

Sistem Hasil Kali Persamaan Diferensial Otonomus pada Bidang

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Guna Memperoleh Gelar
Sarjana Sains



Disusun oleh :
Ericolion Maubrani
NIM. 10305141031

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA
2014

PERSETUJUAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL

**“SISTEM HASIL KALI PERSAMAAN DIFERENSIAL OTONOMUS
PADA BIDANG”**

Yang disusun oleh:

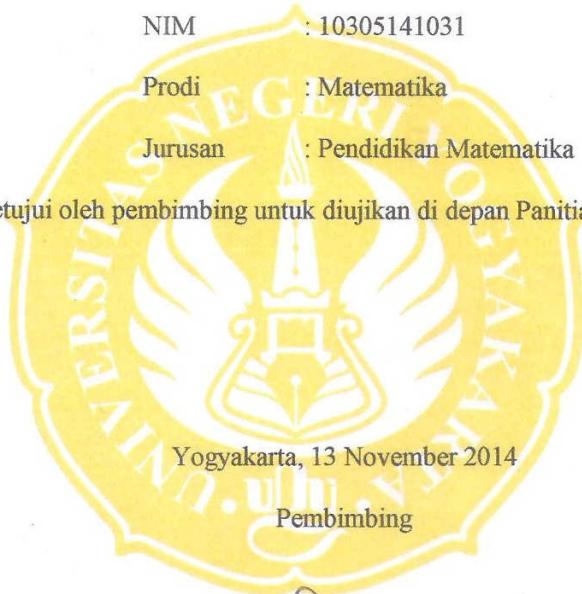
Nama : Ericolion Maubrani

NIM : 10305141031

Prodi : Matematika

Jurusan : Pendidikan Matematika

telah disetujui oleh pembimbing untuk diujikan di depan Panitia Penguji Skripsi.



Dr. Hartono
NIP. 196203291987021002

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama : Ericolion Maubrani
NIM : 10305141031
Prodi : Matematika
Jurusan : Pendidikan Matematika
Fakultas : MIPA
Judul TAS : Sistem Hasil Kali Persamaan Diferensial Otonomus pada Bidang

dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang atau institusi lain kecuali pada bagian tertentu yang memang diambil sebagai pedoman, acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim. Apabila ternyata terbukti pernyataan diatas tidak benar maka sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya sebagai penulis dan sanggup diberi sanksi sebagaimana yang berlaku.

Yogyakarta, 13 November 2014

Yang menyatakan,

Ericolion Maubrani
NIM. 10305141031

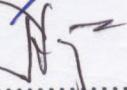
PENGESAHAN

SKRIPSI DENGAN JUDUL “SISTEM HASIL KALI PERSAMAAN DIFERENSIAL OTONOMUS PADA BIDANG”

Yang Disusun oleh:

Nama : Ericolion Maubrani
NIM : 10305141031
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 24 November 2014 dan dinyatakan lulus.

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
<u>Dr. Hartono</u> NIP. 196203291987021002	Ketua Penguji		17-n-14
<u>Nikenasih Binatari, M.Si.</u> NIP. 198410192008122005	Sekretaris Penguji		10-12-2014
<u>Dr. Sugiman</u> NIP. 196502281991011001	Penguji Utama		9-12-2014
<u>Kus Prihantoso K., M.Si.</u> NIP. 197904062005011005	Penguji Pendamping		9-12-2014

Yogyakarta, Desember 2014
Fakultas Matematika dan Ilmu
Pengetahuan Alam



Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

MOTTO DAN PERSEMPAHAN

“Maka sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan. Maka apabila engkau telah selesai (dari sesuatu urusan), tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain), dan hanya kepada Tuhanmulah engkau berharap.” (Q.S. Al-Insyiraah: 5-6)

Man Jadda Wajada

“Siapa yang bersungguh-sungguh, ia akan berhasil”

(Pepatah Arab)

Bismillahirrahmaanirrahiim

Alhamdulillah, karya sederhana ini penulis persembahkan:
Kepada Ibunda tercinta, Sri Umini Lestari yang selalu mendo’akan, menyayangi
setulus hati dan memberikan semangat kepada penulis.
Kepada kakak dan suami, Mbak Ervin dan Mas Danu,
serta putri kakak yang selalu ceria, adik Salma.

Sistem Hasil Kali Persamaan Diferensial Otonomus pada Bidang

Oleh:

Ericolion Maubrani

10305141031

ABSTRAK

Persamaan diferensial skalar otonomus merupakan persamaan diferensial berdimensi satu yang variabel bebasnya tidak muncul secara eksplisit. Gabungan dua persamaan diferensial skalar otonomus menghasilkan sistem persamaan diferensial pada bidang. Penulisan tugas akhir ini bertujuan untuk mengetahui karakteristik dan kestabilan titik ekuilibrium pada sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang.

Karakteristik sistem hasil kali dianalisis melalui sistem pada koordinat kartesius dan perubahan sistem tersebut pada koordinat polar. Kestabilan titik ekuilibrium pada sistem hasil kali dilihat dari potret fase masing-masing persamaan penyusunnya, potret fase sistem hasil kali, dan secara analisis untuk kasus titik ekuilibrium hiperbolik. Potret fase sistem hasil kali digambarkan berbantuan program Maple.

Sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang merupakan gabungan dua persamaan diferensial skalar otonomus yang tidak bertautan. Sistem hasil kali pada bidang dibagi menjadi dua jenis, yaitu sistem hasil kali kartesius dan sistem hasil kali polar. Karakteristik dari sistem hasil kali yakni sistem hasil kali selalu dapat dirubah ke bentuk persamaan diferensial yang dapat dipisah. Titik ekuilibrium pada sistem hasil kali merupakan pasangan terurut dari titik ekuilibrium persamaan penyusunnya. Kestabilan titik ekuilibrium pada sistem hasil kali kartesius terlihat dari kestabilan titik ekuilibrium persamaan penyusunnya.

Kata kunci: Sistem hasil kali, persamaan diferensial, otonomus, kestabilan titik ekuilibrium

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan nikmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir skripsi dengan baik. Skripsi yang berjudul “*Sistem Hasil Kali Persamaan Diferensial pada Bidang*” ini disusun untuk memenuhi salah satu syarat kelulusan guna meraih gelar Sarjana Sains pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta.

Penyelesaian skripsi ini tidak lepas dari adanya bantuan, dukungan, bimbingan, dan saran dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Koordinator Program Studi Matematika yang telah memberikan arahan dan dukungan akademik kepada penulis.
4. Bapak Dr. Hartono selaku Dosen Pembimbing yang telah sabar memberikan bimbingan, masukan, dan saran kepada penulis.
5. Segenap dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah berkenan memberikan ilmu kepada penulis.

6. Ibunda dan keluarga yang selalu memberi motivasi, do'a restu, dan semangat kepada penulis.
7. Rekan-rekan mahasiswa matematika subsidi angkatan 2010 yang selalu memberikan semangat.
8. Semua pihak yang telah membantu secara langsung maupun tidak langsung sehingga dapat memperlancar proses penyusunan skripsi.

Penulis menerima saran dan masukan yang membangun, sehingga skripsi ini bisa menjadi lebih baik. Akhir kata semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi pembaca.

Penulis

DAFTAR ISI

	hal
Halaman Judul	i
Halaman Persetujuan	ii
Halaman Pernyataan	iii
Halaman Pengesahan	iv
Halaman Motto dan Persembahan	v
Abstrak	vi
Kata Pengantar	vii
Daftar Isi	ix
Daftar Gambar	xi
Daftar Simbol	xiv
Daftar Lampiran	xvi
BAB I PENDAHULUAN	1
A. Latar Belakang Masalah	1
B. Batasan Masalah	3
C. Rumusan Masalah	3
D. Tujuan	4
E. Manfaat	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA	5
A. Persamaan Diferensial Skalar Otonomus	5

B. Sistem Persamaan Diferensial Otonomus pada Bidang	21
C. Sistem pada Koordinat Polar	37
D. Linierisasi Sistem Tak Linier	41
BAB III PEMBAHASAN	53
A. Sistem Hasil Kali Kartesius	54
B. Sistem Hasil Kali Polar	80
BAB IV PENUTUP	89
A. Kesimpulan	89
B. Saran	91
DAFTAR PUSTAKA	92
LAMPIRAN	93

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Interval maksimal dari eksistensi solusi $\dot{x} = x^2$ dengan nilai awal $x(0) = 1$ adalah $(-\infty, 1)$	10
Gambar 2. Titik (t_1, x_1) dan (t_2, x_1) mempunyai gradien yang sama.	11
Gambar 3. (a) Medan arah dengan beberapa trayektori dari $\dot{x} = -x$. (b) Medan vektor dari $\dot{x} = -x$	11
Gambar 4. (a) Medan arah dengan beberapa trayektori dari $\dot{x} = x^2$. (b) Medan vektor dari $\dot{x} = x^2$	12
Gambar 5. (a) Orbit positif, orbit negatif, dan orbit melalui x_0 , dan (b) potret fase dari $\dot{x} = -x$	14
Gambar 6. (a) Orbit positif, orbit negatif, dan orbit melalui x_0 , dan (b) potret fase dari $\dot{x} = x^2$	14
Gambar 7. (a) Potret fase $\dot{x} = -x$ dari fungsi $f(x) = -x$, dan (b) potret fase $\dot{x} = x^2$ dari fungsi $f(x) = x^2$	15
Gambar 8. Potret fase $\dot{x} = x - x^3$ dari fungsi $f(x) = x - x^3$	16
Gambar 9. Potret fase $\dot{x} = -x$ dari fungsi potensial $F(x) = \frac{x^2}{2}$	17
Gambar 10. Potret fase $\dot{x} = x - x^3$ dari fungsi potensial $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$	18
Gambar 11. Trayektori sistem (2.15) pada ruang (t, x_1, x_2)	25
Gambar 12. Trayektori sistem (2.16) pada ruang (t, x_1, x_2)	26

Gambar 13. Medan vektor dari: (a) sistem (2.15), dan (b) sistem (2.16).	27
Gambar 14. Orbit dari: (a) sistem (2.15) yang melalui titik (1, 2), dan (b) sistem (2.16) yang melalui titik (1,1).	28
Gambar 15. Potret fase dari: (a) sistem (2.15), dan (b) sistem (2.16) pada bidang fase (x_1, x_2)	30
Gambar 16. (a) Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ stabil, dan (b) titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ stabil asimtotik	31
Gambar 17. Potret fase sistem (2.35).	39
Gambar 18. Potret fase dari sistem (2.36) dengan dua <i>limit cycle</i>	41
Gambar 19. Fungsi V dan daerah Ω dimana $\dot{V}(\mathbf{y}) > 0$	47
Gambar 20. Potret fase: (a) sistem (2.51), dan (b) sistem linierisasi dari sistem (2.51) di titik (0,0).	50
Gambar 21. Potret fase: (a) sistem (2.54), dan (b) sistem linierisasi dari sistem (2.54) di titik (0,0).	52
Gambar 22. Potret fase dari (a) persamaan (3.4), dan (b) persamaan (3.5)	55
Gambar 23. Potret fase sistem (3.6)	57
Gambar 24. Potret fase dari (a) persamaan (3.11), dan (b) persamaan (3.12)	58
Gambar 25. Potret fase dari sistem (3.13)	60
Gambar 26. Potret fase dari (a) persamaan (3.18), dan (b) persamaan (3.19)	61

Gambar 27. Potret fase dari sistem (3.20)	63
Gambar 28. Potret fase dari (a) persamaan (3.25), dan (b) persamaan (3.26)	64
Gambar 29. Potret fase dari sistem (3.27)	66
Gambar 30. Potret fase dari (a) persamaan (3.32), dan (b) persamaan (3.33)	67
Gambar 31. Potret fase dari sistem (3.34)	70
Gambar 32. Potret fase dari (a) persamaan (3.39), dan (b) persamaan (3.40)	71
Gambar 33. Potret fase dari sistem (3.41).	74
Gambar 34. Potret fase dari sistem (3.60)	81
Gambar 35. Potret fase dari sistem (3.62)	83
Gambar 36. Potret fase dari sistem (3.64)	84

DAFTAR SIMBOL

\dot{x}	: Turunan x terhadap t atau $\frac{dx}{dt}$
x_0	: Nilai awal dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$
$\varphi(t, x_0)$: Solusi atau aliran dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ yang melalui x_0
\in	: Elemen atau anggota
\mathbb{R}	: Himpunan bilangan real berdimensi satu
\mathbb{R}^2	: Himpunan bilangan real berdimensi dua
$C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Himpunan dari semua fungsi real yang kontinu dengan domain dan kodomainnya adalah \mathbb{R}
$C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: Himpunan dari semua fungsi terdiferensial yang turunan pertamanya kontinu dengan domain dan kodomainnya adalah \mathbb{R}
I_{x_0}	: Interval yang bergantung x_0 sedemikian hingga solusi $x(t)$ terdefinisi pada interval tersebut
$\gamma^+(x_0)$: Orbit positif dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ yang melalui x_0
$\gamma^-(x_0)$: Orbit negatif dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ yang melalui x_0
$\gamma(x_0)$: Orbit dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ yang melalui x_0
\bar{x}	: Titik ekuilibrium dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$
$F(x)$: Fungsi potensial dari persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$
$ x $: Nilai mutlak dari variabel x
$f'(x)$: Turunan pertama fungsi f terhadap x

$f^{(n)}(x)$: Turunan ke- n fungsi $f(x)$ terhadap x
\mathbf{x}	: Vektor di \mathbb{R}^2 , $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
$\dot{\mathbf{x}}$: Turunan \mathbf{x} terhadap t atau $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{pmatrix}$
\mathbf{x}^0	: Nilai awal dari sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$
$I_{\mathbf{x}^0}$: Interval yang bergantung \mathbf{x}^0 sedemikian hingga solusi $\mathbf{x}(t)$ terdefinisi pada interval tersebut
$\varphi(t, \mathbf{x}^0)$: Solusi atau aliran dari sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yang melalui \mathbf{x}^0
$\ \mathbf{x}\ $: Norm (panjang) vektor \mathbf{x}
$\gamma^+(\mathbf{x}^0)$: Orbit positif dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yang melalui \mathbf{x}^0
$\gamma^-(\mathbf{x}^0)$: Orbit negatif dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yang melalui \mathbf{x}^0
$\gamma(\mathbf{x}^0)$: Orbit dari sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yang melalui \mathbf{x}^0
\mathbf{A}	: Matriks berukuran 2×2
λ_i	: Nilai eigen ke- i dengan $i = 1, 2$
\mathbf{v}^i	: Vektor eigen yang bersesuaian dengan λ_i dengan $i = 1, 2$
$Re(\lambda_i)$: Bagian real dari nilai eigen ke- i dengan $i = 1, 2$
$\dot{\theta}$: Turunan θ terhadap t atau $\frac{d\theta}{dt}$
\dot{r}	: Turunan r terhadap t atau $\frac{dr}{dt}$
$D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$: matriks Jacobian dari \mathbf{f} pada titik $\bar{\mathbf{x}}$

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Teorema, definisi, dan lemma yang mendukung kajian pustaka	94
Lampiran 2. Perintah Maple untuk menggambarkan medan arah dan trayektori persamaan diferensial (2.6)	102
Lampiran 3. Perintah Maple untuk menggambarkan medan arah dan trayektori persamaan diferensial (2.7)	103
Lampiran 4. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.15)	104
Lampiran 5. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.16)	106
Lampiran 6. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.36)	108
Lampiran 7. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.51) dan sistem linierisasinya	110
Lampiran 8. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.54) dan sistem linierisasinya	112
Lampiran 9. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.5)	114
Lampiran 10. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.12)	115

Lampiran 11. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.19)	117
Lampiran 12. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.27)	119
Lampiran 13. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.34) dan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik ekuilibriumnya	121
Lampiran 14. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.41) dan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik ekuilibriumnya	123
Lampiran 15. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.60)	127
Lampiran 16. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.62)	128
Lampiran 17. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.64)	130

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Model matematika pada umumnya dikembangkan untuk memahami fenomena pada persoalan fisika. Model tersebut terkadang berbentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Apabila variabel bebas dalam persamaan diferensial tidak muncul secara eksplisit, maka disebut persamaan diferensial otonomus, sedangkan apabila muncul secara eksplisit disebut persamaan diferensial tak otonomus (Nagle et al, 2012).

Perilaku dari solusi persamaan diferensial (Blanchard et al, 2006) dapat diketahui melalui tiga pendekatan, yaitu pendekatan secara analitik, numerik, dan kualitatif. Pertama, pendekatan analitik merupakan pendekatan dengan mencari solusi dari persamaan diferensial secara eksplisit. Kedua, pendekatan numerik merupakan pendekatan dengan melakukan perhitungan secara aritmatik untuk menentukan taksiran solusi dari persamaan diferensial. Ketiga, pendekatan kualitatif merupakan suatu metode dengan menggunakan konsep geometri dalam mengetahui perilaku dari solusi persamaan diferensial. Contoh konsep geometri yang digunakan (Hale & Kocak, 1991) yaitu medan arah, trayektori, medan vektor, orbit, dan potret fase. Pendekatan analitik tidak dapat diterapkan pada persamaan diferensial pada umumnya, sebab terdapat persamaan diferensial yang solusinya sulit ditentukan secara eksplisit. Jika pendekatan analitik sulit

dilakukan, maka perilaku dari solusi persamaan diferensial dapat dilihat dengan pendekatan secara kualitatif.

Persamaan diferensial otonomus yang berdimensi satu disebut persamaan diferensial skalar otonomus (Hale & Kocak, 1991). Persamaan diferensial ini dapat dicari solusinya secara eksplisit dengan menggunakan metode pemisah variabel atau melihat sifat solusinya dengan pendekatan secara kualitatif. Sistem persamaan diferensial merupakan sistem persamaan yang melibatkan lebih dari satu variabel terikat (Hirsch & Smale, 1974). Sistem persamaan diferensial (Hale & Kocak, 1991) dengan dua variabel terikat dapat dikatakan sebagai sistem persamaan diferensial pada bidang. Sistem persamaan diferensial terbagi menjadi dua, yaitu sistem linier dan sistem tak linier. Sistem linier telah dibahas oleh Nur Faida (2005) dalam skripsi berjudul *Potret Fase Sistem Linier*. Nur Faida menjelaskan tentang solusi, potret fase, dan tipe-tipe potret fase sistem linier. Kasus sistem tak linier telah dibahas oleh Cici Setyowati (2004) dalam skripsi berjudul *Kestabilan dari Titik Kritis pada Sistem Otonomus Persamaan Diferensial Tak Linier*. Cici Setyowati menjelaskan kestabilan dari titik kritis (titik ekuilibrium) pada sistem otonomus persamaan diferensial tak linier, serta linierisasi dari sistem tak linier.

Pada skripsi ini dibahas mengenai sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang. Gabungan dari dua persamaan diferensial skalar otonomus yang tidak bertautan dan menginterpretasikan aliran dari dua variabel dalam bidang disebut sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang (Hale & Kocak, 1991: 185). Menurut (Hirsch & Smale, 1974) dua persamaan

diferensial dikatakan tidak bertautan (*uncouple*) jika kedua fungsi pada persamaan diferensial tidak mempunyai relasi secara spesifik. Titik ekuilibrium sistem hasil kali merupakan pasangan terurut dari persamaan penyusunnya. Perilaku solusi dari sistem hasil kali dapat diketahui melalui potret fase. Potret fase pada sistem hasil kali merupakan hasil kali dari masing-masing potret fase persamaan penyusunnya.

B. Batasan Masalah

Pada skripsi ini dibahas tentang sistem hasil kali yang persamaan-persamaan penyusunnya merupakan persamaan diferensial skalar otonomus yang tidak bertautan. Persamaan diferensial otonomus yang dibahas yaitu persamaan yang ruas kanannya merupakan fungsi yang turunan pertamanya kontinu.

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dapat dirumuskan sebagai berikut :

1. Apa karakteristik dari sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang?
2. Bagaimana kestabilan titik ekuilibrium dari sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang?

D. Tujuan

Berdasarkan permasalahan di atas, tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Mengetahui karakteristik dari sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang.
2. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium dari sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang.

E. Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memperkenalkan karakteristik dan jenis-jenis sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang. Jenis-jenis dari sistem hasil kali pada bidang yaitu sistem hasil kali kartesius dan sistem hasil kali polar. Sistem hasil kali mempunyai kelebihan daripada sistem pada umumnya, salah satunya yaitu kestabilan titik ekuilibrium pada sistem terlihat dari kestabilan titik ekuilibrium persamaan penyusunnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Apabila variabel bebas dalam persamaan diferensial tidak muncul secara eksplisit, maka disebut persamaan diferensial otonomus, sedangkan apabila muncul secara eksplisit disebut persamaan diferensial tak otonomus (Nagle et al, 2012). Menurut (Hale & Kocak, 1991) persamaan diferensial otonomus yang berdimensi satu disebut persamaan diferensial skalar otonomus.

A. Persamaan Diferensial Skalar Otonomus

Misal I merupakan interval terbuka pada garis bilangan real \mathbb{R} dan

$$x: I \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto x(t)$$

adalah fungsi real yang terdiferensialkan untuk suatu variabel real t .

Misal

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x \mapsto f(x)$$

adalah fungsi tertentu yang bernilai real.

Diberikan persamaan diferensial berbentuk

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

dimana x adalah fungsi tidak diketahui dari t dan f adalah fungsi dari x .

Dinotasikan \dot{x} sebagai turunan $\frac{dx}{dt}$ dan t sebagai waktu atau variabel bebas.

Persamaan diferensial (2.1) disebut persamaan diferensial skalar otonomus.

Persamaan (2.1) disebut skalar sebab x berdimensi satu dan otonomus sebab fungsi f tidak bergantung pada t secara eksplisit (Hale & Kocak, 1991: 4).

Fungsi $x(t)$ dikatakan solusi dari persamaan (2.1) pada interval I jika $\dot{x}(t) = f(x(t))$ untuk setiap $t \in I$. Solusi khusus dari persamaan (2.1) dengan nilai awal $t_0 \in I$ yang mempunyai nilai x_0 dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (2.2)$$

Persamaan (2.2) disebut dengan masalah nilai awal dan setiap solusinya disebut solusi yang melalui x_0 saat $t = t_0$.

Sifat dari persamaan otonomus pada persamaan (2.2) yaitu tidak akan berpengaruh secara umum jika diasumsikan bahwa masalah nilai awal dikhususkan untuk $t_0 = 0$. Misal $x(t)$ merupakan solusi dari persamaan (2.2) yang melalui x_0 saat t_0 dan didefinisikan $y(t) \equiv x(t + t_0)$. Akan ditunjukkan bahwa $y(t)$ merupakan solusi persamaan (2.2) yang melalui x_0 saat 0.

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t + t_0) = f(x(t + t_0)) = f(y(t)) \quad \text{dan } y(0) = x(t_0) = x_0. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) menunjukkan bahwa $y(t)$ merupakan solusi dari persamaan (2.2) yang melalui x_0 saat $t_0 = 0$. Solusi dari persamaan (2.2) yang melalui x_0 saat $t_0 = 0$ dinotasikan $\varphi(t, x_0)$, sehingga $\varphi(t, x_0) = x(t)$ dan $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Solusi dari persamaan (2.1) dapat dicari dengan menggunakan metode pemisah variabel, sebab ruas kanan pada persamaan (2.1) hanya bergantung pada x . Solusi umum dari persamaan (2.1) dapat dicari dengan menggunakan metode pemisah variabel, diperoleh:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= f(x) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} dx &= dt \\
\Leftrightarrow \int \frac{1}{f(x)} dx &= \int dt. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Solusi masalah nilai awal dari persamaan (2.2) diperoleh dengan mengintegralkan persamaan (2.4) antara batas yang berkorespondensi pada waktu t_0 dan t (Robinson, 2004: 60). Pada ruas kiri persamaan (2.4) diintegralkan dengan batas $x(t_0)$ dan $x(t)$ sedangkan ruas kanan adalah t_0 dan t , sehingga diperoleh

$$\int_{x_0}^x \frac{1}{f(s)} ds = t - t_0. \tag{2.5}$$

Contoh 2.1: Diberikan persamaan diferensial

$$\dot{x} = -x, \quad x(0) = x_0 \tag{2.6}$$

Solusi dari persamaan (2.6) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.5) yakni

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^x \frac{1}{s} ds &= -t \\
\Leftrightarrow \ln(x) - \ln(x_0) &= -t \\
\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) &= -t \\
\Leftrightarrow \frac{x}{x_0} &= e^{-t} \\
\Leftrightarrow x &= e^{-t} x_0.
\end{aligned}$$

Jadi $x(t) = e^{-t}x_0$ adalah solusi persamaan (2.6) yang melalui x_0 saat $t_0 = 0$ dan terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$.

Contoh 2.2: Diberikan masalah nilai awal

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0. \quad (2.7)$$

Solusi dari persamaan (2.7) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.5) yakni

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x \frac{1}{x^2} ds = t \\ \Leftrightarrow & -\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - t \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x} = \frac{1 - x_0 t}{x_0} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}. \end{aligned}$$

Jadi solusi persamaan (2.7) adalah $x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}$. Solusi persamaan (2.7) terdefinisi pada interval $(-\infty, \frac{1}{x_0})$ untuk $x_0 > 0$, $(-\infty, \infty)$ untuk $x_0 = 0$, dan $(\frac{1}{x_0}, \infty)$ untuk $x_0 < 0$.

Teorema 2.1: Eksistensi dan Ketunggalan dari Solusi (Hale & Kocak, 1991: 4)

- (i) Jika $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, maka untuk setiap $x_0 \in \mathbb{R}$ terdapat interval (mungkin dapat tak berhingga) $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ yang memuat $t_0 = 0$ dan solusi $\varphi(t, x_0)$ dari masalah nilai awal

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

terdefinisi untuk setiap $t \in I_{x_0}$, memenuhi kondisi awal $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Jika α_{x_0} terbatas, maka

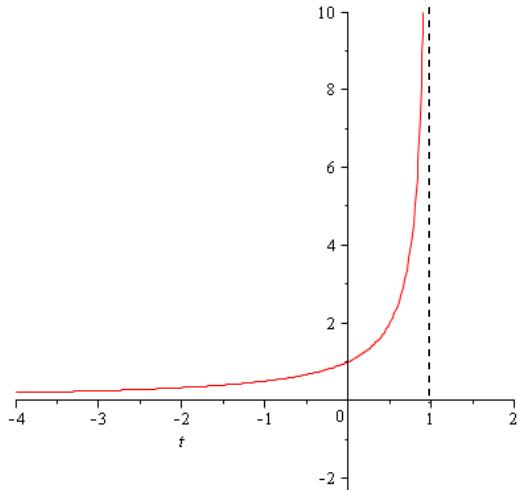
$$\lim_{t \rightarrow \alpha_{x_0}^+} |\varphi(t, x_0)| = +\infty,$$

atau jika β_{x_0} terbatas, maka

$$\lim_{t \rightarrow \beta_{x_0}^-} |\varphi(t, x_0)| = +\infty.$$

- (ii) Jika ditambah, $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, maka $\varphi(t, x_0)$ tunggal pada I_{x_0} dan $\varphi(t, x_0)$ kontinu di (t, x_0) sekaligus dengan turunan parsial pertamanya, sehingga $\varphi(t, x_0)$ adalah fungsi C^1 .

Pada Teorema 2.1, notasi $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ merupakan himpunan dari semua fungsi kontinu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sedangkan notasi $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ merupakan himpunan dari semua fungsi terdiferensial yang turunan pertamanya kontinu. Batas terbesar yang mungkin pada interval I_{x_0} pada bagian (i) dari Teorema 2.1 disebut interval maksimal dari eksistensi solusi $\varphi(t, x_0)$ (Hale & Kocak, 1991: 6). Interval maksimal dari solusi pada Contoh 2.2 dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Interval maksimal dari eksistensi solusi $\dot{x} = x^2$ dengan nilai awal $x(0) = 1$ adalah $(-\infty, 1)$.

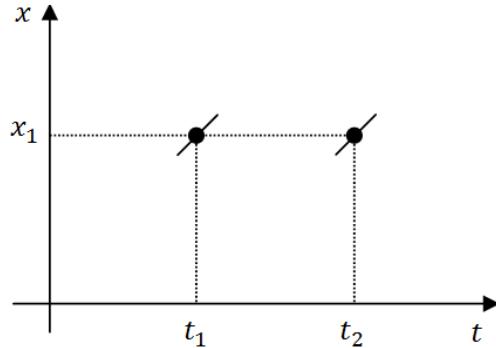
Pada umumnya tidak semua persamaan diferensial dapat dicari solusi eksplisitnya, sehingga dilakukan pendekatan kualitatif untuk melihat perilaku solusi dari persamaan diferensial. Pendekatan kualitatif menggunakan konsep pada geometri seperti medan arah, trayektori, medan vektor, orbit, dan potret fase.

1. Medan Arah

Setiap titik pada bidang- (t, x) dimana $f(x)$ terdefinisi, ruas kanan persamaan (2.1) memberikan nilai dari turunan $\frac{dx}{dt}$ yang dapat dinyatakan sebagai gradien ruas garis yang melalui titik tersebut. Kumpulan dari setiap ruas garis yang sedemikian itu disebut medan arah (*direction field*) dari persamaan (2.1) (Hale & Kocak, 1991: 8).

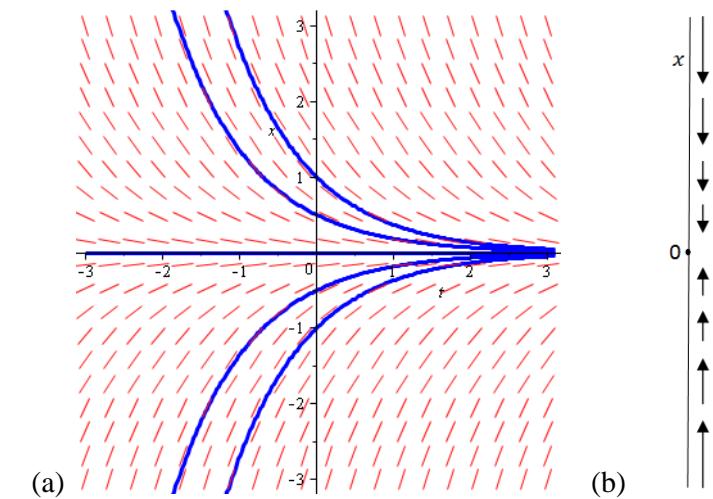
Medan arah (Blanchard, 2006: 40) pada persamaan (2.1) mempunyai keistimewaan, yaitu untuk setiap titik berbeda pada bidang- (t, x) dengan koordinat x yang sama mempunyai gradien ruas garis yang sama. Misal terdapat titik (t_1, x_1) dan (t_2, x_1) maka $f(t_1, x_1) = f(t_2, x_1) = f(x_1)$, sebab ruas kanan

pada persamaan (2.1) hanya bergantung pada variabel x . Ilustrasi dari pernyataan tersebut dapat dilihat pada Gambar 2.

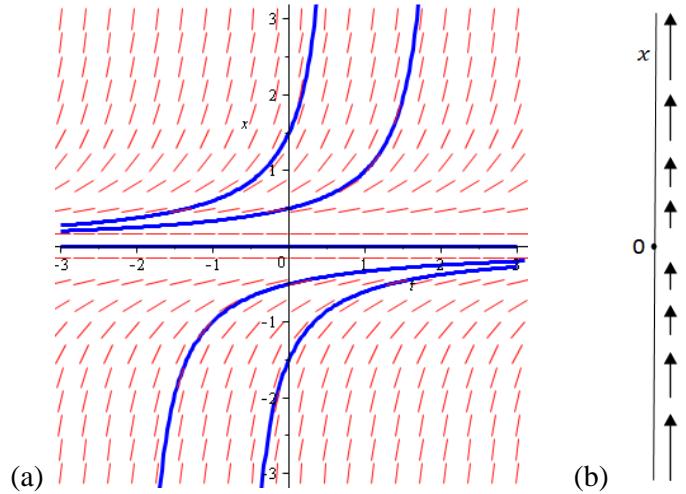


Gambar 2. Titik (t_1, x_1) dan (t_2, x_1) mempunyai gradien yang sama.

Gambar dari solusi persamaan (2.2) merupakan subset dari bidang- (t, x) yang didefinisikan oleh $\{(t, \varphi(t, x_0)): t \in I_{x_0}\}$ disebut trayektori melalui x_0 . Trayektori menyinggung ruas-ruas garis pada medan arah di setiap titik pada bidang yang dilaluinya (Hale & Kocak, 1991: 8). Medan arah dari Contoh 2.1 dan Contoh 2.2 untuk beberapa trayektori berturut-turut ditunjukkan oleh Gambar 3(a) dan Gambar 4(b). (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 2 dan 3).



Gambar 3. (a) Medan arah dengan beberapa trayektori dari $\dot{x} = -x$.
(b) Medan vektor dari $\dot{x} = -x$.



Gambar 4. (a) Medan arah dengan beberapa trayektori dari $\dot{x} = x^2$.
(b) Medan vektor dari $\dot{x} = x^2$.

2. Medan Vektor

Untuk setiap titik x pada sumbu x dapat dihubungkan dengan ruas garis berarah dari x ke $x + f(x)$. Ruas garis berarah dapat dipandang sebagai sebuah vektor atas x . Kumpulan dari semua vektor yang demikian itu disebut medan vektor yang dihasilkan pada persamaan (2.1) atau dapat dikatakan sebagai medan vektor f (Hale & Kocak, 1991: 9). Medan vektor pada Contoh 2.1 dan Contoh 2.2 berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 3(b) dan Gambar 4(b).

3. Orbit

Definisi 2.1: (Hale & Kocak, 1991: 9)

Misal solusi dari persamaan (2.2) terdefinisi untuk setiap $t \in I_{x_0}$ dengan interval $I_{x_0} \equiv (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$ yang memuat $t_0 = 0$. Positif orbit $\gamma^+(x_0)$, negatif orbit $\gamma^-(x_0)$, dan orbit $\gamma(x_0)$ dari x_0 didefinisikan berturut-turut sebagai subset dari sumbu x berikut:

$$\gamma^+(x_0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{x_0})} \varphi(t, x_0),$$

$$\gamma^-(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, 0]} \varphi(t, x_0),$$

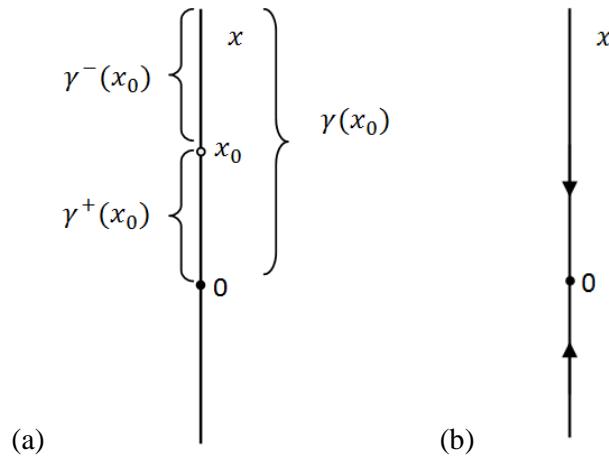
$$\gamma(x_0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})} \varphi(t, x_0).$$

Orbit $\gamma(x_0)$ merupakan proyeksi dari trayektori yang melalui x_0 pada sumbu x . Orbit dari Contoh 2.1 dan Contoh 2.2 berturut-turut dapat dilihat pada Gambar 5(a) dan Gambar 6(a). Pada Gambar 5(a), orbit $\gamma(x_0)$ disisipkan panah untuk menunjukkan arah $\varphi(t, x_0)$ berubah sesuai dengan kenaikan t .

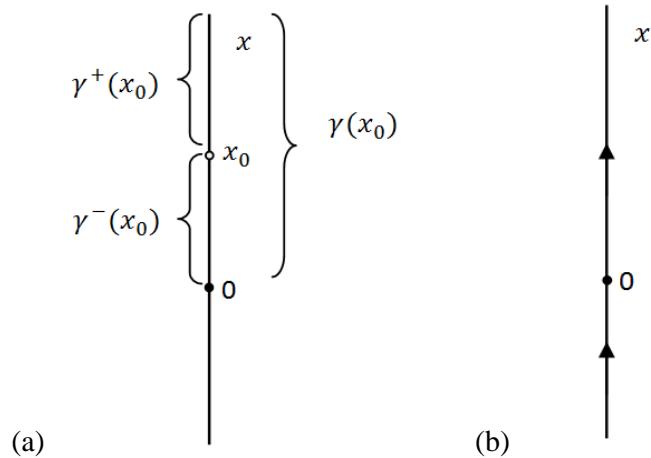
Pada Contoh 2.1, jika $x_0 > 0$, maka orbit negatif $\gamma^-(x_0) = [x_0, +\infty)$, orbit positif $\gamma^+(x_0) = (0, x_0]$, dan orbit $\gamma(x_0) = (0, +\infty)$. Jika $x_0 = 0$, maka $\gamma^-(x_0) = \gamma^+(x_0) = \gamma(x_0) = 0$. Jika $x_0 < 0$, maka orbit negatif $\gamma^-(x_0) = (-\infty, x_0]$, orbit positif $\gamma^+(x_0) = [x_0, 0)$, dan orbit $\gamma(x_0) = (-\infty, 0)$.

4. Potret Fase

Aliran dari persamaan diferensial yang digambarkan sebagai kumpulan semua orbit bersama dengan panah berarah dan gambar hasil disebut potret fase dari persamaan diferensial. Potret fase untuk Contoh 2.1 dan Contoh 2.2 berturut-turut ditunjukkan pada Gambar 5(b) dan Gambar 6(b).



Gambar 5. (a) Orbit positif, orbit negatif, dan orbit melalui x_0 , dan
(b) potret fase dari $\dot{x} = -x$.



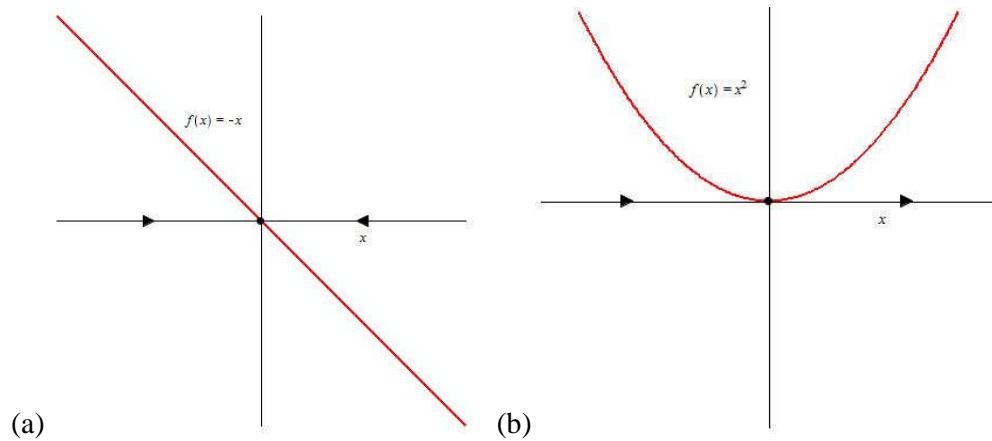
Gambar 6. (a) Orbit positif, orbit negatif, dan orbit melalui x_0 , dan
(b) potret fase dari $\dot{x} = x^2$.

Definisi 2.2: (Hale & Kocak, 1991: 11)

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ jika $f(\bar{x}) = 0$.

Jika \bar{x} adalah titik ekuilibrium, maka fungsi konstan $x(t) = \bar{x}$ merupakan solusi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, dan orbit $\gamma(\bar{x})$ adalah \bar{x} sendiri. Potret fase dari persamaan (2.1) dapat digambarkan dengan memandang grafik dari $f(x)$. Tanda

f menyatakan arah dari pergerakkan pada sebuah orbit. Jika $f(x_0) < 0$ dengan x_0 adalah nilai awal, maka solusi menurun pada t , dan $\varphi(t, x_0)$ akan mendekati suatu titik ekuilibrium atau menuju $-\infty$ ketika $t \rightarrow \beta_{x_0}$. Serupa, jika $f(x_0) > 0$ maka solusi naik pada t , dan $\varphi(t, x_0)$ akan mendekati suatu titik ekuilibrium atau menuju $+\infty$ ketika $t \rightarrow \beta_{x_0}$. Potret fase dari persamaan $\dot{x} = -x$ dan $\dot{x} = x^2$ dapat dilihat pada Gambar 7. Jika solusi masalah nilai awal persamaan (2.1) tunggal, maka solusi yang melalui kondisi awal yang berbeda dengan $x_0 < y_0$ memenuhi $\varphi(t, x_0) < \varphi(t, y_0)$.

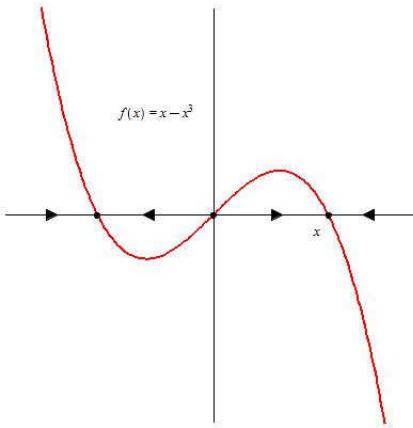


Gambar 7. (a) Potret fase $\dot{x} = -x$ dari fungsi $f(x) = -x$, dan
 (b) potret fase $\dot{x} = x^2$ dari fungsi $f(x) = x^2$.

Contoh 2.3: Diberikan persamaan diferensial

$$\dot{x} = x - x^3. \quad (2.8)$$

Titik ekuilibrium dari persamaan (2.8) adalah $-1, 0$, dan 1 . Fungsi $f(x) = x - x^3$ positif pada interval $(-\infty, -1)$, negatif pada $(-1, 0)$, positif pada $(0, 1)$, dan negatif pada $(1, +\infty)$. Potret fase persamaan (2.8) digambarkan pada Gambar 8. Orbit dari persamaan (2.8) adalah interval $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, dan titik $\{-1\}$, $\{0\}$, dan $\{1\}$.



Gambar 8. Potret fase $\dot{x} = x - x^3$ dari fungsi $f(x) = x - x^3$.

Metode lain untuk menentukan aliran dari persamaan diferensial, yaitu dengan menggunakan fungsi potensial. Persamaan (2.1) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\dot{x} = f(x) = -\frac{d}{dx}F(x), \quad (2.9)$$

dimana

$$F(x) \equiv - \int_0^x f(s)ds.$$

Persamaan (2.9) merupakan bentuk khusus dari sistem gradien. Jika $x(t)$ adalah solusi dari persamaan (2.9), maka

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = \frac{d}{dx}F(x(t)) \cdot \frac{d}{dt}x(t) = -f(x(t)) \cdot f(x(t)) = -[f(x(t))]^2 \leq 0.$$

Fungsi F selalu turun sepanjang kurva solusi sebab $\frac{d}{dt}F(x(t)) \leq 0$.

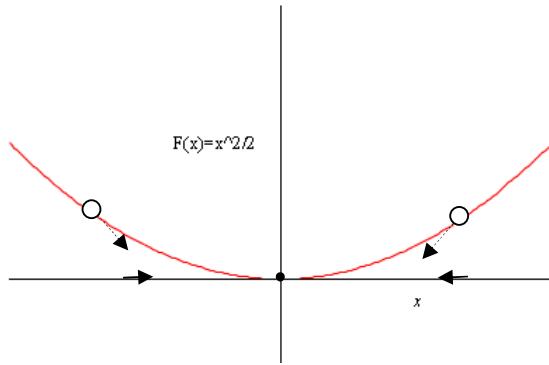
Fungsi F dapat dikatakan sebagai fungsi potensial dari persamaan (2.1). Jelas bahwa titik ekuilibrium dari persamaan (2.9) merupakan titik ekstrim dari fungsi potensial F .

Contoh 2.4: Persamaan (2.6) dapat dibentuk menjadi persamaan (2.9) yaitu

$$\dot{x} = -x = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right), \quad (2.10)$$

dengan fungsi potensial $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Orbit dari persamaan (2.10) dapat dipandang sebagai pergerakan partikel pada kurva fungsi potensial $F(x)$. Dapat dilihat pada Gambar 9 suatu partikel di sebarang titik pada fungsi $F(x) = \frac{x^2}{2}$ akan turun menuju titik ekuilibrium 0. Orbit dari persamaan (2.10) adalah interval $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, dan titik ekuilibrium 0.

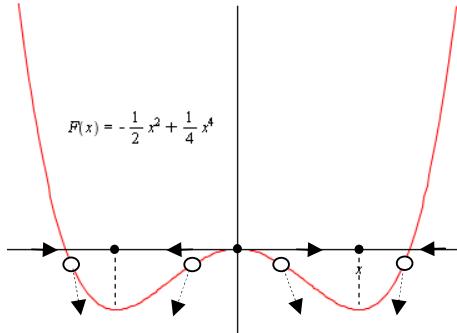


Gambar 9. Potret fase $\dot{x} = -x$ dari fungsi potensial $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Contoh 2.5: Persamaan (2.8) dapat dituliskan

$$\dot{x} = x - x^3 = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right), \quad (2.11)$$

dengan fungsi potensial $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$. Orbit dari persamaan (2.11) adalah interval $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$, dan titik -1 , 0 , dan 1 . Potret fase persamaan (2.11) dengan fungsi potensial $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$ dapat dilihat pada Gambar 10.



Gambar 10. Potret fase $\dot{x} = x - x^3$ dari fungsi potensial $F(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$.

Definisi 2.3: (Hale & Kocak, 1991: 17)

Titik ekuilibrium \bar{x} dari persamaan (2.1) dikatakan stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ yang bergantung pada ϵ sedemikian hingga untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < \delta$, solusi $\varphi(t, x_0)$ dari persamaan (2.1) yang melalui x_0 saat $t = 0$ memenuhi pertidaksamaan $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| < \epsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan tak stabil jika tidak stabil.

Definisi 2.4: (Hale & Kocak, 1991: 17)

Titik ekuilibrium \bar{x} dari persamaan (2.1) dikatakan stabil asimtotik jika terdapat $r > 0$ sedemikian hingga $|\varphi(t, x_0) - \bar{x}| \rightarrow 0$ saat $t \rightarrow +\infty$ untuk setiap x_0 yang memenuhi $|x_0 - \bar{x}| < r$.

Pada kasus persamaan diferensial skalar otonomus (2.1), jika setiap solusi dari persamaan (2.1) dengan nilai awal dekat dengan \bar{x} menuju \bar{x} untuk $t \rightarrow +\infty$, maka titik ekuilibrium \bar{x} stabil. Hal tersebut tidak berlaku untuk dimensi yang lebih tinggi. Kestabilan dari titik ekuilibrium dari persamaan (2.1) dapat ditentukan dengan melihat fungsi $f(x)$, yakni menggunakan Lemma 2.1.

Lemma 2.1: (Hale & Kocak, 1991: 17)

Titik ekuilibrium \bar{x} dari $\dot{x} = f(x)$ stabil jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $(x - \bar{x})f(x) \leq 0$ untuk $|x - \bar{x}| < \delta$. Titik ekuilibrium \bar{x} stabil asimtotik jika dan hanya jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $(x - \bar{x})f(x) < 0$ untuk $0 < |x - \bar{x}| < \delta$. Titik ekuilibrium \bar{x} dari $\dot{x} = f(x)$ tak stabil jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $(x - \bar{x})f(x) > 0$ untuk $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ atau $-\delta < x - \bar{x} < 0$.

Contoh 2.6: Kestabilan titik ekuilibrium persamaan (2.6) dengan menggunakan Lemma 2.1 menunjukkan bahwa titik ekuilibrium 0 stabil asimtotik, sebab

$$x \cdot f(x) = x \cdot (-x) = -x^2 < 0$$

dan terdapat $\delta = 1$ sedemikian hingga $0 < |x| < 1$ memenuhi $-x^2 < 0$, dapat dilihat pada Gambar 5(b). Pada persamaan (2.7), kestabilan titik ekuilibrium 0 tak stabil, sebab jika diambil $\delta = 1$ untuk $0 < x < 1$, maka $x^3 > 0$.

Kestabilan dari titik ekuilibrium dapat juga ditentukan dengan menggunakan Teorema 2.2 sebagai berikut:

Teorema 2.2: (Hale & Kocak, 1991: 18)

Misal f adalah fungsi C^1 dan \bar{x} adalah titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$. Misalkan $f'(\bar{x}) \neq 0$. Titik ekuilibrium \bar{x} stabil asimtotik jika $f'(\bar{x}) < 0$, dan tak stabil jika $f'(\bar{x}) > 0$.

Bukti:

Dimisalkan variabel baru $y = x - \bar{x}$, maka titik ekuilibrium \bar{x} dari $\dot{x} = f(x)$ bersesuaian dengan titik ekuilibrium dari persamaan diferensial

$\dot{y} = f(\bar{x} + y)$ di $y = 0$. Jika fungsi $f(\bar{x} + y)$ dijabarkan kedalam deret Taylor dekat titik 0, maka diperoleh

$$\dot{y} = f'(\bar{x})y + g(y),$$

dimana fungsi $g(y)$ memenuhi $g(0) = 0$ dan $g'(0) = 0$.

Karena $g'(0) = 0$, untuk sebarang $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $|g'(y)| < \epsilon$ jika $|y| < \delta$. Menggunakan formula $g(y) = \int_0^y g'(s)ds$, diperoleh bahwa $|g(y)| \leq \epsilon|y|$ jika $|y| < \delta$.

Misalkan $f'(\bar{x}) \neq 0$ dan $\epsilon < |f'(\bar{x})|$, maka $|y| < \delta$ mengakibatkan tanda dari fungsi $f(\bar{x} + y) = f'(\bar{x})y + g(y)$ ditentukan oleh tanda $f'(\bar{x})y$.

Jika $f'(\bar{x}) < 0$, maka diperoleh $(y - 0)f(\bar{x} + y) = f(\bar{x} + y)y = f'(\bar{x})y^2 < 0$ untuk $0 < |y| < \delta$. Sehingga menurut Lemma 2.1 titik ekuilibrium $y = 0$ stabil asimtotik. Jadi titik ekuilibrium \bar{x} stabil asimtotik.

Jika $f'(\bar{x}) > 0$, maka diperoleh $(y - 0)f(\bar{x} + y) = f(\bar{x} + y)y = f'(\bar{x})y^2 > 0$ untuk $0 < |y| < \delta$. Sehingga menurut lemma dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $y = 0$ tak stabil. Jadi titik ekuilibrium \bar{x} tak stabil. ■

Persamaan diferensial linier $\dot{x} = f'(\bar{x})x$ disebut linearisasi dari medan vektor $\dot{x} = f(x)$ pada titik ekuilibrium \bar{x} (Hale & Kocak, 1991: 19). Teorema 2.2 menunjukkan bahwa tipe kestabilan titik ekuilibrium \bar{x} dari $\dot{x} = f(x)$ samadengan tipe kestabilan titik ekuilibrium linierisasinya dititik asal.

Definisi 2.5: (Hale & Kocak, 1991: 19)

Titik ekuilibrium \bar{x} dari $\dot{x} = f(x)$ disebut titik ekuilibrium hiperbolik jika $f'(\bar{x}) \neq 0$.

Jika $f'(\bar{x}) = 0$, maka \bar{x} disebut titik ekuilibrium tak hiperbolik. Kestabilan titik ekuilibrium tak hiperbolik tidak bisa ditentukan melalui linierisasi. Sifat kestabilan titik ekuilibrium tak hiperbolik \bar{x} bergantung bagian order yang lebih tinggi pada ekspansi Taylor dari fungsi $f(\bar{x} + y)$.

Contoh 2.7: Titik ekuilibrium dari persamaan diferensial (2.8), $\dot{x} = x - x^3$, adalah -1, 0, dan 1. Tipe kestabilan titik ekuilibrium dari $\dot{x} = x - x^3$ dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema 2.2. Ruas kanan pada persamaan (2.8) adalah $f(x) = x - x^3$, sehingga

$$f'(x) = 1 - 3x^2.$$

Karena $f'(x) = 1 - 3x^2$, maka diperoleh

$$f'(-1) = -2 < 0, f'(0) = 1 > 0, \text{ dan } f'(1) = -2 < 0.$$

Titik ekuilibrium -1 dan 1 stabil asimtotik sebab $f'(-1) = -2 < 0$ dan $f'(1) = -2 < 0$, akan tetapi titik ekuilibrium 0 tak stabil sebab $f'(0) = 1 > 0$.

B. Sistem Persamaan Diferensial Otonomus pada Bidang

Misal I adalah interval terbuka pada garis bilangan \mathbb{R} dan

$$x_i: I \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto x_i(t) \quad \text{untuk } i = 1, 2$$

adalah dua fungsi C^1 dari variabel real t . Misal

$$f_i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x_1, x_2) \mapsto f_i(x_1, x_2) \quad \text{untuk } i = 1, 2$$

adalah dua fungsi bernilai real dengan dua variabel.

Diberikan sistem persamaan diferensial otonomus pada bidang berbentuk

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{2.12}$$

Misal $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$, dan $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$, maka sistem (2.12) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}).\tag{2.13}$$

Masalah nilai awal untuk persamaan (2.13) dinyatakan dengan

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0\tag{2.14}$$

dengan $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$.

Persamaan (2.12) merupakan sistem persamaan diferensial otonomus, sehingga dapat diasumsikan bahwa masalah nilai awal (2.14) dikhususkan untuk $t_0 = 0$ seperti pada persamaan diferensial skalar otonomus. Misal $(x_1(t), x_2(t))$ merupakan solusi dari sistem (2.12) yang melalui \mathbf{x}^0 saat t_0 dan dimisalkan $y_1(t) \equiv x_1(t + t_0)$, $y_2(t) \equiv x_2(t + t_0)$. Akan ditunjukkan bahwa $(y_1(t), y_2(t))$ merupakan solusi dari sistem (2.12) yang melalui \mathbf{x}^0 saat 0.

$$\dot{y}_1(t) = \dot{x}_1(t + t_0) = f_1(x_1(t + t_0), x_2(t + t_0)) = f_1(y_1(t), y_2(t)),$$

$$\dot{y}_2(t) = \dot{x}_2(t + t_0) = f_2(x_1(t + t_0), x_2(t + t_0)) = f_2(y_1(t), y_2(t)),$$

dan $y_1(0) = x_1^0$, $y_2(0) = x_2^0$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa $(y_1(t), y_2(t))$ merupakan solusi dari sistem (2.12) yang melalui \mathbf{x}^0 saat 0.

Hubungan persamaan penyusun dari sistem persamaan diferensial otonomus pada bidang dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu sistem bertautan (*coupled systems*) dan sistem tidak bertautan (*uncoupled systems*).

Menurut (Hirsch & Smale, 1974) dua persamaan diferensial dikatakan tidak bertautan jika kedua fungsi pada persamaan diferensial tidak mempunyai relasi secara spesifik atau disebut sistem tidak bertautan. Apabila dua persamaan diferensial mempunyai relasi secara spesifik, maka disebut sistem bertautan. Contoh sistem bertautan dan tidak bertautan berturut-turut dapat dilihat pada Contoh 2.8 dan 2.9.

Ekistensi dan ketunggalan pada Teorema 2.1 dapat digunakan secara umum untuk masalah nilai awal (2.14) (Hale & Kocak, 1991: 176). Jika \mathbf{f} merupakan fungsi C^1 , maka untuk setiap $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ terdapat interval $I_{\mathbf{x}^0} \equiv (\alpha_{\mathbf{x}^0}, \beta_{\mathbf{x}^0})$ yang memuat $t_0 = 0$ dan solusi tunggal $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ dari masalah nilai awal (2.14) terdefinisi untuk setiap $t \in I_{\mathbf{x}^0}$, serta memenuhi kondisi awal $\varphi(0, \mathbf{x}^0)$. Solusi $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ merupakan fungsi C^1 .

Dalam menganalisis persamaan diferensial pada bidang perlu untuk mengetahui jarak antara dua vektor pada bidang.

Definisi 2.6: (Hale & Kocak, 1991: 175)

Norm pada \mathbb{R} adalah fungsi

$$\| \cdot \| : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$$

yang memenuhi sifat berikut untuk setiap vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1)$, dan $\mathbf{x}^2 = (x_1^2, x_2^2)$ pada \mathbb{R}^2 :

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{ dan } \|\mathbf{x}\| = 0 \text{ jika dan hanya jika } \mathbf{x} = \mathbf{0};$$

$$\|\mathbf{x}^1 + \mathbf{x}^2\| \leq \|\mathbf{x}^1\| + \|\mathbf{x}^2\| \quad (\text{sifat ketaksamaan segitiga});$$

$$\|a\mathbf{x}^1\| = |a|\|\mathbf{x}^1\| \text{ untuk setiap skalar } a \in \mathbb{R}.$$

Jarak antara dua vektor \mathbf{x}^1 dan \mathbf{x}^2 didefinisikan oleh $\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|$. *Norm Euclides* (panjang) dari vektor \mathbf{x} didefinisikan oleh

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Perilaku solusi pada sistem (2.13) dapat diketahui melalui pendekatan secara kualitatif seperti pada persamaan diferensial skalar (2.1).

1. Medan arah

Setiap titik pada ruang (t, \mathbf{x}) dimana $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ terdefinisi, ruas kanan persamaan (2.13) memberikan nilai-nilai dari turunan $d\mathbf{x}/dt$ yang dianggap sebagai gradien dari ruas garis pada titik tertentu. Kumpulan dari ruas garis yang sedemikian itu disebut medan arah dari persamaan (2.13).

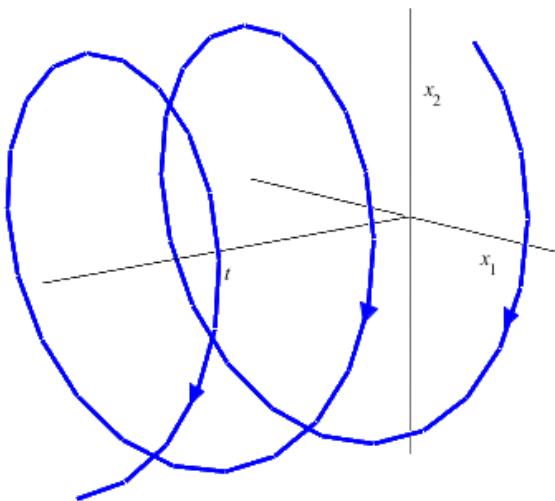
Grafik solusi persamaan (2.13) yang melalui \mathbf{x}^0 merupakan kurva pada ruang dimensi tiga (t, \mathbf{x}) yang didefinisikan oleh $\{(t, \varphi(t, \mathbf{x}^0)) : t \in I_{\mathbf{x}^0}\}$ atau disebut trayektori melalui \mathbf{x}^0 . Setiap titik yang dilewati trayektori, trayektori merupakan kurva yang menyinggung ke ruas garis dari medan arah.

Fungsi \mathbf{f} pada persamaan (2.13) tidak terikat terhadap t , sehingga untuk setiap titik pada suatu garis yang sejajar dengan sumbu t mempunyai ruas garis yang bergradien sama. Proyeksi dari medan arah dan trayektori persamaan (2.13) dapat digambarkan pada bidang- (x_1, x_2) .

Contoh 2.8: Diberikan sistem persamaan diferensial bertautan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1.\end{aligned}\tag{2.15}$$

Trayektori dari sistem (2.15) dengan nilai awal pada titik $(1, 2)$ berbentuk spiral yang ditunjukkan pada Gambar 11. Pada Gambar 11 menunjukkan bahwa untuk kenaikan t , trayektori akan berputar mengelilingi sumbu t menjauhi bidang- (x_1, x_2) . (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 4).

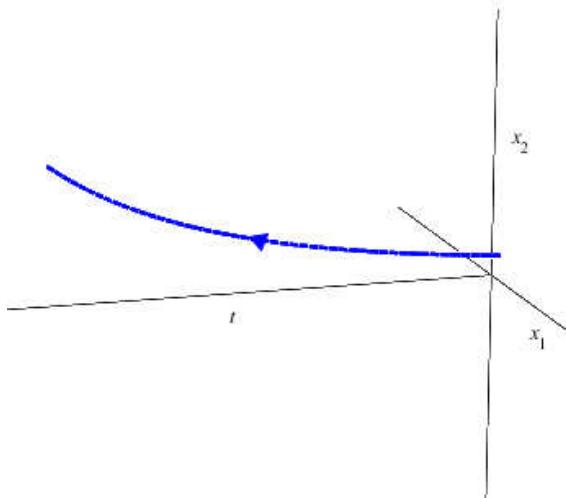


Gambar 11. Trayektori sistem (2.15) pada ruang (t, x_1, x_2) .

Contoh 2.9: Diberikan sistem persamaan diferensial tidak bertautan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Trayektori dari sistem (2.16) yang melalui titik $(1, 1)$ dapat dilihat pada Gambar 12. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 5).



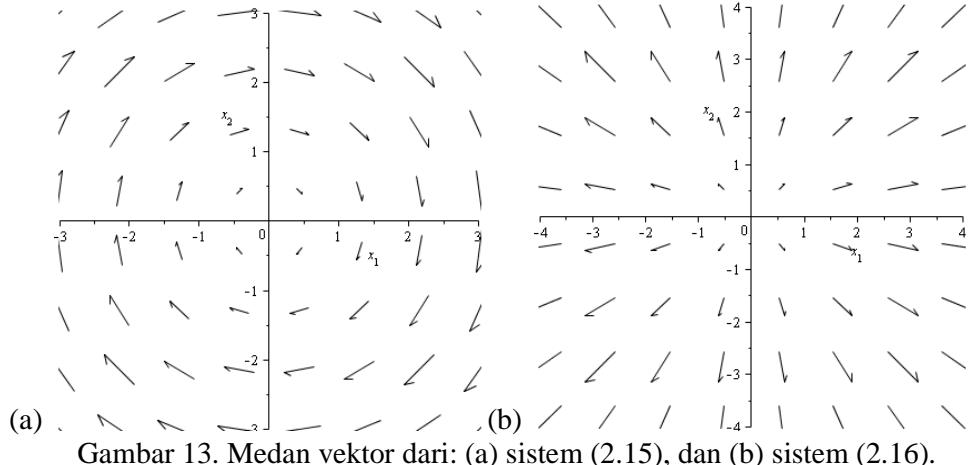
Gambar 12. Trayektori sistem (2.16) pada ruang (t, x_1, x_2) .

2. Medan Vektor

Setiap titik \mathbf{x} pada bidang- (x_1, x_2) dimana $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ terdefenisi dapat dinyatakan sebagai vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1, f_2)$ atas \mathbf{x} . Titik \mathbf{x} dapat dihubungkan dengan ruas garis berarah dari \mathbf{x} ke $\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Kumpulan vektor yang sedemikian itu disebut medan vektor yang dihasilkan oleh persamaan (2.13) atau medan vektor \mathbf{f} .

Pada sistem (2.15), sebagai contoh pada titik $(1,2)$ diperoleh vektor dari titik $(1,2)$ ke $(1,2) + (2, -1) = (3,1)$. Medan vektor dari sistem (2.15) dapat dilihat pada Gambar 13(a). Pada sistem (2.16), sebagai contoh pada titik $(1,1)$ diperoleh vektor dari titik $(1,1)$ ke $(1,1) + (1,1) = (2,2)$. Medan vektor sistem (2.16) dapat dilihat pada Gambar 13(b). (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 4 dan 5). Medan vektor berbantuan program Maple digambarkan sebagai kumpulan vektor yang panjangnya dibuat hampir sama, namun tetap

memiliki arah yang sama dengan vektor aslinya, sehingga semakin banyak vektor yang digambar akan semakin baik.



Gambar 13. Medan vektor dari: (a) sistem (2.15), dan (b) sistem (2.16).

3. Orbit

Definisi 2.7: (Hale & Kocak, 1991: 178)

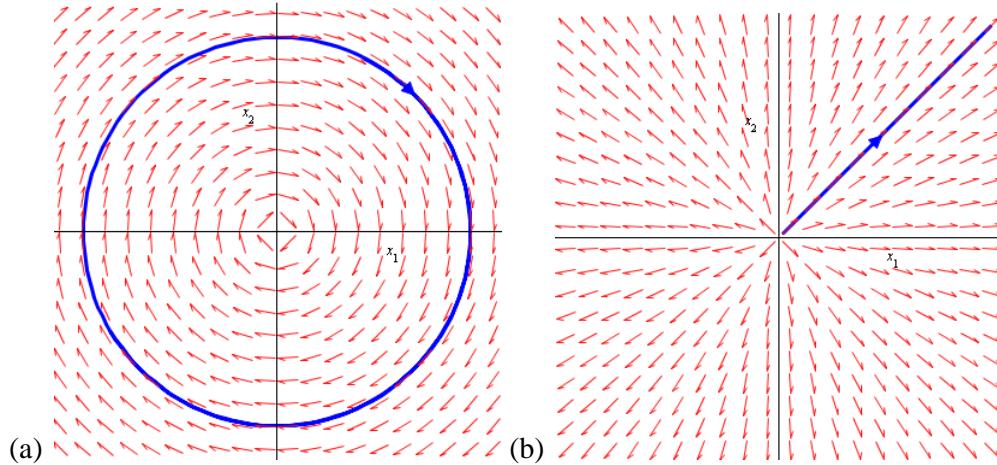
Misal solusi dari persamaan (2.14) terdefinisi untuk setiap $t \in I_{\mathbf{x}^0}$ dengan interval $I_{\mathbf{x}^0} \equiv (\alpha_{\mathbf{x}^0}, \beta_{\mathbf{x}^0})$ yang memuat $t_0 = 0$. Positif orbit $\gamma^+(\mathbf{x}^0)$, negatif orbit $\gamma^-(\mathbf{x}^0)$, dan orbit $\gamma(\mathbf{x}^0)$ dari \mathbf{x}^0 didefinisikan berturut-turut sebagai subset dari \mathbb{R}^2 (bidang- (x_1, x_2)):

$$\gamma^+(\mathbf{x}^0) = \bigcup_{t \in [0, \beta_{\mathbf{x}^0}]} \varphi(t, \mathbf{x}^0),$$

$$\gamma^-(\mathbf{x}^0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}^0}, 0]} \varphi(t, \mathbf{x}^0),$$

$$\gamma(\mathbf{x}^0) = \bigcup_{t \in (\alpha_{\mathbf{x}^0}, \beta_{\mathbf{x}^0})} \varphi(t, \mathbf{x}^0).$$

Pada orbit $\gamma(\mathbf{x}^0)$ diberi panah untuk mengindikasikan arah dimana $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ mengalami perubahan untuk t yang semakin naik. Orbit (Hale & Kocak, 1991: 178) merupakan proyeksi dari trayektori pada bidang- (x_1, x_2) . Orbit dari sistem (2.15) dan (2.16) dapat dilihat pada Gambar 14. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 4 dan 5).



Gambar 14. Orbit dari: (a) sistem (2.15) yang melalui titik $(1, 2)$, dan (b) sistem (2.16) yang melalui titik $(1, 1)$.

Variabel t pada sistem (2.12) tidak muncul secara eksplisit, sehingga dengan menggunakan aturan rantai diperoleh persamaan diferensial orde satu

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)}, \quad \text{dengan } f_1(x_1, x_2) \neq 0, \quad \text{atau} \\ \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{dx_1}{dt} \frac{dt}{dx_2} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}, \quad \text{dengan } f_2(x_1, x_2) \neq 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Solusi dari persamaan (2.17) disebut orbit dari sistem (2.12) (Verhulst, 1990: 9).

Orbit dari sistem (2.15) dengan menggunakan persamaan (2.17), diperoleh persamaan lingkaran $x_1^2 + x_2^2 = C$ dengan C merupakan konstanta. Orbit dari

sistem (2.15) merupakan lingkaran dengan pusat $(0,0)$, dapat dilihat pada Gambar 14(a). Sedangkan sistem (2.16) dengan menggunakan persamaan (2.17) diperoleh $x_2 = Cx_1$ dengan C merupakan konstanta. Orbit sistem (2.17) merupakan garis lurus yang melalui titik $(0,0)$, dapat dilihat pada Gambar 14(b).

Orbit dari persamaan (2.14) dapat ditentukan dengan cara lain, yaitu mengeleminasi variabel t dari masing-masing solusi persamaan penyusunnya.

Contoh 2.10: Persamaan diferensial (2.16) mempunyai solusi

$$x_1(t) = e^t x_1^0, \quad (2.18)$$

$$x_2(t) = e^t x_2^0. \quad (2.19)$$

Persamaan (2.18) ditulis menjadi bentuk

$$e^t = \frac{x_1}{x_1^0}. \quad (2.20)$$

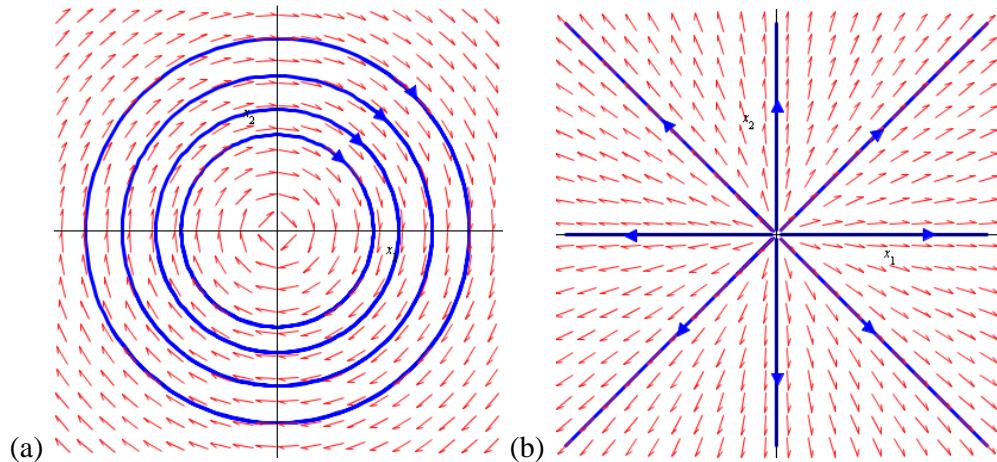
Substitusi persamaan (2.20) ke (2.19), diperoleh

$$x_2 = \frac{x_2^0}{x_1^0} x_1. \quad (2.21)$$

Misalkan $C = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, maka persamaan (2.21) menjadi $x_2 = Cx_1$. Jadi, orbit persamaan diferensial (2.16) merupakan persamaan garis $x_2 = Cx_1$.

4. Potret Fase

Aliran dari persamaan diferensial yang digambarkan sebagai kumpulan semua orbit beserta panah berarah dan gambar hasil disebut potret fase dari persamaan diferensial (Hale & Kocak, 1991: 178). Potret fase dari sistem (2.15) dan (2.16) dapat dilihat pada Gambar 15. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 4 dan 5).



Gambar 15. Potret fase dari: (a) sistem (2.15), dan (b) sistem (2.16) pada bidang fase (x_1, x_2) .

Definisi 2.8: (Hale & Kocak, 1991: 178)

Titik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ disebut titik ekuilibrium dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ jika $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, yaitu jika $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, maka

$$f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0, \quad f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0.$$

Pada sistem (2.15) dan sistem (2.16) hanya mempunyai satu titik ekuilibrium, yaitu titik $(0,0)$.

Kestabilan titik ekuilibrium pada sistem otonomus pada bidang didefinisikan pada Definisi 2.9 dan Definisi 2.10.

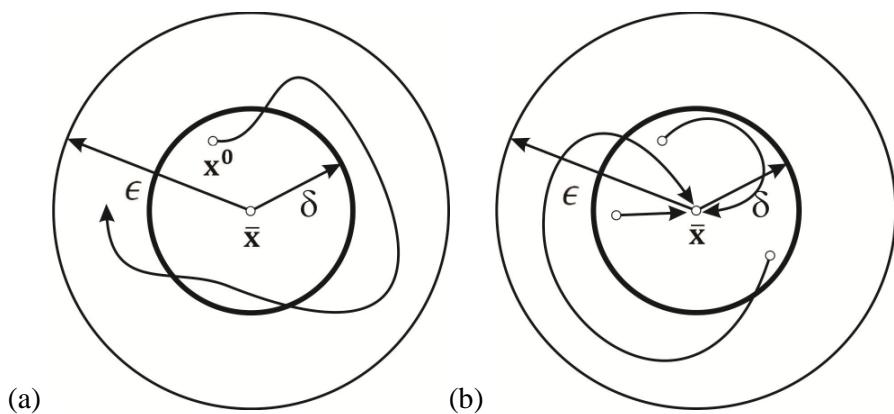
Definisi 2.9: (Hale & Kocak, 1991: 266)

Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ pada sistem otonom pada bidang $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ dikatakan stabil jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap \mathbf{x}^0 dengan $\|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$, solusi $\varphi(t, \mathbf{x}^0)$ dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ melalui \mathbf{x}^0 saat $t = 0$ memenuhi pertidaksamaan $\|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon$ untuk semua $t \geq 0$. Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan tak stabil jika terdapat $\eta > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\delta > 0$ terdapat \mathbf{x}^0 dengan $\|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ dan $t_{\mathbf{x}^0} > 0$ sedemikian hingga $\|\varphi(t_{\mathbf{x}^0}, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| = \eta$.

Definisi 2.10: (Hale & Kocak, 1991: 266)

Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan stabil asimtotik jika stabil dan terdapat $r > 0$ sedemikian hingga $\|\varphi(t, \mathbf{x}^0) - \bar{\mathbf{x}}\| \rightarrow 0$ untuk $t \rightarrow +\infty$ untuk setiap \mathbf{x}^0 yang memenuhi $\|\mathbf{x}^0 - \bar{\mathbf{x}}\| < r$.

Ilustrasi kestabilan titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ sistem otonom dapat dilihat pada Gambar 16 berikut:



Gambar 16. (a) Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ stabil, dan
(b) titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ stabil asimtotik

Diberikan sistem linier

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} \quad (2.22)$$

dengan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, \mathbf{A} matriks 2×2 dan

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

Solusi dari sistem (2.22) dengan nilai awal $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ untuk semua $t \in \mathbb{R}$

adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}} \mathbf{x}^0.$$

Solusi $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{At}} \mathbf{x}^0$ merupakan solusi tunggal dari sistem linier (2.22),

dapat dilihat pada Teorema 5.1 (Lampiran 1.c).

Definisi 2.11: (Perko, 2001: 12)

Misal \mathbf{A} adalah matriks $n \times n$, maka untuk $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{\mathbf{At}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!}.$$

Definisi 2.12: (Anton, 1998: 277)

Misalkan \mathbf{A} adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol \mathbf{v} di dalam \mathbb{R}^n dinamakan vektor eigen dari matriks \mathbf{A} jika \mathbf{Av} adalah kelipatan skalar dari \mathbf{v} yakni

$$\mathbf{Av} = \lambda \mathbf{v} \quad (2.23)$$

untuk suatu skalar $\lambda \in \mathbb{C}$. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari matriks \mathbf{A} dan \mathbf{v} dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen matriks \mathbf{A} , maka persamaan (2.23) dapat dituliskan

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \quad (2.24)$$

dengan \mathbf{I} adalah matriks identitas.

Persamaan (2.24) akan mempunyai solusi *non trivial* (tak tunggal) jika dan hanya jika

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (2.25)$$

persamaan (2.25) disebut polinomial karakteristik dari \mathbf{A} .

Solusi dari sistem (2.22) dapat dinyatakan dalam bentuk kanonik yakni

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} e^{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} t} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}^0.$$

Dalam hal ini terdapat tiga kasus, yakni:

1. Jika matriks \mathbf{A} mempunyai nilai eigen real berbeda misal λ_1 dan λ_2 , maka menurut Teorema 5.2 (Lampiran 1.d) dan Definisi 2.11:

$$e^{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} t} = e^{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}^0. \quad (2.26)$$

2. Jika matriks \mathbf{A} mempunyai nilai eigen kembar misal λ , maka menurut Definisi 2.11, Lemma 5.1 (Lampiran 1.a) dan Teorema 5.2 (Lampiran 1.d):

$$e^{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} t} = e^{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P} e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}^0. \quad (2.27)$$

3. Jika matriks \mathbf{A} mempunyai nilai eigen kompleks misal $\lambda = \alpha + i\beta$, maka menurut Definisi 2.11, Teorema 5.2 (Lampiran 1.d) dan polinomial Taylor (Lampiran 1.f):

$$e^{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}t} = e^{\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix},$$

sehingga

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}^0. \quad (2.28)$$

Kestabilan titik ekuilibrium pada sistem linier $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dapat ditentukan dengan melihat nilai-nilai eigen dari matriks \mathbf{A} .

Teorema 2.3: (Hale & Kocak, 1991: 266)

Jika setiap nilai eigen dari matriks koefisien \mathbf{A} pada sistem linier $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mempunyai bagian real negatif, maka titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ stabil asimtotik. Selain itu, terdapat konstanta positif K dan α sedemikian hingga

$$\|e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0\| \leq K e^{-\alpha t} \|\mathbf{x}^0\| \text{ untuk semua } t \geq 0, \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2. \quad (2.29)$$

Jika terdapat nilai eigen dari matriks koefisien \mathbf{A} mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ tak stabil.

Bukti:

Perhatikan bahwa persamaan (2.26), (2.27), atau (2.28) merupakan solusi sistem (2.22) yang bergantung pada nilai eigen dari matriks \mathbf{A} .

Jika semua $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2$ dari matriks \mathbf{A} , maka $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, untuk $t \rightarrow \infty$. Jadi dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ stabil asimtotik jika semua nilai eigen \mathbf{A} mempunyai bagian real negatif.

Jika semua nilai eigen dari \mathbf{A} mempunyai bagian real negatif, maka menurut bentuk kanonik Jordan terdapat konstanta positif α dan K sedemikian hingga untuk semua $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ memenuhi $\|e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0\| \leq Ke^{-\alpha t}\|\mathbf{x}^0\|$.

Jika terdapat nilai eigen dari \mathbf{A} yang mempunyai bagian real positif, maka $\mathbf{x}(t) \not\rightarrow \mathbf{0}$, untuk $t \rightarrow \infty$. Jadi dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ tak stabil jika terdapat nilai eigen \mathbf{A} mempunyai bagian real positif. ■

Contoh 2.11: Diberikan sistem linier

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (2.30)$$

Kestabilan titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema 2.3. Nilai eigen sistem (2.30) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.25) yakni

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -3 \\ 2 & 4 - \lambda \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-1 - \lambda)(4 - \lambda) + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dari persamaan (2.31) diperoleh nilai eigen dari matriks \mathbf{A} adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$, sehingga dengan menggunakan Teorema 2.3 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ tak stabil. Solusi sistem (2.30) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.26).

Untuk $\lambda_1 = 2$, maka

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sehingga dengan menggunakan operasi baris elementer diperoleh $x_1 + x_2 = 0$.

Misal $x_2 = t$, maka $x_1 = -t$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_1 = 2$

adalah $\mathbf{v}^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t$.

Untuk $\lambda_2 = 1$, maka

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

sehingga dengan menggunakan operasi baris elementer diperoleh $2x_1 + 3x_2 = 0$.

Misal $x_2 = t$, maka $x_1 = -\frac{3}{2}t$. Vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda_2 = 1$

adalah $\mathbf{v}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t$. Vektor eigen sistem linier (2.30) adalah $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,

sehingga diperoleh matriks transformasi

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dengan } \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solusi dari sistem (2.30) dengan menggunakan persamaan (2.26) diperoleh

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}^0 \\ &= \begin{pmatrix} (-2x_1^0 - 3x_2^0)e^{2t} + (3x_1^0 + 3x_2^0)e^t \\ (2x_1^0 + 3x_2^0)e^{2t} + (-2x_1^0 - 2x_2^0)e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

C. Sistem pada Koordinat Polar

Sistem (2.12) merupakan sistem pada koordinat kartesius, maka sistem (2.12) dapat dirubah menjadi bentuk koordinat polar (r, θ) (Perko, 2001: 137). Akan dibentuk sistem (2.12) menjadi bentuk koordinat polar. Misalkan $x_1 = r\cos\theta$ dan $x_2 = r\sin\theta$, maka

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad (2.32)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \quad (2.33)$$

Persamaan (2.32) diturunkan terhadap t diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}r^2 &= \frac{d}{dt}(x_1^2 + x_2^2) \\ \Leftrightarrow \frac{d(r^2)}{dr}\frac{dr}{dt} &= \frac{d(x_1^2)}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{d(x_2^2)}{dx_2}\frac{dx_2}{dt} \\ \Leftrightarrow 2r\dot{r} &= 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r}. \end{aligned}$$

Persamaan (2.33) diturunkan terhadap t diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{d}{dt}\tan^{-1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta} &= \frac{1}{\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2}\right)}\left(\frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{x_1^2}\right) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta} &= \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2}. \end{aligned}$$

Jika $r > 0$, maka sistem (2.12) dapat ditulis dalam bentuk koordinat polar sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r}, \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Contoh 2.12: Akan dirubah sistem (2.15) menjadi bentuk koordinat polar. Sistem (2.15) dapat ditulis pada koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

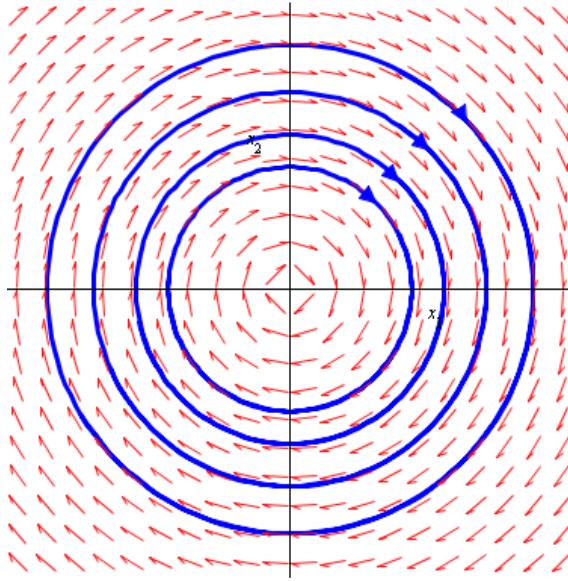
$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(x_2) + x_2(-x_1)}{r} = 0,$$

$$\dot{\theta} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(-x_1) - x_2(x_2)}{r^2} = \frac{-r^2}{r^2} = -1.$$

Sehingga sistem (2.15) dalam koordinat polar adalah

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Solusi dari sistem (2.35) adalah $r(t) = r_0$ dan $\theta(t) = -t + \theta_0$, dengan $r_0 = r(0), \theta_0 = \theta(0)$ adalah nilai awal dari sistem (2.35). Potret fase dari sistem (2.35) akan sama dengan potret fase sistem (2.15). Potret fase dari sistem (2.35) dapat dilihat pada Gambar 17.



Gambar 17. Potret fase sistem (2.35).

Orbit periodik atau *cycle* merupakan kurva tertutup pada bidang- (x_1, x_2) .

Setiap orbit dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ yang merupakan kurva tertutup pasti berkorespondensi dengan solusi periodik (Hale & Kocak, 1991: 179). Pada persamaan diferensial terdapat kasus khusus orbit periodik yang disebut *limit cycle*. Secara umum, *limit cycle* (Boyce & DiPrima, 2009: 557) merupakan orbit tertutup pada bidang fase sedemikian hingga orbit tak tertutup lain berputar ke arah orbit tertutup tersebut, bisa dari dalam atau luar daerah orbit tertutup, untuk $t \rightarrow +\infty$. Apabila semua orbit yang bermula dekat dengan orbit tertutup baik dari dalam atau luar daerah menuju ke arah orbit tertutup untuk $t \rightarrow +\infty$, maka *limit cycle* adalah stabil. Apabila orbit pada daerah satu berputar ke arah orbit tertutup, sementara pada daerah lain berputar menjauh untuk $t \rightarrow +\infty$, maka *limit cycle* dikatakan semi-stabil. Apabila orbit pada kedua daerah dari orbit tertutup berputar menjauh untuk $t \rightarrow +\infty$, maka *limit cycle* adalah tak stabil.

Contoh 2.13: Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 - x_1 \left(3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1^2 - x_2^2 - 1 \right) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2 \left(3\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_1^2 - x_2^2 - 1 \right).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Sistem (2.36) merupakan sistem bertautan. Sistem (2.36) dapat ditulis pada koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} \\ &= \frac{x_1(x_1 - x_2 - x_1(3r - r^2 - 1)) + x_2(x_1 + x_2 - x_2(3r - r^2 - 1))}{r} \\ &= r(r - 1)(r - 2), \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} \\ &= \frac{x_1(x_1 + x_2 - x_2(3r - r^2 - 1)) - x_2(x_1 - x_2 - x_1(3r - r^2 - 1))}{r^2} \\ &= 1.\end{aligned}$$

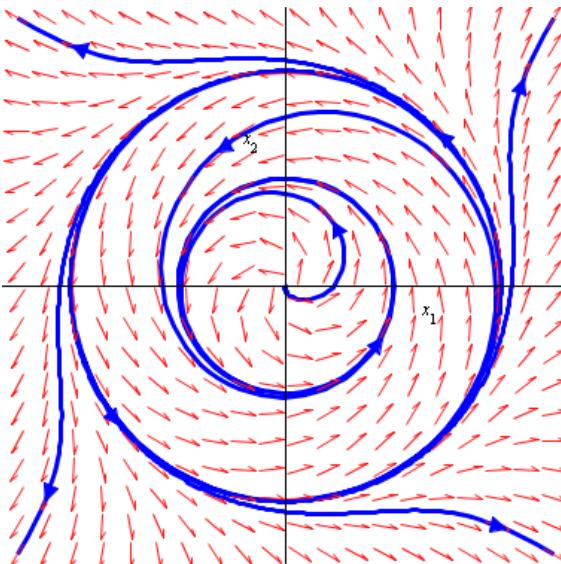
Jadi sistem (2.36) dalam koordinat polar adalah

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r - 1)(r - 2) \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\quad (2.37)$$

Titik ekulilibrium pertama pada persamaan radial dari sistem (2.37) di $r = 0$ yang merupakan titik ekulilibrium $(0,0)$ pada sistem (2.36), titik ekulilibrium lain di $r = 1$ dan $r = 2$ yang berkorespondensi dengan orbit periodik dari sistem, orbit periodik ini merupakan *limit cycles*.

Pada persamaan (2.37), ketika $r = 1$ maka orbit hanya berputar dengan jari-jari $r = 1$. Ketika $r = 2$ maka orbit hanya berputar dengan jari-jari 2. Apabila $0 < r < 1$ maka $\dot{r} > 0$, sehingga orbit pada daerah spiral $0 < r < 1$ berputar

menuju ke arah *limit cycle* $r = 1$. Apabila $1 < r < 2$ maka $\dot{r} < 0$, sehingga orbit pada daerah spiral $1 < r < 2$ berputar menuju ke arah *limit cycle* $r = 1$ dan menjauhi *limit cycle* $r = 2$. Apabila $r > 2$ maka $\dot{r} > 0$, sehingga orbit pada daerah spiral $1 < r < 2$ berputar menjauhi *limit cycle* $r = 2$. Karena $\dot{\theta} = 1$, maka orbit dengan nilai awal (r_0, θ_0) berputar berlawanan dengan arah jarum jam pada bidang- (x_1, x_2) . Potret fase dari sistem (2.36) dapat dilihat pada Gambar 18. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 6). Kestabilan *limit cycle* $r = 1$ adalah stabil, sedangkan *limit cycle* $r = 2$ adalah tak stabil.



Gambar 18. Potret fase dari sistem (2.36) dengan dua *limit cycle*.

D. Linierisasi Sistem Tak Linier

Dimisalkan sistem (2.12) merupakan sistem tak linier. Linierisasi (Blanchard et al, 2006: 460) bertujuan untuk mengetahui perilaku solusi yang dekat dengan titik ekuilibrium \bar{x} dari sistem tak linier (2.12).

Misal $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ adalah fungsi C^1 dan matriks

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

adalah matriks Jacobian dari \mathbf{f} pada titik \mathbf{x} .

Definisi 2.13: (Hale & Kocak, 1991: 267)

Jika $\bar{\mathbf{x}}$ adalah titik ekuilibrium dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, maka persamaan diferensial linier

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{x}$$

disebut linierisasi dari medan vektor \mathbf{f} di titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$.

Kestabilan dari titik ekuilibrium pada sistem linierisasi dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema 2.4 dan 2.5.

Teorema 2.4: (Hale & Kocak, 1991: 267)

Misal \mathbf{f} adalah fungsi C^1 . Jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ mempunyai bagian real negatif, maka titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dari persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ stabil asimtotik.

Bukti:

Misalkan variabel baru

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}},$$

sehingga titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ bersesuaian dengan titik ekuilibrium $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dari persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}).$$

Ekspansi fungsi $\mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}})$ pada $\bar{\mathbf{x}}$ menggunakan polinomial Taylor untuk beberapa variabel yakni

$$\mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}),$$

dengan fungsi $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ merupakan sisa yang memenuhi

$$\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \text{ dan } D\mathbf{g}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \quad (2.39)$$

Karena $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, persamaan diferensial $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{x}})$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}). \quad (2.40)$$

Pembuktian Teorema 2.4 dengan menunjukkan solusi $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ dari persamaan (2.40) stabil asimtotik.

Sifat (2.39) dari $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ berakibat $\mathbf{g}(\mathbf{y})$ mempunyai pengaruh kecil dibanding dengan \mathbf{y} saat dekat dengan titik asal. Hal tersebut ditunjukkan dengan menggunakan teorema nilai rata-rata, untuk semua $m > 0$, terdapat $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{y})\| \leq m\|\mathbf{y}\| \text{ jika } \|\mathbf{y}\| < \varepsilon. \quad (2.41)$$

Misalkan $\mathbf{y}(t)$ merupakan solusi dari persamaan (2.40) yang memenuhi kondisi awal $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}^0$. Jika $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$ merupakan fungsi atas t , maka dengan menggunakan rumus eksplisit solusi persamaan diferensial tak homogen pada Lampiran 1.e diperoleh

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}^0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{g}(\mathbf{y}(s))ds. \quad (2.42)$$

Misalkan K dan α adalah konstanta yang sama dengan konstanta pada Teorema 2.3, serta pilih $m > 0$ sedemikian hingga $mK < \alpha$ dan $\varepsilon > 0$ memenuhi pertidaksamaan (2.42), maka diperoleh

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq K e^{-\alpha t} \|\mathbf{y}^0\| + \int_0^t K e^{-\alpha(t-s)} m \|\mathbf{y}(s)\| ds, \quad (2.43)$$

untuk $\|\mathbf{y}(s)\| \leq \varepsilon$ dan $0 \leq s \leq t$. Kalikan kedua ruas pertidaksamaan (2.43) dengan $e^{\alpha t}$ diperoleh

$$e^{\alpha t} \|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}^0\| + \int_0^t K m e^{\alpha s} m \|\mathbf{y}(s)\| ds. \quad (2.44)$$

Jika digunakan pertidaksamaan Gronwall untuk fungsi $e^{\alpha t} \|\mathbf{y}(t)\|$, maka pertidaksamaan (2.44) menjadi

$$e^{\alpha t} \|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}^0\| e^{K m t}. \quad (2.45)$$

Pertidaksamaan Gronwall dapat dilihat pada Teorema 5.3 (Lamiran 1.g). Selanjutnya, kalikan pada kedua ruas pertidaksamaan (2.45) dengan $e^{-\alpha t}$ diperoleh

$$\|\mathbf{y}(t)\| \leq K \|\mathbf{y}^0\| e^{-(\alpha - Km)t} \quad \text{untuk } \|\mathbf{y}(t)\| \leq \varepsilon. \quad (2.46)$$

Ambil $\delta > 0$ sehingga $K\delta < \varepsilon$. Jika $\|\mathbf{y}^0\| < \delta$, maka pertidaksamaan (2.46) menjamin bahwa $\|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$ karena $\alpha - Km > 0$. Jadi solusi $\mathbf{y}(t)$ ada untuk semua $t \geq 0$ dan titik ekuilibrium $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dari persamaan (2.40) stabil. Pada pertidaksamaan (2.46) menunjukkan bahwa $\mathbf{y}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ untuk $t \rightarrow +\infty$ jika $\|\mathbf{y}^0\| < \delta$, sehingga $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ stabil asimtotik. ■

Teorema 2.5: (Hale & Kocak, 1991: 272)

Misal \mathbf{f} adalah fungsi C^1 . Jika terdapat nilai eigen dari matriks Jacobian $D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ yang mempunyai bagian real positif, maka titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dari persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ tak stabil.

Bukti:

Pembuktian Teorema 2.5 menggunakan notasi dan transformasi yang sama dengan Teorema 2.4. Akan ditunjukkan bahwa solusi $\mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$ dari persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{y}} = D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (2.47)$$

tak stabil. Pada bagian real nilai eigen matriks Jacobian terdapat dua kasus.

(i) Misal semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real positif. Jika variabel t diganti $-t$ pada persamaan (2.47), maka diperoleh persamaan diferensial

$$\dot{\mathbf{y}} = -D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{y}). \quad (2.48)$$

Pada persamaan (2.48) nilai eigen dari $-D\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})\mathbf{y}$ mempunyai bagian real negatif, sehingga dengan menggunakan Teorema 2.4 dapat disimpulkan bahwa solusi $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dari persamaan (2.48) stabil asimtotik. Persamaan (2.48) stabil asimtotik, sehingga terdapat $r > 0$ sedemikian hingga jika $\|\mathbf{y}^0\| = r$, maka solusi $\varphi(t, \mathbf{y}^0)$ dari persamaan (2.48) menuju $\mathbf{0}$ untuk $t \rightarrow +\infty$.

Ambil ε dan \mathbf{y}^0 yang memenuhi $0 < \varepsilon < r$ dan $\|\mathbf{y}^0\| = r$. Misal \hat{t} adalah waktu yang bergantung pada ε dan \mathbf{y}^0 sedemikian hingga $\|\varphi(\hat{t}, \mathbf{y}^0)\| = \varepsilon$. Perlu diingat bahwa $\varphi(-t, \mathbf{y}^0)$ merupakan solusi dari persamaan (2.47) dan

$\varphi(-\hat{t}, \varphi(\hat{t}, \mathbf{y}^0)) = \varphi(-\hat{t} + \hat{t}, \mathbf{y}^0) = \varphi(0, \mathbf{y}^0) = \mathbf{y}^0$, sehingga solusi dari persamaan (2.47) dengan nilai awal $\varphi(\hat{t}, \mathbf{y}^0)$ memenuhi $\|\varphi(\hat{t}, \mathbf{y}^0)\| = \varepsilon$ akan mencapai lingkaran $\|\mathbf{y}\| = r$ untuk waktu berhingga. Karena ε dan \mathbf{y}^0 dapat dipilih bilangan kecil dan sembarang, maka mengakibatkan kestabilan solusi ekuilibrium $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ dari persamaan (2.47) adalah tak stabil.

(ii) Misal nilai eigen matriks Jacobian adalah real dengan $\mu_1 \leq 0 < \mu_2$. Matriks Jacobian pada persamaan (2.47) dapat ditulis dalam bentuk kanonik yakni

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \mu_1 y_1 + g_1(y_1, y_2) \\ \dot{y}_2 &= \mu_2 y_2 + g_2(y_1, y_2),\end{aligned}\tag{2.49}$$

fungsi $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$ mempunyai sifat yang sama dengan persamaan (2.39).

Pembuktian titik ekuilibrium di titik asal tak stabil pada persamaan (2.49) dengan menentukan fungsi V dan daerah dekat titik asal sedemikian hingga fungsi V naik sepanjang solusi dari persamaan (2.49) pada daerah tersebut. Misalkan fungsi

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2).$$

Jika $(y_1(t), y_2(t))$ adalah solusi dari persamaan (2.49) dan $\|\mathbf{y}(t)\| < \varepsilon$, maka dengan menggunakan persamaan (2.41) diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{y}(t)) &= \frac{dV}{dt}(y_1(t), y_2(t)) \\ &= y_2 \dot{y}_2 - y_1 \dot{y}_1 \\ &= \mu_2 y_2^2 + y_2 g_2(y_1, y_2) - \mu_1 y_1^2 - y_1 g_1(y_1, y_2) \\ &\geq \mu_2 y_2^2 - m \|\mathbf{y}\|(|y_1| + |y_2|) - \mu_1 y_1^2 \\ &\geq (\mu_2 - m)y_2^2 - 2m|y_1||y_2| - (\mu_1 + m)y_1^2.\end{aligned}$$

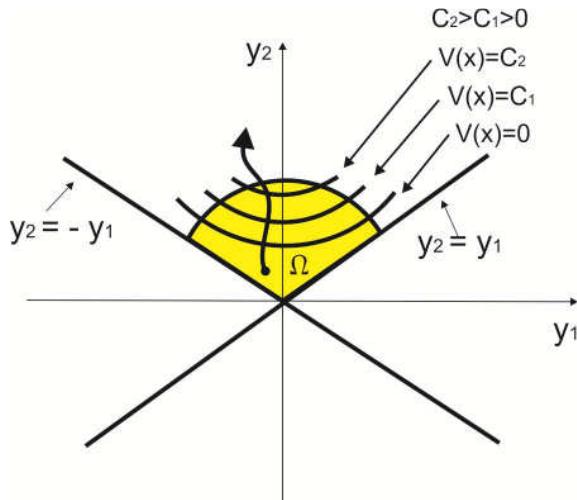
Misalkan himpunan

$$\Omega \equiv \{(y_1, y_2) : y_2 > |y_1|\}$$

yang berada diatas garis $y_2 = \pm y_1$, dapat dilihat pada Gambar 19.

Ambil $\varepsilon > 0$ dan m sedemikian hingga persamaan (2.41) terpenuhi dan $\mu_2 - 4m > 0$. Misal $U \equiv \{(y_1, y_2) : \|y\| < \varepsilon\}$ adalah persekitaran dari titik asal. Pada daerah $\Omega \cap U$, diperoleh $V(\mathbf{y}) > 0$ dan $\dot{V}(\mathbf{y}) \geq (\mu_2 - 4m)y_2^2 > 0$.

Misal $\mathbf{y}^0 \in \Omega \cap U$, maka solusi yang melalui \mathbf{y}^0 berada di Ω sepanjang $\mathbf{y}(t) \in U$. Untuk menyelesaikan bukti, tampak bahwa solusi yang melalui \mathbf{y}^0 mempunyai *norm* samadengan ε untuk beberapa nilai t , sehingga solusi pasti keluar melewati batas U . Hal ini disebabkan karena terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga $\dot{V}(\mathbf{y}) > \delta$ jika $\mathbf{y} \in U$ dan $V(\mathbf{y}) > V(\mathbf{y}^0)$. Pembuktian kestabilan dari persamaan (2.49) selesai. ■



Gambar 19. Fungsi V dan daerah Ω dimana $\dot{V}(\mathbf{y}) > 0$

Contoh 2.14: Diberikan sistem tak linier

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 - x_1 x_2 \\ x_2 - x_1^2 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Titik ekuilibrium dari sistem (2.50) adalah $(0,0)$, $(1,1)$, dan $(-1,1)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.50) dengan menggunakan persamaan (2.38) adalah

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 - x_2 & -x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian pada titik ekuilibrium $(0,0)$, $(1,1)$, dan $(-1,1)$ yakni

$$D\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D\mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } D\mathbf{f}(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertama, nilai eigen matriks Jacobian di titik $(0,0)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$. Kestabilan titik ekuilibrium $(0,0)$ tak stabil, sebab semua nilai eigen mempunyai bagian real positif. Kedua, nilai eigen matriks Jacobian pada titik $(1,1)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$. Kestabilan titik ekuilibrium $(1,1)$ tak stabil, sebab terdapat nilai eigen yang bagian realnya positif. Ketiga, nilai eigen matriks Jacobian pada titik $(-1,1)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = -1$. Kestabilan titik ekuilibrium $(-1,1)$ tak stabil, sebab terdapat nilai eigen yang bagian realnya positif.

Perilaku solusi (Blanchard et al, 2006: 465) dekat titik ekuilibrium pada sistem tak linier dengan sistem linierisasinya dapat berbeda, yakni apabila sistem linierisasinya mempunyai nilai eigen yang bagian realnya bernilai nol. Jadi linierisasi tidak bisa diterapkan untuk menganalisis perilaku solusi yang dekat dengan titik ekuilibrium pada sistem tak linier apabila sistem linierisasinya

mempunyai nilai eigen yang bagian realnya bernilai nol, dapat dilihat pada Contoh 2.15 dan Contoh 2.16.

Contoh 2.15: Diberikan sistem tak linier

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (x_1^2 + x_2^2)x_2.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Titik ekuilibrium sistem (2.51) adalah $(0,0)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.51) dengan menggunakan persamaan (2.38) adalah

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -1 - 2x_1x_2 & -x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian dari sistem (2.51) pada titik ekuilibrium $(0,0)$ yakni

$$D\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jadi sistem linierisasi dari sistem (2.51) di titik $(0,0)$ adalah

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.52)$$

Nilai eigen dari sistem (2.52) adalah $\lambda_1 = i$ dan $\lambda_2 = -i$, sehingga sistem (2.52) mempunyai nilai eigen yang bagian realnya nol.

Sistem (2.51) dapat ditulis pada koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1) + x_2(-x_1 - (x_1^2 + x_2^2)x_2)}{r} = -r^3, \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(-x_1 - (x_1^2 + x_2^2)x_2) - x_2(x_2 - (x_1^2 + x_2^2)x_1)}{r^2} = -1.\end{aligned}$$

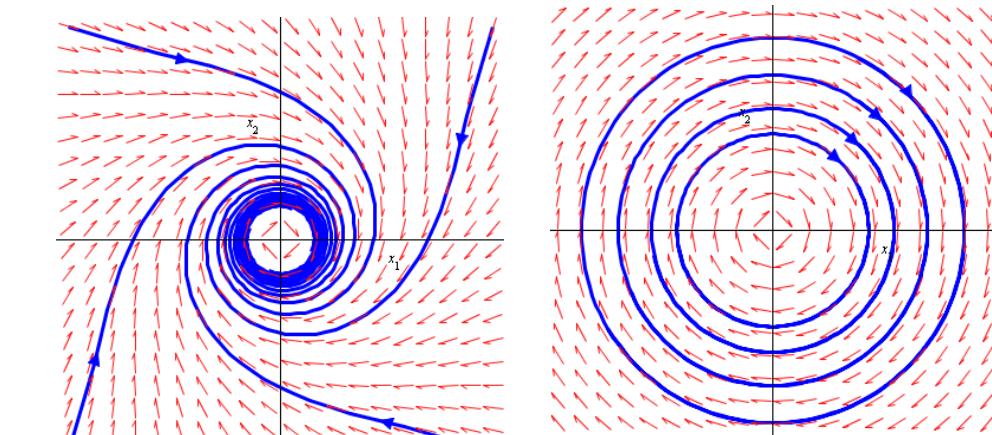
Jadi sistem (2.51) dalam koordinat polar adalah

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r^3 \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}\quad (2.53)$$

Solusi dari sistem (2.53) adalah $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2t}}$, $\theta(t) = -t + \theta_0$ yang

terdefinisi untuk $t \in \left(-\frac{1}{2r_0^2}, \infty\right)$. Tampak bahwa $r(t) \rightarrow 0$, $\theta(t) \rightarrow -\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$. Karena $\theta(t) \rightarrow -\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$, maka orbit dengan nilai awal (r_0, θ_0) berputar searah dengan arah jarum jam pada bidang- (x_1, x_2) .

Potret fase dari sistem (2.52) akan sama dengan sistem (2.15). Potret fase sistem (2.51) dapat dilihat pada Gambar 20(a). (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 7). Pada Gambar 20 menunjukkan bahwa sistem (2.51) dan sistem (2.52) mempunyai perbedaan secara kualitatif. Kestabilan titik ekuilibrium $(0,0)$ pada sistem (2.51) adalah stabil asimtotik, sedangkan pada sistem linierisasi (2.52) adalah stabil. Jadi sistem linierisasi (2.52) tidak dapat digunakan untuk menganalisis perilaku solusi disekitar titik ekuilibrium pada sistem (2.51).



Gambar 20. Potret fase: (a) sistem (2.51), dan (b) sistem linierisasi dari sistem (2.51) di titik $(0,0)$.

Contoh 2.16: Diberikan sistem tak linier

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + (x_1^2 + x_2^2)x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 + x_2^2)x_2.\end{aligned}\tag{2.54}$$

Titik ekuilibrium sistem (2.54) adalah $(0,0)$. Matriks Jacobian dari sistem (2.54) dengan menggunakan persamaan (2.38) diperoleh

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2^2 & -1 + 2x_1x_2 \\ 1 + 2x_1x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian dari sistem (2.54) pada titik ekuilibrium $(0,0)$ yakni

$$D\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jadi sistem linierisasi dari sistem (2.54) di titik $(0,0)$ adalah

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (2.55)$$

Nilai eigen dari sistem (2.55) adalah $\lambda_1 = i$ dan $\lambda_2 = -i$, sehingga sistem (2.55) mempunyai nilai eigen yang bagian realnya nol. Sistem (2.54) dapat dituliskan pada koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\dot{r} = \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(-x_2 + (x_1^2 + x_2^2)x_1) + x_2(x_1 + (x_1^2 + x_2^2)x_2)}{r} = r^3,$$

$$\dot{\theta} = \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(x_1 + (x_1^2 + x_2^2)x_2) - x_2(-x_2 + (x_1^2 + x_2^2)x_1)}{r^2} = 1.$$

Jadi sistem (2.54) dalam koordinat polar adalah

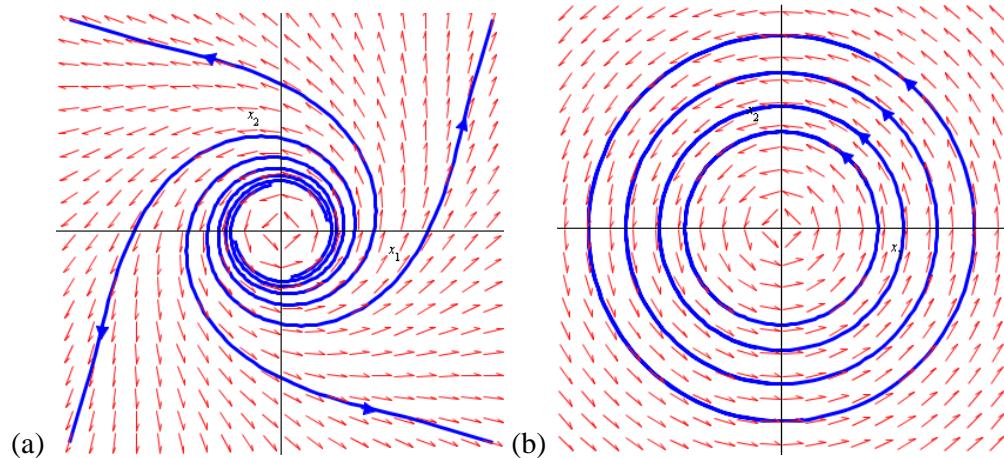
$$\begin{aligned} \dot{r} &= r^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Solusi dari sistem (2.56) adalah $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1-2r_0^2t}}$, $\theta(t) = t + \theta_0$ yang

terdefinisi untuk $t \in \left(-\infty, \frac{1}{2r_0^2}\right)$. Tampak bahwa $r(t) \rightarrow 0$, $\theta(t) \rightarrow -\infty$ untuk $t \rightarrow -\infty$. Karena $\theta(t) \rightarrow -\infty$ untuk $t \rightarrow -\infty$, maka orbit dengan nilai awal (r_0, θ_0) berputar berlawanan dengan arah dengan arah jarum jam pada bidang- (x_1, x_2) .

Potret fase dari sistem (2.54) dapat dilihat pada Gambar 21, sedangkan potret fase sistem linierisasi (2.55) akan mirip dengan potret fase sistem (2.52) hanya berbeda arah. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 8). Pada Gambar 21 menunjukkan bahwa sistem (2.54) dan sistem linierisasi (2.55) mempunyai perbedaan secara kualitatif.

Kestabilan titik ekuilibrium $(0,0)$ pada sistem (2.54) adalah tak stabil, sedangkan pada sistem linierisasi (2.55) adalah stabil. Jadi sistem linierisasi (2.55) tidak dapat digunakan untuk menganalisis perilaku solusi disekitar titik ekuilibrium pada sistem (2.54).



Gambar 21. Potret fase: (a) sistem (2.54), dan (b) sistem linierisasi dari sistem (2.54) di titik $(0,0)$.

BAB III

PEMBAHASAN

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial dapat dikelompokkan menjadi dua, yakni persamaan diferensial otonomus dan tak otonomus. Persamaan diferensial otonomus merupakan persamaan diferensial yang variabel bebasnya tidak muncul secara eksplisit. Persamaan diferensial otonomus yang berdimensi satu disebut persamaan diferensial skalar otonomus.

Sistem persamaan diferensial pada bidang merupakan sistem yang memuat dua persamaan diferensial skalar dengan dua variabel terikat. Dua persamaan diferensial dikatakan tidak bertautan jika kedua fungsi pada persamaan diferensial tidak mempunyai relasi secara spesifik, sedangkan jika terdapat relasi dikatakan bertautan. Sistem persamaan diferensial pada bidang dapat dinyatakan dalam bentuk koordinat kartesius dan koordinat polar. Gabungan dari dua persamaan diferensial skalar otonomus yang tidak bertautan dan menginterpretasikan aliran dari dua variabel dalam bidang disebut sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang. Sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang dibedakan menjadi dua jenis, yakni sistem hasil kali kartesius dan sistem hasil kali polar.

A. Sistem Hasil Kali Kartesius

Misal I_1 dan I_2 merupakan interval terbuka pada garis bilangan real \mathbb{R} dan

$$x_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto x_1(t),$$

$$x_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad t \mapsto x_2(t),$$

adalah nilai real dari dua fungsi yang terdiferensialkan untuk suatu variabel real t .

Misal

$$f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x_1 \mapsto f_1(x_1),$$

$$f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \quad x_2 \mapsto f_2(x_2),$$

adalah dua fungsi berbeda yang bernilai real.

Diberikan dua persamaan diferensial skalar

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1), \quad (3.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2), \quad (3.2)$$

dimana x_1, x_2 adalah dua fungsi tidak diketahui dari t , f_1 adalah fungsi dari x_1 , dan f_2 adalah fungsi dari x_2 .

Sistem hasil kali antara persamaan (3.1) dan (3.2) yakni

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2). \quad (3.3)$$

Solusi dari sistem hasil kali (3.3) yaitu $(x_1(t), x_2(t))$. Solusi $(x_1(t), x_2(t))$ menggambarkan potret fase yang merupakan hasil kali dari masing-masing potret fase persamaan (3.1) dan (3.2). Titik ekuilibrium sistem hasil kali (3.3) merupakan pasangan terurut dari titik ekuilibrium masing-masing persamaan penyusunnya. Jika \bar{x}_1 merupakan titik ekuilibrium persamaan (3.1) dan \bar{x}_2 merupakan titik ekuilibrium persamaan (3.2), maka titik (\bar{x}_1, \bar{x}_2) merupakan

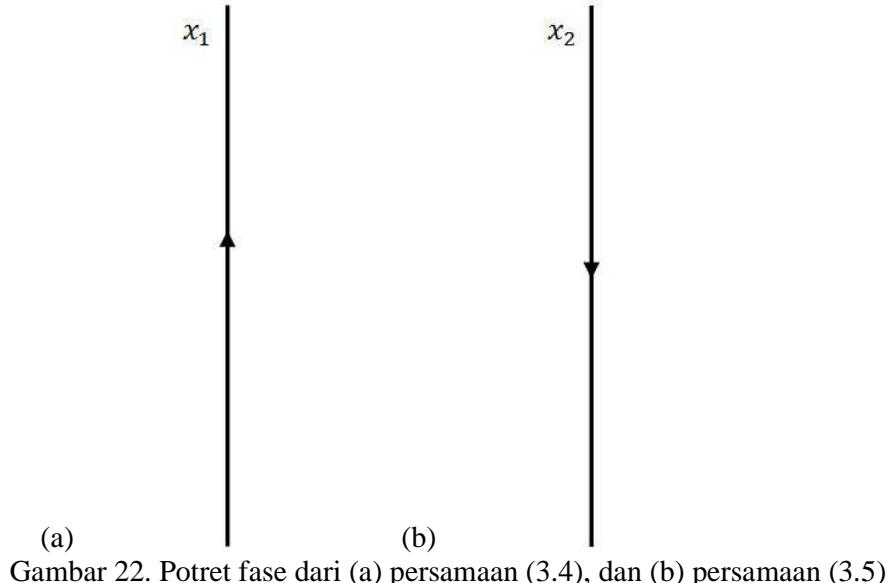
titik ekuilibrium dari sistem hasil kali (3.3). Sistem hasil kali (3.3) disebut sistem hasil kali kartesius.

Contoh 3.1: Diberikan dua persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = 1, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.4)$$

$$\dot{x}_2 = -1, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3.5)$$

Persamaan (3.4) dan (3.5) tidak mempunyai titik ekuilibrium. Solusi dari persamaan (3.4) dan (3.5) berturut-turut adalah $x_1(t) = t + x_1^0$ dan $x_2(t) = -t + x_2^0$ yang terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Potret fase persamaan (3.4) dan (3.5) ditunjukkan pada Gambar 22.



Gambar 22. Potret fase dari (a) persamaan (3.4), dan (b) persamaan (3.5)

Sistem hasil kali dari persamaan (3.4) dan (3.5) yaitu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 \\ \dot{x}_2 &= -1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

dengan solusi $(t + x_1^0, -t + x_2^0)$ yang terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Sistem (3.6) tidak mempunyai titik ekuilibrium.

Akan dicari persamaan orbit dari sistem (3.6). Solusi persamaan penyusun dari sistem (3.6) adalah

$$x_1(t) = t + x_1^0, \quad (3.7)$$

$$x_2(t) = -t + x_2^0. \quad (3.8)$$

Persamaan (3.7) dapat ditulis menjadi bentuk

$$t = x_1 - x_1^0. \quad (3.9)$$

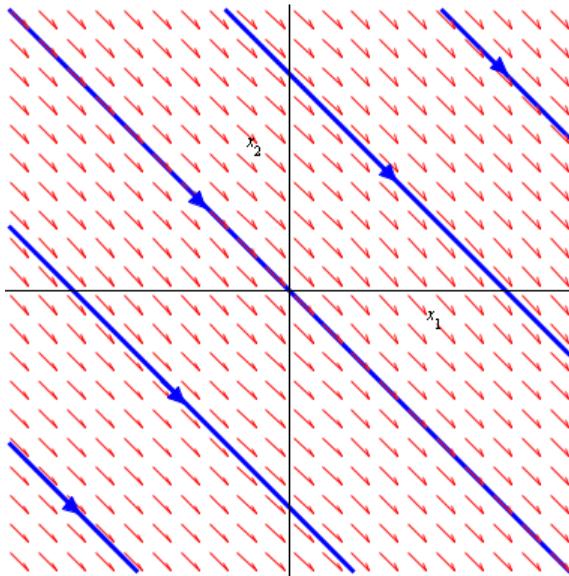
Substitusi persamaan (3.9) ke (3.8) diperoleh

$$\begin{aligned} x_2 &= -(x_1 - x_1^0) + x_2^0 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -x_1 + x_1^0 + x_2^0 \\ \Leftrightarrow x_1 + x_2 &= x_1^0 + x_2^0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Misalkan $C = x_1^0 + x_2^0$, maka persamaan (3.10) menjadi $x_1 + x_2 = C$ yang merupakan orbit sistem (3.6).

Orbit sistem (3.6) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.17), yakni mencari solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = -1$. Solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = -1$ merupakan persamaan garis $x_1 + x_2 = C$ dengan C merupakan konstanta yang merupakan orbit sistem (3.6).

Jadi orbit dari sistem (3.6) berbentuk $x_1 + x_2 = C$. Potret fase sistem (3.6) ditunjukkan pada Gambar 23. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 9)



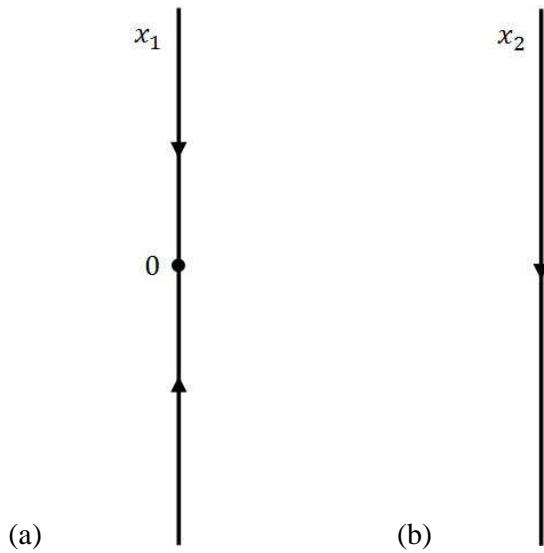
Gambar 23. Potret fase sistem (3.6)

Contoh 3.2: Diberikan dua persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.11)$$

$$\dot{x}_2 = -2, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3.12)$$

Titik ekuilibrium persamaan (3.11) adalah 0, sedangkan persamaan (3.12) tidak mempunyai titik ekuilibrium. Potret fase persamaan (3.11) dan (3.12) ditunjukkan pada Gambar 24. Solusi dari persamaan (3.11) dan (3.12) berturut-turut adalah $x_1(t) = e^{-t}x_1^0$ dan $x_2(t) = -2t + x_2^0$ yang terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Persamaan (3.11) mempunyai kesamaan dengan persamaan (2.6), sehingga kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.11) sama dengan kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (2.6) yaitu stabil asimtotik.



Gambar 24. Potret fase dari (a) persamaan (3.11), dan (b) persamaan (3.12)

Sistem hasil kali dari persamaan (3.11) dan (3.12) yaitu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -2,\end{aligned}\tag{3.13}$$

dengan solusi $(e^{-t}x_1^0, -2t + x_2^0)$ yang terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Sistem (3.13) tidak mempunyai titik ekuilibrium.

Akan dicari persamaan orbit dari sistem (3.13). Solusi persamaan penyusun dari sistem (3.13) adalah

$$x_1(t) = e^{-t}x_1^0,\tag{3.14}$$

$$x_2(t) = -2t + x_2^0.\tag{3.15}$$

Persamaan (3.15) dapat dituliskan menjadi bentuk

$$t = \frac{x_2^0 - x_2}{2}.\tag{3.16}$$

Substitusi persamaan (3.16) ke (3.14) diperoleh

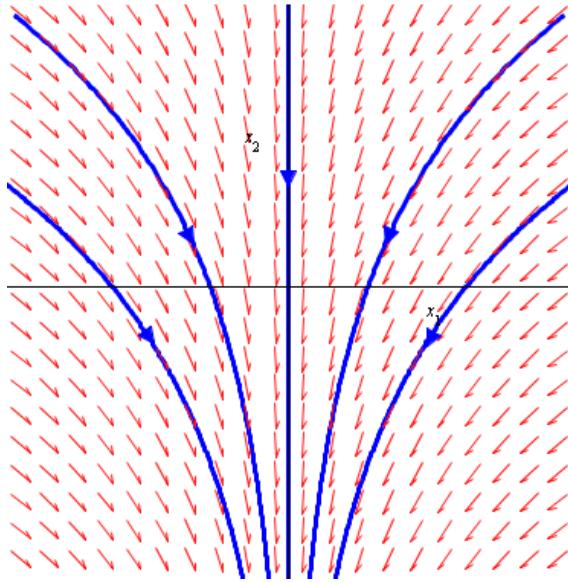
$$\begin{aligned}
 x_1 &= e^{-\left(\frac{x_2^0 - x_2}{2}\right)} x_1^0 \\
 \Leftrightarrow x_1 &= e^{\frac{x_2 - x_2^0}{2}} x_1^0 \\
 \Leftrightarrow x_1 &= e^{\left(\frac{x_2}{2}\right)} e^{\left(\frac{-x_2^0}{2}\right)} x_1^0 \\
 \Leftrightarrow x_1 &= \frac{x_1^0}{e^{\left(\frac{x_2^0}{2}\right)}} e^{\left(\frac{x_2}{2}\right)}. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Misalkan $C = \frac{x_1^0}{e^{\left(\frac{x_2^0}{2}\right)}}$, maka persamaan (3.17) menjadi $x_1 = C e^{\left(\frac{x_2}{2}\right)}$ yang

merupakan orbit sistem (3.13).

Orbit sistem (3.13) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.17), yakni mencari solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2}{x_1}$. Solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{2}{x_1}$ adalah $x_1 = C e^{\frac{x_2}{2}}$ dengan C merupakan konstanta yang merupakan orbit sistem (3.13).

Jadi orbit dari sistem (3.13) berbentuk $x_1 = C e^{\frac{x_2}{2}}$. Potret fase sistem (3.13) ditunjukkan pada Gambar 25. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 10)



Gambar 25. Potret fase dari sistem (3.13)

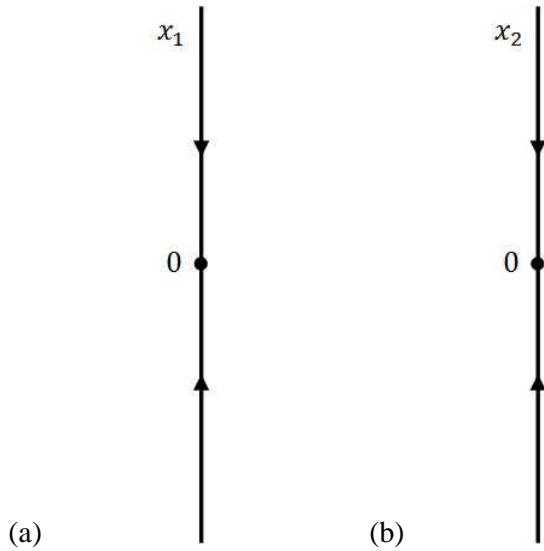
Contoh 3.3: Diberikan dua persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.18)$$

$$\dot{x}_2 = -x_2, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3.19)$$

Titik ekuilibrium persamaan (3.18) dan (3.19) masing-masing adalah 0.

Potret fase persamaan (3.18) dan (3.19) ditunjukkan pada Gambar 26. Solusi dari persamaan (3.18) dan (3.19) berturut-turut adalah $x_1(t) = e^{-t}x_1^0$ dan $x_2(t) = e^{-t}x_2^0$ yang terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Persamaan (3.18) dan (3.19) mempunyai kesamaan dengan persamaan (2.6), sehingga kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.18) dan (3.19) sama dengan kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (2.6) yaitu stabil asimtotik, dapat dilihat pada Gambar 26.



Gambar 26. Potret fase dari (a) persamaan (3.18), dan (b) persamaan (3.19)

Sistem hasil kali dari persamaan (3.18) dan (3.19) yaitu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2,\end{aligned}\tag{3.20}$$

dengan solusi $(e^{-t}x_1^0, e^{-t}x_2^0)$ yang terdefinisi untuk setiap $t \in \mathbb{R}$. Sistem (3.20) mempunyai satu titik ekuilibrium, yaitu $(0,0)$.

Akan dicari persamaan orbit dari sistem (3.20). Solusi persamaan penyusun dari sistem (3.20) adalah

$$x_1(t) = e^{-t}x_1^0,\tag{3.21}$$

$$x_2(t) = e^{-t}x_2^0.\tag{3.22}$$

Persamaan (3.21) dapat dituliskan menjadi bentuk

$$e^{-t} = \frac{x_1}{x_1^0}.\tag{3.23}$$

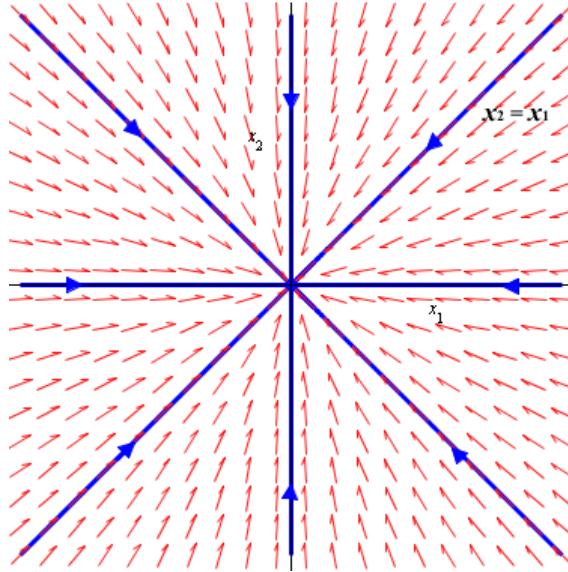
Substitusi persamaan (3.23) ke (3.21) diperoleh

$$\begin{aligned} x_2 &= \left(\frac{x_1}{x_1^0} \right) x_2^0 \\ \Leftrightarrow x_2 &= \left(\frac{x_2^0}{x_1^0} \right) x_1. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Misalkan $C = \frac{x_2^0}{x_1^0}$, maka persamaan (3.24) menjadi $x_2 = Cx_1$ yang merupakan orbit sistem (3.20).

Orbit sistem (3.20) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.17), yakni mencari solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}$. Solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}$ adalah $x_2 = Cx_1$ dengan C merupakan konstanta yang merupakan orbit sistem (3.20). Jadi orbit dari sistem (3.20) berbentuk $x_2 = Cx_1$. Potret fase sistem (3.20) ditunjukkan pada Gambar 27. Potret fase sistem (3.20) simetri terhadap garis $x_2 = x_1$.

Sistem hasil kali (3.20) merupakan sistem linier. Nilai eigen dari sistem (3.20) dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -1$. Kestabilan titik ekuilibrium $(0,0)$ dengan menggunakan Teorema 2.3 adalah stabil asimtotik, dapat dilihat pada Gambar 27. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 11)



Gambar 27. Potret fase dari sistem (3.20)

Contoh 3.4: Diberikan dua persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.25)$$

$$\dot{x}_2 = x_2^2, \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3.26)$$

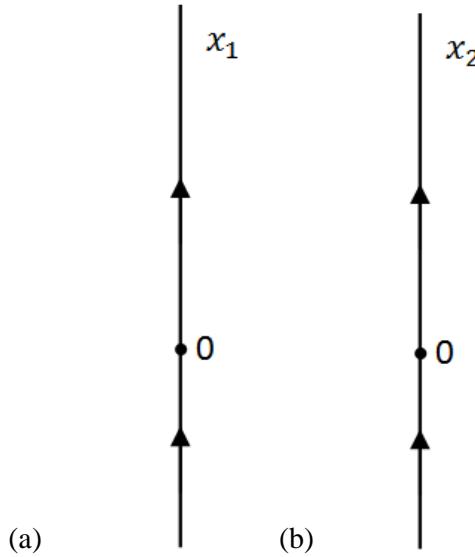
Titik ekuilibrium persamaan (3.25) dan (3.26) masing-masing adalah 0.

Potret fase persamaan (3.25) dan (3.26) ditunjukkan pada Gambar 28. Solusi dari

persamaan (3.25) dan (3.26) berturut-turut adalah $x_1(t) = \frac{x_1^0}{1-x_1^0 t}$ dan $x_2(t) =$

$\frac{x_2^0}{1-x_2^0 t}$. Kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.25) dengan menggunakan

Lemma 2.1 adalah tak stabil, sebab terdapat $\delta = 1$ sedemikian hingga $x_1^3 > 0$ untuk $0 < x_1 < 1$. Kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.26) akan sama dengan kestabilan titik ekuilibrium persamaan (3.25).



Gambar 28. Potret fase dari (a) persamaan (3.25), dan (b) persamaan (3.26)

Sistem hasil kali dari persamaan (3.25) dan (3.26) yaitu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 \\ \dot{x}_2 &= x_2^2,\end{aligned}\tag{3.27}$$

dengan solusi $\left(\frac{x_1^0}{1-x_1^0 t}, \frac{x_2^0}{1-x_2^0 t}\right)$. Sistem (3.27) mempunyai satu titik ekuilibrium,

yaitu $(0,0)$.

Akan dicari persamaan orbit dari sistem (3.27). Solusi persamaan penyusun dari sistem (3.27) adalah

$$x_1(t) = \frac{x_1^0}{1 - x_1^0 t},\tag{3.28}$$

$$x_2(t) = \frac{x_2^0}{1 - x_2^0 t}.\tag{3.29}$$

Persamaan (3.28) dapat dituliskan menjadi bentuk

$$t = \frac{1}{x_1^0} - \frac{1}{x_1}.\tag{3.30}$$

Substitusi persamaan (3.30) ke (3.29) diperoleh

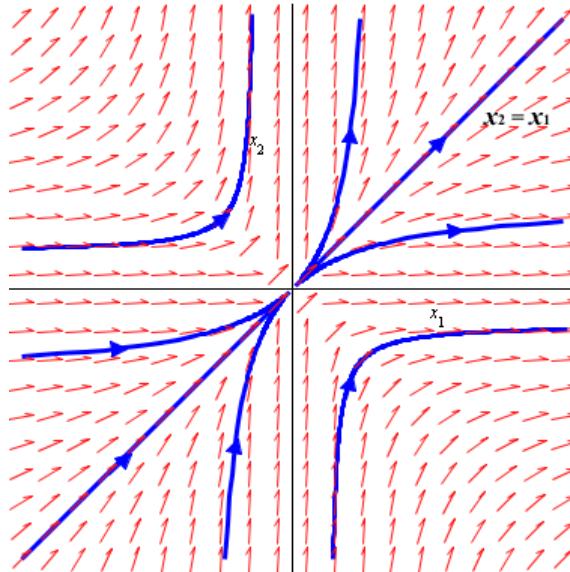
$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{x_2^0}{1 - x_2^0 \left(\frac{1}{x_1^0} - \frac{1}{x_1} \right)} \\
 \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_2^0}{1 - \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{x_2^0}{x_1}} \\
 \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_2^0}{\frac{x_1^0 x_1 - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2^0}{x_1^0 x_1}} \\
 \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_1^0 x_2^0 x_1}{x_1^0 x_1 - x_2^0 x_1 + x_1^0 x_2^0} \cdot \frac{\frac{1}{x_1^0 x_2^0}}{\frac{1}{x_1^0 x_2^0}} \\
 \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_1}{\frac{x_1^0}{x_2^0} - \frac{x_1^0}{x_1^0} + 1} \\
 \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_1}{x_1 \left(\frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1^0 x_2^0} \right) + 1}. \tag{3.31}
 \end{aligned}$$

Misalkan $C = \frac{x_1^0 - x_2^0}{x_1^0 x_2^0}$, maka persamaan (3.31) menjadi $x_2 = \frac{x_1}{x_1 C + 1}$ yang

merupakan orbit sistem (3.27).

Orbit sistem (3.27) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.17), yakni mencari solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}$. Solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}$ adalah $x_2 = \frac{x_1}{x_1 C + 1}$ dengan C merupakan konstanta yang merupakan orbit sistem (3.27) disekitar titik ekuilibrium $(0,0)$. Jadi orbit dari sistem (3.27) berbentuk $x_2 = \frac{x_1}{x_1 C + 1}$. Potret fase sistem (3.27) ditunjukkan pada Gambar 29. (Perintah Maple dapat dilihat pada

Lampiran 12). Potret fase sistem (3.27) simetri terhadap garis $x_2 = x_1$. Titik ekuilibrium $(0,0)$ pada sistem hasil kali (3.27) tidak stabil, dapat dilihat pada Gambar 29.



Gambar 29. Potret fase dari sistem (3.27)

Contoh 3.5: Diberikan dua persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.32)$$

$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2), \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3.33)$$

Titik ekuilibrium persamaan (3.32) adalah 0 , sedangkan titik ekuilibrium persamaan (3.33) adalah 0 dan 1 . Potret fase persamaan (3.32) dan (3.33) ditunjukkan pada Gambar 30. Solusi dari persamaan (3.32) dan (3.33) berturut-turut adalah $x_1(t) = e^{-t}x_1^0$ dan $x_2(t) = \frac{x_2^0}{x_2^0 - e^{-t}x_2^0 + e^{-t}}$.

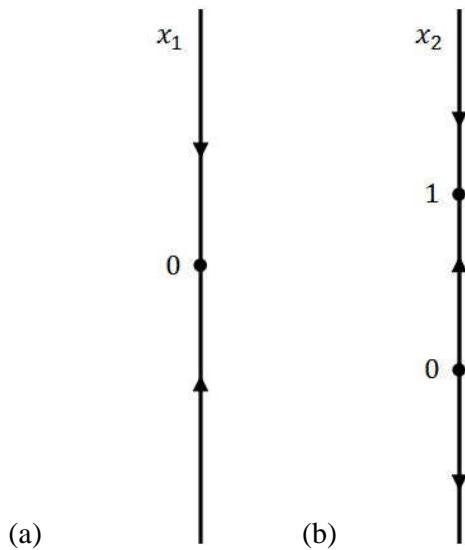
Persamaan (3.32) mempunyai kesamaan dengan persamaan (2.6), sehingga kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.32) sama dengan kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (2.6) yaitu stabil asimtotik. Kestabilan titik

ekuilibrium pada persamaan (3.33) dapat ditentukan dengan menggunakan

Teorema 2.2. Misal $f_2(x_2) = x_2(1 - x_2)$, maka

$$f'_2(x_2) = 1 - 2x_2, \quad f'_2(0) = 1 - 2(0) = 1, \text{ dan } f'_2(1) = 1 - 2(1) = -1.$$

Menurut Teorema 2.2, maka dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium 0 tak stabil sebab $f'_2(0) = 1 > 0$ dan titik ekuilibrium 1 stabil asimtotik sebab $f'_2(1) = -1 < 0$.



Gambar 30. Potret fase dari (a) persamaan (3.32), dan (b) persamaan (3.33)

Sistem hasil kali dari persamaan (3.32) dan (3.33) yaitu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2), \end{aligned} \tag{3.34}$$

dengan solusi $\left(e^{-t}x_1^0, \frac{x_2^0}{x_2^0 - e^{-t}x_2^0 + e^{-t}}\right)$. Sistem (3.34) mempunyai dua titik ekuilibrium, yaitu $(0,0)$ dan $(0,1)$.

Akan dicari persamaan orbit dari sistem (3.34). Solusi persamaan penyusun dari sistem (3.34) adalah

$$x_1(t) = e^{-t} x_1^0, \quad (3.35)$$

$$x_2(t) = \frac{x_2^0}{x_2^0 - e^{-t} x_2^0 + e^{-t}}. \quad (3.36)$$

Persamaan (3.35) dapat ditulis menjadi bentuk

$$e^{-t} = \frac{x_1}{x_1^0}. \quad (3.37)$$

Substitusi persamaan (3.37) ke (3.36) diperoleh

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_2^0}{x_2^0 - \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)x_2^0 + \frac{x_1}{x_1^0}} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_2^0}{x_2^0 - \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)x_2^0 + \frac{x_1}{x_1^0}} \cdot \frac{\frac{1}{x_2^0}}{\frac{1}{x_2^0}} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{1}{1 - \frac{x_1}{x_1^0} + \frac{x_1}{x_1^0 x_2^0}} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{1}{1 + x_1 \left(-\frac{1}{x_1^0} + \frac{1}{x_1^0 x_2^0}\right)} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{1}{1 + x_1 \left(\frac{1 - x_2^0}{x_1^0 x_2^0}\right)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Misalkan $C = \frac{1-x_2^0}{x_1^0 x_2^0}$, maka persamaan (3.38) menjadi $x_2 = \frac{1}{1+Cx_1}$ yang merupakan orbit sistem (3.34).

Orbit sistem (3.34) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.17), yakni mencari solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2(1-x_2)}{x_1}$.

Solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2(1-x_2)}{x_1}$ adalah $x_2 = \frac{1}{1+Cx_1}$

dengan C merupakan konstanta yang merupakan orbit sistem (3.34). Jadi orbit dari sistem (3.34) berbentuk $x_2 = \frac{1}{1+Cx_1}$. Potret fase sistem (3.34) ditunjukkan pada Gambar 31. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 13)

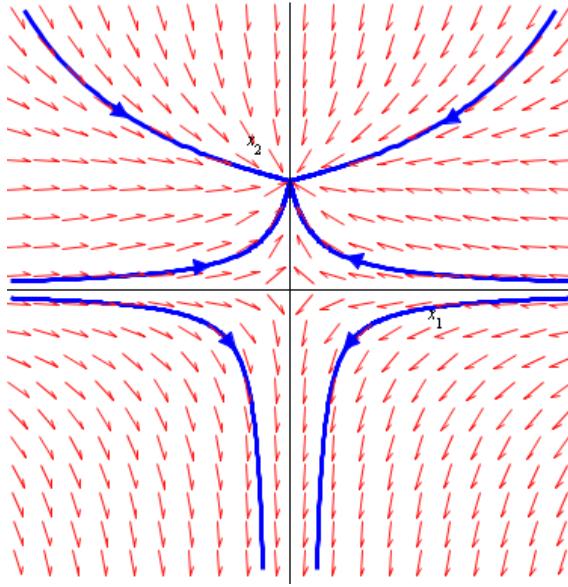
Sistem hasil kali (3.34) merupakan sistem tak linier. Matriks Jacobian dari sistem (3.34) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.38) yakni

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian dari sistem (3.34) di titik ekuilibrium (0,0) dan (0,1) yakni

$$D\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } D\mathbf{f}(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen untuk matriks Jacobian di titik (0,0) dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium (0,0) tak stabil. Selanjutnya, nilai eigen untuk matriks Jacobian di titik (0,1) dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -1$. Menurut Teorema 2.4 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium (0,1) stabil asimtotik.



Gambar 31. Potret fase dari sistem (3.34)

Contoh 3.6: Diberikan dua persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1), \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.39)$$

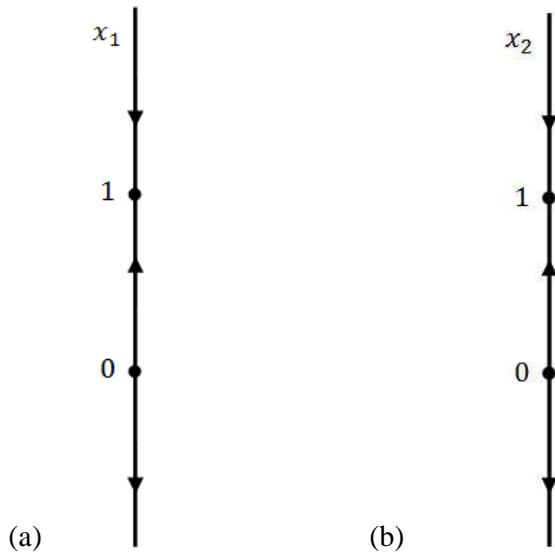
$$\dot{x}_2 = x_2(1 - x_2), \quad x_2(0) = x_2^0. \quad (3.40)$$

Titik ekuilibrium persamaan (3.39) dan (3.40) masing-masing adalah 0 dan 1. Solusi dari persamaan (3.39) dan (3.40) berturut-turut adalah $x_1(t) =$

$\frac{x_1^0}{x_1^0 - e^{-t}x_1^0 + e^{-t}}$ dan $x_2(t) = \frac{x_2^0}{x_2^0 - e^{-t}x_2^0 + e^{-t}}$. Potret fase persamaan (3.39) dan (3.40)

ditunjukkan pada Gambar 32.

Persamaan (3.39) dan (3.40) mempunyai kesamaan dengan persamaan (3.33), sehingga kestabilan titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.39) dan (3.40) adalah tak stabil, sedangkan titik ekuilibrium 1 stabil asimtotik.



Gambar 32. Potret fase dari (a) persamaan (3.39), dan (b) persamaan (3.40)

Sistem hasil kali dari persamaan (3.39) dan (3.40) yaitu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(1 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_2),\end{aligned}\tag{3.41}$$

dengan solusi $\left(\frac{x_1^0}{x_1^0 - e^{-t}x_1^0 + e^{-t}}, \frac{x_2^0}{x_2^0 - e^{-t}x_2^0 + e^{-t}}\right)$.

Sistem (3.41) mempunyai empat titik ekuilibrium, yaitu $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, dan $(1,1)$.

Akan dicari persamaan orbit dari sistem (3.41). Solusi persamaan penyusun dari sistem (3.41) adalah

$$x_1(t) = \frac{x_1^0}{x_1^0 - e^{-t}x_1^0 + e^{-t}},\tag{3.42}$$

$$x_2(t) = \frac{x_2^0}{x_2^0 - e^{-t}x_2^0 + e^{-t}}.\tag{3.43}$$

Persamaan (3.42) dapat ditulis menjadi bentuk

$$e^{-t} = \frac{x_1^0(1-x_1)}{x_1(1-x_1^0)}. \quad (3.44)$$

Substitusi persamaan (3.44) ke (3.43) diperoleh

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{x_2^0}{x_2^0 - \left(\frac{x_1^0(1-x_1)}{x_1(1-x_1^0)} \right) x_2^0 + \left(\frac{x_1^0(1-x_1)}{x_1(1-x_1^0)} \right)} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{x_2^0}{x_2^0 + \left(\frac{x_1^0(1-x_1)}{x_1(1-x_1^0)} \right) (1-x_2^0)} \cdot \frac{\frac{1}{x_2^0}}{\frac{1}{x_2^0}} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{1}{1 + \frac{x_1^0(1-x_2^0)}{x_1(1-x_1^0)} - \frac{x_1 x_1^0(1-x_2^0)}{x_1(1-x_1^0)}} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{1}{1 + \frac{x_1^0(1-x_2^0)}{x_1(1-x_1^0)} - \frac{x_1^0(1-x_2^0)}{(1-x_1^0)}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Misalkan $C = \frac{(1-x_1^0)}{x_1^0(1-x_2^0)}$, maka persamaan (3.45) menjadi $x_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_1^0} - \frac{1}{c}}$ yang

merupakan orbit sistem (3.41).

Orbit sistem (3.41) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan

(2.17), yakni mencari solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(1-x_2)}{x_1(1-x_1)}$.

Solusi dari persamaan diferensial skalar $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(1-x_2)}{x_1(1-x_1)}$ adalah $x_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_1^0} - \frac{1}{c}}$

dengan C merupakan konstanta yang merupakan orbit sistem (3.41). Jadi orbit

dari sistem (3.41) berbentuk $x_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{x_1^0} - \frac{1}{c}}$. Potret fase sistem (3.41) ditunjukkan

pada Gambar 33. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 14). Potret fase sistem (3.41) simetri terhadap garis $x_2 = x_1$.

Sistem hasil kali (3.41) merupakan sistem tak linier. Matriks Jacobian dari sistem (3.41) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.38) yakni

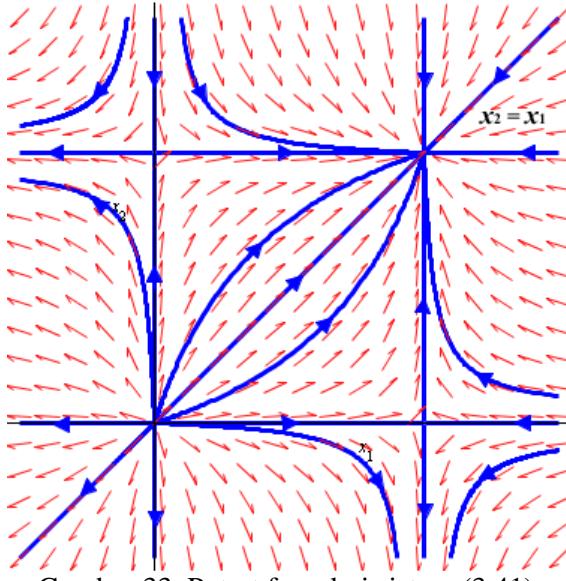
$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 - 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 - 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian dari sistem (3.41) di titik ekuilibrium $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, dan $(1,1)$ yakni

$$D\mathbf{f}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D\mathbf{f}(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D\mathbf{f}(1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } D\mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen untuk matriks Jacobian di titik $(0,0)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 1$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(0,0)$ tak stabil. Selanjutnya, nilai eigen untuk matriks Jacobian di titik $(0,1)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(0,1)$ tak stabil. Selanjutnya, nilai eigen untuk matriks Jacobian di titik $(1,0)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 1$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(1,0)$ tak stabil. Selanjutnya, nilai eigen untuk matriks Jacobian di titik $(1,1)$ dengan menggunakan persamaan (2.25) diperoleh $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = -1$. Menurut Teorema 2.4 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(1,1)$ stabil asimtotik.



Gambar 33. Potret fase dari sistem (3.41).

Pada contoh-contoh yang diberikan dapat diketahui bahwa kestabilan titik ekuilibrium sistem hasil kali kartesius terlihat dari potret fase persamaan penyusunnya. Jadi kestabilan titik ekuilibrium sistem hasil kali kartesius dipengaruhi kestabilan titik ekuilibrium persamaan penyusunnya. Kestabilan titik ekuilibrium sistem hasil kali secara analisis ditunjukkan sebagai berikut:

Diberikan dua persamaan diferensial linier

$$\dot{x}_1 = ax_1, \quad x_1(0) = x_1^0, \quad (3.46)$$

$$\dot{x}_2 = bx_2, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad (3.47)$$

dengan a, b merupakan konstanta, $a \neq 0, b \neq 0$.

Titik ekuilibrium persamaan (3.46) dan (3.47) masing-masing adalah 0. Solusi dari persamaan (3.46) adalah $x_1(t) = e^{at}x_1^0$, sedangkan solusi dari persamaan (3.47) adalah $x_2(t) = e^{bt}x_2^0$. Titik ekuilibrium 0 pada persamaan (3.46) stabil asimtotik ketika $a < 0$ sebab $x_1(t) \rightarrow 0$ untuk $t \rightarrow +\infty$ dan tak stabil

ketika $a > 0$ sebab $x_1(t) \rightarrow +\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$. Titik ekuilibrium $(0, 0)$ pada persamaan (3.47) stabil asimtotik ketika $b < 0$ sebab $x_2(t) \rightarrow 0$ untuk $t \rightarrow +\infty$ dan tak stabil ketika $b > 0$ sebab $x_2(t) \rightarrow +\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$.

Sistem hasil kali antara persamaan (3.46) dan (3.47) yakni

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ bx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Titik ekuilibrium sistem (3.48) adalah $(0, 0)$. Nilai eigen dari sistem (3.48) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.25) yakni

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & b - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - \lambda)(b - \lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 = a \text{ dan } \lambda_2 = b. & \end{aligned} \quad (3.49)$$

Kemungkinan pasangan nilai a dan b ada empat, yakni

1. Jika $a < 0$ dan $b < 0$, maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Menurut Teorema 2.3 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(0, 0)$ stabil asimtotik, sebab semua nilai eigen mempunyai bagian real negatif.
2. Jika $a > 0$ dan $b > 0$, maka $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Menurut Teorema 2.3 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(0, 0)$ tak stabil, sebab semua nilai eigen mempunyai bagian real positif.
3. Jika $a < 0$ dan $b > 0$, maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Menurut Teorema 2.3 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(0, 0)$ tak stabil, sebab terdapat nilai eigen yang mempunyai bagian real positif.

4. Jika $a > 0$ dan $b < 0$, maka $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Menurut Teorema 2.3 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium $(0,0)$ tak stabil, sebab terdapat nilai eigen yang mempunyai bagian real positif.

Apabila terdapat persamaan penyusun dari sistem hasil kali merupakan persamaan diferensial tak linier, maka analisis kestabilannya sebagai berikut:

Diberikan persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1), \quad (3.50)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2). \quad (3.51)$$

Dimisalkan \bar{x}_1 merupakan titik ekuilibrium persamaan (3.50) dan \bar{x}_2 merupakan titik ekuilibrium persamaan (3.51).

Sistem hasil kali antara persamaan (3.50) dan (3.51) yakni

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ f_2(x_2) \end{pmatrix}. \quad (3.52)$$

Matriks Jacobian dari sistem (3.52) dengan menggunakan persamaan (2.38) yakni

$$Df(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} f_1(x_1) & \frac{d}{dx_2} f_1(x_1) \\ \frac{d}{dx_1} f_2(x_2) & \frac{d}{dx_2} f_2(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} f_1(x_1) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx_2} f_2(x_2) \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Matriks Jacobian dari persamaan (3.53) dititik (\bar{x}_1, \bar{x}_2) yakni

$$Df(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) \end{pmatrix}. \quad (3.54)$$

Nilai eigen dari matriks Jacobian pada persamaan (3.54) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan (2.25) yakni

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} \frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) - \lambda & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) - \lambda \right) \left(\frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) - \lambda \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda_1 = \frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) \text{ dan } \lambda_2 = \frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2). \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

Pada persamaan (3.55) terdapat dua kasus untuk nilai $\frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1)$ dan $\frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2)$.

(i) *Kasus pertama:* Misalkan $\frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) \neq 0$ dan $\frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) \neq 0$ pada persamaan (3.55). Banyaknya kemungkinan pasangan nilai $\frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1)$ dan $\frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2)$ ada empat, yakni:

1. Misal $\frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) < 0$ dan $\frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) < 0$, maka menurut Teorema 2.2 kestabilan titik ekuilibrium \bar{x}_1 pada persamaan (3.50) dan titik ekuilibrium \bar{x}_2 pada persamaan (3.51) adalah stabil asimtotik. Nilai eigen dari persamaan (3.55) adalah $\lambda_1 = \frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) < 0$ dan $\lambda_2 = \frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) < 0$. Menurut Teorema 2.4 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) pada sistem (3.52) stabil asimtotik sebab semua nilai eigen mempunyai bagian real negatif.

2. Misal $\frac{d}{dx_1}f_1(\bar{x}_1) > 0$ dan $\frac{d}{dx_2}f_2(\bar{x}_2) > 0$, maka menurut Teorema 2.2 kestabilan titik ekuilibrium \bar{x}_1 pada persamaan (3.50) dan titik ekuilibrium \bar{x}_2 pada persamaan (3.51) adalah tak stabil. Nilai eigen dari persamaan (3.55) adalah $\lambda_1 = \frac{d}{dx_1}f_1(\bar{x}_1) > 0$ dan $\lambda_2 = \frac{d}{dx_2}f_2(\bar{x}_2) > 0$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) pada sistem (3.52) tak stabil sebab semua nilai eigen mempunyai bagian real positif.
3. Misal $\frac{d}{dx_1}f_1(\bar{x}_1) < 0$ dan $\frac{d}{dx_2}f_2(\bar{x}_2) > 0$, maka menurut Teorema 2.2 kestabilan titik ekuilibrium \bar{x}_1 pada persamaan (3.50) adalah stabil asimtotik dan titik ekuilibrium \bar{x}_2 pada persamaan (3.51) adalah tak stabil. Nilai eigen dari persamaan (3.55) adalah $\lambda_1 = \frac{d}{dx_1}f_1(\bar{x}_1) < 0$ dan $\lambda_2 = \frac{d}{dx_2}f_2(\bar{x}_2) > 0$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) pada sistem (3.52) tak stabil sebab terdapat nilai eigen yang mempunyai bagian real positif.
4. Misal $\frac{d}{dx_1}f_1(\bar{x}_1) > 0$ dan $\frac{d}{dx_2}f_2(\bar{x}_2) < 0$, maka menurut Teorema 2.2 kestabilan titik ekuilibrium \bar{x}_1 pada persamaan (3.50) adalah tak stabil dan titik ekuilibrium \bar{x}_2 pada persamaan (3.51) adalah stabil asimtotik. Nilai eigen dari persamaan (3.55) adalah $\lambda_1 = \frac{d}{dx_1}f_1(\bar{x}_1) > 0$ dan $\lambda_2 = \frac{d}{dx_2}f_2(\bar{x}_2) < 0$. Menurut Teorema 2.5 dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) pada sistem (3.52) tak stabil sebab terdapat nilai eigen yang mempunyai bagian real positif.

(ii) *Kasus kedua:* Jika $\frac{d}{dx_1} f_1(\bar{x}_1) = 0$ atau $\frac{d}{dx_2} f_2(\bar{x}_2) = 0$ pada persamaan (3.55), maka kestabilan titik ekuilibrium sistem hasil kali tidak dapat disimpulkan dari hasil linierisasi.

Jadi pada sistem hasil kali kartesius menunjukkan bahwa kestabilan titik ekuilibrium dari sistem hasil kali bergantung pada kestabilan titik ekuilibrium persamaan penyusunnya.

Pada sistem hasil kali kartesius akan mempunyai potret fase yang simetris terhadap garis $x_2 = x_1$ apabila fungsi pada ruas kanan persamaan penyusunnya sama. Hal ini ditunjukkan sebagai berikut:

Diberikan persamaan diferensial

$$\dot{x}_1 = f(x_1), \quad (3.56)$$

$$\dot{x}_2 = f(x_2). \quad (3.57)$$

Pada persamaan (3.56) dan (3.57) mempunyai fungsi pada ruas kanan yang sama, sehingga dengan menggunakan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{dx_2}{dt} \frac{dt}{dx_1} \\ \Leftrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{f(x_2)}{f(x_1)} \\ \Leftrightarrow \frac{dx_2}{f(x_2)} &= \frac{dx_1}{f(x_1)}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Persamaan (3.58) akan dipenuhi jika $x_2 = x_1$. Hal ini mengakibatkan untuk setiap nilai awal (x_1^0, x_2^0) dengan $x_1^0 = x_2^0$, maka orbit yang melalui nilai awal (x_1^0, x_2^0) akan selalu berada pada garis $x_2 = x_1$. Contoh sistem hasil kali

yang mempunyai fungsi pada ruas kanan yang sama dapat dilihat pada Contoh 3.3, 3.4, dan 3.6.

Banyaknya titik ekuilibrium pada sistem hasil kali antara persamaan (3.1) dan (3.2) bergantung pada banyaknya titik ekuilibrium pada persamaan (3.1) dan (3.2). Jika persamaan (3.1) mempunyai titik ekuilibrium sebanyak m dan persamaan (3.2) mempunyai titik ekuilibrium sebanyak n , maka banyaknya titik ekuilibrium pada sistem hasil kali antara persamaan (3.1) dan (3.2) adalah $m \times n$, dengan $n, m \in \mathbb{N}$.

B. Sistem Hasil Kali Polar

Sistem pada koordinat kartesius dapat ditulis dalam bentuk koordinat polar. Terdapat sistem bertautan pada koordinat kartesius apabila ditulis dalam bentuk koordinat polar menjadi sistem tidak bertautan, dapat dilihat pada Contoh 3.7, 3.8 dan 3.9.

Contoh 3.7: Diberikan sistem persamaan diferensial bertautan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}\tag{3.59}$$

Sistem (3.59) merupakan sistem bertautan. Sistem (3.59) dapat ditulis dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

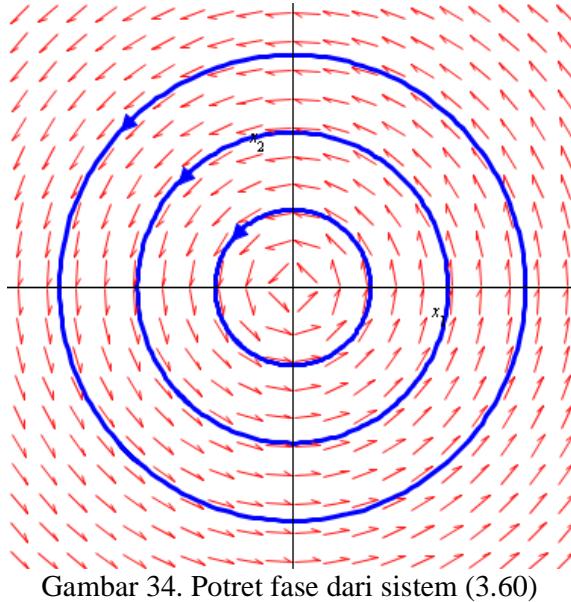
$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(-x_2) + x_2(x_1)}{r} = 0 \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(x_1) - x_2(-x_2)}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.\end{aligned}$$

Jadi sistem (3.59) dalam koordinat polar adalah

$$\begin{aligned}\dot{r} &= 0 \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{3.60}$$

Solusi dari sistem (3.60) adalah $r(t) = r_0$ dan $\theta(t) = t + \theta_0$. Tampak bahwa $r(t) = r_0$ dan $\theta(t) \rightarrow +\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$. Karena $\theta(t) \rightarrow +\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$, maka orbit dengan nilai awal (r_0, θ_0) berputar berlawanan dengan arah jarum jam pada bidang- (x_1, x_2) . Sistem (3.60) memuat dua persamaan diferensial skalar yang tidak bertautan, sehingga dapat dianggap bahwa sistem (3.60) merupakan sistem hasil kali polar. Potret fase dari sistem (3.60) dapat dilihat pada

Gambar 34. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 15)



Contoh 3.8: Diberikan sistem persamaan diferensial bertautan

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2.\end{aligned}\tag{3.61}$$

Sistem (3.61) merupakan sistem bertautan. Sistem (3.61) dapat dituliskan dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

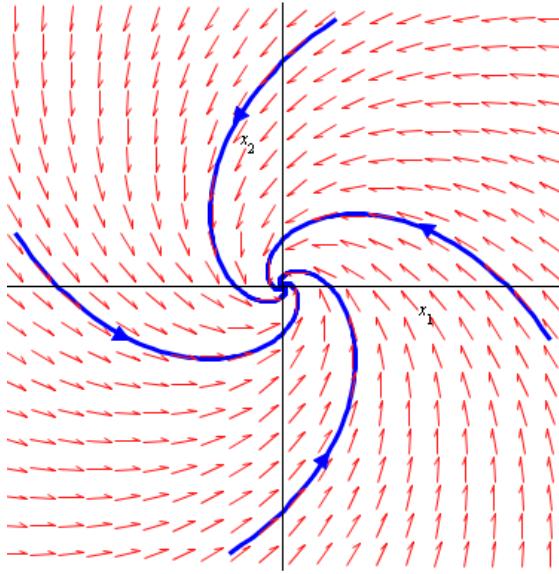
$$\dot{r} = \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(-x_1 - x_2) + x_2(x_1 - x_2)}{r} = \frac{-x_1^2 - x_2^2}{r} = -r$$

$$\dot{\theta} = \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(x_1 - x_2) - x_2(-x_1 - x_2)}{r^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{r^2} = 1.$$

Jadi sistem (3.61) dalam koordinat polar adalah

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}\tag{3.62}$$

Solusi dari sistem (3.62) adalah $r(t) = e^{-t}r_0$ dan $\theta(t) = t + \theta_0$ yang terdefinisi untuk $t \in \mathbb{R}$. Tampak bahwa $r(t) \rightarrow 0$ dan $\theta(t) \rightarrow +\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$. Karena $\theta(t) \rightarrow +\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$, maka orbit dengan nilai awal (r_0, θ_0) berputar berlawanan dengan arah jarum jam pada bidang- (x_1, x_2) . Sistem (3.62) memuat dua persamaan diferensial skalar yang tidak bertautan, sehingga dapat dianggap bahwa sistem (3.62) merupakan sistem hasil kali polar. Potret fase dari sistem (3.62) dapat dilihat pada Gambar 35. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 16).



Gambar 35. Potret fase dari sistem (3.62)

Contoh 3.9: Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2).\end{aligned}\quad (3.63)$$

Sistem (3.63) merupakan sistem bertautan. Sistem (3.63) dapat ditulis dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)) + x_2(-x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2))}{r} \\ &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(-x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)) - x_2(x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2))}{r^2} \\ &= -1.\end{aligned}$$

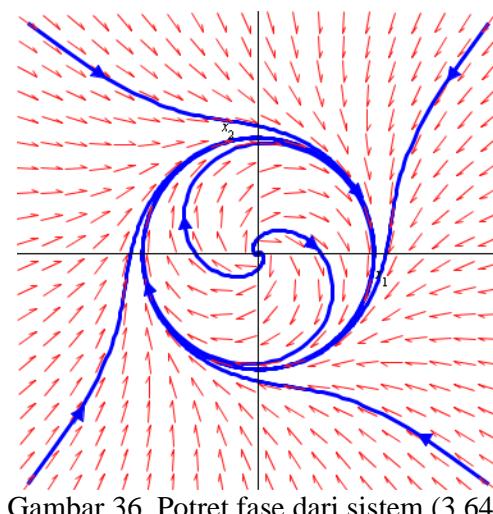
Jadi sistem (3.63) dalam koordinat polar adalah

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} &= -1.\end{aligned}\quad (3.64)$$

Sistem (3.64) memuat dua persamaan diferensial skalar yang tidak bertautan, sehingga dapat dianggap bahwa sistem (3.64) merupakan sistem hasil kali polar. Titik ekulilibrium pertama pada persamaan radial dari sistem (3.64) di $r = 0$, titik ekulilibrium lain di $r = 1$ yang berkorespondensi dengan orbit periodik dari sistem, orbit periodik ini merupakan *limit cycle*.

Solusi dari sistem (3.64) adalah $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{(r_0^2 + (1-r_0^2)e^{-2t})}}$ dan $\theta(t) = -t + \theta_0$ yang terdefinisi untuk $t \in \mathbb{R}$. Tampak bahwa $r(t) \rightarrow 1$ dan $\theta(t) \rightarrow -\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$. Ketika $r = 1$, orbit berputar melingkar dengan jari-jari 1, sehingga $r = 1$ merupakan *limit cycle*.

Pada persamaan (3.64), jika $0 < r < 1, \dot{r} > 0$, maka orbit pada daerah ini berputar keluar menuju *limit cycle* $r = 1$. Jika $r > 1, \dot{r} < 0$, orbit pada daerah ini berputar masuk menuju *limit cycle* $r = 1$. Karena $\theta(t) \rightarrow -\infty$ untuk $t \rightarrow +\infty$, maka orbit dengan nilai awal (r_0, θ_0) berputar searah dengan arah jarum jam pada bidang- (x_1, x_2) . Potret fase dari sistem (3.64) dapat dilihat pada Gambar 36. (Perintah Maple dapat dilihat pada Lampiran 17).



Gambar 36. Potret fase dari sistem (3.64)

Sistem tidak bertautan pada koordinat polar dapat dipandang sebagai sistem hasil kali polar. Pada umumnya, tidak semua sistem pada koordinat kartesius apabila ditulis dalam bentuk koordinat polar merupakan sistem tidak bertautan. Pada Contoh 3.10 dan Contoh 3.11 menunjukkan bahwa sistem bertautan pada koordinat kartesius yang ditulis dalam koordinat polar menghasilkan sistem bertautan.

Contoh 3.10: Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}\tag{3.65}$$

Sistem (3.65) merupakan sistem bertautan dan bukan merupakan sistem hasil kali kartesius. Sistem (3.65) dapat ditulis dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r} = \frac{x_1x_2 + x_2x_1}{r} = \frac{2x_1x_2}{r} = \frac{2(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r} = 2r\cos\theta \cdot \sin\theta \\ &= r\sin(2\theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1x_1 - x_2x_2}{r^2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{r^2} = \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2} \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta).\end{aligned}$$

Jadi sistem (3.65) pada koordinat polar sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r\sin(2\theta) \\ \dot{\theta} &= \cos(2\theta).\end{aligned}\tag{3.66}$$

Sistem (3.66) merupakan sistem bertautan, sehingga sistem (3.66) bukan merupakan sistem hasil kali polar.

Contoh 3.11: Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2.\end{aligned}\tag{3.67}$$

Sistem (3.67) merupakan sistem bertautan dan bukan merupakan sistem hasil kali kartesius. Sistem (3.67) dapat ditulis dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + x_2)}{r} = \frac{x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2}{r} \\ &= \frac{r^2\cos^2\theta + 4r\cos\theta.r\sin\theta + r^2\sin^2\theta}{r} \\ &= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta + 4\cos\theta.r\sin\theta) = r(1 + 4\cos\theta.r\sin\theta) \\ &= r(1 + 2\sin(2\theta)) \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(2x_1 + x_2) - x_2(x_1 + 2x_2)}{r^2} = \frac{2x_1^2 - 2x_2^2}{r^2} \\ &= \frac{2r^2\cos^2\theta - 2r^2\sin^2\theta}{r^2} = 2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos(2\theta).\end{aligned}$$

Jadi sistem (3.67) pada koordinat polar sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(1 + 2\sin(2\theta)) \\ \dot{\theta} &= 2\cos(2\theta).\end{aligned}\tag{3.68}$$

Sistem (3.68) merupakan sistem bertautan, sehingga sistem (3.68) bukan merupakan sistem hasil kali polar.

Pada Contoh 3.12 menunjukkan bahwa sistem hasil kali kartesius yang ditulis dalam koordinat polar menjadi sistem hasil kali polar, namun pada Contoh 3.13 tidak menjadi sistem hasil kali polar. Jadi suatu sistem yang merupakan

sistem hasil kali kartesius apabila ditulis dalam koordinat polar tidak selalu menjadi sistem hasil kali polar, begitu juga sebaliknya.

Contoh 3.12: Akan ditulis sistem (3.20) dalam koordinat polar, yakni

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}\tag{3.69}$$

Sistem (3.69) merupakan sistem hasil kali kartesius. Sistem (3.69) dapat ditulis dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(-x_1) + x_2(-x_2)}{r} = \frac{-(x_1^2 + x_2^2)}{r} = \frac{-r^2}{r} = -r \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(-x_2) - x_2(-x_1)}{r^2} = 0.\end{aligned}$$

Jadi sistem (3.69) pada koordinat polar sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -r \\ \dot{\theta} &= 0.\end{aligned}\tag{3.70}$$

Sistem (3.70) dapat dianggap sebagai sistem hasil kali polar.

Contoh 3.13: Diberikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}\tag{3.71}$$

Sistem (3.71) merupakan sistem hasil kali kartesius. Sistem (3.71) dapat ditulis dalam koordinat polar dengan menggunakan persamaan (2.34) untuk $r > 0$ yakni

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2}{r} = \frac{x_1(3x_1) + x_2(-x_2)}{r} = \frac{3x_1^2 - x_2^2}{r} = \frac{3r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta}{r} \\ &= 3r \cos^2 \theta - r \sin^2 \theta = r(3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} &= \frac{x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1}{r^2} = \frac{x_1(-x_2) - x_2(3x_1)}{r^2} = \frac{-x_1 x_2 - 3x_1 x_2}{r^2} = \frac{-4x_1 x_2}{r^2} \\ &= \frac{-4r \cos \theta r \sin \theta}{r^2} = -4 \cos \theta \sin \theta = -2 \sin(2\theta).\end{aligned}$$

Jadi sistem (3.71) pada koordinat polar sebagai berikut

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(3 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \dot{\theta} &= -2 \sin(2\theta).\end{aligned}\tag{3.72}$$

Sistem (3.72) merupakan sistem bertautan, sehingga bukan merupakan sistem hasil kali polar.

BAB IV

PENUTUP

A. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang dapat diambil beberapa kesimpulan, yakni:

1. Sistem hasil kali persamaan diferensial otonomus pada bidang merupakan gabungan dua persamaan diferensial skalar otonomus yang tidak bertautan.

Sistem hasil kali pada bidang dibagi menjadi dua jenis, yaitu sistem hasil kali kartesius dan sistem hasil kali polar. Sistem hasil kali kartesius adalah sistem pada koordinat kartesius yang persamaan penyusunnya tidak bertautan. Sistem hasil kali kartesius berbentuk

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Banyaknya titik ekuilibrium pada sistem hasil kali kartesius (4.1) bergantung pada banyaknya titik ekuilibrium pada persamaan penyusunnya. Jika persamaan penyusunnya berturut-turut mempunyai titik ekuilibrium sebanyak m dan n , maka banyaknya titik ekuilibrium pada sistem hasil kali (4.1) adalah $m \times n$, dengan $n, m \in \mathbb{N}$. Jika suatu sistem pada koordinat kartesius apabila ditulis pada koordinat polar menghasilkan sistem tidak bertautan, maka sistem tersebut dapat dianggap sebagai sistem hasil kali polar. Sistem hasil kali kartesius dan polar tidak mempunyai

hubungan, sebab sistem yang merupakan sistem hasil kali kartesius tidak menjamin menjadi sistem hasil kali polar, begitu juga sebaliknya.

2. Karakteristik dari sistem hasil kali pada bidang yakni:

- a. Sistem hasil kali selalu dapat dirubah ke bentuk persamaan diferensial yang dapat dipisah (*separable equation*). Pada persamaan (4.1) dapat ditulis menjadi bentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{f_2(x_2)}{f_1(x_1)}, \quad \text{dengan } f_1(x_1) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dx_2}{f_2(x_2)} &= \frac{dx_1}{f_1(x_1)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

atau

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_2} &= \frac{f_1(x_1)}{f_2(x_2)}, \quad \text{dengan } f_2(x_2) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{dx_1}{f_1(x_1)} &= \frac{dx_2}{f_2(x_2)} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Persamaan (4.2) dan (4.3) adalah persamaan yang dapat dipisah (*separable equation*). Solusi dari persamaan (4.2) dan (4.3) bergantung solusi masing-masing persamaan penyusun pada sistem hasil kali,

- b. Titik ekuilibrium dari sistem hasil kali merupakan pasangan terurut dari titik ekuilibrium masing-masing persamaan penyusunnya.
3. Kestabilan titik ekuilibrium sistem hasil kali kartesius terlihat dari potret fase persamaan penyusunnya. Kestabilan titik ekuilibrium pada sistem hasil kali kartesius dipengaruhi oleh kestabilan titik ekuilibrium persamaan penyusunnya. Misal titik (\bar{x}_1, \bar{x}_2) merupakan titik ekuilibrium sistem hasil

kali. Jika titik ekuilibrium \bar{x}_1 dan \bar{x}_2 pada persamaan penyusunnya stabil asimtotik, maka titik ekuilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) pada sistem hasil kali stabil asimtotik. Jika terdapat titik ekuilibrium persamaan penyusunnya tak stabil misal \bar{x}_1 , maka titik ekuilibrium (\bar{x}_1, \bar{x}_2) pada sistem hasil kali tak stabil.

B. Saran

Pada penulisan skripsi ini membahas karakteristik dan kestabilan titik ekuilibrium pada sistem hasil kali pada bidang. Kestabilan titik ekuilibrium sistem hasil kali dari potret fase dan secara analisis pada titik ekuilibrium hiperbolik. Pembaca yang tertarik dapat mengembangkan analisis kestabilan untuk kasus titik ekuilibrium tak hiperbolik. Selain hal tersebut juga dapat membahas tentang bifurkasi pada sistem hasil kali. Pada penulisan skripsi ini terdapat teorema dan lemma yang belum dapat dibuktikan, untuk analisis berikutnya pembaca dapat mencari pembuktian teorema dan lemma tersebut.

Daftar Pustaka

- Anton, Howard. (1998). *Aljabar Linier Elementer*. (Alih bahasa: Pantur Silaban). Jakarta: Erlangga.
- Bainov, D., and Simeonov, P. (1992). *Integral Inequalities and Applications*. Belanda: Kluwer Academic Publishers.
- Blanchard, P., Devaney, R.L., Hall, G.R. (2006). *Differential Equations*. 3rd. ed. Belmont: Thomson Brooks/Cole.
- Boyce, W.E. and DiPrima, R.C. (2012). *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. 9th. ed. Amerika: John Wiley & Sons, Inc.
- Campbell, S.L., Haberman, R. (2008). *Introduction to Differential Equations with Dynamical Systems*. New Jersey: Princeton University Press.
- Cici Setyowati. (2004). Kestabilan dari Titik Kritis pada Sistem Otonomus Persamaan Diferensial Tak Linier. *Skripsi*. Universitas Negeri Yogyakarta.
- Hale, J.K., and Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations*. New York: Springer-Verlag.
- Hirsch, M.W., and Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. San Diego: Academic Press.
- Nagle, R.K., Saff, E.B., Snider, A.D. (2012). *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. 6th. ed. Amerika: Addison-Wesley.
- Nur Faida. (2005). Potret Fase Sistem Linier. *Skripsi*. Universitas Negeri Yogyakarta.
- Perko, Lawrence. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd. ed. New York: Springer-Verlag.
- Verhulst, Ferdinand. (1939). *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin: Springer-Verlag.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Teorema, definisi, dan lemma yang mendukung kajian pustaka

a. **Lemma 5.1** (Hale & Kocak, 1991: 223)

Jika dua matriks \mathbf{A} dan \mathbf{B} komutatif, yakni $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, maka $e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{At}}e^{\mathbf{Bt}}$.

Bukti:

Jika $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, maka dengan teorema binomial

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{\mathbf{A}^j \mathbf{B}^k}{j! k!}.$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{\mathbf{A}^j \mathbf{B}^k t^{j+k}}{j! k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{\mathbf{A}^j t^j \mathbf{B}^k t^k}{j! k!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^j t^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}^k t^k}{k!} = e^{\mathbf{At}} e^{\mathbf{Bt}}. \blacksquare \end{aligned}$$

b. **Lemma 5.2** (Perko, 2001: 17)

Misal \mathbf{A} merupakan matriks kuadrat, maka

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{At}} = \mathbf{A} e^{\mathbf{At}}.$$

Bukti:

Karena \mathbf{A} komutatif dengan dirinya, maka menurut lemma 5.1 dan definisi

2.10:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{\mathbf{At}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\mathbf{A}(t+h)} - e^{\mathbf{At}}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} e^{\mathbf{At}} \frac{(e^{\mathbf{Ah}} - \mathbf{I})}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\mathbf{A}t} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2 h}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k h^{k-1}}{k!} \right) \\
&= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}. \blacksquare
\end{aligned}$$

c. **Teorema 5.1:** Teorema Fundamental sistem linier (Perko, 2001: 17)

Misal \mathbf{A} merupakan matriks $n \times n$, maka untuk $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, masalah nilai awal

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} \\
\mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}^0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

mempunyai solusi tunggal

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0.$$

Bukti:

Jika $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0$, maka menurut lemma 5.2

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0 = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0 = \mathbf{A}\mathbf{x}(t),$$

untuk semua $t \in \mathbb{R}$ dan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{I}\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^0$. Jadi $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}^0$ adalah solusi. Akan diselidiki bahwa $\mathbf{x}(t)$ merupakan solusi tunggal dari (5.1). Misal $\mathbf{x}(t)$ merupakan sebarang solusi dari masalah nilai awal (5.1) dan misal

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t).$$

Menurut lemma 5.2 dan fakta bahwa $\mathbf{x}(t)$ adalah solusi (5.1),

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}'(t) &= -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) + e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}'(t) \\
&= -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t) + e^{-\mathbf{A}t} \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

untuk semua $t \in \mathbb{R}$ sebab $e^{-\mathbf{A}t}$ dan \mathbf{A} komutatif.

Jadi $\mathbf{y}(t)$ merupakan konstanta. Misal $t = 0$ menunjukkan bahwa $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^0$ dan sebarang solusi dari masalah nilai awal (1) adalah $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}^0$. ■

d. **Teorema 5.2:** (Hale & Kocak, 1991: 231)

Misal \mathbf{A} merupakan matriks 2×2 yang entrinya bilangan real, maka terdapat matriks *invertible* \mathbf{P} berukuran 2×2 sedemikian hingga

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J}$$

dimana \mathbf{J} adalah salah satu dari tiga matriks dalam bentuk normal Jordan:

$$(i) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

dengan $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \alpha$, dan $\beta \neq 0$ adalah bilangan real.

Bukti:

(i) *Nilai eigen real berbeda:*

Misal \mathbf{A} mempunyai dua nilai eigen real λ_1 dan λ_2 yang berkorespondensi dengan vektor eigen \mathbf{v}^1 dan \mathbf{v}^2 , yakni

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^i = \lambda_i \mathbf{v}^i \text{ untuk } i = 1, 2. \quad (5.2)$$

Matriks transformasi \mathbf{P} dengan kolomnya berisi dua vektor eigen \mathbf{v}^1 dan \mathbf{v}^2 yakni:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}^1 | \mathbf{v}^2),$$

sehingga

$$\mathbf{AP} = (\mathbf{Av}^1 | \mathbf{Av}^2) = (\lambda_1 \mathbf{v}^1 | \lambda_2 \mathbf{v}^2) = \mathbf{PJ}, \quad (5.3)$$

dimana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Karena \mathbf{P} invertible, jika kedua ruas pada persamaan (5.3) dikalikan dengan \mathbf{P}^{-1} , maka diperoleh

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Nilai eigen kembar:*

Terdapat dua kasus pada nilai eigen kembar. Pertama, misalkan bahwa λ merupakan nilai eigen kembar yang berkorespondensi dengan vektor eigen \mathbf{v}^1 dan \mathbf{v}^2 bebas linear. Matriks transformasi $\mathbf{P} = (\mathbf{v}^1 | \mathbf{v}^2)$ menghasilkan kemiripan dengan kasus nilai eigen berbeda, yakni

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Kedua, misalkan bahwa λ merupakan nilai eigen kembar namun hanya mempunyai satu vektor eigen bebas. Misal \mathbf{v}^1 merupakan vektor eigen, maka vektor eigen kedua \mathbf{v}^2 yang bebas linear dengan \mathbf{v}^1 memenuhi persamaan

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1. \quad (5.4)$$

Jika diambil matriks transformasi \mathbf{P} dengan $\mathbf{P} = (\mathbf{v}^1 | \mathbf{v}^2)$, maka

$$\mathbf{AP} = (\mathbf{Av}^1 | \mathbf{Av}^2) = (\lambda\mathbf{v}^1 | \mathbf{v}^1 + \lambda\mathbf{v}^2) = \mathbf{PJ}, \quad (5.5)$$

dimana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Karena \mathbf{P} invertible, jika kedua ruas pada persamaan (5.5) dikalikan dengan \mathbf{P}^{-1} , maka diperoleh

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(iii) *Nilai eigen kompleks:*

Misal $\lambda = \alpha + i\beta$, dengan $\beta \neq 0$ merupakan nilai eigen kompleks dari \mathbf{A} yang berkorespondensi vektor eigen kompleks $\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2$, yakni

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{v}^1 + i\mathbf{v}^2), \quad (5.6)$$

dimana \mathbf{v}^1 dan \mathbf{v}^2 merupakan vektor real taknol.

Matriks transformasi \mathbf{P} merupakan matriks yang kolomnya berisi bagian real dan imaginer dari vektor eigen kompleks:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{v}^1 | \mathbf{v}^2).$$

Persamaan kompleks (5.6) dapat dituliskan

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^1 + i\mathbf{A}\mathbf{v}^2 = \alpha\mathbf{v}^1 - \beta\mathbf{v}^2 + i(\beta\mathbf{v}^1 + \alpha\mathbf{v}^2). \quad (5.7)$$

Pada persamaan (5.7) diperoleh sepasang persamaan real, yakni

$$\mathbf{A}\mathbf{v}^1 = \alpha\mathbf{v}^1 - \beta\mathbf{v}^2, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}^2 = -\beta\mathbf{v}^1 + \alpha\mathbf{v}^2$$

sehingga

$$\mathbf{AP} = (\mathbf{A}\mathbf{v}^1 | \mathbf{A}\mathbf{v}^2) = (\alpha\mathbf{v}^1 - \beta\mathbf{v}^2 | -\beta\mathbf{v}^1 + \alpha\mathbf{v}^2) = \mathbf{PJ}, \quad (5.8)$$

dimana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Karena \mathbf{P} invertible, jika kedua ruas pada persamaan (5.8) dikalikan dengan \mathbf{P}^{-1} , maka diperoleh

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

e. **Rumus eksplisit sistem linear tak homogen**

Diberikan persamaan diferensial tak otonomus

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (5.9)$$

dengan $\mathbf{g}(t)$ merupakan vektor fungsi C^1 .

Persamaan (5.9) disebut sistem linier tak homogen. Dimisalkan variabel baru $\mathbf{y}(t)$ dengan

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t). \quad (5.10)$$

Turunan persamaan (5.10) terhadap t yakni

$$\dot{\mathbf{y}} = -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x} + e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}. \quad (5.11)$$

Substitusi persamaan (5.9) ke (5.11), diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x} + e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)) \\ \Leftrightarrow \dot{\mathbf{y}} &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{g}(t). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Misal $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ merupakan nilai awal persamaan (5.9), maka nilai awal untuk persamaan (5.12) adalah $\mathbf{y}(t_0) = e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}^0$.

Solusi $\mathbf{y}(t)$ dengan nilai awal $\mathbf{y}(t_0) = e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}^0$ dapat dicari dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (5.12) dari t_0 ke t , yakni

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t d\mathbf{y} &= \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)ds \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)ds \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}(t) &= \mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)ds \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}(t) &= e^{-\mathbf{A}t_0}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{g}(s)ds. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Substitusi persamaan (5.10) ke (5.13), diperoleh

$$\begin{aligned}
 e^{-At}\mathbf{x}(t) &= e^{-At_0}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{-As}\mathbf{g}(s)ds \\
 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &= e^{At} \left[e^{-At_0}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{-As}\mathbf{g}(s)ds \right] \\
 \Leftrightarrow \mathbf{x}(t) &= e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{g}(s)ds. \tag{5.14}
 \end{aligned}$$

Persamaan (5.14) merupakan rumus eksplisit sistem linier tak homogen (5.9).

f. **Deret Taylor:** (Campbell, 2008: 318)

Polinomial Taylor fungsi $f(x)$ di sekitar titik $x = a$ yakni

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots \tag{5.15}$$

Bagian linear $f(a) + f'(a)(x - a)$ disebut linearisasi dari fungsi $f(x)$ didekat titik ekuilibrium $x = a$.

g. **Teorema 5.3:** Pertidaksamaan Gronwall (Bainov & Simeonov, 1992: 1)

Misal $f(t)$ dan $g(t)$ adalah fungsi kontinu tak negatif untuk $t \geq a$, dan misal

$$f(t) \leq K + \int_a^t f(s)g(s)ds, \quad t \geq a, \tag{5.16}$$

dengan $K \geq 0$ adalah konstanta, maka

$$f(t) \leq K e^{\int_a^t g(s)ds}, \quad t \geq a. \tag{5.17}$$

Bukti:

Misal $K > 0$, maka (5.16) dapat ditulis menjadi pertidaksamaan

$$\begin{aligned}
 f(r) &\leq K + \int_a^r f(s)g(s)ds, \quad r \geq a \\
 \Leftrightarrow \frac{f(r)}{K + \int_a^r f(s)g(s)ds} &\leq 1, \quad r \geq a \\
 \Leftrightarrow \frac{f(r)g(r)}{K + \int_a^r f(s)g(s)ds} &\leq g(r), \quad r \geq a. \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

Integralkan pertidaksamaan (5.18) dari a ke t diperoleh

$$\begin{aligned}
 &\int_a^t \frac{f(r)g(r)}{K + \int_a^r f(s)g(s)ds} ds \leq \int_a^t g(s)ds \\
 \Leftrightarrow \ln\left(K + \int_a^t f(s)g(s)ds\right) - \ln\left(K + \int_a^a f(s)g(s)ds\right) &\leq \int_a^t g(s)ds \\
 \Leftrightarrow \ln\left(K + \int_a^t f(s)g(s)ds\right) - \ln(K) &\leq \int_a^t g(s)ds \\
 \Leftrightarrow \ln\left(K + \int_a^t f(s)g(s)ds\right) &\leq \ln(K) + \int_a^t g(s)ds \\
 \Leftrightarrow K + \int_a^t f(s)g(s)ds &\leq K e^{\int_a^t g(s)ds} \\
 \Leftrightarrow f(t) &\leq K e^{\int_a^t g(s)ds}, \quad t \geq a. \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Misal $K = 0$, maka

$$f(t) < \epsilon + \int_a^t f(s)g(s)ds \text{ untuk } \forall \epsilon > 0.$$

Sehingga

$$f(t) \leq \epsilon e^{\int_a^t g(s)ds},$$

misal $\epsilon \rightarrow 0$, maka $f(t) \leq 0$. ■

Lampiran 2. Perintah Maple untuk menggambarkan medan arah dan trayektori persamaan diferensial (2.6)

> `restart : with(plots) : with(DEtools) :`

Menentukan medan arah persamaan (2.6)

> `dfp1 := dfieldplot($\frac{dx}{dt} = -x(t)$, $x(t)$, $t = -3 .. 3$, $x = -3 .. 3$, arrows = line) :`

Menentukan trayektori persamaan (2.6) pada nilai awal tertentu

> `awalla := dsolve($\{x(0) = 1, \frac{dx}{dt} = -x(t)\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awallb := dsolve($\{x(0) = -1, \frac{dx}{dt} = -x(t)\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awallc := dsolve($\{x(0) = 0.5, \frac{dx}{dt} = -x(t)\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awalld := dsolve($\{x(0) = -0.5, \frac{dx}{dt} = -x(t)\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awalle := dsolve($\{x(0) = 0, \frac{dx}{dt} = -x(t)\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

Menggambarkan trayektori persamaan (2.6) pada nilai awal tertentu

> `gbrawalla := odeplot(awalla, [t, x(t)], -1.2 .. 3.1, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawallb := odeplot(awallb, [t, x(t)], -1.2 .. 3.1, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawallc := odeplot(awallc, [t, x(t)], -2 .. 3.1, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawalld := odeplot(awalld, [t, x(t)], -2 .. 3.1, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawalle := odeplot(awalle, [t, x(t)], -3 .. 3.1, color = blue, thickness = 3) :`

Gambar medan arah dengan beberapa trayektori

> `display(gbrawalla, gbrawallb, gbrawallc, gbrawalld, gbrawalle, dfp1);`

Lampiran 3. Perintah Maple untuk menggambarkan medan arah dan trayektori persamaan diferensial (2.7)

> `restart : with(plots) : with(DEtools) :`

Menentukan medan arah persamaan (2.7)

> `dfp2 := dfieldplot($\frac{dx}{dt} = x(t)^2$, $x(t)$, $t = -3 .. 3$, $x = -3 .. 3$, arrows = line) :`

Menentukan trayektori persamaan (2.7) pada nilai awal tertentu

> `awal2a := dsolve($\{x(0) = 1.5, \frac{dx}{dt} = x(t)^2\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awal2b := dsolve($\{x(0) = 0, \frac{dx}{dt} = x(t)^2\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awal2c := dsolve($\{x(0) = -1.5, \frac{dx}{dt} = x(t)^2\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awal2d := dsolve($\{x(0) = -0.5, \frac{dx}{dt} = x(t)^2\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

> `awal2e := dsolve($\{x(0) = 0.5, \frac{dx}{dt} = x(t)^2\}$, $x(t)$, type = numeric, method = classical) :`

Menggambarkan trayektori persamaan (2.7) pada nilai awal tertentu

> `gbrawal2a := odeplot(awal2a, [t, x(t)], -3 .. 2, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal2b := odeplot(awal2b, [t, x(t)], -3 .. 3, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal2c := odeplot(awal2c, [t, x(t)], -0.9 .. 3, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal2d := odeplot(awal2d, [t, x(t)], -2 .. 3.1, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal2e := odeplot(awal2e, [t, x(t)], -3 .. 2, color = blue, thickness = 3) :`

Gambar medan arah dengan beberapa trayektori

> `display(gbrawal2a, gbrawal2b, gbrawal2c, gbrawal2d, gbrawal2e, dfp2);`

Lampiran 4. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.15)

> `with(plots) : with(DEtools) : with(Student[VectorCalculus]) :`

Menggambarkan trayektori sistem (2.15) pada nilai awal tertentu

>
$$DEplot3d\left(\left\{\frac{d}{dt}x1(t) = x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = 0..15, [[x1(0) = 1, x2(0) = 2]], x1 = -2.5..2.5, x2 = -2.5..2.5, scene = [t, x1(t), x2(t)], labels = [t, x_1, x_2], axes = normal, tickmarks = [0, 0, 0], orientation = [49, 78, 0], linecolor = blue\right)$$

Menggambarkan medan vektor sistem (2.15)

>
$$VectorField(\langle x2, -x1 \rangle, output = plot, view = [-3..3, -3..3], fieldoptions = [grid = [6, 6]], cartesian', x1, x2, labels = [x_1, x_2])$$

Menentukan medan arah sistem (2.15)

>
$$dfp3 := dfieldplot\left(\left\{\frac{d}{dt}x1(t) = x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, x2(t), t = 0..6, x1 = -2.5..2.5, x2 = -2.5..2.5, arrows = small\right) :$$

Menentukan orbit sistem (2.15) pada nilai awal tertentu

>
$$awal3a := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 2, \frac{d}{dt}x1(t) = x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric\right) :$$

>
$$awal3b := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 1.5, \frac{d}{dt}x1(t) = x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric\right) :$$

>
$$awal3c := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 1, \frac{d}{dt}x1(t) = x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric\right) :$$

>
$$awal3d := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 0.5, \frac{d}{dt}x1(t) = x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = -x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric\right) :$$

Menggambarkan orbit sistem (2.15) pada nilai awal tertentu

>
$$gbrawal3a := odeplot(awal3a, [[x1(t), x2(t)]], 0..10, color = blue, thickness = 3) :$$

>
$$gbrawal3b := odeplot(awal3b, [[x1(t), x2(t)]], 0..10, color = blue, thickness = 3) :$$

- > $gbrawal3c := \text{odeplot}(awal3c, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal3d := \text{odeplot}(awal3d, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$

Gambar medan vektor sistem (2.15)

- > $\text{display}(dfp3, \text{labels} = [x_1, x_2])$

Gambar orbit sistem (2.15) yang melalui titik (1,2)

- > $\text{display}(gbrawal3a, dfp3, \text{tickmarks} = [0, 0], \text{labels} = [x_1, x_2])$

Gambar potret fase sistem (2.15)

- > $\text{display}(gbrawal3a, gbrawal3b, gbrawal3c, gbrawal3d, dfp3, \text{tickmarks} = [0, 0], \text{labels} = [x_1, x_2])$

Lampiran 5. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.16)

> `with(plots) : with(DEtools) : with(Student[VectorCalculus]) :`

Menggambarkan trayektori sistem (2.16) pada nilai awal tertentu

>
$$DEplot3d\left(\left\{\frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = 0 \dots 2, [[x1(0) = 1, x2(0) = 1]], x1 = -10 \dots 10, x2 = -10 \dots 10, scene = [t, x1(t), x2(t)], labels = [t, x_1, x_2], axes = normal, tickmarks = [0, 0, 0], orientation = [75, 75, 5], linecolor = blue\right)$$

Menggambarkan medan vektor sistem (2.16)

>
$$VectorField(\langle x1, x2 \rangle, output = plot, view = [-4..4, -4..4], fieldoptions = [grid = [8, 8]], cartesian[x1, x2], labels = [x_1, x_2])$$

Menentukan medan arah sistem (2.16)

>
$$dfp4 := dfieldplot\left(\left\{\frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = -1 \dots 1, x1 = -1 \dots 1, x2 = -1 \dots 1, arrows = small\right) :$$

Menentukan orbit sistem (2.16) pada nilai awal tertentu

>
$$awal4a := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 1, \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric, method = classical\right) :$$

>
$$awal4b := dsolve\left(\left\{x1(0) = -1, x2(0) = 1, \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric, method = classical\right) :$$

>
$$awal4c := dsolve\left(\left\{x1(0) = -1, x2(0) = -1, \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric, method = classical\right) :$$

>
$$awal4d := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = -1, \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric, method = classical\right) :$$

>
$$awal4e := dsolve\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 0, \frac{d}{dt}x1(t) = x1(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric, method = classical\right) :$$

```

> awal4f := dsolve( {x1(0) = -1, x2(0) = 0, (d/dt)x1(t) = x1(t), (d/dt)x2(t) = x2(t)}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical ) :
> awal4g := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = 1, (d/dt)x1(t) = x1(t), (d/dt)x2(t) = x2(t)}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical ) :
> awal4h := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = -1, (d/dt)x1(t) = x1(t), (d/dt)x2(t) = x2(t)}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical ) :

```

Menggambarkan orbit sistem (2.16) pada nilai awal tertentu

```

> grawal4a := odeplot(awal4a, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4b := odeplot(awal4b, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4c := odeplot(awal4c, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4d := odeplot(awal4d, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4e := odeplot(awal4e, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4f := odeplot(awal4f, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4g := odeplot(awal4g, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawal4h := odeplot(awal4h, [[x1(t), x2(t)]], -4 .. 0, color = blue, thickness = 3) :

```

Gambar orbit sistem (2.16) yang melalui titik (1,1)

```
> display(grawal4a, dfp4, tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])
```

Gambar potret fase sistem (2.16)

```

> display(grawal4a, grawal4b, grawal4c, grawal4d, grawal4e, grawal4f, grawal4g, grawal4h, dfp4, tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])

```

Lampiran 6. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.36)

```

> with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dx1a := x1(t) - x2(t) - x1(t)·(3·sqrt(x1(t)^2 + x2(t)^2) - x1(t)^2
- x2(t)^2 - 1);
> dx2a := x1(t) + x2(t) - x2(t)·(3·sqrt(x1(t)^2 + x2(t)^2) - x1(t)^2
- x2(t)^2 - 1);

```

Sistem persamaan diferensial (2.36)

```
> sistem5 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = dx1a, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2a :$ 
```

Menentukan medan arah sistem (2.36)

```
> dfp5 := dfieldplot({sistem5}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5,
x2 = -2.5 .. 2.5, arrows = small) :
```

Menentukan orbit sistem (2.36) pada nilai awal tertentu

```

> awal5a := dsolve({x1(0) = 0.5, x2(0) = 0.5, sistem5}, {x1(t), x2(t)},
type = numeric, method = classical) :
> awal5b := dsolve({x1(0) = 1.3, x2(0) = 1.3, sistem5}, {x1(t), x2(t)},
type = numeric, method = classical) :
> awal5c := dsolve({x1(0) = 2.5, x2(0) = 2.5, sistem5}, {x1(t), x2(t)},
type = numeric, method = classical) :
> awal5d := dsolve({x1(0) = -2.5, x2(0) = -2.5, sistem5}, {x1(t),
x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal5e := dsolve({x1(0) = 2.5, x2(0) = -2.5, sistem5}, {x1(t),
x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal5f := dsolve({x1(0) = -2.5, x2(0) = 2.5, sistem5}, {x1(t), x2(t)},
type = numeric, method = classical) :

```

Menggambarkan orbit sistem (2.36) pada nilai awal tertentu

```

> gbrawal5a := odeplot(awal5a, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 10, color = blue,
thickness = 3) :
> gbrawal5b := odeplot(awal5b, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 10, color = blue,
thickness = 3) :
> gbrawal5c := odeplot(awal5c, [[x1(t), x2(t)]], -3 .. 0, color = blue,
thickness = 3) :
> gbrawal5d := odeplot(awal5d, [[x1(t), x2(t)]], -3 .. 0, color = blue,
thickness = 3) :
> gbrawal5e := odeplot(awal5e, [[x1(t), x2(t)]], -3 .. 0, color = blue,
thickness = 3) :
> gbrawal5f := odeplot(awal5f, [[x1(t), x2(t)]], -3 .. 0, color = blue,
thickness = 3) :

```

Gambar potret fase sistem (2.36)

>
$$\text{display}(\text{gbrawal5a}, \text{gbrawal5b}, \text{gbrawal5c}, \text{gbrawal5d}, \text{gbrawal5e}, \text{gbrawal5f}, \text{dfp5}, \text{tickmarks} = [0, 0], \text{labels} = [x_1, x_2])$$

Lampiran 7. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.51) dan sistem linierisasinya

```
> with(DEtools): with(plots): with(linalg):
> dx1b := x2 - (x1^2 + x2^2)·x1; dx2b := -x1 - (x1^2 + x2^2)·x2;
> sist6 := matrix([ [ subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1b)) ], [ subs(x1
= x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2b)) ] ]);
```

Sistem persamaan diferensial (2.51)

```
> sistem6 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist6[1, 1], \frac{d}{dt}x2(t) = sist6[2, 1];$ 
```

Titik ekuilibrium sistem (2.51)

```
> ekui6 := solve( {dx1b = 0, dx2b = 0}, [x1, x2]);
```

a) Menentukan potret fase sistem (2.51) melalui sistem linierisasinya

Matriks Jacobian sistem (2.51)

```
> J6 := jacobian([dx1b, dx2b], [x1, x2]);
```

Matriks Jacobian sistem (2.51) pada titik (0,0)

```
> A6 := subs(ekui6[1], evalm(J6));
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (2.51) pada titik (0,0)

```
> eigenA6 := eigenvals(A6);
```

Sistem linierisasi dari sistem (2.51) di titik (0,0)

```
> dx1lin := evalm(A6 &· matrix([[x1(t)], [x2(t)]])) [1, 1];
dx2lin := evalm(A6 &· matrix([[x1(t)], [x2(t)]])) [2, 1];
```

Menentukan medan arah sistem linierisasi

```
> dfp6lin := dfieldplot(  $\left\{ \frac{d}{dt}x1(t) = dx1lin, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2lin \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5, x2 = -2.5 .. 2.5 \right);$ 
```

Menentukan orbit sistem linierisasi pada nilai awal tertentu

```
> awal6lina := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 2, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1lin, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2lin \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

```
> awal6linb := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 1.5, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1lin, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2lin \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

```
> awal6linc := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 1, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1lin, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2lin \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

```
> awal6lind := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 0.5, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1lin, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2lin \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

Menggambarkan orbit sistem linierisasi pada nilai awal tertentu

```
> grawal6lina := odeplot(awal6lina, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :  
> grawal6linb := odeplot(awal6linb, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :  
> grawal6linc := odeplot(awal6linc, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :  
> grawal6lind := odeplot(awal6lind, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :
```

Gambar potret fase sistem linierisasi

```
> display(grawal6lina, grawal6linb, grawal6linc, grawal6lind,  
dfp6lin, tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])
```

b) Menentukan potret fase sistem (2.51) melalui sistem aslinya

Menentukan medan arah sistem (2.51)

```
> dfp6 := dfieldplot({sistem6}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -1 .. 1, x2 =  
-1 .. 1) :
```

Menentukan orbit sistem (2.51) pada nilai awal tertentu

```
> awal6a := dsolve({x1(0) = 1, x2(0) = 1, sistem6}, {x1(t), x2(t)}, type  
= numeric) :  
> awal6b := dsolve({x1(0) = 1, x2(0) = -1, sistem6}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric) :  
> awal6c := dsolve({x1(0) = -1, x2(0) = 1, sistem6}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric) :  
> awal6d := dsolve({x1(0) = -1, x2(0) = -1, sistem6}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric) :
```

Menggambarkan orbit sistem (2.51) pada nilai awal tertentu

```
> grawal6a := odeplot(awal6a, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 20, color = blue,  
thickness = 3) :  
> grawal6b := odeplot(awal6b, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 20, color = blue,  
thickness = 3) :  
> grawal6c := odeplot(awal6c, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 20, color = blue,  
thickness = 3) :  
> grawal6d := odeplot(awal6d, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 20, color = blue,  
thickness = 3) :
```

Gambar potret fase sistem (2.51)

```
> display(grawal6a, grawal6b, grawal6c, grawal6d, dfp6, tickmarks  
= [0, 0], labels = [x1, x2])
```

Lampiran 8. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem persamaan diferensial (2.54) dan sistem linierisasinya

```
> with(DEtools): with(plots): with(linalg):
> dx1c := -x2 + (x1^2 + x2^2)·x1; dx2c := x1 + (x1^2 + x2^2)·x2;
sist7 := matrix([ [ subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1c)) ], [ subs(x1
= x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2c)) ] ]);
```

Sistem persamaan diferensial (2.54)

```
> sistem7 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist7[1, 1], \frac{d}{dt}x2(t) = sist7[2, 1];$ 
```

Titik ekuilibrium sistem (2.54)

```
> ekui7 := solve( {dx1c = 0, dx2c = 0}, [x1, x2]);
```

a) Menentukan potret fase sistem (2.54) melalui sistem linierisasinya

Matriks Jacobian sistem (2.54)

```
> J7 := jacobian([dx1c, dx2c], [x1, x2]);
```

Matriks Jacobian sistem (2.54) pada titik (0,0)

```
> A7 := subs(ekui7[1], evalm(J7));
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (2.54) pada titik (0,0)

```
> eigenA7 := eigenvals(A7);
```

Sistem linierisasi dari sistem (2.54) di titik (0,0)

```
> dx1linb := evalm(A7 &· matrix([ [x1(t)], [x2(t)] ]))[1, 1];
dx2linb := evalm(A7 &· matrix([ [x1(t)], [x2(t)] ]))[2, 1];
```

Menentukan medan arah sistem linierisasi

```
> dfp7lin := dfieldplot(  $\left\{ \frac{d}{dt}x1(t) = dx1linb, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2linb \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5, x2 = -2.5 .. 2.5 \right);$ 
```

Menentukan orbit sistem linierisasi pada nilai awal tertentu

```
> awal7lina := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 2, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1linb, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2linb \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

```
> awal7linb := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 1.5, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1linb, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2linb \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

```
> awal7linc := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 1, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1linb, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2linb \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

```
> awal7lind := dsolve(  $\left\{ x1(0) = 1, x2(0) = 0.5, \frac{d}{dt}x1(t) = dx1linb, \frac{d}{dt}x2(t) = dx2linb \right\}, \{x1(t), x2(t)\}, type = numeric \right);$ 
```

Menggambarkan orbit sistem linierisasi pada nilai awal tertentu

```
> grawal7lina := odeplot(awal7lina, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :  
> grawal7linb := odeplot(awal7linb, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :  
> grawal7linc := odeplot(awal7linc, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :  
> grawal7lind := odeplot(awal7lind, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 10, color  
= blue, thickness = 3) :
```

Gambar potret fase sistem linierisasi

```
> display(grawal7lina, grawal7linb, grawal7linc, grawal7lind,  
dfp7lin, tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])
```

b) Menentukan potret fase sistem (2.54) melalui sistem aslinya

Menentukan medan arah sistem (2.54)

```
> dfp7 := dfieldplot({sistem7}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -1 .. 1, x2 =  
-1 .. 1) :
```

Menentukan orbit sistem (2.54) pada nilai awal tertentu

```
> awal7a := dsolve({x1(0) = 1, x2(0) = 1, sistem7}, {x1(t), x2(t)}, type  
= numeric) :  
> awal7b := dsolve({x1(0) = 1, x2(0) = -1, sistem7}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric) :  
> awal7c := dsolve({x1(0) = -1, x2(0) = 1, sistem7}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric) :  
> awal7d := dsolve({x1(0) = -1, x2(0) = -1, sistem7}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric) :
```

Menggambarkan orbit sistem (2.54) pada nilai awal tertentu

```
> grawal7a := odeplot(awal7a, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 0, color = blue,  
thickness = 3) :  
> grawal7b := odeplot(awal7b, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 0, color = blue,  
thickness = 3) :  
> grawal7c := odeplot(awal7c, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 0, color = blue,  
thickness = 3) :  
> grawal7d := odeplot(awal7d, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 0, color = blue,  
thickness = 3) :
```

Gambar potret fase sistem (2.54)

```
> display(grawal7a, grawal7b, grawal7c, grawal7d, dfp7, tickmarks  
= [0, 0], labels = [x1, x2])
```

Lampiran 9. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.5)

> `with(DEtools): with(plots):`

Menentukan medan arah sistem hasil kali (3.5)

> `dfp8 := dfieldplot({ (d/dt)x1(t) = 1, (d/dt)x2(t) = -1 }, {x1(t),x2(t)}, t = -3..3, x1 = -2.5..2.5, x2 = -2.5..2.5, arrows = small) :`

Menentukan orbit sistem hasil kali (3.5) pada nilai awal tertentu

> `awal8a := dsolve({x1(0) = 2, x2(0) = 2, (d/dt)x1(t) = 1, (d/dt)x2(t) = -1}, {x1(t),x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal8b := dsolve({x1(0) = 1, x2(0) = 1, (d/dt)x1(t) = 1, (d/dt)x2(t) = -1}, {x1(t),x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal8c := dsolve({x1(0) = 0, x2(0) = 0, (d/dt)x1(t) = 1, (d/dt)x2(t) = -1}, {x1(t),x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal8d := dsolve({x1(0) = -1, x2(0) = -1, (d/dt)x1(t) = 1, (d/dt)x2(t) = -1}, {x1(t),x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal8e := dsolve({x1(0) = -2, x2(0) = -2, (d/dt)x1(t) = 1, (d/dt)x2(t) = -1}, {x1(t),x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

Menggambarkan orbit sistem hasil kali (3.5) pada nilai awal tertentu

> `gbrawal8a := odeplot(awal8a, [[x1(t),x2(t)]], -0.6..0.6, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal8b := odeplot(awal8b, [[x1(t),x2(t)]], -1.6..1.6, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal8c := odeplot(awal8c, [[x1(t),x2(t)]], -2.6..2.6, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal8d := odeplot(awal8d, [[x1(t),x2(t)]], -1.6..1.6, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal8e := odeplot(awal8e, [[x1(t),x2(t)]], -0.6..0.6, color = blue, thickness = 3) :`

Gambar potret fase sistem hasil kali (3.5)

> `display(gbrawal8a, gbrawal8b, gbrawal8c, gbrawal8d, gbrawal8e, dfp8, tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])`

Lampiran 10. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.12)

> `with(DEtools) : with(plots) :`

Menentukan medan arah sistem hasil kali (3.12)

> `dfp9 := dfieldplot({ (d/dt)x1(t) = -x1(t), (d/dt)x2(t) = -2 }, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5, x2 = -2.5 .. 2.5, arrows = small) :`

Menentukan orbit sistem hasil kali (3.12) pada nilai awal tertentu

> `awal9a := dsolve({x1(0) = 2, x2(0) = 2, (d/dt)x1(t) = -x1(t), (d/dt)x2(t) = -2}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal9b := dsolve({x1(0) = 1, x2(0) = -1, (d/dt)x1(t) = -x1(t), (d/dt)x2(t) = -2}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal9c := dsolve({x1(0) = 0, x2(0) = 0, (d/dt)x1(t) = -x1(t), (d/dt)x2(t) = -2}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal9d := dsolve({x1(0) = -1, x2(0) = -1, (d/dt)x1(t) = -x1(t), (d/dt)x2(t) = -2}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

> `awal9e := dsolve({x1(0) = -2, x2(0) = 2, (d/dt)x1(t) = -x1(t), (d/dt)x2(t) = -2}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :`

Menggambarkan orbit sistem hasil kali (3.12) pada nilai awal tertentu

> `gbrawal9a := odeplot(awal9a, [[x1(t), x2(t)]], -0.25 .. 2.4, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal9b := odeplot(awal9b, [[x1(t), x2(t)]], -1 .. 0.9, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal9c := odeplot(awal9c, [[x1(t), x2(t)]], -1.3 .. 1.4, color = blue, thickness = 3) :`

> `gbrawal9d := odeplot(awal9d, [[x1(t), x2(t)]], -1 .. 0.9, color = blue, thickness = 3) :`

```
> gbrawal9e := odeplot(awal9e, [[x1(t),x2(t)]],-0.25 ..2.4,color  
= blue, thickness = 3) :
```

Gambar potret fase sistem hasil kali (3.12)

```
> display(gbrawal9a,gbrawal9b,gbrawal9c,gbrawal9d,gbrawal9e,  
dfp9, tickmarks = [0,0], labels = [x1,x2])
```

Lampiran 11. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.19)

```
> with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dx1d := -x1; dx2d := -x2;
> sist10 := matrix([ [subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1d))],
  [subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2d))]]);
```

Sistem hasil kali (3.19)

```
> sistem10 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist10[1, 1], \frac{d}{dt}x2(t) = sist10[2, 1];$ 
```

Titik ekuilibrium sistem hasil kali (3.19)

```
> ekui10 := solve( {dx1d = 0, dx2d = 0}, [x1, x2]);
```

Menentukan medan arah sistem hasil kali (3.19)

```
> dfp10 := dfieldplot( {sistem10}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -2 .. 2, x2 = -2 .. 2, arrows = small) :
```

Menentukan orbit sistem hasil kali (3.19) pada nilai awal tertentu

```
> awal10a := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = 2, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10b := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = -2, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10c := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = 2, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10d := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = -2, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10e := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = 0, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10f := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = 2, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10g := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = 0, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal10h := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = -2, sistem10}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

Menggambarkan orbit sistem hasil kali (3.19) pada nilai awal tertentu

```
> gbrawal10a := odeplot(awal10a, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawal10b := odeplot(awal10b, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawal10c := odeplot(awal10c, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawal10d := odeplot(awal10d, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue, thickness = 3) :
```

```

> gbrawal10e := odeplot(awal10e, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawal10f := odeplot(awal10f, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawal10g := odeplot(awal10g, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawal10h := odeplot(awal10h, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 7, color = blue,
  thickness = 3) :

```

Gambar potret fase sistem hasil kali (3.19)

```

> display(gbrawal10a, gbrawal10b, gbrawal10c, gbrawal10d,
  gbrawal10e, gbrawal10f, gbrawal10g, gbrawal10h, dfp10,
  tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])

```

Lampiran 12. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali
(3.27)

```
> with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dx1e := x1^2; dx2e := x2^2;
> sist11 := matrix([ [ subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1e)) ], [ subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2e)) ] ]);
```

Sistem hasil kali (3.27)

```
> sistem11 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist11[1, 1]$ ,  $\frac{d}{dt}x2(t) = sist11[2, 1]$ ;
```

Titik ekuilibrium sistem hasil kali (3.27)

```
> ekui11 := solve( {dx1e = 0, dx2e = 0}, [x1, x2]);
```

Menentukan medan arah sistem hasil kali (3.27)

```
> dfp11 := dfieldplot( {sistem11}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -2 .. 2, x2 = -2 .. 2, arrows = small) :
```

Menentukan orbit sistem hasil kali (3.27) pada nilai awal tertentu

```
> awall1a := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = 2, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1b := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = -2, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1c := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = 0.3, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1d := dsolve( {x1(0) = 0.3, x2(0) = -2, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1e := dsolve( {x1(0) = -0.5, x2(0) = -2, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1f := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = -0.5, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1g := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = 0.5, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall1h := dsolve( {x1(0) = 0.5, x2(0) = 2, sistem11}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

Menggambarkan orbit sistem hasil kali (3.27) pada nilai awal tertentu

```
> grawall1a := odeplot(awall1a, [[x1(t), x2(t)]], -40 .. 0, color = blue, thickness = 3) :
> grawall1b := odeplot(awall1b, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 40, color = blue, thickness = 3) :
> grawall1c := odeplot(awall1c, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 2.85, color = blue, thickness = 3) :
> grawall1d := odeplot(awall1d, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 2.85, color = blue, thickness = 3) :
```

```

> gbrawall1e := odeplot(awall1e, [[x1(t), x2(t)]], 0..15, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawall1f := odeplot(awall1f, [[x1(t), x2(t)]], 0..15, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawall1g := odeplot(awall1g, [[x1(t), x2(t)]], -15..0, color
  = blue, thickness = 3) :
> gbrawall1h := odeplot(awall1h, [[x1(t), x2(t)]], -15..0, color
  = blue, thickness = 3) :

```

Gambar potret fase sistem hasil kali (3.27)

```

> display(gbrawall1a, gbrawall1b, gbrawall1c, gbrawall1d,
  gbrawall1e, gbrawall1f, gbrawall1g, gbrawall1h, dfp11,
  tickmarks = [0, 0], labels = [x1, x2])

```

Lampiran 13. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali

(3.34) dan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik ekuilibriumnya

```
> with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :  
> dx1f := -x1; dx2f := x2·(1 - x2);  
> sist12 := matrix([ [subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1f) ) ],  
[ subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2f) ) ] ]);
```

Sistem hasil kali (3.34)

```
> sistem12 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist12[1, 1], \frac{d}{dt}x2(t) = sist12[2, 1];$ 
```

Titik ekuilibrium sistem hasil kali (3.34)

```
> ekui12 := solve( {dx1f = 0, dx2f = 0}, [x1, x2]);
```

Matriks Jacobian sistem (3.34)

```
> J12 := jacobian([dx1f, dx2f], [x1, x2]);
```

Matriks Jacobian sistem (3.34) pada titik (0,0)

```
> A12a := subs(ekui12[1], evalm(J12));
```

Matriks Jacobian sistem (3.34) pada titik (0,1)

```
> A12b := subs(ekui12[2], evalm(J12))
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3.34) pada titik (0,0)

```
> eigenA12a := eigenvals(A12a);
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3.34) pada titik (0,1)

```
> eigenA12b := eigenvals(A12b);
```

Menentukan medan arah sistem (3.34)

```
> dfp12 := dfieldplot({sistem12}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5, x2 = -2.5 .. 2.5, arrows = small) :
```

Menentukan orbit sistem (3.34) pada nilai awal tertentu

```
> awal12a := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = 2, sistem12}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal12b := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = 0.1, sistem12}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal12c := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = 0.1, sistem12}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal12d := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = 2, sistem12}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal12e := dsolve( {x1(0) = 2, x2(0) = -0.1, sistem12}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal12f := dsolve( {x1(0) = -2, x2(0) = -0.1, sistem12}, {x1(t), x2(t)},  
type = numeric, method = classical) :
```

Menggambarkan orbit sistem (3.34) pada nilai awal tertentu

```
> gbrawal12a := odeplot(awal12a, [[x1(t), x2(t)]], -0.2 .. 6, color  
= blue, thickness = 3) :
```

```
> gbrawal12b := odeplot(awal12b, [[x1(t), x2(t)]], -0.25 .. 6, color  
= blue, thickness = 3) :
```

```

> gbrawal12c := odeplot(awal12c, [[x1(t), x2(t)]], -0.25 .. 6, color
  = blue, thickness = 3) :
> gbrawal12d := odeplot(awal12d, [[x1(t), x2(t)]], -0.2 .. 6, color
  = blue, thickness = 3) :
> gbrawal12e := odeplot(awal12e, [[x1(t), x2(t)]], -0.25 .. 2.08, color
  = blue, thickness = 3) :
> gbrawal12f := odeplot(awal12f, [[x1(t), x2(t)]], -0.25 .. 2.08, color
  = blue, thickness = 3) :

```

Gambar potret fase sistem (3.34)

```

> display(gbrawal12a, gbrawal12b, gbrawal12c, gbrawal12d,
  gbrawal12e, gbrawal12f, dfp12, tickmarks = [0, 0], labels = [x1,
  x2])

```

Lampiran 14. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali

(3.41) dan mencari nilai eigen dari matriks Jacobian pada titik ekuilibriumnya

```
> with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :  
> dx1g := x1·(1 - x1); dx2g := x2·(1 - x2);  
> sist13 := matrix([ [subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1g))],  
[subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2g))]]);
```

Sistem hasil kali (3.41)

```
> sistem13 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist13[1, 1], \frac{d}{dt}x2(t) = sist13[2, 1];$ 
```

Titik ekuilibrium sistem hasil kali (3.41)

```
> ekui13 := solve( {dx1g = 0, dx2g = 0}, [x1, x2]);
```

Matriks Jacobian sistem (3.41)

```
> J13 := jacobian([dx1g, dx2g], [x1, x2]);
```

Matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (0,0)

```
> A13a := subs(ekui13[1], evalm(J13));
```

Matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (1,0)

```
> A13b := subs(ekui13[2], evalm(J13));
```

Matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (0,1)

```
> A13c := subs(ekui13[3], evalm(J13));
```

Matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (1,1)

```
> A13d := subs(ekui13[4], evalm(J13));
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (0,0)

```
> eigenA13a := eigenvals(A13a);
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (1,0)

```
> eigenA13b := eigenvals(A13b);
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (0,1)

```
> eigenA13c := eigenvals(A13c);
```

Nilai eigen dari matriks Jacobian sistem (3.41) pada titik (1,1)

```
> eigenA13d := eigenvals(A13d);
```

Menentukan medan arah sistem (3.41)

```
> dfp13 := dfieldplot( {sistem13}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -0.5 .. 1.5, x2 = -0.5 .. 1.5, arrows = small) :
```

Menentukan orbit sistem (3.41) pada nilai awal tertentu

```
> awal13a := dsolve( {x1(0) = 0.5, x2(0) = 0.25, sistem13}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal13b := dsolve( {x1(0) = 0.25, x2(0) = 0.5, sistem13}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal13c := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = 0.5, sistem13}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal13d := dsolve( {x1(0) = 0.5, x2(0) = 0, sistem13}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

```
> awal13e := dsolve( {x1(0) = 1, x2(0) = 0.5, sistem13}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
```

```

> awal13f := dsolve( {x1(0) = 0.5, x2(0) = 1, sistem13}, {x1(t), x2(t)},
  type = numeric, method = classical) :
> awal13g := dsolve( {x1(0) = 1.5, x2(0) = 0.1, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13h := dsolve( {x1(0) = 0.5, x2(0) = 0.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13i := dsolve( {x1(0) = 1.5, x2(0) = 1.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13j := dsolve( {x1(0) = -0.5, x2(0) = -0.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13k := dsolve( {x1(0) = 0.1, x2(0) = 1.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13l := dsolve( {x1(0) = -0.1, x2(0) = 1.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13m := dsolve( {x1(0) = -0.5, x2(0) = 0.9, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13n := dsolve( {x1(0) = 0.9, x2(0) = -0.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13o := dsolve( {x1(0) = 1.5, x2(0) = -0.1, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13p := dsolve( {x1(0) = -0.5, x2(0) = 1, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13q := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = 1.5, sistem13}, {x1(t), x2(t)},
  type = numeric, method = classical) :
> awal13r := dsolve( {x1(0) = 1, x2(0) = 1.5, sistem13}, {x1(t), x2(t)},
  type = numeric, method = classical) :
> awal13s := dsolve( {x1(0) = 1.5, x2(0) = 1, sistem13}, {x1(t), x2(t)},
  type = numeric, method = classical) :
> awal13t := dsolve( {x1(0) = 1.5, x2(0) = 0, sistem13}, {x1(t), x2(t)},
  type = numeric, method = classical) :
> awal13u := dsolve( {x1(0) = 1, x2(0) = -0.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13v := dsolve( {x1(0) = 0, x2(0) = -0.5, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awal13w := dsolve( {x1(0) = -0.5, x2(0) = 0, sistem13}, {x1(t),
  x2(t)}, type = numeric, method = classical) :

```

Menggambarkan orbit sistem (3.41) pada nilai awal tertentu

- > $gbrawal13a := \text{odeplot}(awal13a, [[x1(t), x2(t)]], -6..6, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13b := \text{odeplot}(awal13b, [[x1(t), x2(t)]], -6..6, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13c := \text{odeplot}(awal13c, [[x1(t), x2(t)]], -6..6, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13d := \text{odeplot}(awal13d, [[x1(t), x2(t)]], -6..6, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13e := \text{odeplot}(awal13e, [[x1(t), x2(t)]], -5..6, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13f := \text{odeplot}(awal13f, [[x1(t), x2(t)]], -5..5, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13g := \text{odeplot}(awal13g, [[x1(t), x2(t)]], 0..5, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13h := \text{odeplot}(awal13h, [[x1(t), x2(t)]], -5..5, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13i := \text{odeplot}(awal13i, [[x1(t), x2(t)]], 0..5, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13j := \text{odeplot}(awal13j, [[x1(t), x2(t)]], -5..0, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13k := \text{odeplot}(awal13k, [[x1(t), x2(t)]], 0..5, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13l := \text{odeplot}(awal13l, [[x1(t), x2(t)]], 0..1.3, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13m := \text{odeplot}(awal13m, [[x1(t), x2(t)]], -5..0, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13n := \text{odeplot}(awal13n, [[x1(t), x2(t)]], -5..0, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13o := \text{odeplot}(awal13o, [[x1(t), x2(t)]], 0..1.3, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13p := \text{odeplot}(awal13p, [[x1(t), x2(t)]], -4..0, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13q := \text{odeplot}(awal13q, [[x1(t), x2(t)]], 0..4, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13r := \text{odeplot}(awal13r, [[x1(t), x2(t)]], 0..4, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$
- > $gbrawal13s := \text{odeplot}(awal13s, [[x1(t), x2(t)]], 0..4, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3) :$

```

> gbrawal13t := odeplot(awal13t, [[x1(t),x2(t)]], 0 ..4, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawal13u := odeplot(awal13u, [[x1(t),x2(t)]], -4 ..0, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawal13v := odeplot(awal13v, [[x1(t),x2(t)]], -4 ..0, color = blue,
  thickness = 3) :
> gbrawal13w := odeplot(awal13w, [[x1(t),x2(t)]], -4 ..0, color
  = blue, thickness = 3) :

```

Gambar potret fase sistem (3.41)

```

> display(gbrawal13a,gbrawal13b,gbrawal13c,gbrawal13d,
  gbrawal13e,gbrawal13f,gbrawal13g,gbrawal13h,gbrawal13i,
  gbrawal13j,gbrawal13k,gbrawal13l,gbrawal13m,gbrawal13n,
  gbrawal13o,gbrawal13p,gbrawal13q,gbrawal13r,gbrawal13s,
  gbrawal13t,gbrawal13u,gbrawal13v,gbrawal13w,dfp13,
  tickmarks = [0,0], labels = [x1,x2])

```

Lampiran 15. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.60)

> *with(DEtools): with(plots):*

Menentukan medan arah sistem (3.59) atau (3.60)

>
$$dfp14 := \text{dfieldplot}\left(\left\{\frac{dx1}{dt} = -x2(t), \frac{dx2}{dt} = x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5, x2 = -2.5 .. 2.5, \text{arrows} = \text{small}\right);$$

Menentukan orbit sistem (3.59) atau (3.60) pada nilai awal tertentu

>
$$awal14a := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = 1.5, x2(0) = 1.5, \frac{dx1}{dt} = -x2(t), \frac{dx2}{dt} = x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric}, \text{method} = \text{classical}\right);$$

>
$$awal14b := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = 1, x2(0) = 1, \frac{dx1}{dt} = -x2(t), \frac{dx2}{dt} = x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric}, \text{method} = \text{classical}\right);$$

>
$$awal14c := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = 0.5, x2(0) = 0.5, \frac{dx1}{dt} = -x2(t), \frac{dx2}{dt} = x1(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric}, \text{method} = \text{classical}\right);$$

Menggambarkan orbit sistem (3.59) atau (3.60) pada nilai awal tertentu

>
$$gbrawal14a := \text{odeplot}(awal14a, [[x1(t), x2(t)]], -3.2 .. 3.2, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

>
$$gbrawal14b := \text{odeplot}(awal14b, [[x1(t), x2(t)]], -3.2 .. 3.2, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

>
$$gbrawal14c := \text{odeplot}(awal14c, [[x1(t), x2(t)]], -3.2 .. 3.2, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

Gambar potret fase sistem (3.59) atau (3.60)

>
$$\text{display}(gbrawal14a, gbrawal14b, gbrawal14c, dfp14, \text{tickmarks} = [0, 0], \text{labels} = [x_1, x_2]);$$

Lampiran 16. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.62)

> *with(DEtools): with(plots):*

Menentukan medan arah sistem (3.61) atau (3.62)

>
$$dfp15 := \text{dfieldplot}\left(\left\{\frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) - x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x1(t) - x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, t = -3 .. 3, x1 = -2.5 .. 2.5, x2 = -2.5 .. 2.5, \text{arrows} = \text{small}\right);$$

Menentukan orbit sistem (3.61) atau (3.62) pada nilai awal tertentu

>
$$awall5a := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = 2.5, x2(0) = -0.5, \frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) - x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x1(t) - x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric, method} = \text{classical}\right);$$

>
$$awall5b := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = 0.5, x2(0) = 2.5, \frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) - x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x1(t) - x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric, method} = \text{classical}\right);$$

>
$$awall5c := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = -2.5, x2(0) = 0.5, \frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) - x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x1(t) - x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric, method} = \text{classical}\right);$$

>
$$awall5d := \text{dsolve}\left(\left\{x1(0) = -0.5, x2(0) = -2.5, \frac{d}{dt}x1(t) = -x1(t) - x2(t), \frac{d}{dt}x2(t) = x1(t) - x2(t)\right\}, \{x1(t), x2(t)\}, \text{type} = \text{numeric, method} = \text{classical}\right);$$

Menggambarkan orbit sistem (3.61) atau (3.62) pada nilai awal tertentu

>
$$gbrawall5a := \text{odeplot}(awall5a, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 8, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

>
$$gbrawall5b := \text{odeplot}(awall5b, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 8, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

>
$$gbrawall5c := \text{odeplot}(awall5c, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 8, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

>
$$gbrawall5d := \text{odeplot}(awall5d, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 8, \text{color} = \text{blue}, \text{thickness} = 3);$$

Gambar potret fase sistem (3.61) atau (3.62)

>
$$\text{display}(\text{gbrawal15a}, \text{gbrawal15b}, \text{gbrawal15c}, \text{gbrawal15d}, \text{dfp15}, \text{tickmarks} = [0, 0], \text{labels} = [x_1, x_2])$$

Lampiran 17. Perintah Maple untuk menggambarkan potret fase sistem hasil kali (3.64)

```

> with(DEtools) : with(plots) : with(linalg) :
> dx1h := x2 + x1·(1 - x12 - x22);
> dx2h := -x1 + x2·(1 - x12 - x22);
> sist16 := matrix([ [subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx1h))],
[subs(x1 = x1(t), x2 = x2(t), eval(dx2h))]]);
> sistem16 :=  $\frac{d}{dt}x1(t) = sist16[1, 1], \frac{d}{dt}x2(t) = sist16[2, 1];$ 

```

Menentukan medan arah sistem (3.63) atau (3.64)

```

> dfp16 := dfieldplot({sistem16}, {x1(t), x2(t)}, t = -3 .. 3, x1 = -2 .. 2, x2 = -2 .. 2, arrows = small) :

```

Menentukan orbit sistem (3.63) atau (3.64) pada nilai awal tertentu

```

> awall16a := dsolve({x1(0) = 0.2, x2(0) = 0.2, sistem16}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall16b := dsolve({x1(0) = 2, x2(0) = 2, sistem16}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall16c := dsolve({x1(0) = -2, x2(0) = 2, sistem16}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall16d := dsolve({x1(0) = -0.2, x2(0) = -0.2, sistem16}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall16e := dsolve({x1(0) = -2, x2(0) = -2, sistem16}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :
> awall16f := dsolve({x1(0) = 2, x2(0) = -2, sistem16}, {x1(t), x2(t)}, type = numeric, method = classical) :

```

Menggambarkan orbit sistem (3.63) atau (3.64) pada nilai awal tertentu

```

> gbrawall16a := odeplot(awall16a, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 5, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawall16b := odeplot(awall16b, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 5, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawall16c := odeplot(awall16c, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 5, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawall16d := odeplot(awall16d, [[x1(t), x2(t)]], -10 .. 5, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawall16e := odeplot(awall16e, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 5, color = blue, thickness = 3) :
> gbrawall16f := odeplot(awall16f, [[x1(t), x2(t)]], 0 .. 5, color = blue, thickness = 3) :

```

Gambar potret fase sistem (3.63) atau (3.64)

➢
$$\text{display}(\text{gbrawal16a}, \text{gbrawal16b}, \text{gbrawal16c}, \text{gbrawal16d}, \\ \text{gbrawal16e}, \text{gbrawal16f}, \text{dfp16}, \text{tickmarks} = [0, 0], \text{labels} = [x_1, \\ x_2])$$