mengikuti definisi operasi dan sifat-sifat operasi pada $\mathbb{R}_{\max}$.

Bukti (ii) :

Ambil sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p},\ B \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times q},\ \mathrm{dan}\ C \in \mathbb{R}_{\max}^{q\times m}$.

Entri baris ke-i kolom ke-j matriks $(A \otimes B) \otimes C$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
[(A \otimes B) \otimes C]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{q} (\bigoplus_{l=1}^{p} A_{i.l} \otimes B_{l,k}) \otimes C_{k,j} \\
&= \bigoplus_{k=1}^{q} \bigoplus_{l=1}^{p} A_{i.l} \otimes B_{l,k} \otimes C_{k,j} \\
&= \bigoplus_{l=1}^{p} A_{i.l} \otimes (\bigoplus_{k=1}^{q} B_{l,k} \otimes C_{k,j}) \\
&= [A \otimes (B \otimes C)]_{ij} \text{ untuk } i \in \underline{n} \text{ dan } j \in \underline{m}.
\end{aligned}
$$

Bukti (iii) :

Ambil sebarang matriks $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p}\ \mathrm{dan}\ B, C \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times m}$.

Entri baris ke-i dan kolom ke-j matriks $A \otimes (B \oplus C)$ adalah sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
[A \otimes (B \oplus C)]_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{p} A_{i.k} \otimes (B_{k,j} \oplus C_{k,j}) \\
&= \bigoplus_{k=1}^{p} (A_{i.k} \otimes B_{k,j} \oplus A_{i.k} \otimes C_{k,j}) \\
&= (\bigoplus_{k=1}^{p} A_{i.k} \otimes B_{k,j}) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{p} A_{i.k} \otimes C_{k,j}) \\
&= [A \otimes B]_{ij} \oplus [A \otimes C]_{ij} \text{ untuk } i \in \underline{n} \text{ dan } j \in \underline{m}.
\end{aligned}
$$

Didefinisikan matriks $\varepsilon \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan $(\varepsilon)_{ij} := \varepsilon$ untuk setiap i dan j.

■

D. Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Max-plus $A \otimes x = b$

Menurut Subiono (2013: 33), kekurangan dari aljabar *max-plus* adalah tidak memiliki invers aditif. Hal ini yang menyulitkan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear $A \otimes x = b$. Penyelesaian sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ menggunakan cara menentukan subsolusi terbesar.

Terlebih dahulu didefinisikan konsep subsolusi/subpenyelesaian berikut

Definisi 2.11. (Rudhito, 2005: 160)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ dan $b \in \mathbb{R}_{max}^{m}$. Vektor x' $\in \mathbb{R}_{max}^{m}$ disebut suatu subpenyelesaian sistem persamaan linear $A \otimes x = b$ jika vektor x tersebut memenuhi $A \otimes x' \leq_m b$.

Subpenyelesaian $A \otimes x = b$ selalu ada, karena untuk $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon, \dots, \varepsilon]^T$ selalu berlaku $A \otimes \varepsilon = \varepsilon \leq_m b$.

Definisi 2.12. (Rudhito, 2005: 160)

Suatu subpenyelesaian $\hat{x}$ dari sistem $A \otimes x = b$ disebut subpenyelesaian terbesar sistem $A \otimes x = b$ jika $x' \leq_m \hat{x}$ untuk setiap subpenyelesaian x' dari sistem $A \otimes x = b$.

Teorema 2.3. (Baccelli, et al., 2001: 110)

Diberikan $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ dengan unsur-unsur setiap kolomnya tidak semuanya sama dengan ε dan $b \in \mathbb{R}^m$. Subpenyelesaian terbesar $A \otimes x = b$ ada dan diberikan oleh $\hat{x}$ dengan $\hat{x}_j = (-b_i + A_{ij})$, $\forall\ i = 1,2,3,\dots,m$ dan $j = 1,2,3,\dots,n$.

Bukti:

$$A \otimes x \le b \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11} \otimes x_1 \oplus A_{12} \otimes x_2 \oplus \dots \oplus A_{1n} \otimes x_n \le_m b_1 \\ A_{21} \otimes x_1 \oplus A_{22} \otimes x_2 \oplus \dots \oplus A_{2n} \otimes x_n \le_m b_2 \\ \vdots \\ A_{m1} \otimes x_1 \oplus A_{m2} \otimes x_2 \oplus \dots \oplus A_{mn} \otimes x_n \le_m b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left(\bigoplus_j \left(A_{ij} \otimes x_j\right) \le b_i, \forall_i \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(A_{ij} \otimes x_j\right) \le_m b_i, \forall_{i,j}$$

$$\Leftrightarrow \left(A_{ij} \otimes x_j\right) \le b_i, \forall_{i,j}$$

Unsur setiap kolom matriks A tidak semuanya sama dengan ε, maka untuk setiap j selalu ada i sehingga $A_{ij} \neq \varepsilon$ yang berarti A_{ij} ada. Mengingat setiap $a \in \mathbb{R}_{\max}$ berlaku $a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ dan $a \oplus \varepsilon = a$, maka koefisien-koefisien $A_{ij} = \varepsilon$ tidak akan berpengaruh pada nilai $A \otimes x$.

Sehingga berlaku:

$$\left(A_{ij} \otimes x_j\right) \le b_i, \forall_{i,j}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(A_{ij} + x_j \le b_i, \forall_{i,j} \text{ dengan } A_{ij} \neq \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_j \le b_i - A_{ij}, \forall_{i,j} \text{ dengan } A_{ij} \neq \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x_j \le \min(b_i - A_{ij}), \forall_j \text{ dengan } A_{ij} \neq \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(-x_j \ge \max(-b_i + A_{ij}), \forall_j\right)$$

Jadi, subpenyelesaian sistem $A \otimes x = b$ adalah setiap x' yang komponen-

komponennya memenuhi $-x_j \geq max(-b_i + A_{ij}), \forall_j$. Jika $\hat{x} = [\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n]^T$ didefinisikan dengan $-\hat{x}_j = \max(-b_i + A_{ij})$ untuk setiap $j = 1, 2, \dots, n$, maka diperoleh

$$\left(-\hat{x}_j \leq \max(-b_i + A_{ij}), \forall_j\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\hat{x}_j = \min\left(b_i - A_{ij}\right), \forall_j \text{ dengan } A_{ij} \neq \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\hat{x}_j \leq b_i - A_{ij}, \forall_j \text{ dengan } A_{ij} \neq \varepsilon\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\bigoplus_j \left(A_{ij} \otimes \hat{x}_j\right) \leq b_i, \forall_i\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (A \otimes \hat{x} \leq_m b)$$

didapat $\hat{x}$ yang merupakan subpenyelesaian sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes x = b$ karena $-\hat{x}_j \geq \max\left(-b_i + A_{ij}\right) = -\hat{x}_j, \forall_j$, maka $x'_j \leq \hat{x}_j$. Akibatnya $x' \leq_m \hat{x}$ sehingga $\hat{x}$ merupakan subpenyelesaian terbesar sistem $A \otimes x = b$.

Terkait hal tersebut, dapat diketahui cara untuk menyelesaikan sistem persamaan $A \otimes x = b$ dengan langkah pertama yaitu terlebih dahulu menghitung subpenyelesaian terbesarnya. Kemudian periksa subpenyelesaian terbesarnya itu memenuhi sistem persamaan atau tidak. Untuk mempermudah menghitung subpenyelesaian terbesar dari sistem persamaan $A \otimes x = b$ dapat ditentukan dengan

$$-\hat{x} = \begin{bmatrix} -\hat{x}_1 \\ -\hat{x}_2 \\ \vdots \\ -\hat{x}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(-b_i + A_{i1}) \\ \max(-b_i + A_{i2}) \\ \vdots \\ \max(-b_i + A_{im}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \max(A_{1i} - b_i) \\ \max(A_{2i} - b_i) \\ \vdots \\ \max(A_{mi} - b_i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \otimes (-b_1) \otimes A_{21} \otimes (-b_2) \otimes \ldots \otimes A_{m1} \otimes (-b_m) \\ A_{12} \otimes (-b_1) \otimes A_{22} \otimes (-b_2) \otimes \ldots \otimes A_{m2} \otimes (-b_m) \\ \vdots \\ A_{1n} \otimes (-b_1) \otimes A_{2n} \otimes (-b_2) \otimes \ldots \otimes A_{mn} \otimes (-b_m) \end{bmatrix}$$

$$-\hat{x} = A^t \otimes (-b)$$

Jadi sistem persamaan linear *max-plus* $A \otimes x = b$ mempunyai subsolusi terbesar $\hat{x}$ dengan

$$-\hat{x} = A^t \otimes (-b)$$

Sehingga $\hat{x}$ merupakan solusi yang memenuhi persamaan $A \otimes \hat{x} = b$.

Contoh 2.9:

Sebagai contoh akan ditentukan solusi persamaan

$$A \otimes x = b$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Subsolusi dari persamaan di atas adalah

$$-\hat{x} = A^t \otimes (-b)$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes -7 \ \oplus 2 \otimes -7 \\ 1 \otimes -7 \ \oplus 4 \otimes -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \oplus -5 \\ -6 \oplus -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Jadi subsolusinya adalah $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Akan ditunjukkan $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ adalah subsolusi terbesar yang memenuhi persamaan tersebut.

Misal ambil subsolusi $\hat{x} = \{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}\}$.

Selanjutnya dapat dicek

untuk $\hat{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A \otimes \hat{x}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes 2 \ \oplus 1 \otimes 2 \\ 2 \otimes 2 \ \oplus \ 4 \otimes 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \oplus 3 \\ 4 \oplus 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

untuk $\hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, maka

$$A \otimes \hat{x}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes 3 \ \oplus 1 \otimes 2 \\ 2 \otimes 3 \ \oplus \ 4 \otimes 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \oplus 3 \\ 5 \oplus 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

untuk $\hat{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, maka

$$A \otimes \hat{x}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes 3 \;\oplus 1 \otimes 3 \\ 2 \otimes 3 \;\oplus\; 4 \otimes 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \oplus 4 \\ 5 \oplus 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

untuk $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, maka

$$A \otimes \hat{x} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes 2 \;\oplus 1 \otimes 3 \\ 2 \otimes 2 \;\oplus\; 4 \otimes 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \oplus 4 \\ 4 \oplus 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes \hat{x} = b$$

Jadi subsolusi terbesarnya adalah $\hat{x}$ = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Sehingga didapat x = $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ yang merupakan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut.