Pemodelan Gelombang Akustik Bawah Air

(*Acoustic Wave Underwater*)

SKRIPSI

Diajukan Untuk Memenuhi Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh:

Bagas Firmandaru
NIM 09305141034

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2014

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

"PEMODELAN GELOMBANG AKUSTIK BAWAH AIR (*ACOUSTIC* WAVE *UNDERWATER*)"

Disusun Oleh:

Bagas Firmandaru

NIM. 09305141034

Telah disetujui dan disahkan oleh dosen pembimbing untuk diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta

Disetujui pada tanggal:

30 Juni 2014

Disetujui oleh:

Dosen Pembimbing

Nikenasih Binatari, M.Si

NIP 19841019200812200 5

PERNYATAAN KEASLIAN SKRIPSI

Yang bertandatangan di bawah ini:

Nama	: Bagas Firmandaru
NIM	: 09305141034
Prodi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul Skripsi	: Pemodelan Gelombang Akustik Bawah Air (Acoustic Wave Underwater).

Menyatakan bahwa karya ilmiah ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang telah dipublikasikan, ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di perguruan tinggi atau institusi lain, kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tatacara dan etika penulisan karya ilmiah yang lazim. Apabila terbukti pernyataan ini tidak benar, maka sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya, dan saya bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku.

Yogyakarta, 30 Juni 2014

Yang menyatakan,

Bagas Firmandaru

NIM.09305141034

PENGESAHAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL:

"Pemodelan Gelombang Akustik Bawah Air (*Acoustic Wave Underwater*)"

Yang Disusun Oleh:

Nama	: Bagas Firmandaru
NIM	: 09305141034
Prodi	: Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 10 Juli 2014 dan dinyatakan lulus

Dewan Penguji

Nama	Jabatan	Tanda tangan	Tanggal
Nikenasih B., M.Si. 198410192008122005	Ketua Penguji		18/7/14
Husna 'Arifah, M.Sc. 197810152002122005	Sekretaris Penguji		17/7/14
Dr. Hartono 196203291987021002	Penguji Utama		17/7/14
Eminugroho R.S., M.Sc 198504142009122003	Penguji Pendamping		17/7/14

Yogyakarta, Juli 2014

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dekan,

Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

MOTTO

"Kerjakaan apa saja yang telah menjadi hak dan kewajibanmu, karena kebahagiaan hidup terletak disitu"

Musthafa Al Gholayani

"Work It Harder, Make It Better, Do It Faster, Make Us Stronger"

Daft Punk

"Hai orang-orang yang beriman, mintalah pertolongan (kepada Allah) dengan sabar dan (mengerjakan) salat, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar."

Al Baqarah : 153

"Karena Kita Keluarga (K3)"

FOSMA 165 UNY

PERSEMBAHAN

***Alhamdulillahhirobbil 'alamin*. Puji syukur bagi-Mu ya Robb tuhan semesta alam, sungguh tiada daya dan upaya kecuali dengan pertolongan-Mu. Kupersembahkan karya tulis ini untuk:**

Kedua Orangtuaku, Mujiyana dan Bertin Istanti yang selalu memberi kasih sayang, doa dan motivasi.

Kakak dan adiku, Wildan Bagus Arrozan dan Annisa Dea Nastiti yang memberi semangat dalam setiap kesulitan.

Teman-teman Matsub 2009 yang memberikan kenangan, semangat dan kebahagian bersama di kampus tercinta.

Serta untuk mu yang selalu menungguku.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur selalu kita panjatkan kehadirat ALLAH SWT. yang senantiasa melimpahkan rahmat, nikmat dan hidayah-Nya kepada para hamba-Nya. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada manusia pilihan nabi agung Muhammad saw. yang membawa umatnya kejalan yang diridhoi Allah SWT. Diantara nikmat dan hidayah-Nya itu salah satunya adalah selesainya tugas akhir skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul "*Pemodelan Gelombang Akustik Bawah Air (Acoustic Wave Underwater)*" ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat kelulusan guna meraih gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Selesainya skripsi ini tidak lepas dari adanya bantuan, dukungan, saran, dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu perkenankanlah penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono, selaku Dekan FMIPA UNY yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk menyelesaikan studi,
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan kelancaran dalam urusan akademik,
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi, M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika dan Dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan kelancaran akademik dan bimbingan kepada penulis selama masa studi,
4. Ibu Nikenasih Binatari, M.Si. sebagai Dosen Pembimbing yang dengan sabar telah memberikan arahan dan bimbingan kepada penulis,

5. Seluruh dosen dan staf Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah memberikan ilmu yang bermanfaat selama penulis menjadi mahasiswa,
6. Seluruh rekan-rekan Matematika 2009 atas pelajaran berharga dan kebersamaan selama di masa perkuliahan,
7. Semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan sehingga dapat memperlancar proses penyusunan skripsi ini.

Penulis hanya dapat berdoa semoga semua kebaikan yang diberikan kepada penulis mendapat pahal yang berlipat dari Allah SWT. dan dengan kerendahan hati penulis mengharapkan semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi saya maupun pembaca. Terimakasih.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

A : Luas penampang, luas permukaan

a : Percepatan

c : Kecepatan bunyi

δ : Gangguan pada aliran

m : Massa

F : Gaya

$\boldsymbol{F}$: Resultan Gaya Total

$\boldsymbol{f}$: Resultan Gaya per Satuan Volume

ρ : Kepadatan (Density)

ρ_0 : Kepadatan Awal

p : Tekanan

p_0 : Tekanan Awal

t : Waktu

v : Kecepatan

$\bar{v}$: Kecepatan rata-rata

v_0 : Kecepatan awal

V : Volume

x, y, z : Posisi-posisi pada bidang Kartesius

Daftar Gambar

PEMODELAN GELOMBANG AKUSTIK BAWAH AIR (*ACOUSTIC WAVE UNDERWATER)*

Oleh
Bagas Firmandaru
NIM 09305141034

ABSTRAK

Akustik merupakan suatu ilmu pengetahuan yang membahas tentang bunyi dan suara yang berdasarkan pada getaran dan sifat-sifat gelombang. Pada skripsi ini akan dimodelkan persamaan gelombang akustik dan penurunannya menjadi persamaan Helmholtz.

Model gelombang akustik bawah air dibangun dengan mengasumsikan tiga karakteristik yaitu mediumnya tidak kental, alirannya tidak termampatkan, dan tidak berotasi. Selanjutnya untuk menyelesaikan persamaan gelombang akustik digunakan metode pemisahaan variabel.

Suatu persamaan gelombang diperoleh dengan memperhatikan gaya-gaya yang bekerja pada mediumnya serta menerapkan hukum kedua Newton. Persamaan gelombang tersebut diturunkan terhadap waktu sehingga diperoleh persamaan Helmholtz.

Kata kunci: pemodelan, gelombang akustik, akustik bawah air, persamaan Helmholtz

BAB I

PENDAHULUAN

A. LATAR BELAKANG

Akustik merupakan suatu ilmu pengetahuan yang membahas tentang bunyi dan suara yang berdasarkan pada getaran dan sifat-sifat gelombang. Akustik dalam kehidupan banyak dimanfaatkan di daratan maupun perairan, salah satu pemanfaatan akustik dalam perairan untuk mengetahui keberadaan suatu kapal selam yang satu dan lainnya di dalam air. Kapal selam dapat mengetahui keberadaan kapal lain dengan menggunakan bantuan SONAR (*Sound Navigation and Ranging*). Sonar adalah suatu teknik yang menggunakan penjalaran bunyi dalam air untuk navigasi, berkomunikasi atau mendeteksi kendaraan air lainnya. Metode dari Sonar yaitu memanfaatkan perambatan bunyi di dalam air untuk mengetahui keberadaan obyek lain yang berada di bawah permukaan kawasan perairan. Sonar menggunakan energi akustik dalam sistem kerjanya.

Sistem kerja dari sonar adalah mengeluarkan bunyi yang akan merambat di dalam air. Bunyi tersebut akan dipancarkan oleh sonar dan dipantulkan kembali oleh objek di dalam air setelah itu diterima kembali oleh sonar tersebut. Letak suatu objek di dalam air dapat diketahui berdasarkan perhitungan kecepatan perambatan bunyi dari sonar menuju objek tersebut.

Bunyi dihasilkan oleh sumber bunyi yang bergetar. Getaran merupakan gerak bolak-balik benda secara teratur melalui titik keseimbangan. Getaran yang merambat dinamakan gelombang. Gelombang diklasifikasikan menjadi dua jenis utama yaitu gelombang mekanik dan gelombang elektromagnetik. Dalam kasus gelombang mekanik, perambatannya memerlukan medium sedangkan gelombang elektromagnetik tidak memerlukan medium dalam perambatannya. Pada gelombang mekanik, gelombang yang merambat dan menyebabkan elemen mediumnya bergerak tegak lurus terhadap arah rambatnya disebut gelombang transversal. Sedangkan gelombang yang merambat dan menyebabkan elemen medium bergerak sejajar arah rambatnya disebut gelombang longitudinal.

Gelombang yang dikeluarkan sonar untuk mendeteksi suatu objek termasuk dalam gelombang akustik. Gelombang akustik merupakan gelombang mekanik longitudinal yang dapat menjalar dalam medium padat, cair maupun gas. Medium gelombang ini adalah molekul-malekul yang membentuk bahan medium mekanik (Sutrisno, 1988). Untuk mengetahui perubahan-perubahan rambatan gelombang yang terjadi pada mediumnya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang membahas tentang perubahan-perubahan dalam ilmu fisika. Persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan persaman diferensial parsial. Persamaan diferensial parsial yang berperan dalam fisika dan matematika antara lain persamaan panas, gelombang, Laplace, telegraf, Poisson dan Schrodinger. Salah seorang ilmuan yang mengembangkan persamaan gelombang akustik ini adalah Hermann von Helmholtz. Helmholtz mempelajari akustik dan elektromagnetik serta berhasil menemukan persamaan Helmholtz pada tahun 1821-1894 yang merupakan pengembangan dari persamaan gelombang. Selanjutnya penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena akan sangat membantu pengamatan lebih lanjut terhadap persamaan gelombang akustik dan persamaan Helmholtz. Untuk itu dalam skripsi ini akan dicoba membahas model matematika persamaan gelombang akustik bawah air dan penurunnya menjadi persamaan Helmholtz disertai dengan solusi umumnya.

B. IDENTIFIKASI MASALAH

Banyak ilmu sains yang diterapkan dalam kehidupan. Salah satu ilmu sains yang diterapkan yaitu gelombang akustik yang dapat digunakan dalam membantu pencarian suatu objek yang hilang di lautan, sebagai contoh pencarian pesawat MH 370 yang hilang dilautan. Alat pencarian objek tersebut menggunakan sonar. Pencarian objek sonar menggunakan persamaan Helmholtz dalam memperkirakan keberadaan suatu objek. Persamaan gelombang dan sifat-sifatnya sudah dibahas dalam perkuliahan, namun penurunan persamaan gelombang belum dibahas. Oleh karena itu, akan dicari bentuk persamaan gelombang dan persamaan Helmholtz.

C. PEMBATASAN MASALAH

Pemodelan persamaan gelombang dibatasi pada medium berupa fluida (zat cair) dengan sifat tidak kental, alirannya tidak berotasi dan tidak termampatkan.

D. PERUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka dapat disusun perumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana memodelkan persamaan gelombang akustik bawah air ?
2. Bagaimana menurunkan persamaan gelombang akustik bawah air menjadi persamaan Helmholtz?
3. Bagaimana solusi umum dari persamaan Helmholtz?

E. TUJUAN PENELITIAN

Sesuai dengan rumusan masalah penelitian ini bertujuan untuk:

1. Memodelkan persamaan gelombang akustik bawah air.
2. Mengetahui penurunan persamaan gelombang menjadi persamaan Helmholltz.
3. Mengetahui solusi umum dari persamaan Helmholtz.

F. MANFAAT PENELITIAN

Manfaat dari penelitian ini bagi penulis dan pembaca yaitu menambah wawasan tentang aplikasi persamaan diferensial, mengetahui konsep tentang persamaan gelombang serta karakteristik dari persamaan gelombang akustik bawah air.

BAB II

KAJIAN TEORI

Pada bab ini dibahas teori dasar yang akan digunakan sebagai landasan pembahasan pada bab III. Teori dasar yang akan dibahas dalam bab ini meliputi Fluida, Pemodelan Matematika, Persamaan Diferensial, Vektor, Turunan, dan Sistem Pemisahan Variabel.

A. Fluida

Fluida adalah zat yang dapat mengalir. Dalam kehidupan, fluida sering dijumpai dalam bentuk udara, air, dan gas. Fluida dapat menyesuaikan diri dengan bentuk wadah dimana fluida ditempatkan, sebagai contoh pelapis anti bocor. Berikut hal-hal yang berkaitan dengan fluida.

1. Pengertian Fluida

Definisi 2.1 (Bruce R. 2003 : 4)

Fluida didefinisikan sebagai zat yang berdeformasi terus-menerus selama dipengaruhi suatu tegangan geser.

Benda yang tergolong fluida adalah benda cair maupun gas. Benda padat tidak termasuk dalam fluida karena molekulnya tersusun rapat dan volumenya tetap. Banyak kasus fluida dianggap sebagai benda diam. Namun demikian, secara umum penggunaan fluida melibatkan pergerakaannya dalam berbagai jenis. Definisi pada kamus kata “fluida” adalah “bebas berubah bentuk” maka dapat diartikan fluida sebagai suatu zat yang mengalami perubahan-perubahan bentuknya secara terus menerus (*continue*) karena gaya yang bekerja terhadapnya.

Pergerakan fluida dipengaruhi oleh banyak faktor. Oleh karena itu diperlukan hukum-hukum dasar yang mengatur gerak fluida.

2. Karakteristik Fluida

Ketika fluida bergerak, alirannya dapat dikelompokkan menjadi salah satu dari dua jenis utama yaitu aliran tunak (laminar) dan turbulen. Aliran tunak ada jika setiap partikel mengikuti lintasan-lintasan yang mulus, sedangkan aliran turbulen merupakan aliran yang tidak menentu yang dicirikan oleh daerah yang menyerupai pusaran (Serway : 2009).

Karakteristik yang mempengaruhi fluida digambarkan dalam dua aspek yaitu aspek kualitatif dan aspek kuantitatif. Aspek kualitatif mengidentifikasi sifat dasar atau jenis karasteristiknya seperti panjang, massa, waktu, tegangan dan kecepatan, sementara aspek kualitatif memberikan ukuran numerik dari karesteristiknya seperti satuan dan besaran.

a. Massa (m)

Definisi 2.2 (Serway, 2009 : 173)

Massa adalah sifat suatu benda yang menjelaskan kuatnya daya tahan benda tersebut untuk menolak terjadinya perubahan dalam kecepataannya dan satuan SI untuk massa adalah kilogram.

Menurut Mohamad Ishaq (2007:65) massa adalah besaran fisika yang menunjukkan ukuran kemalasan benda yang bergerak jika didorong oleh sebuah gaya, kata bergerak diartikan bahwa benda mengalami perubahan kecepatan.

b. Kecepatan (v)

Kecepatan pada suatu benda didefinisikan laju perubahan posisi benda (Δx) dari suatu tempat (x_1) ke tempat lain (x_2) dalam selang waktu (Δt) tertentu (Serway, 2009 : 37). Ketika benda bergerak, benda tersebut akan mengikuti lintasan tertentu, panjang lintasan yang dilalui benda tersebut merupakan jarak. Dimisalkan kecepatan dapat berubah-ubah atau tidak tetap sehingga kecepatan sesaat didefinisikan sebagai berikut.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

c. Percepatan (a)

Percepatan adalah laju perubahan kecepatan (Δv) dibagi selang waktu selama perubahan tersebut terjadi (Serway, 2009 : 118). Percepatan sesaat dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

d. Kepadatan (ρ)

Kepadatan sebuah fluida, dilambangkan dengan huruf Yunani ρ (rho), didefinisikan sebagai massa fluida per satuan volume (V) (Bruce, 2003:14). Kepadatan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

e. Tekanan (*p)*

Tekanan merupakan besarnya gaya yang bekerja (*F*) pada suatu permukaan tiap satuan luas permukaan (*A)* tersebut. Dengan demikian, tekanan dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$p = \frac{F}{A}$$

3. Faktor yang mempengaruhi gerak Fluida

Pergerakan suatu fluida dipengaruhi oleh gaya yang bekerja pada fluida tersebut. Secara umum, suatu gaya diartikan sesuatu yang menyebabkan suatu benda bergerak lebih cepat atau lambat. Menurut Muhamad Ishaq (2007:65) Gaya seringkali direpresentasikan berupa "tarikan" atau "dorongan" pada suatu benda, tapi tidak semua gaya merupakan tarikan atau dorongan, sebagai contoh astronot yang melayang di luar angkasa.

Menurut hukum Newton II, percepatan sebuah benda berbanding lurus dengan gaya yang bekerja padanya dan berbanding terbalik dengan massanya. Dengan demikian hubungan massa, percepatan dan gaya dapat dirumusan sebagai berikut.

$$F = ma$$

Rumusan diatas menunjukkan bahwa percepatan disebabkan oleh gaya F yang bekerja pada benda.

B. Pemodelan Matematika

Matematika dalam fisika digunakan untuk menyederhanakan, merumuskan dan mengkaji fenomena yang terjadi dalam kehidupan. Perumusan tersebut dapat dimanfaatkan oleh seseorang (dengan cara-cara matematis) untuk keperluan dalam kehidupannya. Perumusan matematis dari suatu gejala disebut juga model matematika.

Model matematika sering dikenal sebagai dalil, rumus, teorema atau hukum alam. Terumuskannya gejala alam dalam satu atau beberapa model matematika, maka langkah berikutnya berupa penerapan dan pemanfaatan model-model tersebut. Hal-hal yang bersifat terapan dapat dilakukan dengan mudah menggunakan operasi-operasi matematika yang erat kaitannya dengan model tersebut. Secara sederhana pemodelan matematika dapat dianggap sebagai pernyataan atau ungkapan matematis dari gejala, ide, pemikiran atau konsep dari sesuatu yang terjadi di dalam kehidupan. Berikut ini akan dibahas mengenai pemodelan matematika.

Definisi 2.3 (Meyer, 1984:1)

Pemodelan matematika adalah suatu cara untuk mendeskripsikan beberapa fenomena dalam kehidupan nyata dalam istilah matematika (secara matematika).

Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai Model Matematika. Menurut Meyer (1984: 13) memodelkan suatu objek ke dalam bentuk matematika tidak dapat dilakukan secara langsung. Oleh karena itu terdapat tiga langkah pemodelan matematika yaitu merumuskan masalah, membuat model matematika dan mengevaluasi model.

1. Merumuskan masalah

   Pada tahap ini dilakukan pengenalan masalah-masalah yang sebenarnya dan dilakukan penyederhanaan yang meliputi pengabaian faktor-faktor yang kurang relevan dengan masalah. Melalui pembuatan asumsi dan pembuatan model nyata agar diperoleh suatu penghampiran masalah sesungguhnya yang lebih sederhana dan mudah dirumuskan tanpa mengurangi substansi masalah yang dimodelkan.

2. Membuat model matematika

   Pada tahap ini semua peubah dan relasi-relasi yang terdapat dalam rumusan masalah dinyatakan dalam istilah dan pengertian-pengertian matematika yaitu dengan cara membuat suatu peramaan matematika yang sesuai dengan masalah tersebut.

3. Mengevaluasi model

   Pada tahap ini model matematika yang telah dibuat ditentukan penyelesaiannya agar dapat dilakukan analisis untuk evaluasi apakah model tersebut telah menjawab pertanyaan secara tepat atau belum serta berisi interpretasi dalam kehidupan nyata.

C. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan ilmu matematika yang dapat digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah fisis merupakan masalah yang berkaitan dengan hukum alam yang dibahas dalam ilmu fisika. Masalah fisis tersebut dapat dipahami sebab akibatnya apabila dibentuk dalam model persamaan diferensial. Berikut definisi tentang persamaan diferensial.

Definisi 2.5 (Ross, 1984 : 3)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial menurut variabel bebasnya dibagi dalam dua kelas yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

Definisi 2.6 (Ross, 1984 : 4)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah suatu persamaan yang memuat turunan-turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.7 (Ross, 1984 : 4)

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang memuat turunan-turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

Berikut diberikan definisi persamaan diferensial parsial (PDP) homogen dan persamaan diferensial parsial (PDP) nonhomogen.

Definisi 2.8 (Ross, 1984 : 717)

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) linear orde dua dengan variabel bebas x dan y didefinisikan sebagai

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial t}+Fu=G \qquad (2.1)$$

dengan A, B, C, D, E, F, dan G merupakan fungsi-fungsi atas variabel x dan t. Jika $G=0$ maka PDP tersebut homogen, sedangkan jika $G\neq 0$ maka PDP tersebut nonhomogen.

Definisi 2.9 (Ross, 1984 : 720)

Persamaan Diferensial Parsial (PDP) linear homogen orde dua

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+C\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial t}+Fu=0 \qquad (2.2)$$

dengan A, B, C, D, E, dan F merupakan konstanta real, maka persamaan (2.2) dapat diklasifikasikan menjadi 3 tipe sebagai berikut:

1. *PDP dikatakan hiperbolik jika Persamaan (2.2) memenuhi $B^2-4AC>0$,*
2. *PDP dikatakan parabolik jika Persamaan (2.2) memenuhi $B^2-4AC=0$,*
3. *PDP dikatakan elliptik jika Persamaan (2.2) memenuhi $B^2-4AC<0$.*

Berikut beberapa contoh dari Definisi 2.8 dan Definisi 2.9

a. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x\frac{\partial u}{\partial y}=\cos x$ merupakan PDP linear orde dua yang non homogen.

b. Persamaan telegraf $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u - \delta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\beta \geq 0, \alpha \geq 0$ merupakan PDP hiperbolik, karena $B^2 - 4AC = 4\delta^2 > 0$.

c. Persamaan panas $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ dengan $k > 0$ merupakan PDP parabolik, karena $B^2 - 4AC = 0$.

d. Persamaan Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ merupakan PDP elliptik, karena $B^2 - 4AC = -4 < 0$.

D. Persamaan Karakteristik

Pada penyelesaian persamaan linear homogen orde dua dibutuhkan persamaan karakteristik yang sepadan dengan persamaan (Bronson & Costa, 2007:59).

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{2.3}$$

dimana a_1 dan a_0 adalah konstanta dan berikut persamaan aljabarnya

$$m^2 + a_1 m + a_0 = 0 \tag{2.4}$$

yang diperoleh dari Persamaan (2.3) dengan menggantikan $y'', y',$ dan y masing-masing dengan $m^2, m^1, dan\, m^0 = 1$. Persamaan (2.4) disebut persamaan karakteristik dari Persamaan (2.3). Persamaan karakteristik berupa suatu persamaan kuadrat biasa dan dapat diselesaikan dengan pemfaktoran atau rumus kuadrat. Terdapat tiga kasus yang ditinjau yaitu persamaan karakteristik mempunyai dua akar riil berlainan, akar tunggal berulang, atau akar-akarnya kompleks. Berikut penyelesaian dari tiga kasus tersebut (Purcell, 1987: 442-443).

1. Kasus Pertama : Akar-akar Riil Berlainan

Jika m_1 *dan* m_2 *berlainan, akar-akar persamaan karakteristik, maka penyelesaian umum* $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ *adalah*

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

2. Kasus Kedua : Akar Berulang

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar tunggal berulang m_1*, maka penyelesaian umum terhadap* $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ *adalah*

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 x e^{m_1 x}$$

3. Kasus Ketiga : Akar-akar kompleks

Jika persamaan karakteristik mempunyai akar-akar kompleks $\alpha \pm \beta i$*, maka penyelesaian umum terhadap* $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ *adalah*

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

E. Turunan Parsial

Turunan merupakan pengukuran terhadap suatu fungsi yang berubah seiring perubahan nilai input. Turunan menyatakan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya, sebagai contoh turunan dari posisi sebuah benda bergerak terhadap waktu adalah kecepatan sesaat objek tersebut. Turunan yang melibatkan dua atau lebih variabel dikatakan turunan parsial. Turunan parsial banyak digunakan dalam vektor dan geometri. Berikut pengertian lebih tentang turunan parsial

Definisi 2.11 (Spingel 1992: 105-117)

Turunan parsial adalah turunan sebuah fungsi dari beberapa variabel terhadap salah satu variabel bebasnya dengan menganggap semua variabel bebas lainnya konstan

Misalkan suatu fungsi f merupakan fungsi dari dua variabel x dan y. Turunan parsial dari f terhadap x dan y berturut-turut dinyatakan $\frac{\partial f}{\partial x}$ dan $\frac{\partial f}{\partial y}$ dengan definisi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

jika limit-limitnya itu ada.

Turunan-turunan parsial f yang dihitung di titik tertentu (x_0, y_0) dinyatakan berturut-turut dengan

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \quad \text{dan} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0)$$

yang dijelaskan dengan contoh berikut.

Contoh 2.1

Misalkan $f(x, y) = 2x^2 + xy + y^2$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2(x_0 + h)^2 + (x_0 + h)y_0 + {y_0}^2] - [2{x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[2({x_0}^2 + 2x_0 h + h^2) + x_0 y_0 + h y_0 + {y_0}^2\right] - [2{x_0}^2 + x_0 y_0 + {y_0}^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4x_0h + 2h^2 + hy_0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x_0 + 2h + y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 4x_0 + 2h + \mathrm{y}_0$$

$$= 4x_0 + y_0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2x_0{}^2 + x_0(y_0 + k) + (y_0 + k)^2] - [2x_0{}^2 + x_0y_0 + y_0{}^2]}{k}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[2x_0{}^2 + x_0y_0 + x_0k + (y_0{}^2 + 2y_0k + k^2)\right] - [2x_0{}^2 + x_0y_0 + y_0{}^2]}{k}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x_0k + 2y_0k + k^2}{k}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k(x_0 + 2y_0 + k)}{k}$$

$$= \lim_{h\to 0} x_0 + 2y_0 + k$$

$$= x_0 + 2y_0$$

Beberapa turunan dapat diselesaikan dengan mudah seperti Contoh 2.1. Namun seringkali ada beberapa bentuk turunan lain yang sukar dan kadang-kadang tidak mungkin bisa diselesaikan secara langsung dengan menggunakan definisi turunan ataupun penurunan langsung. Oleh karena itu, terdapat suatu aturan untuk menyelesaikan turunan fungsi tersebut dengan menggunakan aturan rantai. Berikut merupakan penerapan menggunakan notasi sigma.

Jika $u = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dimana $x_1 = f_1\left(r_{1,}r_2, \dots, r_m\right), \dots, x_n = f_n\left(r_{1,}r_2, \dots, r_m\right)$, maka

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial r_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial r_k} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial r_k} \tag{2.5}$$

dengan $k = 1, 2, \dots, m$

Persamaan (2.5) dapat ditulis juga sebagai

$$\frac{\partial u}{\partial r_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial r_k}$$

F. Vektor

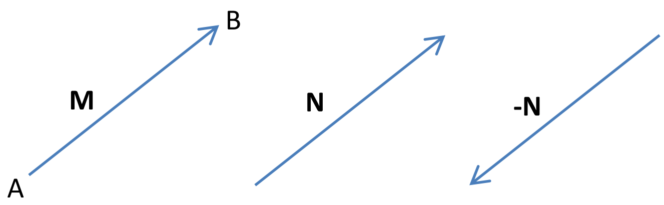
1. Pengertian Vektor

Banyak besaran fisika seperti luas, panjang, massa dan kecepatan bukan merupakan vektor. Besaran-besaran seperti ini dapat dinyatakan sebagai bilangan real dan dinamakan skalar. Terdapat pula besaran-besaran yang memiliki besar dan arah seperti gaya. Besaran-besaran yang dapat dinyatakan dengan anak panah panah yang memiliki panjang dan arah dinamakan vektor, untuk lebih jelas mengenai vektor akan dibahas berikut.

Definisi 2.13 (Gardon Fuller, 1986:167)

Suatu segmen garis berarah yang digunakan untuk menunjukan besaran dan arah disebut vektor.

Suatu vektor dinotasikan dengan huruf tebal atau menuliskan titik pangkal dan titik ujungnya. Sebagai contohnya vektor dalam Gambar 2.1 dilukis dari A ke B dengan titik A disebut titik pangkal dan titik B sebagai titik ujung, yang ditulis $\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{m}$ atau $\boldsymbol{M}$.



Gambar 2.1 Vektor Arah

Definisi 2.14 (Gardon Fuller, 1986:167)

Dua vektor $\boldsymbol{a}$ *dan* $\boldsymbol{b}$ *dikatakan sama* $(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b})$ *jika mempunyai besaran dan arah yang sama. Negatif dari vektor* $\boldsymbol{b}$ *dinotasikan dengan* $-\boldsymbol{b}$ *adalah vektor yang memiliki panjang yang sama dengan* $\boldsymbol{b}$ *tetapi arahnya berlawanan.*

2. Operasi pada Vektor

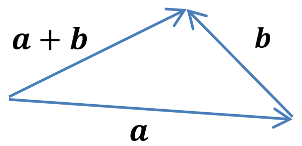
Operasi-operasi berupa operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian skalar atau *dot product.*

a. Penjumlahan vektor

Definisi 2.15 (Gardon Fuller, 1986:168)

Misalkan $\boldsymbol{a}$ *dan* $\boldsymbol{b}$ *merupakan dua buah vektor, dibuat vektor* $\boldsymbol{b}$ *berpangkal pada titik ujung* $\boldsymbol{a}$*, maka jumlah* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ *adalah vektor yang diperoleh dari titik pangkal* $\boldsymbol{a}$ *dan berakhir di ujung* $\boldsymbol{b}$**.**

Definisi ini diilustrasikan pada Gambar 2.2. Hasil penjumlahan vektor disebut resultan dan masing-masing yang membentuknya disebut komponen. Segitiga yang terbentuk dari tiga vektor $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b},$ dan $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ disebut segitiga vektor.



Gambar 2.2 Segitiga Vektor

b. Hasil Kali Titik (Dot Product)

Definisi 2.16 (Gardon Fuller, 1986:168)

Hasil kali skalar dua vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ dinotasikan dengan $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ yang merupakan hasil kali panjang vektor-vektor itu dengan kosinus sudut yang diapitnya. Ditulis dengan

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

dimana θ adalah sudut yang diapit oleh vektor $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$.

Hasil kali skalar disebut *dot product.* Sudutnya akan sama dengan $0°$ jika $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ mempunyai arah yang sama, sedangkan jika sudutnya sama dengan $180°$, maka arahnya berlawanan. Sebagai konsekuensi dari nilai $\cos 90° = 0$ mengakibatkan hasil kali skalar dua vektor tegak lurus adalah nol, sedangkan untuk nilai $\cos 0° = 1$ mengakibatkan hasil kali dua vektor yang memiliki arah yang sama adalah hasil kali panjang vektor-vektornya. *Dot product* dari vektor yang sama adalah kuadrat panjang vektor tersebut, yaitu: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

Vektor-vektor dapat ditambahkan, dikalikan dengan skalar dan dikurangkan sama seperti pada bidang. Hukum-hukum aljabar yang dipenuhi dalam vektor ruang sama halnya dengan vektor bidang hanya vektor ruang terdiri dari tiga komponen yakni

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

dengan (i, j, k) adalah vektor-vektor basis Kartesius.

Hasil kali sembarang vektor-vektor pada ruang dinyatakan dan didefinisikan sebagai berikut.

Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ adalah vektor di $\boldsymbol{R}^3$. Perkalian titik antara $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ yang dinotasikan $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ adalah

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

jika di $\boldsymbol{R}^2$ adalah

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Teorema 2.1 Sifat-sifat Perkalian titik **(Howard, 1987:134)**

Jika $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, dan $\boldsymbol{c}$ adalah sembarang vektor di $\boldsymbol{R}^n$ dan $k \in \boldsymbol{R}$ adalah skalar, maka

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} \geq 0$ *dan* $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ *jika hanya jika* $\boldsymbol{a} = 0$
2. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$ *(sifat komutatif)*
3. $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$ *(sifat distributif)*
4. $(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$

Bukti:

1. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1^2 + \boldsymbol{a}_2^2 + \cdots + \boldsymbol{a}_n^2 \geq 0$. Selanjutnya, kesamaan berlaku jika hanya jika $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2 = \cdots = \boldsymbol{a}_n = 0$; yakni, jika dan hanya jika $\boldsymbol{a} = 0$

2. Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ dan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, maka

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$$

$$= (b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n)$$

$$= \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$$

3. Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, dan $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ maka

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \big((a_1, a_2, \dots, a_n)\big) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_n + c_n)$$

$$= \big(a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + \cdots + a_n(b_n + c_n)\big)$$

$$= (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n) + (a_1c_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nc_n)$$

$$= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

4. Misalkan $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, dan k adalah suatu konstanta, maka

$$(k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$= (ka_1b_1, ka_2b_2, \dots, ka_nb_n)$$

$$= k(a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_nb_n)$$

$$= k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$$

G. Gradien

Gradien yang disingkat *grad* merupakan suatu fungsi skalar dari suatu vektor yang komponen-komponennya merupakan diferensial besaran itu, sepanjang sumbu-sumbu koordinat.

Misalkan $A(x, y, z)$ suatu fungsi skalar dari posisi di dalam ruang yaitu fungsi dari koordinat x, y, dan z, maka gradien suatu fungsi skalar dari A didefinisikan dengan

$$Grad\ A = \left(\vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)A$$

$$= \frac{\partial A}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial A}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial A}{\partial z}\vec{k}$$

Dalam analisis vektor, suatu operator diferensial vektor dilambangkan ∇ (*nabla*) dan pada koordinat kartesius didefinisikan oleh

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

dimana $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{\mathrm{k}})$ adalah vektor-vektor basis Kartesius.

H. Deret Taylor

Definisi 2.12 (Purcell, 1987: 56)

Andaikan f adalah suatu fungsi dengan turunan ke-$(n+1)$, yaitu $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk setiap x pada suatu selang buka I yang mengandung a. Maka untuk setiap x di I berlaku

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

dengan $R_n(x)$ merupakan suku sisa dari rumus Taylor, diberikan oleh rumus

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

dan c adalah suatu bilangan antara x dan a.

I. Metode Pemisahan Variabel

Pada bagian ini akan dijelaskan teknik pemisahan variabel yang akan digunakan pada bab selanjutnya. Teknik pemisahan variabel adalah salah satu teknik yang digunakan ketika mempelajari persamaan diferensial. Pada persamaan diferensial parsial, digunakan metode pemisahan variabel yang mirip pada kasus persamaan diferensial biasa tetapi dengan bentuk yang sedikit berbeda. Tujuan dari pemisahan variabel adalah untuk mereduksi persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa.

Metode pemisahan variabel terdiri dari beberapa langkah, metode ini digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial parsial yang homogen. Cara yang terbaik untuk memahami metode pemisahan variabel ini dengan contoh berikut.

Contoh 2.2

Diberikan suatu persamaan diferensial parsial homogen dengan variabel bebas x dan t.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.6}$$

Penyelesaian

Langkah pertama akan dicari solusi persamaan diferensial parsial dalam bentuk $U(x,t) = X(x)T(t)$. Bentuk $U(x,t) = X(x)T(t)$ disubtitusi pada Persamaan (2.6), maka diperoleh

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(\mathrm{t}) \tag{2.7}$$

dengan

$$X'(x) = \frac{dX(x)}{dx}, \qquad T'(y) = \frac{dT(t)}{dt}$$

Langkah kedua memisahkan variabel x dan y dengan membagi kedua sisi Persamaan (2.7) dengan $X(x)Y(y)$dimana $X(x)Y(y) \neq 0$, sehingga diperoleh

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{2.8}$$

Dalam hal ini, Persamaan (2.8) dipenuhi untuk suatu daerah tertentu apabila kedua sisi persamaan adalah sama dengan suatu konstanta tertentu, misalkan konstanta pemisahnya adalah b . Persamaan (2.8) menjadi

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = k\frac{X''(x)}{X(x)} = b \tag{2.9}$$

Selanjutnya dari persamaan (2.9) dapat diperoleh dua persamaan yaitu

$$kX''(x) - bX(x) = 0 \tag{2.10a}$$

$$T'(t) - bT(t) = 0. \tag{2.10b}$$

Kedua persamaan diferensial biasa di atas merupakan persamaan yang terpisah. Akan dicari solusi untuk variabel x dan t dengan tiga syarat yang dipenuhi.

1. Syarat pertama jika $b = 0$, maka Persamaan (2.10) menjadi

$k\frac{X''(x)}{X(x)} = b$	$\frac{T'(t)}{T(t)} = b$
$k\frac{X''(x)}{X(x)} = 0$	$\frac{T'(t)}{T(t)} = 0$
$X(x) = c_1x + c_2$	$T(t) = c_3$

Solusinya $U(x,t) = (c_1x + c_2).c_3$

2. Syarat kedua jika $b > 0$ dimisalkan $b = \omega^2$, maka Persamaan (2.10) menjadi

$$k\frac{X''(x)}{X(x)} = \omega^2$$

$$kX''(x) = \omega^2 X(x)$$

$$kX''^{(x)} - \omega^2 X(x) = 0$$

Persamaan karakteristik

$$km^2 - \omega^2 = 0$$

$$m^2 = \frac{\omega^2}{k}$$

$$m_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}$$

$$X(x) = c_4 e^{-\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x} + c_5 e^{\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x}$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \omega^2$$

$$T'(t) = \omega^2 T(t)$$

$$T'(t) - \omega^2 T(t) = 0$$

Persamaan karakteristik

$$m - \omega^2 = 0$$

$$m = \omega^2$$

$$T(t) = c_6 e^{\omega^2 t}$$

Solusinya $U(x,t) = \left(c_4 e^{-\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x} + c_5 e^{\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x}\right)\left(c_6 e^{\omega^2 t}\right)$

3. Syarat ketiga jika $b < 0$ dimisalkan $b = -\omega^2$, maka Persamaan (2.10) menjadi

$$k\frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2$$

$$kX''(x) = -\omega^2 X(x)$$

$$kX''^{(x)} + \omega^2 X(x) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\omega^2$$

$$T'(t) = -\omega^2 T(t)$$

$$T'(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

Persamaan karakteristik

$$km^2 + \omega^2 = 0$$

$$m^2 = -\frac{\omega^2}{k}$$

$$m_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}$$

$$X(x) = c_7 \cos\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x + c_8 i \sin\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x$$

Persamaan karakteristik

$$m + \omega^2 = 0$$

$$m = -\omega^2$$

$$T(t) = c_9 e^{-\omega^2 t}$$

Solusinya $U(x,t) = \left(c_7 \cos\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}x + c_8 i \sin\sqrt{\frac{\omega^2}{k}}\right)\left(c_9 e^{-\omega^2 t}\right)$

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas bagaimana cara memperoleh persamaan gelombang akustik, dan persamaan Helmholtz serta solusi dari persamaan diferensial parsial tersebut

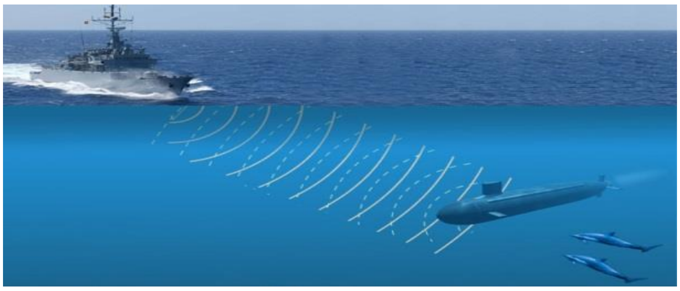
A. Persamaan Gelombang Akustik

Gelombang merupakan getaran yang merambat. Berdasarkan medium perambatannya gelombang diklasifikasikan dalam dua kategori yaitu gelombang mekanik dan gelombang elektromagnetik. Gelombang mekanik adalah gelombang yang memerlukan suatu medium untuk merambat. Contoh gelombang mekanik antara lain adalah gelombang pada massa pegas, gelombang pada tali, dan gelombang akustik (bunyi). Gelombang mekanik terdiri dari dua jenis yaitu gelombang transversal dan gelombang longitudinal. Gelombang transversal adalah suatu gelombang yang arah rambatnya tegak lurus dengan arah perambatan gelombang. Gelombang longitudinal adalah suatu gelombang yang merambat dalam arah yang sejajar (berimpitan) dengan arah perambat gelombang. Gelombang longitudinal berupa rapatan dan renggangan.

Gelombang akustik merupakan gelombang mekanik longitudinal yang terjadi karena adanya rapatan dan renggangan. Gelombang akustik dapat merambat dalam medium gas, cair, dan padat. Sifat dari gelombang akustik yaitu memerlukan medium dalam perambatannya, mengalami pemantulan (*refleksi*), pembiasan (*refraksi*), pelenturan (*difraksi*), dan perpaduan (*interfensi*).

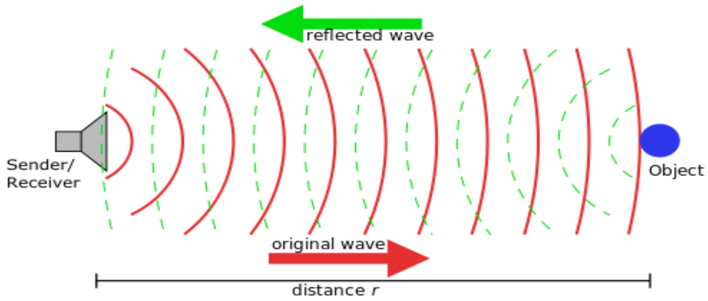
Pada gelombang, energi dari sebuah getaran yang berpindah jauh dari sumbernya dalam bentuk sebuah gangguan disekitar mediumnya (Hall, 1980: 8). Getaran dalam gelombang menyebabkan terjadinya gangguan kepadatan pada medium. Gangguan ini berlangsung melalui interaksi molekul-molekul medium sepanjang arah perambatan gelombang. Pada gelombang akustik suatu gangguan yang berpindah dalam ruang bisa ada jika hanya medium yang terlibat bukan kaku tak terbatas, maupun lentur yang tak terbatas.

Dalam kehidupan manfaat gelombang akustik sangat banyak. Salah satu pemanfaatan gelombang akustik digunakan oleh kapal selam untuk mengetahui keberadaan objek yang berada disekitarnya. Sebuah kapal dapat mendeteksi dan mengetahui objek lain di bawah air dengan menggunakan SONAR (*Sound Navigation and Ranging*). Sonar merupakan sebuah teknik yang memanfaatkan perambatan bunyi di dalam air untuk mengetahui keberadaan obyek yang berada dibawah permukaan air. Berikut ilustrasi dari penggunaan sonar.



Gambar 3.1 Ilustrasi SONAR

Sistem kerja dari sonar menggunakan gelombang akustik bawah air yang dipancarkan dan dipantulkan untuk mendeteksi dan menetapkan lokasi objek di bawah laut atau mengukur jarak bawah laut. Berikut gambar sistem kerja dari sonar



Gambar 3.2 Sistem Kerja SONAR

Gelombang akustik yang dipancarkan oleh *tranducer (sender/receiver)* mengalami sejumlah proses fisik. Pada saat *tranducer* memancarkan gelombang akustik maka air sebagai medium perantara antara objek dan sonar akan memberikan reaksi gelombang akustik pada saat gelombang mengenai objek. Objek tersebut akan memantulkan kembali gelombang akustik tersebut ke *tranducer*. Gelombang yang diterima oleh *tranducer* berupa paket-paket gelombang yang membawa kode-kode yang berada diperairan.

Karasteristik yang diasumsikan untuk membangun persamaan gelombang akustik bawah air yaitu: a. Medium dalam air tidak kental (*inviscid*) sehingga gangguannya kecil, b. Fluida merupakan zat yang tidak termampatkan (*incompressible*) sehingga peningkatan tekanan tidak berakibat adanya perubahan pada kepadatan atau volume dari fluida. c. Tidak ada elemen yang berotasi (*irrotational flow*).

Aliran pada medium yang tidak kental menyebabkan gesekan partikelnya dapat diabaikan sehingga gangguannya dianggap kecil. Aliran yang tidak termampatkan (*incompressible)* semua partikel fluida memiliki kepadatan yang sama sehingga kepadataan partikel yang bergerak memiliki nilai yang konstan.

Aliran yang tidak berotasi dimaksudkan sebagai akibat dari tidak berotasinya elemen. Sebagai contoh aliran tidak berotasi pada kincir raksasa di taman hiburan, sedangkan elemen yang tidak berotasi adalah penumpangnya.

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas akan dicari bentuk persamaan gelombang yang terjadi pada fluida. Ketika sebuah partikel fluida bergerak dari suatu tempat ke tempat yang lain, partikel tersebut mengalami suatu percepatan atau perlambatan. Menurut hukum kedua Newton tentang gerak, gaya yang bekerja (F) pada partikel yang ditinjau harus sama dengan massa (m) dikalikan percepatannya (a), sehingga diperoleh $F = ma$.

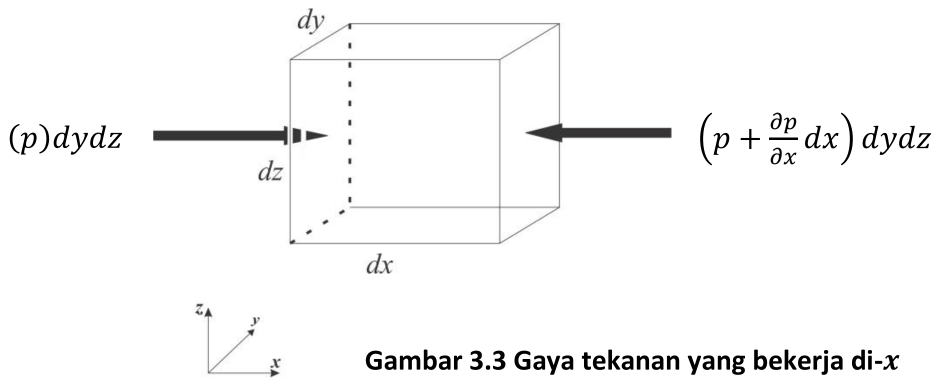
Misalkan kepadatan $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, tekanan $p(\boldsymbol{x}, t)$, dan kecepatan arus $v(\boldsymbol{x}, t)$ pada posisi $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ dan waktu t. Sebelum partikel bergerak, medium fluida memiliki kepadatan awal ρ_0 dan tekanan awal p_0. Berdasarkan asumsi yang pertama bahwa mediumnnya adalah tidak kental (*inviscid*) maka gangguan pada mediumnya kecil. Gangguan disini merupakan suatu keadaan awal (ρ_0, p_0) dari fluida pada kondisi diam $(\boldsymbol{v}_0 = 0)$. Kecepatan fluida jauh lebih kecil daripada kecepatan bunyi c dalam medium. Pernyataan diatas dapat ditulis sebagai berikut.

$$p = p_0 + \delta p, \qquad \rho = \rho_0 + \delta\rho, \qquad \delta p \ll p_0, \qquad \delta\rho \ll \rho_0,$$
$$|\delta \boldsymbol{v}| \ll c \sim \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}} \tag{3.1}$$

Kepadatan suatu partikel fluida (ρ) adalah suatu ukuran dari konsentrasi massa partikel (dm) dan dinyatakan dalam bentuk massa per satuan volume (dV), $\rho = {}^{dm}/_{dV}$, serta $\boldsymbol{f}$ adalah resultan gaya per satuan volume. Menurut hukum Newton kedua berlaku

$$\boldsymbol{f} = \rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \tag{3.2}$$

Resultan gaya (dF) pada elemen fluida merupakan jumlah dari gaya-gaya elemen yang bekerja dalam fluida. Gaya tekanan pada ruang *spatially fixed* pada arah-x yang diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 3.3 Gaya tekanan yang bekerja di-x

Resultan gaya tekanan yang bekerja pada arah-x dengan tekanan $p(\boldsymbol{x}, t)$ diperoleh

$$dF_x = (p)dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

$$= \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy\,dz = -\frac{\partial p}{\partial x}dV$$

Sama halnya untuk arah-y dan arah-z, gaya-gaya tekanan yang bekerja adalah

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y}dV \qquad\qquad dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z}dV$$

sehingga didapat total resultan gaya vektor $d\boldsymbol{F} = dF_x + dF_y + dF_z$ dapat dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai

$$d\boldsymbol{F} = -\frac{\partial p}{\partial x}dVi - \frac{\partial p}{\partial y}dVj - \frac{\partial p}{\partial z}dVk$$

$$= -\left(\frac{\partial p}{\partial x}i + \frac{\partial p}{\partial y}j + \frac{\partial p}{\partial z}k\right)dV$$

$$= -\nabla p\; dV$$

$$\frac{d\boldsymbol{F}}{dV} = -\nabla p$$

$$\boldsymbol{f} = -\nabla p \tag{3.3}$$

dari Persamaan (3.2) dan Persamaan (3.3), diperoleh persamaan gerak berupa

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\nabla p \tag{3.4}$$

Selanjutnya akan dicari pergerakan partikel yang terjadi dalam medium tertentu. Percepatan merupakan laju perubahan kecepatan tehadap waktu. Karena kecepatan merupakan fungsi dari posisi dan waktu, besarnya dapat berubah akibat perubahan posisi partikel tersebut. Penurunan total waktu dari percepatan fluida dalam gerak alirannya menggunakan aturan rantai, maka diperoleh turunan dari masing-masing skalar terhadap waktu sebagai berikut.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Dimisalkan komponen kecepatan partikel dinyatakan oleh $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, dan $v_z = dz/dt$, sehingga diperoleh turunan total percepatan yang ditulis sebagai berikut.

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{v}$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v}$$

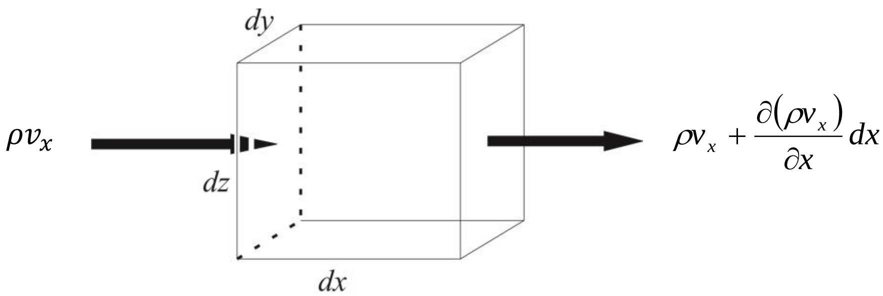
Kemudian bentuk turunan total percepatan disubtitusi kedalam Persamaan gerak (3.4)

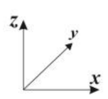
$$\rho \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} \right) = -\nabla p \qquad (3.5)$$

Selanjutnya dengan menggunakan asumsi kedua bahwasannya zat cair tidak termampatkan maka $(\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0)$. Persamaan (3.5) menjadi

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\nabla p. \qquad (3.6)$$

Hubungan yang berkaitan dari pergerakan aliran fluida yang tidak termampatkan membutuhkan hubungan antara kecepatan partikel dan kepadatan sesaat. Aliran pada ruang *spatial fixed* menyebabkan volumenya tetap sehingga elemen dapat melewatinya ketika fluida bergerak. Besar total dari aliran massa pada volume yang melewati permukaan sama dengan besar dari kenaikan massa dalam volumenya. Pada Gambar 3.4 terlihat bahwa besar aliran dari massa pada volume dalam ruang *spatial fixed*, hasil dari aliran pada arah-x diperoleh





Gambar 3.4 Aliran massa pada arah-x melewati volume tetap dV

$$\left\{\rho v_x - \left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx\right)\right\} dy\, dz = -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dV$$

Sama halnya aliran pada arah-y dan arah-z, aliran yang bekerja adalah

$$-\frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial x} dV, \qquad\qquad -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial x} dV$$

sehingga total aliran yang terjadi pada volume yang tetap diperoleh

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho v_y\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial x}\right] dV \equiv -[\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})] dV$$

Besarnya kenaikan massa pada volumenya adalah $\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$. Karena besar total aliran sama dengan besar kenaikannya, maka diperoleh

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -[\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v})] dV$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.7}$$

Persamaan (3.7) dikenal dengan persamaan kontinuitas. Selanjutnya melinearisasi Persamaan (3.6) dan Persamaan (3.7) dengan asumsi pertama. Persamaan (3.6) disubtitusi pada asumsi pertama menjadi

$$(\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial(\boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v})}{\partial t} = -\nabla(p_0 + \delta p)$$

$$(\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial(\delta\boldsymbol{v})}{\partial t} = -\nabla(p_0 + \delta p)$$

dengan mengabaikan bentuk yang non linear maka diperoleh

$$\rho_0 \frac{\partial(\delta \boldsymbol{v})}{\partial t} = -\nabla \delta p \tag{3.8}$$

sedangkan Persamaan (3.7) disubtitusikan pada asumsi pertama menjadi

$$\frac{\partial(\rho_0 + \delta\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot \big((\rho_0 + \delta\rho)(\boldsymbol{v}_0 + \delta\boldsymbol{v})\big) = 0$$

$$\frac{\partial(\rho_0 + \delta\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot \big((\rho_0 + \delta\rho)\delta\boldsymbol{v}\big) = 0$$

sama halnya seperti melinearisasi Persamaan (3.6) dimana bentuk yang non linear diabaikan, sehingga diperoleh

$$\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \delta\boldsymbol{v}) = 0 \tag{3.9}$$

Persamaan (3.9) diturunkan terhadap waktu (t) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \nabla \cdot \rho_0 \frac{\partial\delta\boldsymbol{v}}{\partial t} = 0 \tag{3.10}$$

Selanjutnya Persamaan (3.8) disubtitusi pada Persamaan (3.10) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} + \nabla(-\nabla\delta p) = 0$$

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - \nabla^2\delta p = 0 \tag{3.11}$$

Pada Persamaan (3.8) dan (3.9) sistem aliran cairan terbuka karena jumlah variabelnya terdiri dari tiga komponen (kecepatan, tekanan, dan kepadatan) lebih besar dari jumlah persamaan. Hubungan yang dibutuhkan untuk menutup sistem adalah keadaan persamaan dimana gangguan yang terjadi hanya pada tekanan dan kepadatan saja. Bentuk sederhananya, dimana tekanan adalah fungsi lokal atas kepadatan saja dapat ditulis sebagai

$$p = p(\rho) \tag{3.12}$$

Persamaan (3.12) dinyatakan dalam deret Taylor mendekati keadaan diam $(\rho = \rho_0)$ menjadi

$$p = p(\rho_0) + \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \cdots$$

$$= p(\rho_0) + \frac{dp}{d\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0) + O((\rho - \rho_0)^2) \tag{3.13}$$

Jika $p(\rho_0) = p_0$ dan syarat urutan kedua pada gangguan yang kecil diabaikan, maka diperoleh

$$p = p_0 + \frac{dp}{d\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} (\rho - \rho_0)$$

$$p_0 + \delta p = p_0 + \frac{dp}{d\rho}\bigg|_{\rho=\rho_0} ((\rho_0 + \delta\rho) - \rho_0)$$

$$\delta p = c^2 \delta\rho \tag{3.14}$$

dengan $c^2 = \frac{dp}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}$

Kecepatan bunyi pada cairan tenang merupakan suatu konstan real positif (sifat dari zat cair). Subtitusikan Persamaan (3.14) kedalam Persamaan (3.11) yang menghasilkan persamaan gelombang untuk tekanan

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{c^2}\delta p\right) - \nabla^2 \delta p = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \delta p}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta p = 0 \tag{3.15}$$

Sama halnya untuk gangguan kepadatan memenuhi persamaan gelombang. Menggunakan asumsi yang ketiga bahwa elemen dalam cairan tidak mengalami rotasi (*irrotational flow*) dan suatu kecepatan merupakan sebuah vektor maka diperoleh

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \delta \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - \nabla^2 \delta \boldsymbol{v} = 0 \tag{3.16}$$

Ini berarti bahwa setiap komponen-komponen kecepatan dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi skalar $\varphi(x, y, z, t)$. Persamaan (3.16) dapat ditransformasikan dalam sebuah skalar persamaan gelombang. Dinotasikan φ sebagai kecepatan potensial, yang didefinisikan sebagai

$$\delta \boldsymbol{v} = \nabla \varphi \tag{3.17}$$

sehingga pada sebuah aliran tidak berotasi, kecepatan dapat dinyatakan sebagai gradien sebuah fungsi skalar φ. Kemudian Persamaan (3.17) disubtitusi pada Persamaan (3.16) diperoleh

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (\nabla \varphi\ )}{\partial t^2} - \nabla^2 (\nabla \varphi\ ) = 0$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi\ \right)\nabla = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \nabla^2 \varphi = 0 \tag{3.18}$$

Persamaan (3.18) merupakan Persamaan gelombang.

B. Persamaan Gelombang Helmholtz

Persamaan gelombang Helmholtz merupakan turunan dari persamaan gelombang yang linear dan memiliki solusi yang periodik terhadap waktu.

Misalkan φ merupakan fungsi atas ruang dan waktu sehingga $\varphi = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$. Persamaan gelombang (3.18) dapat ditulis sebagai

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) - \nabla^2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{3.19}$$

Persamaan ini menetapkan tiga persamaan skalar bebas yaitu U_x , U_y, dan U_z. Pengerjaan pada vektor dimensi tiga, Persamaan (3.19) dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel.

Misalkan

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t) \tag{3.20}$$

Persamaan (3.20) disubtitusi pada Persamaan (3.19) maka diperoleh

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t) - \nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t) = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t) = \nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t) = c^2\nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})T(t)$$

$$\frac{1}{T(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T(t) = c^2\frac{\nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})}$$

$$c^2 \frac{\nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})} - \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = 0 \tag{3.21}$$

Syarat pertama hanya bergantung pada koordinat ruang $\boldsymbol{x}$ sedangkan syarat yang kedua hanya bergantung pada waktu t. Kedua syarat ini harus membuat sama dengan nol. Hal ini terjadi jika setiap syarat adalah konstanta berupa $-\omega^2$. Dengan demikian diperoleh

$$c^2 \frac{\nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})} = \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} T(t) = -\omega^2 \tag{3.22}$$

Persamaan (3.22) dapat ditulis menjadi dua persamaan diferensial yaitu

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \tag{3.23}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{3.24}$$

dengan $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ dan $T(t)$ adalah fungsi real atas variabel real.

Notasi $-\omega^2$ dipilih sebagai kontanta pemisah karena persamaan diferensial (3.23) bergantung pada waktu dan akan memiliki solusi jika $\omega^2 > 0$. Hal ini ditunjukkan bahwa $T(t)$ memenuhi $\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0$.

Solusi Persamaan (3.23) dapat diselesaikan secara langsung. Persamaan karakteristik adalah

$m^2 + \omega^2 = 0$

$m^2 = -\omega^2$

$m_{1,2} = \pm i\omega$

solusi umum dari Persamaan (3.23) adalah

$$T(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 i \sin(\omega t) = \mathrm{Re}\{c_\omega e^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}\}, \tag{3.25}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta real dan $c_\omega = c_1 + c_2 i$ adalah konstanta kompleks, sehingga Persamaan (3.20) menjadi

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})\mathrm{Re}\{c_\omega e^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}\} = \mathrm{Re}\{c_\omega \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x}) e^{-\mathrm{i}\omega \mathrm{t}}\} \tag{3.26}$$

Selanjutnya diambil $c_\omega \boldsymbol{X}(\boldsymbol{x})$ sebagai fungsi skalar kompleks dan disingkat sebagai $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$. Sehingga diperoleh

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}\}, \tag{3.27}$$

dengan $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ merupakan fungsi skalar kompleks dimana fungsi $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)$ adalah real. Persamaan (3.27) dideskripsikan sebagai suatu solusi dari waktu harmonis. Selanjutnya, Persamaan (3.27) disubtitusi pada Persamaan gelombang (3.19) diperoleh

$$\nabla^2 \mathrm{Re}\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathrm{Re}\{\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}\} = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{c^2}(i^2 \omega^2)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{c^2}(-1 \cdot \omega^2)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = 0$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = 0$$

$$\nabla^2\, \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) + k^2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad k = \frac{\omega}{c} \tag{3.28}$$

Persamaan (3.28) dikenal dengan nama persamaan Helmholtz dimana konstanta k disebut bilangan gelombang. Konstanta tersebut terkait dengan kasus merambatnya gelombang dalam fluida, dimana panjang gelombang $\lambda = {}^{2\pi}/_{k}$ dan k adalah jumlah gelombang per 2π satuan panjang.

C. Solusi Persamaan Helmholtz

Penentuan solusi persamaan Helmholtz ada banyak cara dalam menyelesaikannya. Salah satu metode dengan menggunakan pemisahan variabel. Persamaan (3.28) pada koordinat Kartesius ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial z^2} + k^2 \boldsymbol{U} = 0 \tag{3.29}$$

Diasumsikan bahwa

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{U}(x, y, z) = XYZ \tag{3.30}$$

Persamaan (3.30) disubtitusi pada Persamaan (3.29) menjadi

$$\frac{\partial^2 (XYZ)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XYZ)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 (XYZ)}{\partial z^2} + k^2 XYZ = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(XYZ) + k^2 XYZ = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} XYZ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} XYZ + \frac{\partial^2}{\partial z^2} XYZ + k^2 XYZ = 0$$

$$YZ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + XZ \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + XY \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 XYZ = 0 \tag{3.31}$$

Persamaan (3.31) dibagi dengan XYZ diperoleh

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}+k^2=0 \tag{3.32}$$

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-k^2 \tag{3.33}$$

Pada Persamaan (3.33) menunjukkan satu pemisahan variabel. Ruas kiri adalah fungsi atas x saja, sedangkan ruas kanan hanya bergantung pada y dan z. Persamaan (3.33) merupakan semacam paradoks. Sebuah fungsi x disamakan dengan fungsi y dan z, tetapi x, y, dan z merupakan koordinat bebas. Kebebasan ini berarti bahwa sifat x sebagai variabel bebas tidak ditentukan oleh y dan z. Paradoks ini diselesaikan dengan cara menetapkan masing-masing bagian sama dengan konstanta yaitu konstanta pemisahan.

Dipilih

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=l^2 \tag{3.34}$$

sebagai peubah pertama, sehingga

$$-\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}-k^2=l^2 \tag{3.35}$$

Persamaan (3.35) dibentuk menjadi

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=-l^2-k^2-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} \tag{3.36}$$

yang merupakan pemisahan yang kedua. Dalam hal ini fungsi y disamakan dengan fungsi atas z dan paradoks yang sama muncul. Diselesaikan seperti cara sebelumnya dengan menyamakan setiap bagian dengan konstanta pemisahan lain yaitu n^2

$$\frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = n^2 \tag{3.37}$$

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -l^2 - n^2 - k^2 = -(l^2 + n^2 + k^2) \tag{3.38}$$

Ketiga persamaan diferensial biasa Persamaan (3.34), (3.37), dan (3.38) ini mengganti Persamaan (3.29). Dengan demikian asumsi dari (3.30) memenuhi Persamaan (3.29) dan merupakan solusinya. Solusi umum untuk masing-masing variabel yaitu

$$X_l(x) = A_l e^{lx} + B_l e^{-lx}$$

$$Y_n(y) = C_n e^{ny} + D_n e^{-ny}$$

$$Z_{ln}(z) = E_{ln} e^{-i\sqrt{l^2+n^2+k^2}z} + F_{ln} e^{iz\sqrt{l^2+n^2+k^2z}}$$

Solusi umum yang diperoleh sesuai konstanta yang dipilih l dan n yaitu

$$\boldsymbol{U}_{ln}(x, y, z) = X_l(x) Y_n(y) Z_{ln}(z) \tag{3.39a}$$

Bentuk solusi yang paling umum dari Persamaan (3.29) dengan mengambil kombinasi linear dari solusi $\boldsymbol{U}_{ln}$ yaitu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x, y, z) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_l e^{lx} + B_l e^{-lx})(C_n e^{ny} \\ + D_n e^{-ny})\left(E_{ln} e^{-i\sqrt{l^2+n^2+k^2}z} + F_{ln} e^{i\sqrt{l^2+n^2+k^2}z}\right)\end{aligned} \tag{3.39b}$$

Persamaan (3.39b) menunjukkan bahwa kecepatan potensial dari gelombang yang dipengaruhi ruang dan waktu.

BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

A. KESIMPULAN

Berdasarkan rumusan masalah dan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa :

1. Persamaan gelombang akustik bawah air dapat dirumuskan dengan memperhatikan asumsi-asumsinya, gaya-gaya yang bekerja pada mediumnya serta menerapkan hukum kedua Newton, maka diperoleh persamaan gelombang yaitu :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \nabla^2\varphi = 0$$

2. Persamaan Helmholtz merupakan hasil penurunaan persamaan gelombang terhadap waktu dalam bentuk

$$\nabla^2 \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) + k^2\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = 0, \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

3. Bentuk solusi umum dari persamaan Helmholtz yaitu

$$\boldsymbol{U}(x,y,z) = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_l e^{lx} + B_l e^{-lx})(C_n e^{ny} + D_n e^{-ny})\left(E_{ln}e^{-i\sqrt{l^2+n^2+k^2}z} + F_{ln}e^{i\sqrt{l^2+n^2+k^2}z}\right)$$

B. SARAN

Pada tulisan ini hanya membahas persamaan gelombang akustik dan penurunnya menjadi persamaan Helmholtz yang menggunakan metode pemisahan variabel. Bagi pembaca yang tertarik mengembangkan lebih lanjut dapat menyelesaikan persamaan ini menggunakan metode lain dalam mencari solusinya. Pembaca juga dapat menggunakan syarat batas dan nilai awal agar diperoleh solusi khusus dari persamaannya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (1987). *Aljabar Liniear Elementer*. 5th. (Alih bahasa: Pantur Silaban). Jakarta: Erlangga

Bronson, R & Costa, G. (2007). *Differential Equation.* 3th. (Alih bahasa: Thombi Layukallo). Jakarta: Erlangga

Budak, B.M., Samarskii, A.A. & Tikhonov, A.N. (1980). *A Collection of Problem on Mathematical Physics.* New York: Macmillan.

Frey, Austin R. et. al. (1982). *Fundamentals of Acoustics.* 3rd California: John Wiley & Sons, Inc.

Fuller, G. & Tarwater, D. (1986). *Analytic Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company.

Gumerov, N.A & Duraiswami, R. (2004). *Fast Multiple Methods for Helmholtz Equation in three dimensions*. United State: Elsevier.

Hall, D.E. (1980). *An Introduction Musical Acoustic*. Belmont, California: Wadsworth Publishing Company.

Halliday, David., Resnick, Robert. & Walker, Jearl. (2005). *Fisika Dasar.* 7th. (Alih bahasa: Euis Sustini). Jakarta: Erlangga.

Meyer, Walker J. 1984. *Concept of Mathematical Modeling*. New York: McGraw-Hill Book Company.

Munson, Bruce R., Young, Donald F., & Okiishi, Theodore H. (2003). *Mekanika Fluida.* 4th. (Alih bahasa: Harinaldi). Jakarta: Erlangga

Mohammad Ishaq. (2007). *Fisika Dasar*. 2nd Yogyakarta; Graha Ilmu.

L. E. Kinsler, et. al. (2000). *Fundamentals of Acoustics*. 3th Edition. New York: Wiley.

Didit Nugroho B. (2011). *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya.* Salatiga. Graha Ilmu.

Purcell, Edwin J. & Varberg, Dale. (1987). *Kalkulus dan Geometri Analitis.* 2nd. (Alih bahasa: I Nyoman Susila). Jakarta: Erlangga.

Ross, Shepley L. (1984). *Differential equations.*3rd Singapore: the Persmission Department.

Serway, Raymond A. & Jewett, Jr. Jhon W. (2009). *Fisika-untuk Sains dan Teknik*. Jakarta: Salemba Teknik.

Sutrisno. (1980). *Fisika Dasar*. 2nd. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Peter Soedojo. (2004). *Fisika Dasar.* Yogyakarta: Andi.

Spingel, M.R.(1994). *Matematika Lanjutan untuk para Insinyur dan Ilmuan.* (Alih bahasa: K Martono). Bandung: Penerbit ITB.

Tang, K.T. (2007). *Mathematical Methods for Engineer and Scientists 3.* Berlin: Springer.

White, Frank M. (1986). *Fluid Mechanics.* Singapura: McGraw-Hill, Inc.