PENURUNAN PERSAMAAN BENJAMIN BONA MAHONNY(BBM) PADA GELOMBANG SOLITER DALAM SISTEM DISPERSIF NONLINEAR DAN SOLUSI EKSAKNYA

SKRIPSI

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan
guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh:
Intan Damayanti
NIM. 09305141024

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2014

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

"PENURUNAN PERSAMAAN BENJAMIN BONA MAHONNY(BBM) PADA GELOMBANG SOLITER DALAM SISTEM DISPERSIF NONLINEAR DAN SOLUSI EKSAKNYA"

Disusun Oleh:

Intan Damayanti

NIM. 09305141024

Telah disetujui dan disahkan oleh dosen pembimbing untuk diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta

Disetujui pada tanggal:

26 Juni 2014

Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing

Nikenasih Binatari, M.Si

NIP. 198410192008122005

PERNYATAAN

Yang bertandatangan di bawahini:

Nama : Intan Damayanti

NIM : 09305141024

Prodi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JudulSkripsi : Penurunan Persamaan Benjamin Bona Mahonny (BBM) pada Gelombang Soliter dalam Sistem Dispersif Non Linear dan Solusi Eksaknya

Menyatakan bahwa karya ilmiah ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang telah dipublikasikan, ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi atau institusi lain, kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tatacara dan etika penulisan karya ilmiah yang lazim. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya, dan saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 26 Juni 2014

Yang menyatakan,

Intan Damayanti

NIM.09305141024

PENGESAHAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL:

" Penurunan Persamaan Benjamin Bona Mahonny Pada Gelombang Soliter Dalam Sistem Dispersif Non Linear dan Solusi Eksaknya "

Yang Disusun Oleh:

Nama	: Intan Damayanti
NIM	: 09305141024
Prodi	: Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 7 Juli 2014 dan dinyatakan lulus

Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda tangan	Tanggal
Nikenasih Binatari, M.Si NIP. 198410192008122005	Ketua Penguji		18/7/14
Fitriana Yuli S., M.Si NIP. 198407072008012003	Sekretaris Penguji		18/7/14
Dr. Hartono NIP. 196203291987021002	Penguji Utama		11/7/14
Kus Prihantoso K., M.Si NIP. 197904062005011005	Penguji Pendamping		18/7/14

Yogyakarta, 21 Juli 2014

Dekan,

Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

MOTTO

Jangan menganggap setiap kendala sebagai halangan, namun lihatlah sebagai peluang yang menantang

A fear will only make you weak and lose confidence. Ignore the fear and proceed your step!

Anak muda yang akan sukses tidak akan pernah menyerah sebelum kesuksesan berada di tangannya

PERSEMBAHAN

Karya Tulis ini kupersembahkan untuk :

- Kedua Orantua, Sarino dan Rudiyatini , kakak Mutiara Lestari, Adik Setiadi Damar Jati, serta keluarga besar Mento Wiharjo dan Rejomarto yang telah total mendoakan kelancaran skripsi ini.
- Friday in Pit (Farah, Rhida, Indri, Dhilla, Atikah, Yusi, Nisa, Putri, Iren, Tri) dan Lina , thanks buat persahabatan yang indah ini muaahh.
- Kibo, Kibi, Meyong dan semua kucing tersayang yang selalu memberikan semangatnyaa .
- Keluarga besar Matsub 2009 atas kebersamaan yang telah diberikan selama ini dan bantuan serta berbagai masukan untuk skripsi ini.

PENURUNAN PERSAMAAN BENJAMIN BONA MAHONNY (BBM) PADA GELOMBANG SOLITER DALAM SISTEM DISPERSIF NON LINEAR DAN SOLUSI EKSAKNYA

Oleh Intan Damayanti

NIM. 09305141024

ABSTRAK

Persamaan Benjamin Bona Mahonny adalah persamaan diferensial parsial non linear. Tugas akhir skripsi ini bertujuan untuk memodelkan gelombang soliter kedalam bentuk matematika yaitu menurunkan menjadi Persamaan BBM dan mencari solusi eksak dari Persamaan BBM dengan menggunakan Metode Gelombang Berjalan.

Gelombang soliter memiliki efek non dispersif. Non dispersif artinya tidak ada perubahan bentuk, namun sebenarnya gelombang soliter ini terjadi perubahan bentuk yang sangat kecil sehingga diabaikan. Asumsi bahwa gelombang memiliki kecepatan konstan $c_o > 0$.

Hasil dari pemodelan gelombang soliter yang diperoleh adalah Persamaan BBM yaitu

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

dan solusi eksak untuk persamaan BBM dengan metode gelombang berjalan yaitu

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\ (x - ct)\right]$$

Kata kunci: Gelombang Soliter, Persamaan Benjamin Bona Mahonny, Metode Gelombang Berjalan, Efek non dispersif.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul "Penurunan Persamaan Benjamin Bona Mahonny (BBM) Pada Gelombang Soliter Dalam Sistem Dispersif Non Linear dan Solusi Eksaknya" ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan guna memperoleh gelar sarjana.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan karena bantuan, dukungan, saran, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan rasa terimakasih secara tulus kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan FMIPA UNY yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan studi.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan arahan, saran, dan motivasi dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Koordinator Program Studi Matematika yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
4. Ibu Nikenasih Binatari, M.Si selaku Dosen Pembimbing yang dengan sabar telah memberikan bimbingan dan motivasi dari awal sampai terselesaikannya penulisan skripsi ini.

5. Bapak Dr. Hartono, Bapak Kus Prihantoso K, M.si, Ibu Fitriana Yuli S., M.Si sebagai dewan penguji dalam ujian skripsi yang telah memberi kritik dan saran demi peningkatan kualitas skripsi ini.

6. Seluruh Dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY beserta staf pendukungnya yang telah memberikan ilmu dan pengetahuan selama penulis menempuh studi.

7. Semua pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu demi satu yang telah membantu dan memberikan dukungan moral, bantuan, dan dorongan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.

Penulis bersedia menerima kritik dan saran yang membangun demi kesempurnaan skripsi ini. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat berguna dan bermanfaat bagi penulis serta pembaca.

Yogyakarta, 26 Juni 2014

Penulis,

Intan Damayanti

NIM. 09305141024

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$u(x,t)$: Simpangan Gelombang

t : Waktu

x : Posisi atau Jarak

c : Kecepatan Gelombang

λ : Panjang Gelombang

f : frekuensi

ω : Frekuensi Sudut

$h_0(x)$: Amplitudo pada x

ξ : Koordinat Gerak Gelombang

k : Angka Gelombang

c_0 : Kecepatan Gelombang

L : Transformasi Linear

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Laut terdiri dari lapisan-lapisan air yang yang memiliki rapat massa jenis yang berbeda. Akibat perbedaan rapat massa ini, sehingga terbentuklah suatu gelombang. Gelombang merupakan bentuk gerakan air laut yang paling dan mudah diamati. Gelombang laut adalah peristiwa naik turunnya permukaan laut secara vertikal yang membentuk kurva/grafik sinusoidal. Gelombang laut berbentuk gelombang transfersal dengan membentuk lembah dan puncak yang berbeda dengan gelombang longitudinal yang mempunyai regangan dan rapatan (Taufik, 2001:24).

Mekanisme fisik untuk masing-masing proses dari gelombang-gelombang dapat berbeda, tetapi semuanya mempunyai gejala umum bahwa gelombang-gelombang tersebut disebabkan adanya gangguan fisik yang tidak putus-putus dan merambat melalui suatu medium. Ada berbagai macam jenis gelombang di alam semesta. Salah satunya adalah gelombang nonlinear yaitu gelombang yang merambat karena ada pengaruh nonlinear dan biasanya terjadi di laut dangkal . Soliton adalah sebuah gelombang nonlinear yang memiliki sifat:

1. Terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk maupun kecepatan.
2. Stabil melawan tumbukan dan mempertahankan identitasnya.

Sifat pertama merupakan kondisi gelombang soliter (*solitary waves*) yang dikenal dalam hidrodinamika sejak abad ke-19 (Drazin, 1992:15).

Penemuan gelombang soliter ini tidak terlalu diperhatikan sampai dengan dasawarsa pertengahan tahun 1960, ketika eksistensi dari gelombang soliter menjadi penting pada penelitian-penelitian tentang sistem non linear (Dod, 1988:45).

Gelombang soliter adalah gelombang yang mempunyai bentuk tetap, teratur, tak terdispersi. Kecepatan perambatan soliter sangat tergantung pada besar kecilnya amplitudo yang ia miliki. Semakin besar amplitudo suatu soliter, semakin cepat perambatannya. Jadi jika ada dua gelombang soliter yang merambat dengan amplitudo yang berbeda dimana soliter dengan amplitudo lebih besar berada di belakang, maka pada suatu saat kedua soliter tersebut berinteraksi setelahnya akan kembali kebentuk semula. (Sandi, 1994:114).

Gelombang soliter ini dapat di modelkan menjadi Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear. Salah satunya adalah Persamaan Korteweg de Vries (KdV). Bentuk dari persamaan KdV yaitu

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0$$

Persamaan KdV ini merupakan suatu Persamaan bagi gelombang yang panjang gelombangnya lebih besar daripada amplitudonya.

Ada model lain untuk gelombang panjang pada kelas sistem dispersif nonlinear ini yaitu Persamaan Benjamin Bona Mahony (BBM). Pada tahun 1972, Persamaan BBM dianggap sebagai solusi yang tepat bagi Persamaan KdV. Sejak saat itu, untuk berbagai Persamaan BBM dengan masalah nilai batas dan masalah nilai awal dipelajari secara ekstensif. Dengan demikian, apabila ada kelemahan pada Persamaan KdV, masih ada model alternatif yang dapat digunakan.

Persamaan BBM pertama kali diperkenalkan oleh Benjamin sebagai perbaikan dari Persamaan KdV untuk pemodelan gelombang panjang dengan amplitudo berhingga yang menunjukkan stabilitas dan keunikan solusi untuk Persamaan BBM. Hal ini kontras dengan Persamaan KdV, yang tidak stabil dalam tinggi Gelombang.

Persamaan BBM merupakan Persamaan diferensial parsial nonlinear yang berbentuk

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

Benjamin Bona Mahonny menyatakan bahwa Persamaannya tetap menggambarkan fenomena fisik yang sama dengan Persamaan KdV.

Persamaan KdV dan BBM ini sudah banyak yang meneliti akan tetapi penyajiannya hanya berupa rangkuman dan pembahasannya belum mendalam serta sulit untuk dipahami. Sebagai contoh Bona, Pritchard, Scoot (1985) hanya meneliti solusi numerik Persamaan BBM dengan salah satu metode yang dikenalnya. Oleh karena itu perlu adanya *study* literatur yang mudah dipahami, maka dalam skripsi ini akan membahas model matematika Persamaan BBM pada gelombang soliter yang disertai dengan solusi eksak.

B. Identifikasi Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang dipaparkan diatas, dapat diindentifikasikan masalah-masalah antara lain gelombang soliter ini mengalami perubahan bentuk namun sangat kecil sehingga diabaikan, Persamaan Benjamin

Bona Mahonny ini adalah persamaan diferensial parsial nonlinear sehingga untuk mencari solusi eksaknya dengan metode khusus.

C. Batasan Masalah

Pemodelan Gelombang soliter menghasilkan Persamaan Benjamin Bona Mahonny saja. Gelombang ini memiliki pola yang tetap ketika merambat namun sebenarnya ada perubahan yang sangat kecil sehingga diabaikan. Kecepatan gelombang diasumsikan konstan. Metode yang digunakan untuk mencari solusi Persamaan Benjamin Bona Mahonny adalah Metode gelombang berjalan.

D. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana penurunan Persamaan Benjamin Bona Mahony pada gelombang soliter dalam sistem dispersif non linear ?
2. Bagaimana solusi eksak Persamaan Benjamin Bona Mahony ?

E. Tujuan Penulisan

1. Memahami penurunan Persamaan Benjamin Bona Mahony pada gelombang soliter dalam sistem dispersif non linear.
2. Mendapatkan solusi eksak Persamaan Benjamin Bona Mahony.

F. Manfaat Penulisan

1. Bagi mahasiswa, dapat memperdalam pemahaman tentang Persamaan Benjamin Bona Mahony dan gelombang soliter.
2. Bagi universitas, dapat memberikan tulisan yang bermutu dan berbobot tentang model matematika Persamaan Benjamin Bona Mahony pada gelombang soliter.
3. Bagi pembaca, dapat memberikan tambahan refrensi mengenai Persamaan gelombang, khususnya mengenai Persamaan Benjamin Bona Mahony.

BAB II

LANDASAN TEORI

A. Pemodelan Matematika

Definisi 2.1 Pemodelan Matematika (Meyer, 1984:1)

Pemodelan matematika adalah suatu cara untuk mendeskripsikan beberapa fenomena dalam kehidupan nyata dalam istilah matematika (secara matematika). Pemodelan matematika telah banyak diterapkan di bidang fisika, biologi, ilmu sosial yang pada pembuatannya banyak menggunakan kalkulus, algoritma, geometri maupun ilmu lain dalam matematika.

Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika.

Definisi 2.2 Model Matematika (Meyer, 1984:3)

Model adalah sebuah objek atau konsep yang digunakan untuk mempresentasikan atau menggambarkan suatu hal dengan skala kecil dan mengubah ke bentuk yang dapat dipahami.

Pemodelan Matematika dapat dirumuskan melalui beberapa langkah. Menurut Meyer (1984:12), ada tiga tahap dalam pemodelan matematika, yaitu: perumusan, manipulasi matematika, dan evaluasi.

a. Perumusan

   Perumusan dibagi dalam tiga langkah yaitu :

   1) Dimulai dengan sebuah pertanyaan.

2) Mengenali faktor-faktor yang saling berhubungan yaitu dengan mengenali faktor-faktor yang saling berhubungan dengan memutuskan mana yang termasuk faktor penting dan mana faktor yang dapat diabaikan dalam pertanyaan.
3) Deskripsi atau gambaran matematika. Setiap faktor penting tersebut dapat dipresentasikan dengan elemen matematika yang sesuai, misalnya : variabel, fungsi, gambar geometri, dan sebagainya. Setiap hubungan dapat dipresentasikan dengan persamaan, pertidaksamaan atau asumsi matematika yang cocok.

b. Manipulasi matematika

Perumusan matematika jarang memberikan jawaban secara langsung sehingga perlu adanya proses matematika yang meliputi perhitungan, penyelesaian persamaan, pembuktian teorema, dan sebagainya.

c. Evaluasi

Dalam memutuskan apakah suatu model standar atau tidak, banyak hal yang perlu diperimbangkan, yang terpenting model dapat menjawab pertanyaan secara tepat. Jika jawaban yang diberikan tidak cukup tepat karena pemodelan yang tidak sesuai maka sumber atau dasar pemikirannya perlu diteliti kembali. Dapat juga kesalahan berasal dari manipulasi matematikanya. Namun kebanyakan kasus yang membutuhkan suatu rumusan yang baru. Setelah dibuat rumusan yang baru, perlu dilakukan manipulasi matematika dan evaluasi.

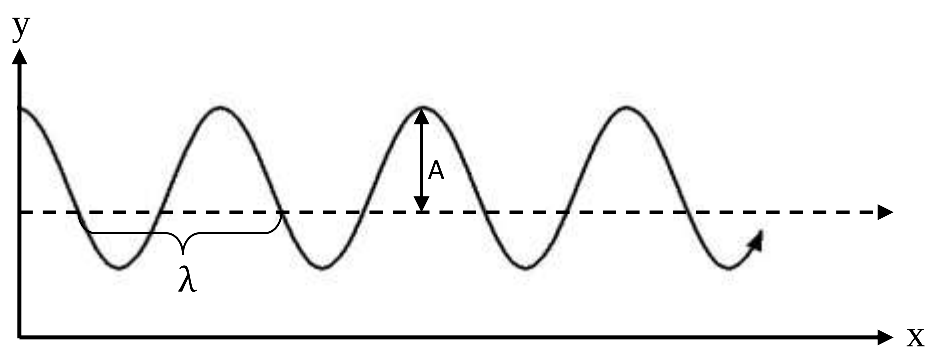
B. Gelombang berjalan

Gerak gelombang muncul hampir di tiap cabang fisika diantaranya gelombang air, gelombang cahaya, gelombang bunyi, dan lain-lain.

<u>Definisi 2.3 Gelombang (Taufik, 2001:24)</u>

Gelombang adalah suatu gangguan yang menjalar dengan kecepatan tertentu.

Gerak gelombang dapat dipandang sebagai perpindahan energi dan momentum tanpa perpindahan materi. Satu gelombang terdiri atas titik puncak dan dasar. Berikut ilustrasi gelombang



Gambar 2.1. Bentuk Gelombang

Panjang gelombang (λ) menyatakan jarak yang ditempuh gelombang dalam waktu satu periode. Periode (T) adalah waktu yang diperlukan gelombang untuk berjalan sejauh satu panjang gelombang. Satuan dari periode adalah detik atau sekon. Frekuansi (f) adalah banyaknya gelombang yang dihasilkan dalam satu detik. Amplitudo (A) adalah ketinggian maksimum suatu puncak, atau kedalaman lembah, relatif terhadap posisi normal.

Gelombang jika dilihat dengan meninjau bagaimana gerak partikel materi dihubungan kepada arah penjalaran gelombang itu sendiri dapat diklasifikasikan menjadi dua yaitu gelombang transfersal dan gelombang longitudinal.

Definisi 2.4 Gelombang Transfersal (Pantur, 1986:610)

Gelombang tranfersal adalah gelombang yang gerakan partikel materinya tegak lurus pada arah rambatan gelombang itu sendiri.

Contoh dari gelombang transfersal adalah gelombang cahaya, gelombang pada tali, dan gelombang permukaan air.

Definisi 2.5 Gelombang Longitudinal (Pantur, 1985:612)

Gelombang longitudinal adalah gelombang yang gerakan partikel materinya bolak-balik sepanjang arah rambatan gelombang itu sendiri.

Contoh dari gelombang longitudinal adalah gelombang bunyi yang dapat merambat pada medium padat, cair, atau gas.

Gelombang dapat juga diklasifikasikan menjadi dua yaitu gelombang mekanik dan gelombang elektromagnetik berdasarkan medium yang dilaluinya.

Definisi 2.6 Gelombang Mekanik (Goris, 2009:147)

Gelombang mekanik adalah gelombang yang memerlukan medium dalam perambatannya.

Medium dari gelombang mekanik ini tidak ikut bergerak bersama gerak gelombang, tetapi hanya berisolasi dalam ruang atau lintasan yang terbatas. Gelombang ini seperti gelombang bunyi, gelombang pada tali, gelombang pada pegas, gelombang permukaan air, dll.

Definisi 2.7 Gelombang Elektromagnetik (Goris, 2009:147)

Gelombang elektromaknetik adalah gelombang yang tidak memerlukan medium dalam perambatannya.

Contoh gelombang elektromagnetik adalah gelombang cahaya, gelombang radio, gelombang tv, dll.

Selain itu gelombang dapat diklasifikasikan berdasarkan amplitudonya, yaitu gelombang berjalan dan gelombang stasioner.

Definisi 2.8 Gelombang Berjalan (Goris, 2009:147)

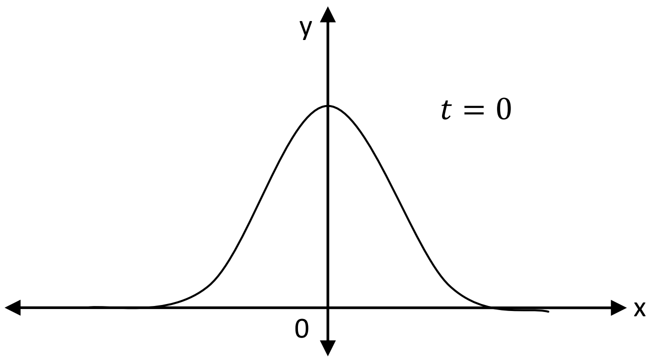
Gelombang berjalan adalah gelombang yang amplitudonya selalu sama atau tetap di setiap titik, hanya bergerak/bergeser ke kanan atau ke kiri.

Definisi 2.9 Gelombang Stasioner (Goris, 2009:147)

Gelombang stasioner adalah gelombang yang amplitudonya tidak tetap pada titik yang dilewatinya.

Gelombang merupakan gejala perambatan gangguan, untuk melukiskan sifat-sifat umum dari gelombang, digunakan gelombang transfersal dalam sebuah tali. Dengan meninjau sebuah tali yang panjang yang diregangkan dalam arah x sepanjang sebuah gelombang transfersal yang sedang berjalan, pada saat $t = 0$.

$$y = f(x) \text{ dengan } t = 0$$

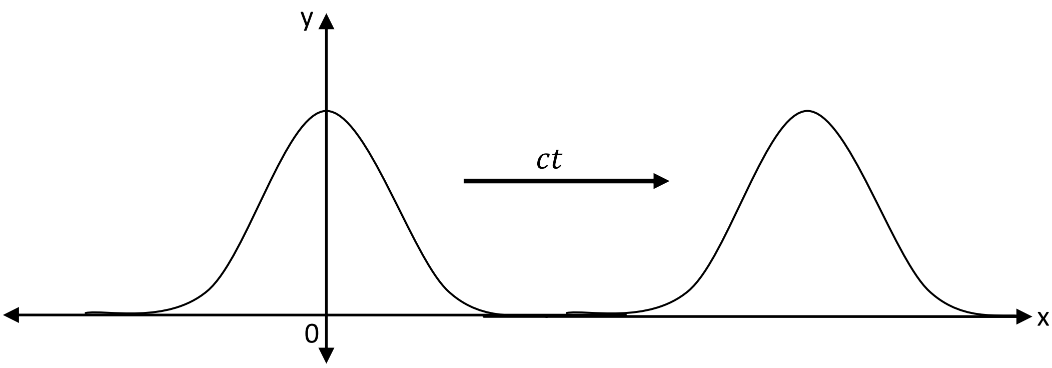


Gambar 2.2. Kurva Gelombang saat t =0

Dengan bertambahnya waktu maka gelombang akan berjalan sepanjang tali tanpa merubah bentuknya. Pada waktu t, gelombang tersebut telah berjalan sejauh ct ke kanan dimana c adalah besarnya kecepatan gelombang yang dianggap konstan. Maka Persamaan kurva pada waktu t adalah

$$y = f(x - ct) \tag{2.1}$$

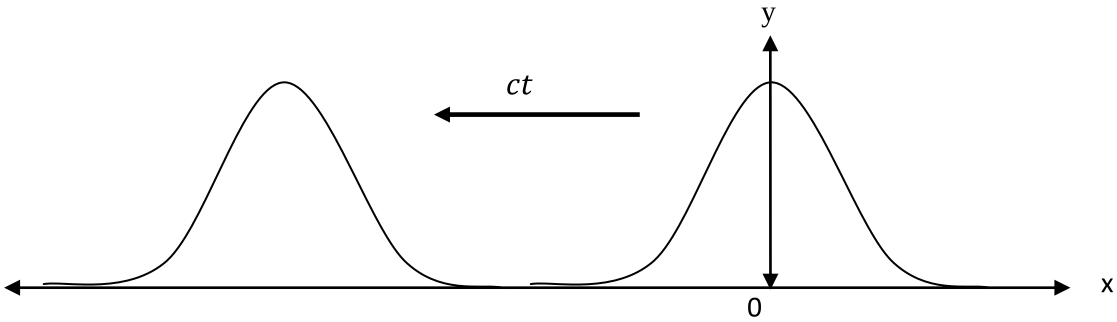
yang diilustrasikan seperti gambar dibawah ini



Gambar 2.3. Kurva Gelombang kekanan sejauh ct

Persamaan (2.1) adalah Persamaan umum yang menyatakan sebuah gelombang yang bentuknya sebarang dan berjalan ke kanan. Jika gelombang berjalan kekiri atau dipindahkan kekiri sejauh ct maka Persamaan menjadi

$$y = f(x + ct) \tag{2.2}$$



Gambar 2.4. Kurva Gelombang kekiri sejauh ct

Misal ξ koordinat gerak gelombang dengan $\xi = x \pm ct$, maka pergeserannya terhadap waktu haruslah memenuhi

$$\frac{d\xi}{dt} = 0$$

$$dx \pm cdt = 0$$

$$c = \pm \frac{dx}{dt}$$

C. Turunan Parsial

Jika f fungsi dua variable x dan y maka :

1. Turunan parsial $f(x,y)$ terhadap x ,berarti peubah y dalam $f(x,y)$ dianggap konstan yang dinotasikan dengan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ atau $f_x(x,y)$, didefinisikan sebagai :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, \Delta y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

   asalkan limitnya ada. Notasi lain untuk turunan parsial terhadap x jika $z = f(x,y)$ antara lain

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x = D_x f$$

2. Turunan parsial $f(x,y)$ terhadap y, berarti peubah x dalam $f(x,y)$ dianggap konstan yang dinotasikan dengan $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ atau $f_y(x,y)$, didefinisikan sebagai :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

   asalkan limitnya ada. Notasi lain untuk turunan parsial terhadap y jika $z = f(x,y)$ antara lain

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y = D_y f \quad \text{(I Nyoman Susila, 1999: 352 − 353)}$$

Seringkali suatu fungsi dapat dinyatakan dengan fungsi $u(x,t)$. Sehingga turunan parsial pertama dari $u(x,t)$ terhadap x didefinisikan sebagai

$$u_x(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}, \text{ asalkan limitnya ada.}$$

Turunan parsial kedua dari $u(x,t)$ terhadap x didefinisikan sebagai:

$$u_{xx}(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x}, \text{ asalkan limitnya ada.}$$

Turunan parsial ketiga dari $u(x,t)$ terhadap x didefinisikan sebagai:

$$u_{xxx}(x,t) = \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^3} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_{xx}(x+\Delta x, t) - u_{xx}(x,t)}{\Delta x}, \text{ asalkan limitnya ada.}$$

Aturan untuk mencari turunan parsial dari $z = f(x,y)$ adalah

1. Untuk mencari f_x, pandang y sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x,y)$ terhadap x.
2. Untuk mencari f_y, pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x,y)$ terhadap y.

Contoh :

Akan dicari turunan parsial terhadap x dan y jika $f(x,y) = x\ \sin y$

Penyelesaian :

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)\sin y - x(\sin y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x\sin y + \Delta x \sin y - x \sin y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \sin y}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \sin y$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \sin(y + \Delta y) - x \sin y}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \sin y \cos \Delta y + x \cos y \sin \Delta\, y - x \sin y}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \sin y (\cos \Delta y - 1) + x \cos y \sin \Delta y}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x \sin y (\cos \Delta y - 1)}{\Delta y} + \frac{x \cos y \sin \Delta y}{\Delta y}$$

$$= x \sin y \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cos \Delta y - 1}{\Delta y} + \frac{x \cos y \sin \Delta y}{\Delta y}$$

$$= x \sin y \,.\, 0 + \frac{x \cos y \sin \Delta y}{\Delta y}$$

$$= 0 + \frac{x \cos y \sin \Delta y}{\Delta y}$$

$$= x \cos y$$

D. Gelombang Soliter

Definisi 2.10 Gelombang Soliter (Sandi, 1994:112)

Gelombang soliter adalah gelombang yang mempunyai bentuk permanen, teratur, tak terdispersi.

Kecepatan perambatan soliter sangat tergantung pada besar kecilnya amplitudo yang ia miliki. Semakin besar amplitudo suatu gelombang soliter, semakin cepat perambatannya. Jadi jika ada dua gelombang soliter yang merambat dengan amplitudo yang berbeda dimana soliter dengan amplitudo lebih besar berada dibelakang, maka pada suatu saat kedua soliter tersebut berinteraksi setelahnya akan kembali ke bentuk semula.

Gelombang soliter biasanya disebut juga dengan gelombang tunggal karena gelombang berjalan ini hanya terdiri dari satu puncak gelombang. Apabila gelombang memasuki perairan yang sangat dangkal, amplitudo gelombang menjadi semakin tinggi, puncaknya menjadi semakin tajam dan lembahnya menjadi semakin datar. Gelombang tunggal merupakan gelombang translasi, di mana kecepatan partikel air hanya bergerak dalam arah penjalaran gelombang (Sandi, 1994:113).

Bila kedua gelombang soliter bertumbukan, masing masing tidak akan mengalami perubahan karena tumbukan ini. Jika gelombang ini bertemu dengan anti gelombangnya (non soliter), maka keduanya akan teranhilasi (hancur). Pada mulanya, sederetan gelombang soliter dan gelombang nonsoliter saling mendekat. Gelombang nonsoliter bergerak lebih cepat sehingga memiliki energi yang lebih besar. Ketika kedua gelombang tersebut bertemu, keduanya teranihilasi dan segera tercipta pasangan soliter dan nonsoliter yang lain (Sandi, 1994:114).

Gambar 2.5 Gelombang Soliter

Gambar 2.6 Gelombang Soliter saat bertumbukan

E. Metode Gelombang Berjalan

Persamaan Benjamin Bona Mahony (BBM) pertama kali diperkenalkan oleh Benjamin sebagai perbaikan dari Korteweg-de Vries Persamaan (KdV) untuk pemodelan gelombang panjang dengan amplitudo yang konstan di dimensi 1. Persamaan BBM ini mempunyai solusi eksak yang dapat dicari dengan menggunakan metode gelombang berjalan. Gelombang berjalan ini bisa juga disebut dengan gelombang soliter. Gelombang soliter yaitu suatu gelombang yang mempunyai periode yang sangat panjang, jauh lebih besar dari amplitudonya. Eksistensi gelombang soliter untuk Persamaan BBM merupakan akibat dari adanya keseimbangan antara pengaruh suku nonlinear dengan suku dispersif pada Persamaan tersebut .

Beberapa Persamaan diferensial parsial yang mempunyai solusi dalam bentuk gelombang berjalan antara lain Persamaan gelombang satu dimensi, Persamaan Korteweig de Vries , serta Persamaan Benjamin Bonna Mahony.

Metode gelombang berjalan adalah suatu metode yang digunakan untuk mencari penyelesaian gelombang berjalan dari Persamaan differensial parsial yang diberikan.

Penyelesaian $u(x,t)$ dari Persamaan differensial parsial disebut penyelesaian gelombang berjalan dengan kecepatan $c > 0$, yaitu jika ada fungsi $f: R \to R$ sedemikian sehingga $u(x,t) = f(x - ct) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$ untuk setiap $x \in R$ (Sumardi, 1999:5-6).

Penyelesaian gelombang berjalan $u(x,t)$ sebagai penyelesaian Persamaan differensial parsial dapat juga dinyatakan dengan $u(x,t) = f(x - ct)$.

Ciri-ciri penyelesaian gelombang berjalan :

1. Tidak terjadi perubahan bentuk, namun dalam gelombang soliter terjadi perubahan bentuk namun sangat kecil sehingga terkadang diabaikan.

   Bentuk gelombang berjalan pada waktu t detik sama dengan bentuk gelombang yang diberikan oleh $u = f(x)$, yang hanya mengalami pergeseran saja. Jika $u(x,t) = f(x - ct)$ dengan c yang negatif maka gelombang merambat ke kiri sedangkan jika c positif maka gelombang berjalan ke kanan.
2. Periodik dalam waktu

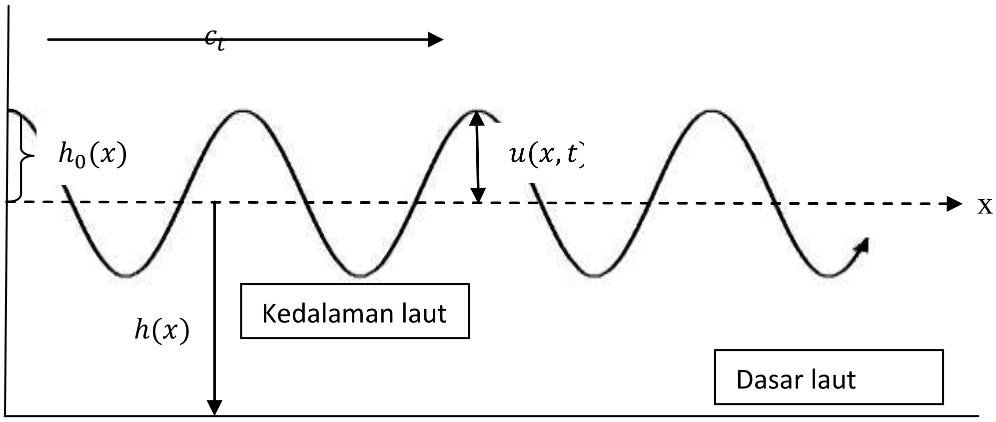
   Dikarenakan $u(x,t) = f(x - ct) = f(x + ct)$ untuk setiap t maka penyelesaian gelombang berjalan periodik terhadap waktu dengan periode ct. Karakteristik dari gelombang adalah bersifat periodik dan berulang-ulang.

Salah satu strategi yang umum digunakan dalam menyelesaikan Persamaan diferensial parsial adalah menetapkan tebakan yang masuk akal dan langkah-langkah tertentu. Dalam penyelesaian Persamaan differensial parsial dengan metode penyelesaian gelombang berjalan diperlukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengandaikan bahwa penyelesaian dari Persamaan diferensial parsial tersebut adalah $u(x,t) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$ dan dengan c adalah kecepatan gelombang.
2. Mensubstitusikan $u(x,t) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$ tersebut dalam Persamaan diferensial parsial yang diberikan.
3. Mencari penyelesaian dari Persamaan diferensial yang tersubstitusi.
4. Mentransfer kembali ke $u(x,t)$.

F. Gerak gelombang

Gelombang dipantai dapat dilihat sebagai fenomena gerak permukaan air laut yang naik turun. Oleh karena itu untuk melukiskan gelombang secara kualitatif adalah menggunakan ketinggian permukaan gelombang yang dinyatakan dengan u yang bergerak secara periodik naik dan turun. Misal u adalah fungsi waktu yang periodik bila diamati dari suatu titik diam dengan ω adalah frekuensi sudut gerak periodik dan $h_0(x)$ adalah amplitude atas x. Dapat dilukiskan gerak periodik ini dalam waktu sebagai berikut :



Gambar 2.7. Ilustrasi Gerak gelombang

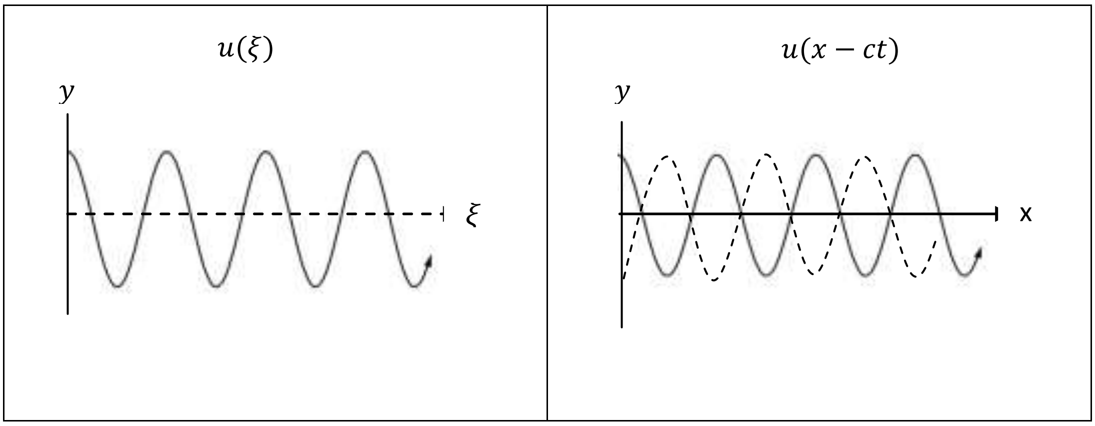
$$u(x,t) = h_0(x)\cos\omega t \tag{2.10}$$

Jika dilihat gerak gelombang saat mendekati pantai, tidak ada perubahan bentuk gelombang yang berarti sebagai fungsi waktu. Jika kecepatan gerak gelombang dinyatakan dengan c dan x adalah koordinat yang diam terhadap kerangka acuan yaitu pantai, maka koordinat ξ yang bergerak bersama gelombang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\xi = x - ct \tag{2.11}$$

Dalam pergerakannya gelombang menunjukkan bahwa bentuknya tidak berubah dalam sistem ξ dan menunjukkan bahwa ketinggian gelombang u dapat digambarkan dengan suatu fungsi koordinat ξ saja, tanpa waktu t.

Dapat dilihat bahwa gelombang juga bersifat periodik dalam kooordinat ξ



Gambar 2. 8 Gerak Gelombang $u(\xi)$ dan $u(x - ct)$

Jika menuliskan fungsi periodik ini sebagai

$$u(\xi) = h_0(x) cos\ k\xi \tag{2.12}$$

dengan k adalah angka gelombang. Panjang gelombang (λ) dan angka gelombang (k) terhubung oleh

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.13}$$

hubungan ini bisa dipahami mengingat fase gelombang berubah dari 0 ke 2π bila ξ berubah dari 0 ke λ.

Jika melukiskan ξ dalam koordinat diam x, menggunakan Persamaan (2.10) dan Persamaan (2.12) maka diperoleh :

$$u(x, t) = h_0 \cos k(x - ct)$$

$$= h_0 \cos(kx - kct) \tag{2.13}$$

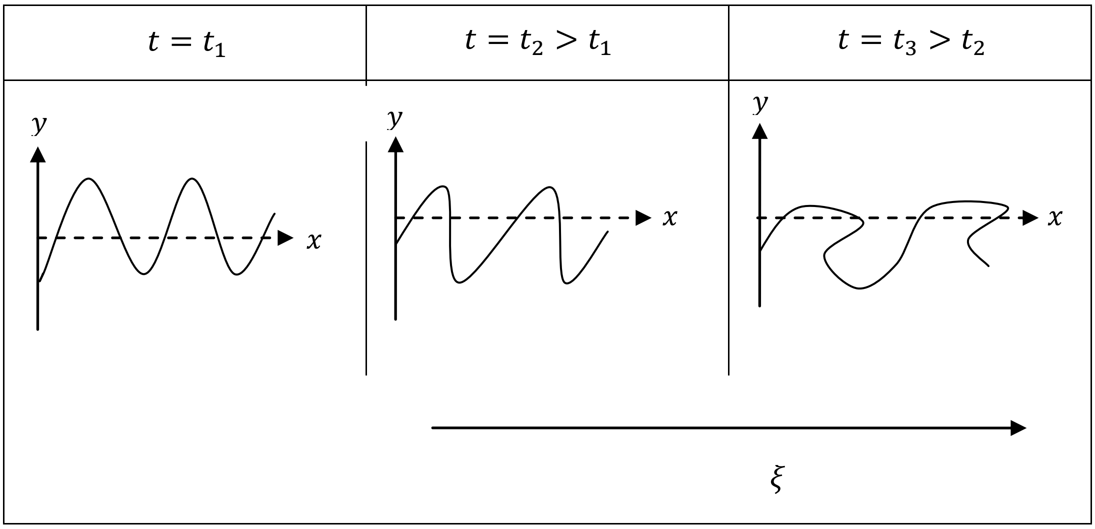
Jika membandingkan (2.13) dan (2.10), terlihat bahwa :

$$kc = \omega \tag{2.14}$$

Kuantitas $c = \omega/k$ disebut kecepatan rambat gelombang, yaitu kecepatan fase gelombang c, kecepatan berpindah dari puncak gelombang. Untuk gelombang dengan periode T puncak gelombang berpindah sejauh panjang gelombang λ, dalam waktu ct. Dalam hal ini kecepatan rambat gelombang $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$.

G. Efek ketaklinearan dan dispersi gelombang

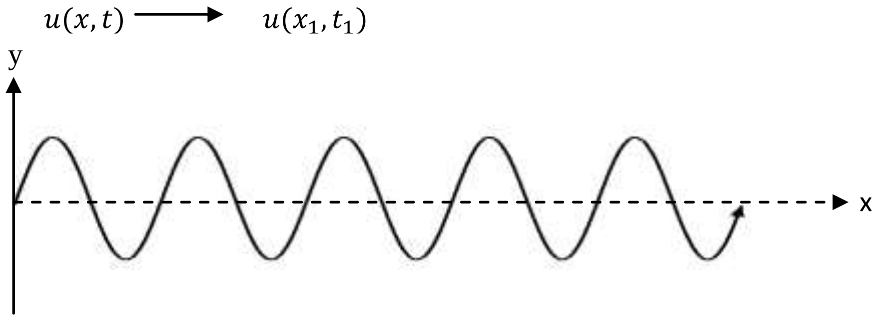
Pada saat gelombang mendekati pantai, bentuk gelombang berubah secara bertahap dari sinusioda ke bentuk segitiga yang lebih lancip, ini akibat dari sifat ketaklineran gelombang, yaitu puncak gelombang yang bergerak lebih cepat dari bagian bawah, yang bisa digambarkan sebagai berikut :



Gambar 2.9. Penajaman gelombang permukaan air dalam koordinat ξ karena ketaklinieran (Hasegawa Akira, 1990)

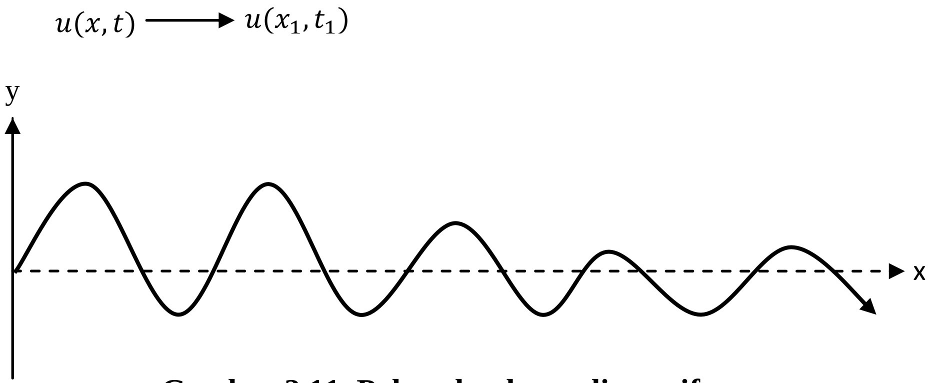
Pada saat gelombang mendekati pantai dan efek ketaklinieran diperkuat maka akibatnya gelombang akan rusak karena kelajuan perambatan bergantung pada ketinggian gelombang. Fenomena ini menunjukkan adanya efek ketaklinieran.

Gelombang juga mempunyai efek dispersi, yaitu efek yang menyebabkan kecepatan fase yang bergantung pada angka gelombang. Sedangkan gelombang dengan kecepatan yang konstan dan tak bergantung pada frekuensi disebut dengan gelombang non dispersif. Gelombang ini mempunyai pola yang tetap ketika merambatnya. Bila gelombang ini berubah pulsa, akan merambat tanpa mengalami perubahan seperti gambar 2.10 berikut :



Gambar 2.10. Pola gelombang non dispersif

Pada gelombang dispersif mengalami perubahan bentuk saat perambatannya, seperti pada gambar 2.11 :

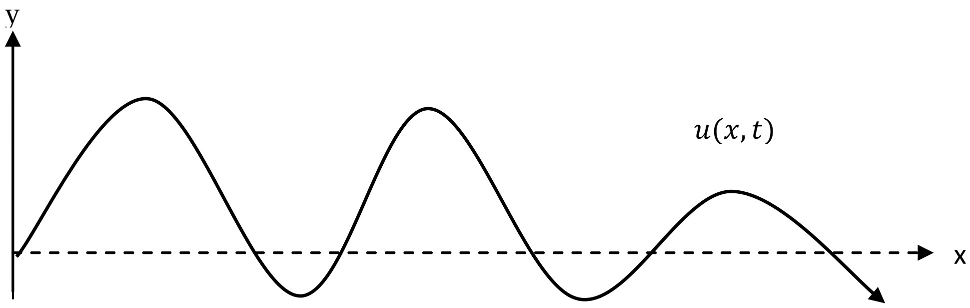


Gambar 2.11. Pola gelombang dispersif

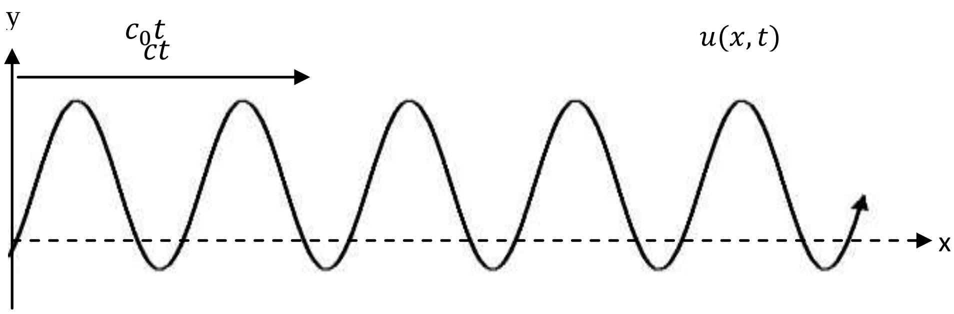
Gelombang soliter selain merupakan gelombang yang bersifat stabil tetapi juga tak terdispersi dan teralokasi atau berbentuk pulsa gelombang. Dalam hal ini gelombang soliter muncul dari penyelesaian Persamaan diferensial parsial tak linear. Dua komponen penting dalam Persamaan diferensial parsial nonlinear adalah dispersi dan ketaklinieran. Selanjutnya dari perpaduan kedua komponen tersebut diperoleh gelombang soliter.

Bila kedua gelombang soliter bertumbukan, masing masing tidak akan mengalami perubahan karena tumbukan ini. Jika gelombang ini bertemu dengan anti gelombangnya (nonsoliter), maka keduanya akan teranhilasi (hancur). Pada mulanya, sederetan gelombang soliter dan gelombang nonsoliter saling mendekat. Gelombang nonsoliter bergerak lebih cepat sehingga memiliki energi yang lebih besar. Ketika kedua gelombang tersebut bertemu, keduanya teranihilasi dan segera tercipta pasangan soliter dan nonsoliter yang lain.

Pada gambar 2.10 dan gambar 2.11 ditampilkan gelombang yang sangat terbatasi oleh dispersi karena komponen-komponennya memiliki panjang gelombang berbeda yang merambat dengan laju yang berbeda pula, karena dispersi pada gelombang biasa yang ditunjukkan pada gambar 2.12 akan berkecenderungan untuk memipih dan menyebar bila bergerak. Pada gambar 2.13 yaitu gelombang soliton merupakan gelombang yang tidak terdisipasi karena pengaruh dispersi tidak ada. Oleh karena itu gelombang soliton merupakan gelombang nonlinear yang tidak terdispersi dan juga tidak mengalami disipasi (Sandi, 1994:114)



Gambar 2.12. Gelombang biasa yang terdisipasi



Gambar 2.13. Gelombang Non Disipasi

H. Fungsi Periodik

Definisi 2.10 Fungsi Periodik (Humi dan Miller, 1992:66)

Jika sebuah fungsi $f(x)$ *terdefinisi untuk semua* x *dan* $f(x) = f(x + p)$ *dengan* $p \neq 0$ *maka fungsi* f *dikatakan sebagai fungsi periodik dengan periode* p.

Fungsi sinus dan kosinus adalah fungsi periodik dengan periode 2π, sedangkan fungsi tangen mempunyai periode π. Sebagai contoh fungsi sinus dapat dituliskan $\sin(x + 4\pi) = \sin x$, $\sin(x + 6\pi) = \sin x$.

I. Persamaan Diferensial Parsial

Dalam penulisan ini Persamaan diferensial parsial diterapkan dalam memodelkan fenomena gelombang air dangkal. Persamaan diferensial tersebut lebih dikenal dengan nama Persamaan Benjamin Bonna Mahony.

Dalam bagian ini akan dijelaskan tentang pengertian Persamaan differensial parsial dan klasifikasinya .

1. Pengertian Persamaan Diferensial Parsial

Definisi 2.11 Persamaan Diferensial Parsial (Spiegel, 1994:276)

Persamaan diferensial parsial adalah Persamaan yang memuat fungsi dua atau lebih yang independent dan turunan-turunannya parsial terhadap peubah tersebut.

Persamaan diferensial parsial dimuat dalam bentuk

$$F\left(x, u, u_{x_{1,\dots\dots,}} u_{x_n,} u_{x_1 x_2}, \dots \dots, u_{x_i \dots x_k}\right) = 0 \qquad (2.15)$$

dimana :

$$u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad , \qquad u_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

dengan,

F menyatakan suatu fungsi

$x = (x_i, \dots \dots, x_n)$ adalah peubah bebas, dan

$u = u(x_i, \dots \dots, x_n)$

Definisi 2.12 Orde (Humi dan Miller, 1992:36)

Orde dari Persamaan diferensial parsial (2.15) adalah tingkat turunan dari turunan tertinggi yang tampak pada Persamaan tersebut.

Definisi 2.13 Solusi Persamaan Diferensial Parsial (Spigel, 1994:276)

Solusi dari Persamaan diferensial parsial adalah suatu fungsi yang apabila fungsi tersebut disubstitusikan ke Persamaan semula akan mendapatkan pernyataan yang benar.

Didalam Persamaan diferensial parsial terdapat solusi umum dan solusi khusus.

Definisi 2.14 Solusi Umum Persamaan Diferensial Parsial (Spiegel, 1994:276)

Solusi umum dari Persamaan diferensial parsial adalah sebuah solusi yang memuat sejumlah berhingga fungsi bebas sembarang yang banyaknya sama dengan orde Persamaan tersebut.

Definisi 2.15 Solusi Khusus Persamaan Diferensial Parsial (Spiegel, 1994:276)

Solusi khusus dari Persamaan diferensial parsial adalah suatu solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan cara memilih fungsi sebarang secara khusus sesuai dengan syarat batas dan syarat awal yang diberikan.

Mencari solusi dari Persamaan Diferensial Parsial dapat menggunakan Metode Separation Variable (Metode Variabel Terpisah). Tujuannya adalah untuk menyederhanakan Persamaan Diferensial Parsial ke dalam sejumlah persamaan diferensial biasa. Berikut contoh persamaan diferensial parsial dan solusinya dengan metode variabel terpisah

$$u_t = 4u_{xx} \tag{2.16}$$

Penyelesaian :

Akan dicari solusi persamaan diferensial parsial dalam bentuk

$$u(x,t) = X(x)\,T(y) \tag{2.17}$$

selanjutnya dengan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = TX" \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial t} = XT'$$

dari bentuk diatas maka Persamaan (2.16) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$XT' = 4TX"$$

$$\frac{X"}{X} = \frac{T'}{4T} = P$$

maka

$$\frac{X"}{X} = P \qquad\qquad \frac{T'}{4T} = P$$

<u>Kasus 1</u>

untuk $P = 0$

$\frac{X"}{X} = 0$	$\frac{T'}{4T} = 0$
$X" = 0$	$T' = 0$
$X' = C$	$T(t) = C$
$X(x) = C_1x + C_2$	

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

$$= (C_1x + C_2)C$$

$$= C_1Cx + C_2C$$

$$= b_1x + b_2$$

<u>Kasus II</u>

untuk $P > 0$

misal $P = a^2$

$$\frac{X"}{X} = a^2$$

$$X" = a^2X$$

Persamaan karakteristik $m^2 = a^2$

$$m = \pm a$$

$$X(x) = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax}$$

$$\frac{T'}{4T} = a^2$$

$$T' = 4a^2T$$

Persamaan karakteristik $m = 4a^2$

$$T(t) = Ce^{4a^2t}$$

$$u(x,t) = X(x).T(t)$$

$$= (C_1e^{ax} + C_2e^{-ax})Ce^{4a^2t}$$

$$= C_1e^{ax}Ce^{4a^2t} + C_2e^{-ax}Ce^{4a^2t}$$

$$= b_1e^{a(x+4at)} + b_2e^{-a(x+4at)}$$

<u>Kasus III</u>

untuk $P < 0$

misal $P = -a^2$

$\frac{X''}{X} = -a^2$	$\frac{T'}{4T} = -a^2$
$X'' = -a^2 X$	$T' = -4a^2 T$
Persamaan karakteristik $m^2 = -a^2$	Persamaan karakteristik $m = -4a^2$
$m = \pm ai$	$T(t) = Ce^{-4a^2 t}$
$X(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$	

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x).T(t) \\ &= (C_1 \cos ax + C_2 \sin ax)Ce^{-4a^2 t} \\ &= C_1 C\, e^{-4a^2 t} \cos ax + C_2 C e^{-4a^2 t} \sin ax \\ &= b_1 e^{-4a^2 t} \cos ax + b_2 e^{-4a^2 t} \sin ax \end{aligned}$$

2. Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial dapat dibedakan menurut bentuk Persamaannya, yaitu linear dan non linear.

Definisi 2.16 Persamaan Diferensial Linear (Zauderer, 1993:66)

Persamaan diferensial parsial linear adalah persamaan yang koefisien-koefisiennya konstan atau hanya bergantung pada variabel bebas $[f(x, y) = 0]$.

Berdasarkan definisi, Persamaan diferensial parsial linear mempunyai dua ciri khusus, yaitu:

a. Variabel-variabel dependen dan turunan-turunannya paling tinggi pangkat satu.

b. Tidak mengandung bentuk perkalian antar variabel dependen atau turunannya.

Definisi 2.17 Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear (Zauderer,1993 :102)

Persamaan diferensial parsial nonlinear adalah persamaan yang koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua $[f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$.

Salah satu contoh Persamaan diferensial parsial nonlinear yaitu Persamaan Benjamin Bona Mahony yang berbentuk

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

J. Aturan Rantai

Aturan rantai untuk fungsi variabel tunggal memberikan aturan untuk mendiferensialkan fungsi komposit :

Teorema 2.17 (James Stewart, 2003:374)

Andaikan $y = f(x)$ *dan* $x = g(t)$, *dengan* f *dan* g *adalah fungsi yang terdiferensiasi, maka secara tidak langsung* y *adalah fungsi yang terdiferensiasi dari* t *dan*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Untuk fungsi lebih dari satu variabel, aturan rantai mempunyai beberapa versi, masing masing memberikan satu aturan untuk mendiferensialkan fungsi komposit. Versi pertama (teorema 2.17) menangani kasus dimana $z = f(x, y)$ dan setiap variabel x dan y nantinya akan menjadi fungsi variabel t. Ini berarti secara tidak langsung z adalah fungsi t, $z = f(g(t), h(t))$ dan aturan rantai memberikan rumus untuk mendiferensialkan z sebagai fungsi t.

Teorema 2.18 (James Stewart, 2003:375)

Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi dari x dan y yang terdiferensiasi, dengan $x = g(t)$ dan $y = h(t)$ dua-duanya adalah fungsi dari t yang terdiferensiasi. Maka z adalah fungsi dari t yang terdiferensiasi dan

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Bukti :

Perubahan Δt dalam t menghasilkan Δx dalam x dan Δy dalam y. Selanjutnya , menghasilkan perubahan Δz dalam z , dan dalam hal ini

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

dengan $\varepsilon_1 \to 0$ dan $\varepsilon_2 \to 0$ seraya $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, lalu membagi kedua ruas dari Persamaan diatas dengan Δt maka didapatkan

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Sekarang dimisalkan $\Delta t \to 0$, maka $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \to 0$ karena g terdefinisi dan karenanya kontinu dan $\Delta y \to 0$. Selanjutnya karena $\varepsilon_1 \to 0$ dan $\varepsilon_2 \to 0$ maka

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 0 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

karena seringkali menuliskan $\partial z/\partial x$ sebagai ganti $\partial f/\partial x$, mak aturan rantainya juga dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

<u>Teorema 2.20 (James Stewart, 2003:377)</u>

Andaikan $z = f(x, y)$ adalah fungsi dari x dan y yang terdiferensiasi, dengan $x = g(s, t)$ dan $y = h(s, t)$ adalah fungsi dari s dan t yang terdiferensiasi. Maka

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

<u>Teorema 2.21 (James Stewart, 2003:378)</u>

Andaikan bahwa u adalah fungsi dari n variabel antara $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang terdiferensiasi, selanjutnya masing-masing x_j adalah fungsi m varabel $t_1, t_2, \dots, t_m$. Maka u adalah fungsi $t_1, t_1, \dots, t_m$ dan

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

Untuk masing masing $i = 1, 2, \dots, m$

K. Deret Maclaurin

Deret MacLaurin adalah deret kelanjutan dari deret Taylor. Jika $f(x)$ dapat dikembangkan (diekspansikan) menurut deret pangkat dari $(x-a)$, maka

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + ...$$

disebut dengan deret taylor . Namun pada kejadian khusus dimana $a = 0$, deret Taylor untuk f tersebut dinamakan *Deret Maclaurin* untuk f (Purcell, 2004:73). Bentuk deret Maclaurin ini adalah sebagai berikut:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ...$$

Berikut diberikan deret maclaurin penting yang digunakan dalam kalkulus maupun ilmu terapan lainnya. Deret berikut juga dapat digunakan untuk pendekatan integral maupun diferensial suatu fungsi.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$
4. $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + ...$
5. $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 ....$

6. $\ln(1-x) = -\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + ...\right)$

7. $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + ...$

8. $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$

L. Deret Fourier dan Integral Fourier

Deret Fourier

Deret fourier merepresentasikan suatu fungsi periodik $f(x)$ tertentu dengan suatu deret trigonometri. Misalkan $f(x)$ adalah sebuah fungsi periodik dengan periode $2L$. Fungsi $f(x)$ dapay di representasikan dalam bentuk deret fourier sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

di mana koefisien-koefisien fourier a_n dan b_n adalah

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

dengan $n = 1, 2, 3, ...$

Syarat Dirichlet :

1. $f(x)$ didefinisikan dan bernilai tunggal kecuali di sejumlah berhingga titik di dalam (-*L*,*L*).
2. $f(x)$ periodik di luar (-*L*,*L*) dengan periode *2L*.
3. $f(x)$ dan $f'(x)$ kontinu di dalam (-*L*,*L*)

Ketiga syarat di atas yang diharuskan pada $f(x)$ adalah syarat cukup tetapi bukan merupakan syart perlu.

<u>Integral Fourier</u>

Syarat-syarat integral fourier pada $f(x)$ adalah sebagai berikut :

1. $f(x)$ memenuhi syarat syarat Dirichlet di dalam tiap-tiap interval berhingga $(-L, L)$.
2. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ konvergen.

Oleh karena itu teorema integral fourier menyatakan bahwa

$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\{A(\alpha)cos\alpha x + B(\alpha)sin\alpha x\}\, d\alpha$$

dimana $A(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)cos\alpha x\, dx$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sin\alpha x\, dx$$

Hasil Persamaan diatas berlaku jika x adalah sebuah titik kontinuitas dari $f(x)$. Jika x adalah sebuah titik diskontinuitas , maka harus menggantikan $f(x)$

dengan $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ seperti didalam kasus deret fourier. Syarat syarat diatas adalah syarat cukup tetapi bukan merupakan syarat perlu (Spiegel, 1997:300) .

Teorema integral fourier juga dapat ditulis dalam bentuk-bentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)cos\alpha(x-u)dud\alpha$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u}\, du$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u-x)}dud\alpha$$

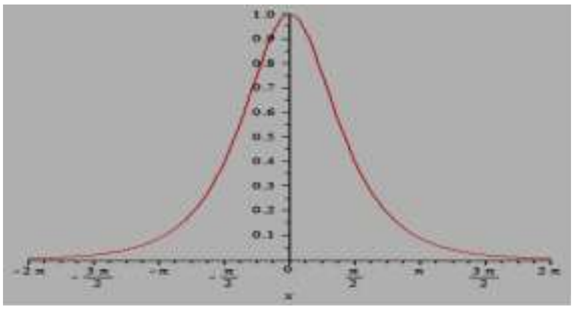
dengan pengertian bahwa jika $f(x)$ tidak kontinu di x maka ruas kiri harus diganti dengan $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

M. Secan Hiperbolik

Fungsi hiperbolik adalah fungsi yang mempunyai sifat yang serupa dengan fungsi trigonometri. Fungsi secan hiperbolik mempunyai bentuk

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

Grafik secan hiperbolik yaitu



Gambar 2.14 Grafik Secan Hiperbolik

BAB III

PEMBAHASAN

A. Pembentukan Persamaan Benjamin Bona Mahonny (BBM)

Ada berbagai macam jenis gelombang di alam semesta ini salah satunya adalah gelombang soliton. Soliton merupakan gelombang yang memiliki sifat:

1. Terlokalisasi dan merambat tanpa perubahan bentuk maupun kecepatan.
2. Stabil melawan tumbukan dan mempertahankan identitasnya.

Sifat pertama menunjukkan kondisi gelombang soliter (*solitary waves*) yang dikenal dalam hidrodinamika sejak abad ke-19.

Gelombang soliter adalah gelombang yang mempunyai bentuk permanen, teratur, tak terdispersi. Kecepatan perambatan soliter sangat tergantung pada besar kecilnya amplitudo yang ia miliki. Semakin besar amplitudo suatu gelombang soliter, semakin cepat perambatannya. Jadi jika ada dua gelombang soliter yang merambat dengan amplitudo yang berbeda dimana soliter dengan amplitudo lebih besar berada dibelakang, maka pada suatu saat kedua soliter tersebut berinteraksi setelahnya akan kembali kebentuk semula (Sandi, 1994:114)

Gelombang soliter biasanya disebut juga dengan gelombang tunggal karena gelombang berjalan ini hanya terdiri dari satu puncak gelombang. Apabila gelombang memasuki perairan yang sangat dangkal, amplitudo gelombang menjadi semakin tinggi, puncaknya menjadi semakin tajam dan lembahnya menjadi semakin datar. Gelombang tunggal merupakan gelombang translasi, di mana kecepatan partikel air hanya bergerak dalam arah rambatan gelombang (Sandi, 1994:113).

Bila kedua gelombang soliter bertumbukan, masing masing tidak akan mengalami perubahan karena tumbukan ini. Jika gelombang ini bertemu dengan anti gelombangnya (non soliter), maka keduanya akan teranhilasi (hancur). Pada mulanya, sederetan gelombang soliter dan gelombang nonsoliter saling mendekat. Gelombang nonsoliter bergerak lebih cepat sehingga memiliki energi yang lebih besar. Ketika kedua gelombang tersebut bertemu, keduanya teranihilasi dan segera tercipta pasangan soliter dan non soliter yang lain (Sandi, 1994:114)

Gelombang soliter memiliki efek non dispersif yaitu gelombang ini memiliki pola yang tetap ketika merambat. Dengan u adalah simpangan gelombang, c_0 adalah kecepatan gelombang yang mendekati konstan, t menyatakan waktu sedangkan x menyatakan jarak.

Diasumsikan gelombang memiliki kecepatan konstan $c_0 > 0$ dengan arah rambatan menuju x positif, maka akan didapat Persamaan

$$u_t + c_0 u_x = 0 \tag{3.1}$$

Jika efek dari panjang gelombang berhingga diabaikan, maka efek nonlinear yang kecil pada rambatan gelombang di arah x positif mengikuti cara berikut. Selanjutnya gelombang soliter merambat tanpa terjadi perubahan bentuk namun ternyata terdapat perubahan bentuk yang kecil dan perubahan itu diabaikan. Pada Persamaan linear (3.1) memiliki kecepatan yang sama yaitu $\frac{dx}{dt} = c_0$, pendekatan dari kecepatan menjadi bergantung linear di u , maka

$$\frac{1}{c_0}\left(\frac{dx}{dt}\right) \,|_{u=konstan} = 1 + bu \tag{3.2}$$

Dimana b konstan dan bergantung linier di $|bu|$ yang sangat kecil, maka artinya

$$bu = \epsilon U \quad (\epsilon > 0) \tag{3.3}$$

Setelah itu substitusikan Persamaan (3.2) ke Persamaan (3.1) maka didapatkan

$$u_t + (c_0 + c_0 bu)\, u_x = 0$$

$$u_t + c_0 u_x + c_0 buu_x = 0$$

$$U_t + c_0 U_x + \epsilon c_0 UU_x = 0 \tag{3.4}$$

Hubungan dispersi diantara frekuensi (ω) dan angka gelombang (k) dapat dibentuk ke dalam persamaan

$$\omega = kc(k) \tag{3.5}$$

dimana c merupakan kecepatan gelombang.

Hubungan dispersi diatas berlaku pada persamaan gelombang harmonik sederhana. Hasil dari gelombang harmonik sederhana menggunakan prinsip fourier, dengan asumsi solusinya adalah $u(x,t)$, untuk setiap t, fungsi dari x pada interval $(-\infty, \infty)$ yang menggunakan integral fourier, maka dapat dibentuk persamaan

$$u_t + c_0(Lu)_x = 0 \tag{3.6}$$

dimana L adalah transformasi linier yang didefinisikan oleh

$$Lu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(k)}{c_0}e^{ik(x-\xi)}u(\xi,t)d\xi dk \tag{3.7}$$

dengan $c_0 = c(0)$. Persamaan (3.7) diatas merupakan bentuk dari integral fourier. Menggunakan deret Maclaurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \tag{3.8}$$

Maka untuk kasus $c(k)$ dengan menggunakan deret maclaurin

$$c(k) = c_0(1 - \alpha^2 k^2)$$

$$c_0\alpha^2 = -\frac{1}{2}c''(0) > 0 \tag{3.9}$$

Selanjutnya, dengan penggunaan indeks skala variabel yaitu

$$X = \epsilon^{\frac{1}{2}}x \tag{3.10}$$

$$T = \epsilon^{\frac{1}{2}}c_0 t \tag{3.11}$$

dan dengan mensubstitusikan $u = \left(\frac{\epsilon}{b}\right)U(X,T)$ kedalam Persamaan (3.6) yaitu

$$u_t + c_0(Lu)_x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_0\frac{\partial Lu}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial\left(\left(\frac{\epsilon}{b}\right)U(X,T)\right)}{\partial\left(\frac{T}{\epsilon^{1/2}c_0}\right)}+c_0\frac{\partial\left(L\left(\frac{\epsilon}{b}\right)U(X,T)\right)}{\partial\left(\frac{X}{\epsilon^{1/2}}\right)}=0$$

$$\frac{\left(\frac{\epsilon}{b}\right)}{\frac{1}{\epsilon^{1/2}c_0}}\frac{\partial(U(X,T))}{\partial T}+\frac{\left(\frac{\epsilon}{b}\right)c_0}{\frac{1}{\epsilon^{1/2}}}\frac{\partial(LU(X,T))}{\partial X}=0$$

$$\frac{\epsilon^{3/2}c_0}{b}\frac{\partial(U(X,T))}{\partial T}+\frac{\epsilon^{3/2}c_0}{b}\frac{\partial(LU(X,T))}{\partial X}=0$$

$$\frac{\epsilon^{3/2}c_0}{b}\left(\frac{\partial(U(X,T))}{\partial T}+\frac{\partial(LU(X,T))}{\partial X}\right)=0$$

$$\left(\frac{\partial(U(X,T))}{\partial T}+\frac{\partial(LU(X,T))}{\partial X}\right)=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}+\frac{\partial LU}{\partial X}=0$$

$$U_T+(LU)_x=0$$

$$U_T+(L_\epsilon U)_X=0 \qquad (3.12)$$

dengan

$$L_\epsilon U=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(\epsilon^{\frac{1}{2}}K)}{c_0}e^{iK(X-\Xi)}d\Xi dK \qquad (3.13)$$

dan fungsi $\frac{c(\epsilon^{\frac{1}{2}}K)}{c_0}$ diubah menjadi deret Maclaurin

$$\frac{c(\epsilon^{\frac{1}{2}}K)}{c_0}=1+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\epsilon^nK^{2n},\quad (A_1=-\alpha^2) \qquad (3.14)$$

yang mana konvergen untuk semua $\epsilon^{\frac{1}{2}}K$, maka Persamaan (3.13) ekuivalen ke bentuk persamaan berikut

$$L_\epsilon U = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n \epsilon^n \, \partial_X^{2n} U \tag{3.15}$$

untuk $\epsilon \ll 1$ konvergen, maka persamaan (3.15) memenuhi pendekatan persamaan dibawah ini

$$L_\epsilon U = U + \epsilon \alpha^2 U_{XX} \tag{3.16}$$

Lalu substitusi persamaan (3.16) ke dalam persamaan (3.6)

$$U_T + (L_\epsilon U)_X = 0$$

$$U_T + (U + \epsilon \alpha^2 U_{XX})_X = 0$$

$$U_T + U_X + \epsilon \alpha^2 U_{XXX} = 0 \tag{3.17}$$

Dari persamaan (3.4) dan persamaan (3.17) di dapat persamaan

$$U_T + U_X + \epsilon (U U_x + \alpha^2 U_{XXX}) = 0 \tag{3.18}$$

Selanjutnya karena $U_X = -\, U_T$ maka persamaan (3.18) ekuivalen dengan persamaan

$$U_T + U_X + \epsilon (U U_x - \alpha^2 U_{XXT}) = 0 \tag{3.19}$$

Persamaan (3.19) di atas sudah bisa disebut Persamaan BBM secara umum, namun untuk mempermudah Persamaan (3.19) dapat diubah dengan mengganti nilai $\epsilon = 1$ dan $\alpha^2 = 1$ maka menjadi persamaan dibawah ini:

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (3.20)$$

B. Solusi Eksak Persamaan Benjamin Bona Mahonny

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari Persamaan Benjamin Bona Mahony adalah metode gelombang berjalan. Dibawah ini akan ditunjukkan Persamaan Benjamin Bona Mahony yang mempunyai solusi dalam bentuk gelombang berjalan yang berbentuk $u(x,t) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$ dan dengan c adalah kecepatan gelombang.

Bentuk Persamaan BBM adalah

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (3.21)$$

Penyelesaian Persamaan (3.21) yang akan dicari adalah penyelesaian gelombang berjalan yang berbentuk $u(x,t) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$.

Misalkan penyelesaian Persamaan di atas berbentuk

$$u(x,t) = f(x - ct) = f(\xi) \quad (3.22)$$

dengan $c > 1$ adalah suatu konstanta yang menyatakan kecepatan gelombang.

Substitusi Persamaan (3.22) ke (3.21) maka akan diperoleh

$$-cf' + f' + ff' + cf''' = 0$$

$$-(c-1)f' + ff' + cf''' = 0 \quad (3.23)$$

dengan $f' = \frac{df}{d\xi}$, lalu mengintegralkan Persamaan (3.23) maka menjadi

$$-(c-1)f+\frac{1}{2}f^2+\ cf''=\ \bar{A}\,, \tag{3.24}$$

dengan $\bar{A}$ adalah suatu konstanta integrasi. Jika kedua ruas dari Persamaan (3.24) dikalikan dengan $2f'$ maka menjadi,

$$2f'\left[-(c-1)f+\frac{1}{2}f^2+\ cf''\right]=2f'(\bar{A})$$

$$[-(c-1)2f'f+\ f'f^2+\ 2cf'f'']=2f'\ \bar{A}$$

Kemudian di integralkan akan didapat,

$$\left[-(c-1)\,f^2+\frac{1}{3}f^3+\ cf'^2\right]=2\,\bar{A}\,f+\ \bar{B}$$

atau

$$f'^2=\ -\frac{1}{3}cf^3+\frac{c-1}{c}f^2+2\frac{\bar{A}}{c}f+\ \frac{\bar{B}}{c}$$

dimana $\bar{B}$ merupakan suatu konstanta integrasi, dan jika $\frac{\bar{A}}{c}=A$ dan $\frac{\bar{B}}{c}=B$ maka menjadi

$$f'^2=\ -\frac{1}{3}cf^3+\frac{c-1}{c}f^2+2Af+\ B \tag{3.25}$$

Jika $f(\xi)$ dipilih positif sedemikian sehingga $f, f'\ dan\ \ f''$ menuju nol, untuk ξ menuju $\pm\infty$, maka penyelesaian yang didapat disebut dengan gelombang soliter. Dalam hal ini A dan B sama dengan nol sehingga Persamaan (3.25) menjadi

$$f'^2=\ -\frac{1}{3}cf^3+\frac{c-1}{c}f^2$$

atau

$$f' = \sqrt{-\frac{1}{3}cf^3 + \frac{c-1}{c}f^2}$$

$$= \sqrt{f^2\left(\frac{c-1}{c} - \frac{1}{3c}f\right)} \quad (3.26)$$

Karena $f' = \frac{df}{d\xi}$ maka,

$$\frac{df}{d\xi} = \sqrt{f^2\left(\frac{c-1}{c} - \frac{1}{3c}f\right)}$$

$$d\xi = \frac{df}{\sqrt{f^2\left(\frac{c-1}{c} - \frac{1}{3c}f\right)}}$$

$$\int d\xi = \int \frac{df}{\sqrt{f^2\left(\frac{c-1}{c} - \frac{1}{3c}f\right)}}$$

$$\xi = \int \frac{df}{\sqrt{f^2\left(\frac{c-1}{c} - \frac{1}{3c}f\right)}} \quad (3.27)$$

Selanjutnya dengan substitusi $f = 3(c-1)sech^2\theta$ ke Persamaan (3.27) , didapat

$$\xi = \int \frac{6(c-1)sech^2\theta \tanh\theta \ d\theta}{\sqrt{(3(c-1)sech^2\theta)^2\left[\frac{c-1}{c} - \frac{1}{3c}(3(c-1)sech^2\theta)\right]}}$$

$$= \int \frac{6(c-1)sech^2\theta \tanh\theta \;\; d\theta}{3(c-1)sech^2\theta\sqrt{\left[\frac{c-1}{c} - \frac{1}{c}(c-1)sech^2\theta\right]}}$$

$$= \int \frac{6(c-1)sech^2\theta \tanh\theta \;\; d\theta}{3(c-1)sech^2\theta\sqrt{\left[\frac{c-1}{c}(1 - \; sech^2\theta)\right]}}$$

$$= \int \frac{6(c-1)sech^2\theta \tanh\theta \;\; d\theta}{3(c-1)sech^2\theta\sqrt{\left[\frac{c-1}{c} \; tanh \; \theta\right]}}$$

$$= \int \frac{2d\theta}{\sqrt{\frac{c-1}{c}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{c-1}{c}}} \; (\theta) \tag{3.28}$$

Persamaan (3.28) dapat ditulis menjadi

$$\theta = \; \pm \; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}} \;\; (\xi)$$

$$= \; \pm \; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}} \; (x - \; ct) \tag{3.29}$$

Persamaan (3.29) disubstitusi ke Persamaan $f = 3(c-1)sech^2\theta$, maka diperoleh

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}} \; (x - \; ct)\right] \tag{3.30}$$

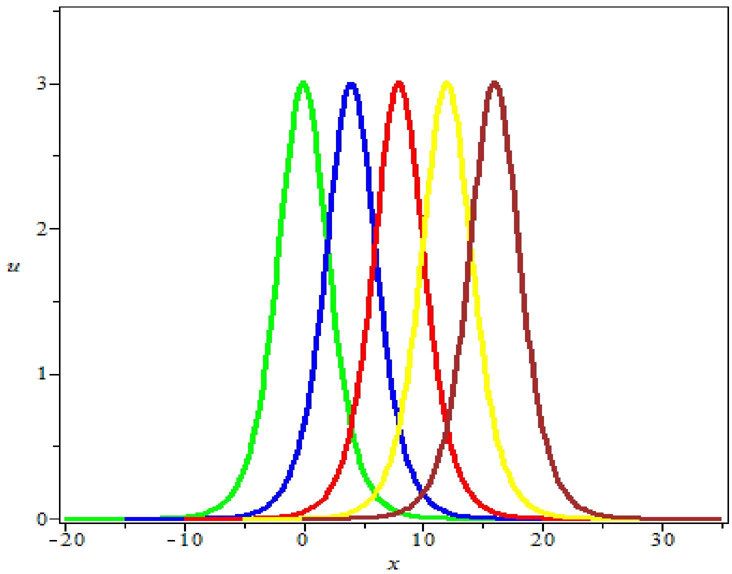
Jadi solusi dari Persamaan (3.21) adalah,

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\,(x - ct)\right]$$

yang merupakan penyelesaian gelombang berjalan dengan amplitudo $3(c-1)$ dengan kecepatan c.

Gambar 3.1 berikut menyatakan kurva gelombang

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\,(x - ct)\right]$$



Gambar 3.1. Kurva Gelombang

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\,(x - ct)\right]$$

Untuk kurva warna hijau, gelombang dengan $c = 2$ saat $t = 0$

Untuk kurva warna biru, gelombang dengan $c = 2$ saat $t = 2$

Untuk kurva warna merah, gelombang dengan $c = 2$ saat $t = 4$

Untuk kurva warna kuning, gelombang dengan $c = 2$ saat $t = 6$

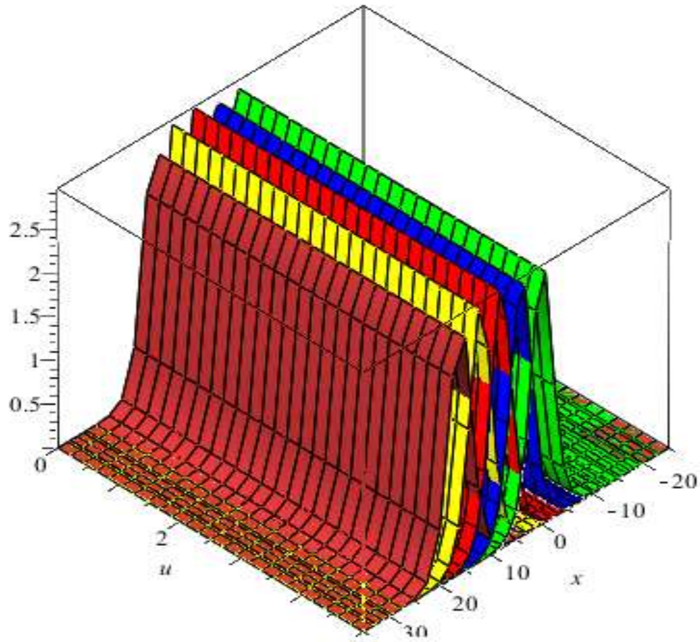
Untuk kurva warna coklat, gelombang dengan $c = 2$ saat $t = 8$

Gambar 3.1 yang berwarna hijau adalah adalah kurva gelombang saat $t = 0$ dengan kecepatan $c = 2$. Setelah selang waktu $t = 2$ terlihat pada kurva yang berwarna biru, gelombang merambat ke kanan dengan bentuk dan kecepatan yang konstan. Setelah selang waktu $t = 4$ terlihat pada kurva yang berwarna merah, gelombang merambat ke kanan dengan bentuk dan kecepatan yang konstan. Setelah selang waktu $t = 6$ terlihat pada kurva yang berwarna kuning, gelombang merambat ke kanan dengan bentuk dan kecepatan yang konstan. Sedangkan kurva yang berwarna coklat menunjukkan bahwa gelombang merambat kekanan setelah selang waktu $t = 8$.

Pada gambar 3.1 terlihat bahwa dengan bertambahnya waktu maka gelombang hanya akan berjalan ke kanan sepanjang sumbu x tanpa merubah bentuknya dengan amplitudo yang tetap yaitu 3. Hal ini sesuai dengan pengertian gelombang berjalan yaitu gelombang yang hanya bergerak/merambat ke kanan dengan amplitudo yang tetap. Karakteristik dari gelombang tersebut adalah berjalan periodik terhadap waktu dengan periode ct.

Gambar 3.2 berikut menyatakan permukaan gelombang

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\ (x - ct)\right]$$



Gambar 3.2. Permukaan gelombang

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\ (x-\ ct)\right]$$

Gambar 3.1 dan 3.2 memperlihatkan profil yang tidak jauh berbeda. Pada gambar 3.1 merupakan gambar pada dua dimensi, sedangkan pada gambar 3.2 merupakan permukaan gelombang yang dilihat pada dimensi tiga. Dari gambar 3.1 dan gambar 3.2 nampak bahwa amplitudo gelombang sama yaitu 3.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan rumusan masalah dan pembahasan yang telah dilakukan maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Gelombang soliter adalah gelombang yang mempunyai bentuk permanen, teratur, tak terdispersi. Gelombang ini merupakan jenis gelombang nonlinear yang memiliki efek non dispersi dan nonlinear. Gelombang non dispersi adalah gelombang dengan kecepatan yang konstan dan tidak mengalami perubahan bentuk ketika merambat. Gelombang soliter muncul dari penyelesaian persamaan diferensial parsial nonlinear yaitu Persamaan Benjamin Bona Mahonny. Pemodelan dari Gelombang soliter ini dapat dibentuk ke dalam persamaan BBM yaitu

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0$$

2. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari Persamaan Benjamin Bona Mahony adalah metode gelombang berjalan. Ciri-ciri penyelesaian gelombang berjalan adalah tidak terjadi perubahan bentuk, walaupun dalam gelombang soliter terjadi perubahan bentuk namun sangat kecil sehingga terkadang diabaikan dan ciri lainnya adalah periodik dalam waktu.

Langkah langkah penyelesaian persamaan Benjamin Bona Mahonny dengan metode gelombang berjalan :

1. Diasumsikan penyelesaian dari persamaan diferensial parsial tersebut adalah $u(x,t) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$ dan dengan c adalah kecepatan gelombang.
2. Substitusi $u(x,t) = f(\xi)$ dengan $\xi = x - ct$ tersebut dalam persamaan Benjamin Bona Mahonny
3. Mencari penyelesaian dari persamaan Benjamin Bona Mahonny yang tersubstitusi.
4. Mentransfer kembali ke $u(x,t)$.

Dari keempat langkah diatas maka didapatkan solusi persamaan benjamin bona mahonny yaitu

$$u(x,t) = f(\xi) = 3(c-1)sech^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\ (x - \ ct)\right]$$

yang merupakan penyelesaian gelombang berjalan dengan amplitudo $3(c-1)$ dengan kecepatan c.

B. Saran

Pengembangan dari skripsi ini yaitu dengan menganalisis gelombang soliter dan penurunannya kedalam persamaan diferensial parsial yang lain. Lalu mencari solusi Persamaan BBM lain dengan metode lainnya seperti metode cosinus dan metode jacobian.

DAFTAR PUSTAKA

Dodd R.K. (1988). *Soliton and Non Linear Wave Equations*. New York:Academic Press.

Drazin, P.G dan Johnson,R.S. (1992). *Soliton:An Introduction.* New York:Cambridge University Press.

Goris, S.D, Supliyadi. (2009). *Siap Ujian Nasional SMA Fisika SMA 2010*. Indonesia : Grasindo.

Hasegawa Akira. (1990). *Optical Solitons in Fibers Second Enlarged Edition*.New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Humi,M dan Miller, W.B. (1992). *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*. Boston: PWS-KENT Publishing Company.

Jeffriy, A, Douglas R.G, dkk. (1985). *Advances in Nonlinear Waves Volume 1*. London: Lokenath Debnath.

Jeffriy, A, Douglas R.G, dkk. (1985). *Advances in Nonlinear Waves Volume 2*. London: Lokenath Debnath.

Jerry Bona. (1978). *Model Equations for Waves in Nonlinear Dispersive Systems*. Jurnal Penelitian. Helsinki: Proceedings of the International Congress of Mathematicians.

Meyer, W.J. (1984). *Concept of Matematical*. New York: McGraw-Hill Book Company.

Nyoman. Susila I dan Gunawan, H. (1999). *Kalkulus 2. (J. Stewart, Alih Bahasa)*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Prayitn, T.B. (2012). *Massa Klasik Solusi Satu Soliton Statik Persamaan KdV (1+1) Dimensi*. Indonesia: Departemen Fisika UNJ.

Purcell, Edwin J., dan Varberg, Dale (2004). *Kalkulus Jilid 2 Edisi 8 .(Alih bahasa: I nyoman susila).* Jakarta: Penerbit Erlangga.

R.R Taufik. (2001). *Gelombang dan Optik*. Bandung : Jurusan Pendidikan Fisika Fakultas MIPA UPI.

S.Kuru, Negro, Nieto. (2007). *Travelling Wave Solutions Of The Generalized Benjamin-Bona-Mahonnny Equation*. Jurnal Penelitian. Spain: University de Valladoltd

Sandi, Setiawan. (1994). *Gempita Tarian Kosmos*. Yogyakarta : Andi Offset

Silaban, Pantur. (1985). *Physics edisi ketiga*.(D.Halliday and R.Resnick. Terjemahan). New York: John Wiley and Son, Inc.

Spiegel, M.R. (1994). *Matematika Lanjutan untuk Para Insinyur dan Ilmuwan*.(K.Martono:Terjemahan). bandung: Penerbit ITB.

Spiegel, M.R. (1997). *Kalkulus Lanjutan Versi S1/Metrik*. Bandung : Penerbit Erlangga.

Stefan. C., Harihar, K. Dam Shardad, G.Sajjadi. (2012). *Solitary Waves, Periodic and Elliptic Solutions To The Benjamin, Bona, & Mahonny (BBM) Equation Modivied By Viscosity.* Jurnal Penelitian. Daytona Beach: Embry-Riddle Aeronautical University.

Stewart, James. (2003). *Kalkulus Jilid 2 Edisi Keempat*. Jakarta: Penerbit Erlangga

Stroud, K.A. (1996). *Matematika untuk Teknik Edisi Ketiga*. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Sumardi dan Salmah. (1999). *Dekomposisi Solusi N-Soliton Pada Persamaan Korteweg de Vries.* Laporan Penelitian. Yogyakarta: Perpustakaan FMIPA UGM.

T.B. Benjamin, J.L. Bona, dan J.J. Mahonny. (1971). *Model Equations For Long Waves in Nonlinear Dispersive Systems.* Jurnal Penelitian. Essex: Fluid Mechanics Researcs Institute.

Zauderer, Erich. (1993). *Partial Differential Equation of Applied Mathematics* . Canada: John Wiley and Son, Inc.

L
A
M
P
I
R
A
N

LAMPIRAN

1. Penggunaan Maple 11 untuk Kurva Gelombang Solusi Persamaan BBM

> $restart$:

> $with(plots)$:

> $with(linalg)$:

> $with(DEtools)$:

> $u := (x,t) \rightarrow 3\cdot(c-1)\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(c-1)}{c}}\cdot(x-c\cdot t)\right)\right)^2;$

$$u := (x,t) \rightarrow (3\,c-3)\,\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c-1}{c}}\,(x-c\,t)\right)^2$$

>

input c=2,t=0, maka diperoleh

> $u1 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x)\right)\right)^2:$

> $p1 := plot(u1(x), x=-25\,..\,35, u=0\,..\,3.5, color=green)$:

>

input c=2,t=2, maka diperoleh

> $u2 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x-4)\right)\right)^2:$

> $p2 := plot(\mathrm{u2}(\mathrm{x}), x=-25\,..\,35, u=0\,..\,3.5, color=blue)$:

>

input c=2,t=4, maka diperoleh

> $u3 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x-8)\right)\right)^2:$

> $p3 := plot(u3(x), x=-25\,..\,35, u=0\,..\,3.5, color=red)$:

input c=2,t=6, maka diperoleh

> $u4 := (x) \rightarrow 3 \cdot \left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (x - 12) \right) \right)^2 :$

> $p4 := plot(u4(x), \mathrm{x} = -25 .. 35, \mathrm{u} = 0 .. 3.5, \mathrm{color} = \mathrm{yellow}) :$

input c=2,t=8, maka diperoleh

> $u5 := (x) \rightarrow 3 \cdot \left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot (x - 16) \right) \right)^2 :$

> $p5 := plot(u5(x), x = -25 .. 35, u = 0 .. 3.5, color = brown) :$

> $display(p1, p2, p3, p4, p5);$

2. Penggunaan Maple 11 untuk Permukaan Gelombang Solusi Persamaan BBM

> $restart :$

> $with(plots) :$

> $with(linalg) :$

> $with(DEtools) :$

> $u := (x, t) \rightarrow 3 \cdot (c - 1) \cdot \left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(c - 1)}{c}} \cdot (x - c \cdot t) \right) \right)^2;$

$$u := (x, t) \rightarrow (3\,c - 3)\, \operatorname{sech}\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c - 1}{c}}\, (x - c\,t) \right)^2$$

>

input c=2,t=0, maka diperoleh

> $u1 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x)\right)\right)^2 :$

> $p1 := plot3d(u1(x), x = -25 .. 20, u = 0 .. 5, color = green) :$

>

input c=2,t=2, maka diperoleh

> $u2 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x-4)\right)\right)^2 :$

> $p2 := plot3d(\mathrm{u2}(\mathrm{x}), x = -20 .. 20, u = 0 .. 5, color = blue) :$

>

input c=2,t=4, maka diperoleh

> $u3 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x-8)\right)\right)^2 :$

> $p3 := plot3d(\ u3(x), x = -15 .. 20, u = 0 .. 5, color = red) :$

input c=2,t=6, maka diperoleh

> $u4 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x-12)\right)\right)^2 :$

> $p4 := plot3d(u4(x), \mathrm{x} = -10 .. 35, \mathrm{u} = 0 .. 5, \mathrm{color} = \mathrm{yellow}) :$

input c=2,t=8, maka diperoleh

> $u5 := (x) \rightarrow 3\cdot\left(\operatorname{sech}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot(x-16)\right)\right)^2 :$

> $p5 := plot3d(u5(x), x = -25 .. 35, u = 0 .. 5, color = brown) :$

> $display(p1, p2, p3, p4, p5);$