JENIS-JENIS SEGITIGA YANG TERBENTUK AKIBAT TERBENTUKNYA SEBUAH SEGIEMPAT PADA SEBUAH BOLA

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta
Untuk Memenuhi Sebagian Persyaratan Guna Memperoleh Gelar Sarjana Sains

Oleh:

Pitra Fiatna

07305144021

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2015

PERSETUJUAN

Skripsi yang berjudul

JENIS-JENIS SEGITIGA YANG TERBENTUK AKIBAT TERBENTUKNYA SEBUAH SEGIEMPAT PADA SEBUAH BOLA

Oleh:

Pitra Fiatna

NIM. 07305144021

Telah disetujui pada tanggal 7 Januari 2015

untuk diujikan di hadapan Dewan Penguji Skripsi

Program Studi Matematika

Jurusan Pendidikan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

Dosen Pembimbing

Drs. Murdanu, M.Pd

NIP. 196706211993031013

PENGESAHAN

SKRIPSI YANG BERJUDUL

JENIS-JENIS SEGITIGA YANG TERBENTUK AKIBAT TERBENTUKNYA SEBUAH SEGIEMPAT PADA SEBUAH BOLA

Yang disusun oleh:
Nama : Pitra Fiatna
NIM : 07305144021
Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diujikan di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 14 Januari 2015 dan dinyatakan LULUS

DEWAN PENGUJI

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
Drs. Murdanu, M.Pd NIP. 196706211993031013	Ketua Penguji	....	23-01-2015
Dwi Lestari, M.Sc NIP. 198505132010122006	Sekretaris Penguji	....	22-01-2015
Drs. Sugiyono, M.Pd NIP. 195308251979031004	Penguji Utama	....	21-01-2015
Himmawati Puji L, M.Si NIP. 197501102000122001	Penguji Pendamping	....	23-01-2015

Yogyakarta, 26 Januari 2015
Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
Dekan,

Dr. Hartono, M.Si
NIP. 196203291987021002

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini, saya:

Nama	: Pitra Fiatna
NIM	: 07305144021
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Judul TAS	: Jenis-jenis Segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya sebuah Segiempat pada sebuah Bola

Menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya, tidak berisi materi yang dipublikasikan atau ditulis oleh orang lain atau telah digunakan sebagai persyaratan penyelesaian studi di Perguruan Tinggi lain kecuali pada bagian-bagian tertentu yang saya ambil sebagai acuan. Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggungjawab saya.

Yogyakarta, 7 Januari 2015

Yang menyatakan,

Pitra Fiatna

NIM. 07305144021

MOTTO

The stronger scorn you make the stronger i believe, semakin kuat hinaanmu semakin kuat keyakinanku

“Tidak akan pernah ada kata tidak bisa sebelum mencoba”

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan
(QS. Al Inshirah :6)

PERSEMBAHAN

Kupersembahakan karya sederhana ini untuk

Alm. Kedua Orang tua saya yang telah mendidik dan membesarkan saya ..

Kakak-kakakku "Wiwin Arifin, Lilik Alfiandi, dan Yeni Alfiana" yang selalu memberi motivasi untuk tetap semangat dan memberikan solusi dalam pengerjaan karya ini..

Teman-temanku "Lina Febriani, Lina Dwi Khusnawati, Elmada Pitra Negara" dan teman-teman Mat Swa 07 serta teman-teman kost "Gibran" dengan canda, tawa, serta kebersamaannya dan selalu memberi motivasi untuk tetap semangat dalam pengerjaan karya ini..

Sungguh saya beruntung memiliki dan berada di sekitar kalian..

Bapak Murdanu selaku dosen pembimbingku yang dengan sabar membantu dan memberikan motivasi dalam perjalanan membuat karya ini.

Dan kamu, dia ,dan mereka yang tak cukup rasanya jika disebutkan satu-persatu..

JENIS-JENIS SEGITIGA YANG TERBENTUK AKIBAT TERBENTUKNYA SEBUAH SEGIEMPAT PADA SEBUAH BOLA

Oleh:
Pitra Fiatna
NIM. 07305144021

ABSTRAK

Segitiga-bola adalah gabungan tiga busur lingkaran besar yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak berada pada lingkaran besar yang sama. Jika pada sebuah bola terdapat empat buah lingkaran besar yang berbeda yang masing-masing saling berpotongan pada titik yang tidak sama, maka akan terbentuk bangun-bangun segiempat dan segitiga pada permukaan bola.

Penelitian dilakukan untuk menganalisis semua kemungkinan jenis-jenis segitiga yang berada pada sebuah bola yang terdapat empat lingkaran besar berbeda yang saling berpotongan. Di setiap *eksterior* segiempat yang terbentuk pada permukaan bola terbentuk segitiga. Setiap busursisi dari segiempat-bola yang terbentuk merupakan busursisi-busursisi segitiga-bola yang berbeda. Jenis-jenis segiempat-bola berdasarkan tiga hal, yaitu berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, berdasarkan besar derajat sisi, dan berdasarkan perpaduan jenis sudut yang dimiliki dan besar derajat sisi. Terdapat tujuh jenis segiempat yang berdasarkan jenis sudut yang dimiliki. Dalam tulisan ini, jenis-jenis segitiga merupakan jenis segitiga berdasarkan sudut yang dimiliki.

Jenis-jenis segitiga pada bola yang terdapat empat buah lingkaran besar di pengaruhi oleh jenis-jenis segiempat yang terbentuk. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-lancip-tumpul-lancip, maka terdapat segitiga tumpul dan segitiga siku-siku. Jika pada suatu bola terdapat segiempat doblesiku-lancip-tumpul, maka terdapat segitiga siku-siku dan segitiga tumpul. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul, maka terdapat segitiga siku-siku dan segitiga tumpul. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-dobletumpul-lancip, maka terdapat segitiga siku-siku, segitiga tumpul, dan segitiga lancip. Jika pada suatu bola terdapat segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip, maka terdapat segitiga tumpul. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-tumpul-siku-lancip, maka terdapat segitiga siku-siku. Jika pada suatu bola terdapat segiempat tripletumpul-lancip, maka terdapat segitiga tumpul dan segitiga lancip.

Kata kunci: Geometri bola, jenis-jenis segitiga, jenis-jenis segiempat

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat serta hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Skripsi ini disusun untuk memenuhi sebagian persyaratan memperoleh gelar Sarjana Sains Program Studi Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.

Penulis menyadari bahwa tanpa bantuan dan dorongan dari berbagai pihak, skripsi ini tidak akan terwujud. Oleh karena itu penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Hartono, M.Si., selaku Dekan FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta atas izin yang telah diberikan untuk melakukan penelitian,
2. Bapak Dr. Sugiman, M.Si., selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika atas izin kepada penulis untuk menyusun skripsi dan memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik,
3. Bapak Dr. Agus Maman, M.Si., Abadi selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus Penasehat Akademik yang telah memberikan kelancaran pelayanan dalam urusan akademik,
4. Bapak Drs. Murdanu, M.Pd., selaku Dosen Pembimbing yang telah membimbing, membantu, dan memberikan arahan serta masukan yang sangat membangun,

5. Bapak Mustofa, M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan dukungan, saran dan kritik yang memotivasi penulis untuk menjadi lebih baik dalam menjalani proses perkuliahan,
6. Seluruh dosen Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY yang telah mengajarkan ilmunya selama perkuliahan,
7. Semua pihak yang tekah membantu baik secara langsung maupun tidak langsung sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.

Semoga bantuan dan dorongan yang telah diberikan menjadi amanah dan diridhoi Allah SWT. Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penyusunan skripsi ini, oleh karena itu saran dan masukan sangat terbuka lebar. Penulis berharap karya ini dapat bermanfaat bagi kepentingan pendidikan pada khususnya dan dunia keilmuan pada umumnya.

Yogyakarta, 7 Januari 2015

Penulis,

Pitra Fiatna

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

A,B,…	:	Nama-nama titik
g,h,…	:	Nama-nama garis
α,β,…	:	Nama-nama bidang
$A \neq B$	:	Titik *A* tidak sama dengan B
$\overleftrightarrow{AB}$	:	Garis yang melalui titik A dan titik B
$\overrightarrow{AB}$	:	Sinar garis yang berawal dari titik A melalui titik B
$\overline{AB}$	:	Ruas garis yang ujung-ujungnya titik A dan titik B
AB	:	Panjang ruas garis AB
$\perp$	:	Tegak lurus
$\parallel$	:	Sejajar
$\nparallel$	:	Tidak sejajar
$\angle$	:	Sudut pada bidang datar (dimensi dua)
$\sphericalangle$	:	Sudut pada bola
$m\angle ABC$	:	Ukuran sudut ABC dengan satuan derajat
$m\sphericalangle ABC$	:	Ukuran sudut bola ABC dengan satuan derajat
∟	:	Siku-siku
$^\circ$	:	Derajat
$\cong$	:	Kongruen
Δ	:	Segitiga
$\odot\,(O, r)$	:	Lingkaran dengan pusat O dan jari-jari r
$\odot\,(O, r)$	:	Bola dengan pusat O dan jari-jari r
$\widehat{AB}$	:	Busursisi yang ujung-ujungnya titik A dan titik B
$m\widehat{AB}$	:	Derajat sisi AB
■	:	Teorema terbukti
(α, β)	:	Garis perpotongan bidang α dan bidang β

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

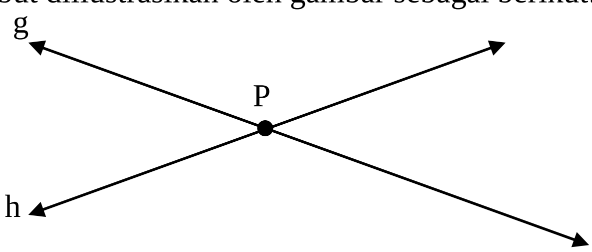
BAB I
PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Geometri merupakan cabang matematika yang mempelajari ilmu ukur. Kata geometri berasal dari Yunani yang berarti “pengukuran bumi”. Pada sekitar tahun 300 SM seorang matematikawan Yunani yaitu Euclid melakukan penelitian di Mesopotamia kuno, Mesir. Dalam penelitiannya, Euclid menuliskan buku 'The Element' yang merupakan cabang ilmu matematika yang menitikberatkan pada ilmu pengukuran dengan obyek benda-benda kongkrit di bumi serta dalil-dalil yang telah dinyatakan kebenarannya (www.wyzant.com/resources/math/ geometry).

Semenjak penemuan dari Euclid, banyak penelitian dilakukan sehingga terjadi kemajuan yang luar biasa dalam geometri. Kemajuan yang luar biasa pada bidang geometri terjadi pada abad ke-17 dimana Rene Descartes melakukan penelitian yang menghasilkan penemuan persamaan pada koordinat yang dapat digunakan untuk pembuktian persamaan garis yang merupakan awal dari perkembangan ilmu kalkulus dan fisika. Tidak cukup hanya disini saja para matematikawan melakukan penelitian. Pada abad ke-19, Carl Friedrich, Nikolai Lobachevsky, dan Bolyai Janos melakukan suatu penelitian dan menghasilkan suatu penemuan tentang geometri Non-Euclidean (www.zyzant.com/resources/ math/geometry).

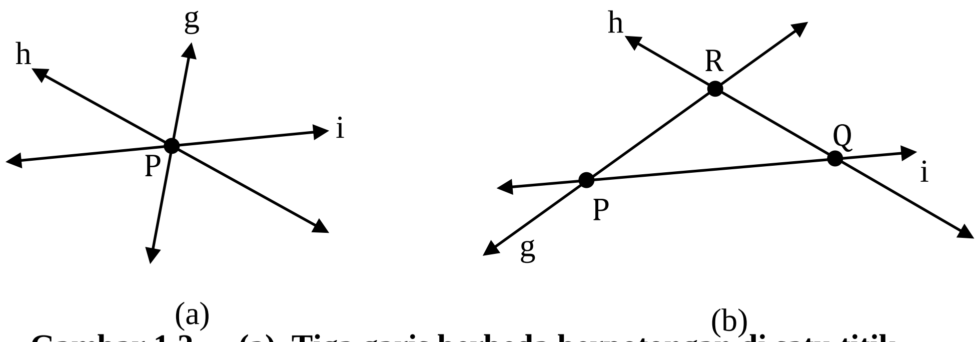
Pada kajian geometri bidang, terdapat teorema yang berbunyi “Jika terdapat dua garis yang saling berpotongan, maka perpotongan kedua garis tersebut merupakan sebuah titik", demikian teorema yang dinyatakan Keedy, dkk (1967: 38). Teorema tersebut diilustrasikan oleh gambar sebagai berikut:



Gambar 1.1 Titik yang terbentuk akibat perpotongan dua garis

Gambar 1.1 menunjukkan perpotongan dua garis yaitu g dan h yang membentuk titik P. Titik P terletak pada garis g dan juga terletak pada garis h.

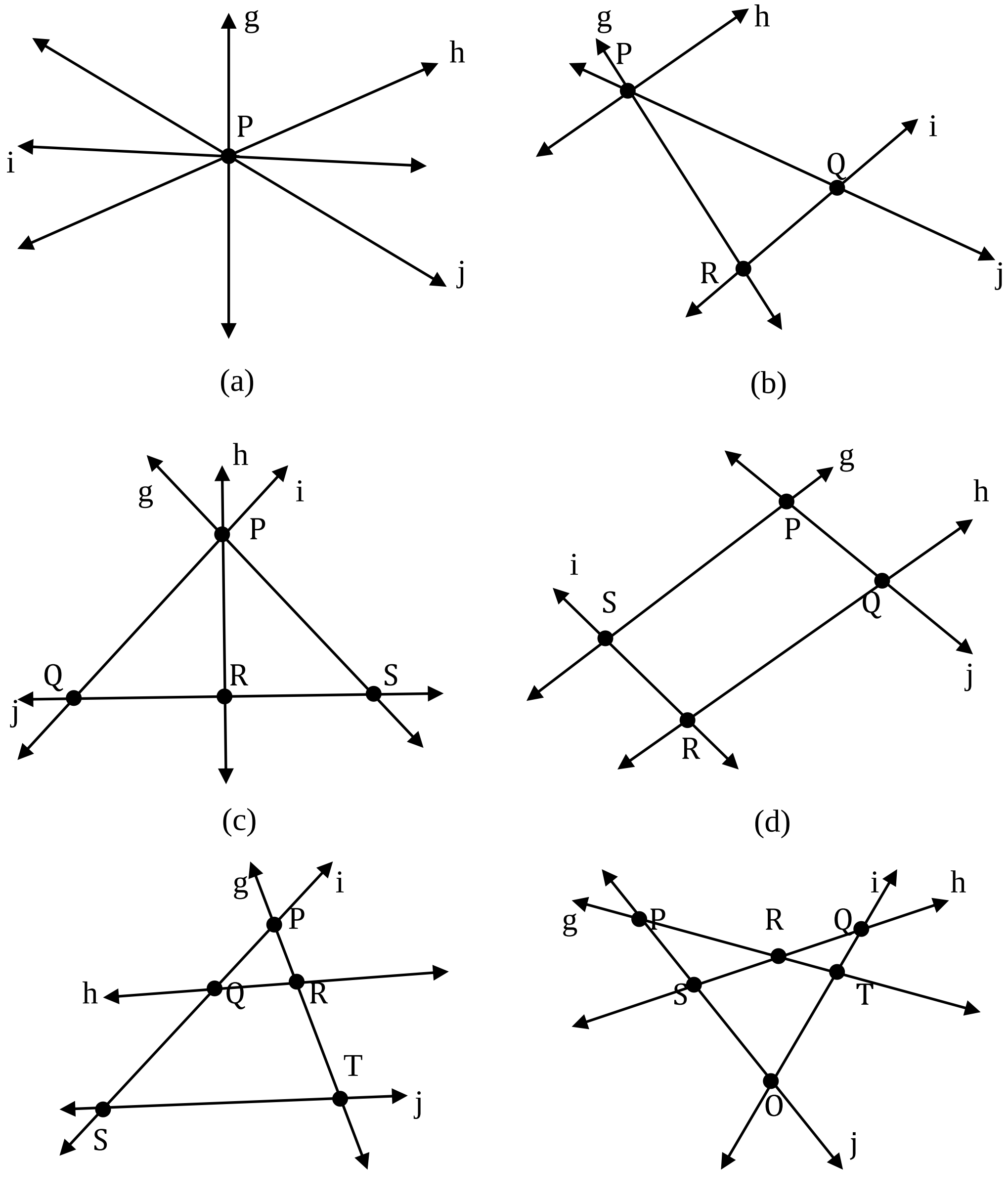
Berdasarkan teorema tersebut, jika terdapat tiga garis berbeda yang saling berpotongan, maka kemungkinan terbentuknya garis tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 1.2 (a). Tiga garis berbeda berpotongan di satu titik
(b). Tiga garis berbeda berpotongan di tiga titik

Gambar 1.2 (a) menunjukkan gambaran perpotongan tiga garis yaitu garis g, h, dan i yang saling berpotongan pada satu titik potong yaitu di P. Gambar 1.2 (b) menunjukkan tiga garis berbeda yang sepasang-sepasang berpotongan. Garis g berpotongan dengan garis i pada P. Garis i berpotongan dengan garis h di Q. Garis h yang berpotongan dengan garis g di R. Perpotongan dari tiga garis tersebut terbentuk tiga titik P, Q, dan R. Bagian-bagian garis g, h, dan i membentuk segitiga, yaitu segitiga PQR dengan sisi-sisi yaitu $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, dan $\overline{PR}$.

Jika terdapat empat garis berbeda yang saling berpotongan, maka kemungkinan terbentuknya garis tersebut adalah sebagai berikut:

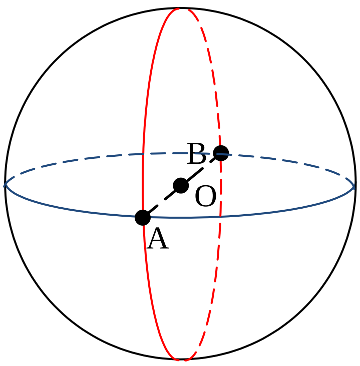


Gambar 1.3 **(a). Empat garis berpotongan di satu titik**
(b). Empat garis berpotongan di tiga titik
(c). Empat garis berpotongan di empat titik
(d). Empat garis berpotongan di empat titik
(e). Empat garis berpotongan di lima titik
(f). Empat garis berpotongan di enam titik

Dari gambar 1.3 dapat diketahui kemungkinan-kemungkinan yang terbentuk dari perpotongan empat buah garis, yaitu perpotongan empat buah garis pada satu titik, terbentuknya bangun segitiga, terbentuknya bangun segiempat, dan terbentuknya bangun segiempat yang bersisian dengan bangun segitiga. Banyaknya bangun segitiga yang terbentuk saling berbeda untuk setiap kemungkinan.

Bola juga merupakan kajian pada geometri ruang. Bola merupakan himpunan titik-titk dalam ruang yang mempunyai jarak sama terhadap titik pusatnya (Keddy, dkk, 1967: 426). *Interior* dari sebuah bola adalah gabungan pusat bola dan semua titik yang berjarak kurang dari jari-jari bola. *Eksterior* dari sebuah bola adalah himpunan semua titik yang berjarak lebih dari jari-jari bola tersebut.

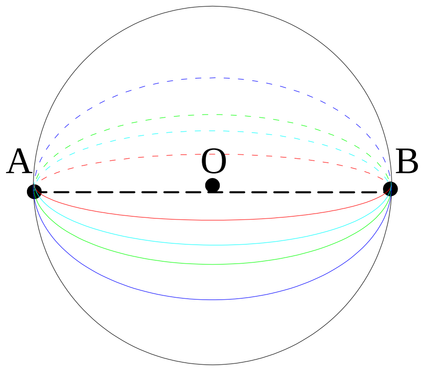
Pada geometri bola terdapat salah satu teorema yang berbunyi "jika dua lingkaran besar berpotongan maka perpotongan dari dua lingkaran tersebut akan berupa dua buah titk" (Cresswell, 1816: 6). Berdasarkan teorema tersebut, kondisi dua buah lingkaran tersebut diilustrasikan dengan gambar 1.4 berikut:



Gambar 1.4 Dua lingkaran berbeda berpotongan di dua titik

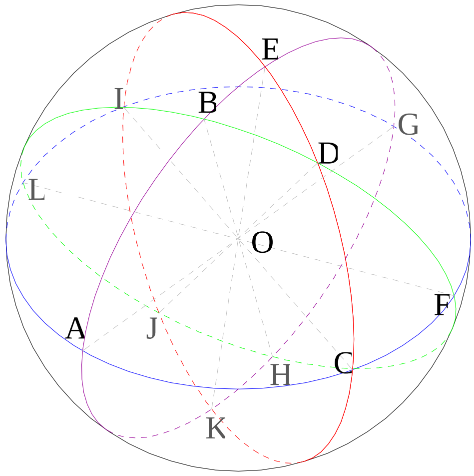
Gambar 1.4 menunjukkan dua buah titik yang terbentuk dari dua lingkaran besar berbeda yang saling berpotongan, yaitu titik A dan B. Dari dua lingkaran besar tersebut pada bola akan terbentuk empat segidua-bola.

Jika terdapat empat buah lingkaran besar berbeda yang saling berpotongan pada titik potong yang sama, maka perpotongan empat lingkaran besar tersebut juga berupa dua buah titik, sehingga dari empat lingkaran besar tersebut pada bola akan terbentuk delapan segidua-bola. Kondisi empat buah lingkaran besar tersebut diilustrasikan dengan gambar 1.5 berikut:



Gambar 1.5 Empat lingkaran besar berbeda sepasang-sepasang berpotongan di dua titik yang sama

Jika terdapat empat buah lingkaran besar berbeda pada sebuah bola yang saling berpotongan tidak pada titik yang sama, maka perpotongan empat lingkaran besar terdapat duabelas titik. Kondisi empat buah lingkaran besar tersebut diilustrasikan dengan gambar 1.6 berikut:



Gambar 1.6 Empat lingkaran besar berbeda berpotongan di titik titik yang berbeda

Gambar 1.6 menggambarkan empat lingkaran besar berbeda yang masing-masing saling berpotongan. Dari perpotongan tersebut terbentuk duabelas titik. Pada setiap lingkaran besar, akan terdapat enam buah titik perpotongan sebagai hasil perpotongan dengan tiga lingkaran besar yang lain. Dari perpotongan empat lingkaran besar tersebut terbentuk enam buah segiempat dan delapan buah segitiga pada bola. Enam buah segiempat yang terbentuk, yaitu segiempat ACDB, segiempat GIJH, segiempat CFHK, segiempat ILBE, segiempat FGED, dan segiempat LAKJ. Delapan buah segitiga yang terbentuk, yaitu segitiga ALB, segitiga GFH, segitiga EGI, segitiga KAC, segitiga EBD, segitiga KHJ, segitiga CDF dan segitiga IJL. Sisi-sisi segiempat dan segitiga pada bola merupakan busur lingkaran. Busur-busur lingkaran ini dinamakan busur-sisi. Segiempat memiliki empat busur-sisi dan segitiga memiliki tiga busur-sisi. Setiap busur-sisi pada segiempat merupakan busur-sisi dari segitiga.

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang ditulis oleh Lina Dwi Khusnawati dengan judul Jenis-jenis Segitiga-Bola dan Sifat-sifatnya didapatkan antara lain 1) pengertian dari segitiga-bola adalah gabungan tiga busur lingkaran besar pada permukaan bola yang ditentukan oleh tiga titik yang tidak berada pada lingkaran besar yang sama, 2)pengklasifikasian jenis-jenis segitiga berdasarkan tiga hal, yaitu berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, berdasarkan kesamaan derajat sisi, dan berdasarkan perpaduan antara jenis sudut yang dimiliki. Berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, terdapat segitiga siku-siku yang merupakan segitiga pada permukaan bola yang memiliki sudut siku-siku , segitiga lancip yang merupakan segitiga pada permukaan bola yang semua sudutnya lancip, segitiga tumpul yang merupakan segitiga pada permukaan bola yang memiliki satu sudut tumpul, dan segitiga lancip-tumpul yang merupakan segitiga pada permukaan bola yang memiliki dua sudut tumpul. Dalam tulisan ini, segitiga lancip-tumpul disebut segitiga dobletumpul. Berdasarkan kesamaan panjang atau derajat sisi, terdapat segitiga samakaki yang merupakan segitiga pada permukaan bola dengan besar dua derajat sisi sama besar, segitiga samasisi yang merupakan segitiga pada permukaan bola dengan besar tiga derajat sisi sama besar, dan segitiga sembarang yang merupakan segitiga pada permukaan bola dengan besar tiga derajat sisi saling berbeda. Berdasarkan perpaduan jenis sudut yang dimiliki dan kesamaan derajat sisi, terdapat segitiga siku-siku samakaki, segitiga siku-siku samasisi, segitiga lancip samasisi, segitiga lancip samakaki, segitiga tumpul samasisi, segitiga lancip samakaki, segitiga lancip-tumpul samakaki dan segitiga lancip-tumpul sembarang. Hasil kajian juga menunjukkan adanya sifat yang dimiliki oleh sebarang jenis segitiga-bola, yaitu sebarang sudut pada segitiga-bola kurang dari

180^o, jumlah dua sisi lebih dari sisi ketiga, jumlah tiga derajat sisi kurang dari 360^o, jumlah ukuran tiga sudut lebih dari 180^o dan kurang dari 540^o.

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang ditulis oleh Elmada Pitra Negara dengan judul Jenis-jenis Segiempat dan Sifat-sifatnya di dapatkan antara lain 1) pengertian dari segiempat-bola adalah gabungan empat busur lingkaran besar pada permukaan bola yang ditentukan oleh empat titik yang tidak berada pada lingkaran besar yang sama, 2) pengklasifikasian jenis-jenis segiempat berdasarkan tiga hal, yaitu berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, berdasarkan kesamaan derajat sisi, dan berdasarkan perpaduan antara jenis sudut yang dimiliki. Berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, terdapat segiempat siku-lancip-tumpul-lancip, segiempat doublesiku-lancip-tumpul, segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul, segiempat siku-doubletumpul-lancip, segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip, segiempat siku-tumpul-sikulancip, dan segiempat tripeltumpul-lancip. Berdasarkan kesamaan panjang atau derajat sisi, terdapat segiempat samakaki, segiempat samasisi dan segiempat sembarang. Berdasarkan perpaduan jenis sudut yang dimiliki dan kesamaan derajat sisi, terdapat segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul sembarang, segiempat siku-doubletumpul-lancip sembarang, segiempat siku-lancip-tumpul-lancip sembarang, segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip sembarang, segiempatbola tripeltumpul-lancip sembarang, segiempat siku-tumpul-siku-lancip sembarang, dan segiempat doublesiku-lancip-tumpul sembarang. Hasil kajian juga menunjukkan adanya sifat yang dimiliki oleh sebarang jenis segiempat, yaitu sebarang sudut pada segiempat tidak lebih dari

360^o, sifat setiap jenis pada segiempat ditentukan berdasarkan besar sudut pada sisi berdekatan yaitu $< 90^o$, $> 90^o$ dan 90^o.

Berdasarkan salah satu teorema perpotongan garis pada geometri bidang yang dinyatakan Keddy, dkk (1967: 38), terbentuk segiempat yang bersisian dengan segitiga yang banyaknya segitiga berbeda untuk setiap kemungkinan dari perpotongan empat buah garis, sedangkan pada geometri bola yang berdasarkan teorema yang dinyatakan Cresswell (1816: 6), jika terdapat empat buah lingkaran besar berbeda yang masing-masing saling berpotongan pada titik yang berbeda, maka terbentuk segiempat yang bersisian segitiga-bola. Di setiap eksterior segiempat terbentuk segitiga-bola. Hal menimbulkan ide untuk menyelidiki kemungkinan jenis-jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya sebuah segiempat pada sebuah bola. Dalam penelitian ini, garis pada geometri bidang didefinisikan sebagai lingkaran.

B. Batasan Permasalahan

Adapun permasalahan yang dibahas dalam tugas akhir ini, jenis-jenis segitiga yang terbentuk berdasarkan jenis sudut akibat terbentuknya sebuah segiempat berdasarkan jenis sudut yang dimiliki.

C. Rumusan Masalah

Jenis-jenis segitiga apa saja yang terbentuk dari terbentuknya sebuah segiempat pada sebuah bola?

D. Tujuan Penulisan

Mendeskripsikan jenis-jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya sebuah segiempat pada sebuah bola.

E. Manfaat

1. Menambah pengetahuan penulis tentang jenis-jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya sebuah segiempat pada sebuah bola.
2. Sebagai dasar penelitian selanjutnya.

BAB II
LANDASAN TEORI

A. Geometri Bidang

1. Sudut

Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang mempunyai titik pangkal yang sama. Kedua sinar garis disebut kaki sudut dan titik pangkal disebut titik sudut (Keddy, dkk, 1967: 70). Penamaan suatu sudut dengan menggunakan simbol $\angle$ dan diikuti dengan nama titik sudut ($\angle$A, $\angle$B, dan seterusnya) atau menggunakan simbol $\angle$ dan diikuti dengan nama dari tiga titik dengan urutan, yaitu sebuah titik pada sinar garis, titik sudut, dan titik pada sinar yang lainnya. Penulisan titik sudut harus di tengah ($\angle$ABC, $\angle$CAB, dan seterusnya).

Menurut Keddy,dkk (1967: 70), besar atau ukuran sudut bergantung pada seberapa besar satu kaki sudut harus dirotasi atau diputar terhadap titik sudutnya, sampai kaki ini bertemu dengan kaki yang lain. Ukuran sudut adalah banyaknya derajat yang dicakup sudut tersebut. Satuan ukuran sudut yang biasa digunakan adalah derajat (°).

a. Sudut

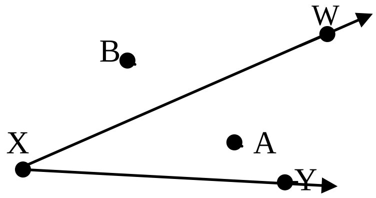
Sudut adalah gabungan dua sinar garis yang bersekutu titik pangkalnya (Rich, 2005: 5). Sudut dilambangkan dengan $\angle$WXY atau $\angle$YXW atau $\angle$X. $\overrightarrow{XW}$ dan $\overrightarrow{XY}$ adalah kaki-kaki sudut. Titik X disebut titik sudut.

Jika terdapat sebuah $\angle$WXY maka titik A dikatakan berada di interior $\angle$WXY jika dan hanya jika :

1) Titik A sepihak dengan titik W terhadap $\overrightarrow{XY}$, dan

2) Titik A sepihak dengan titik Y terhadap $\overrightarrow{XW}$.

Sedangkan yang dimaksud dengan eksterior ∠WXY adalah himpunan semua titik yang tidak berada di *interior* ∠WXY.



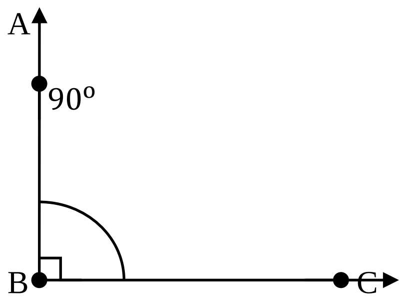
Gambar 2.1 Titik-titk yang berada di interior, eksterior dan pada ∠WXY

Gambar 2.1, titik A berada di interior ∠WXY karena titik A dan titik W berada di sisi yang sama terhadap $\overrightarrow{XY}$ dan titik A dan titik Y berada di sisi yang sama terhadap $\overrightarrow{XW}$, sedangkan titik B berada di *eksterior* ∠WXY karena tidak terletak di *interior* ∠WXY dan tidak terletak pada ∠WXY.

b. Jenis-jenis Sudut

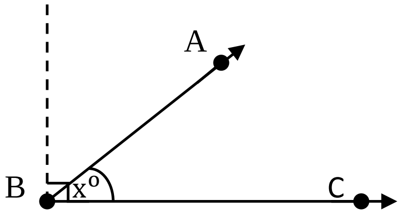
Menurur Rich dan Thomas (2009: 5-6), jenis-jenis sudut ditentukan berdasarkan besar sudut yang terbentuk dari sinar garis-sinar garis yang merupakan kaki sudut. Adapun jenis-jenisnya sebagai berikut:

1) Sudut siku-siku *(right angle)* adalah sudut dengan ukuran 90^o. Pada Gambar 2.2, $m\angle ABC = 90^o$. Bentuk persegi pada pojok sudut menunjukkan suatu sudut siku-siku.



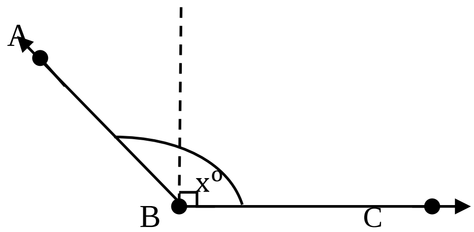
Gambar 2.2 Sudut siku-siku *(Right angle)*

2) Sudut lancip *(acute angle)* adalah sudut dengan ukuran lebih besar dari 0^{o} dan lebih kecil dari 90^{o}.



Gambar 2.3 Sudut lancip *(acute angle)*

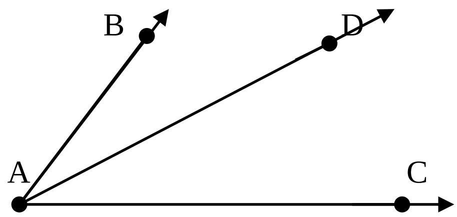
3) Sudut tumpul *(obtuse angle)* adalah sudut dengan ukuran lebih besar dari 90^{o} dan lebih kecil dari 180^{o}.



Gambar 2.4 Sudut Tumpul *(Obtuse angle)*

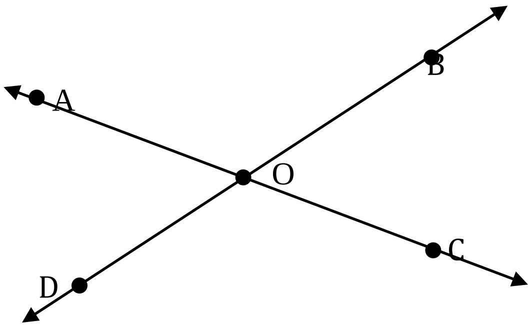
c. Jenis-jenis pasangan sudut

1) Sudut-sudut berdampingan adalah dua sudut yang mempunyai titik sudut yang sama dan terdapat satu sisi yang dimiliki bersama diantara keduanya. Pada Gambar 2.5, $\angle$BAC dibagi menjadi dua sudut yang berdampingan yaitu $\angle$BAD dan $\angle$DAC. Kedua sudut tersebut mempunyai titik sudut yang sama, yaitu A, dan satu sisi yang dimiliki oleh keduanya adalah $\overrightarrow{AD}$. Berlaku $m\angle BAD + m\angle DAC = m\angle BAC$.



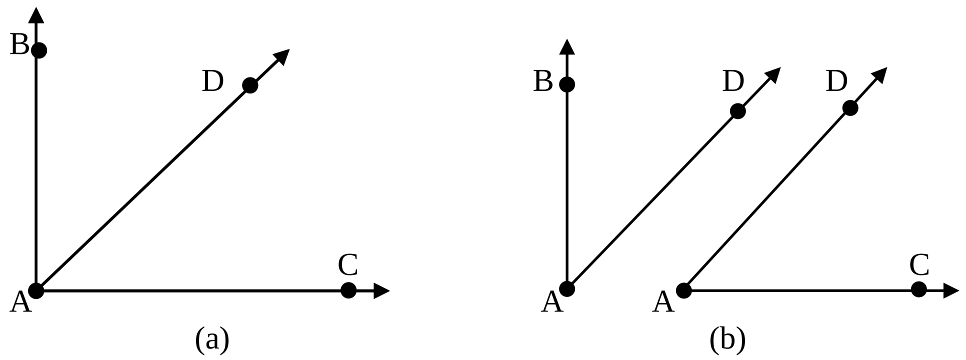
Gambar 2.5 Sudut-sudut berdampingan

2) Sudut-sudut yang saling bertolak belakang *(vertical angles)* adalah dua sudut yang tidak berdampingan yang terbentuk oleh dua sudut yang tidak berdampingan yang terbentuk oleh dua garis berpotongan. Pada Gambar 2.14, $\angle AOB$ dan $\angle COD$ merupakan sudut yang saling bertolak belakang yang terbentuk oleh $\overleftrightarrow{AC}$ dan $\overleftrightarrow{BD}$ yang berpotongan. Selain itu, $\angle AOD$ dan $\angle BOC$ merupakan pasangan sudut lain yang saling bertolak belakang yang terbentuk oleh garis-garis yang sama. Berlaku $m\angle AOB = m\angle COD$ dan $m\angle AOD = m\angle BOC$.



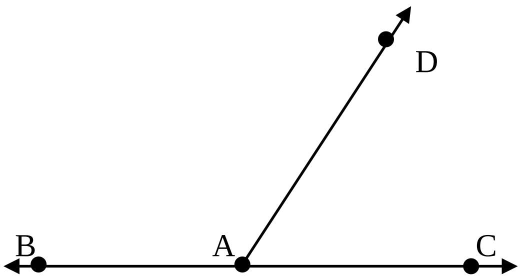
Gambar 2.6 Sudut bertolak belakang

3) Sudut berpenyiku (*komplementer*) adalah dua sudut yang jumlah dari kedua sudut tersebut berukuran 90^o. Pada gambar 2.7(a) ∠BAD dan ∠DAC adalah sudut-sudut berpenyiku yang berdampingan, tetapi pada gambar 2.7(b), ∠BAD dan ∠DAC merupakan sudut-sudut berpenyiku yang tidak berdampingan dan berlaku $m\angle DAB + m\angle DAC = 90^o$. Masing-masing dari dua sudut berpenyiku yang berpasangan disebut komplemen dari sudut lainnya



Gambar 2.7 Sudut-sudut berpenyiku

4) Sudut berpelurus (*suplementer*) adalah dua sudut yang jumlah dari kedua sudut tersebut berukurana 180^o. Pada gambar 2.8 $\angle BAD$ dan $\angle DAC$ merupakan sudut-sudut berpelurus yang berdampingan dan berlaku $m\angle DAB + m\angle DAC = 180^o$.



Gambar 2.8 Sudut-sudut berpelurus

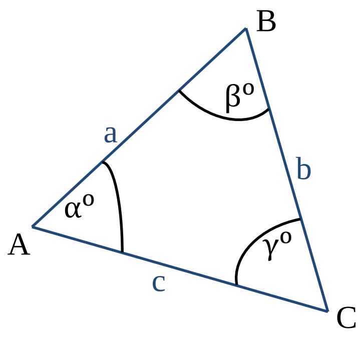
Menurut Keddy, dkk (1967: 88), pasangan sudut seperti gambar 2.8 selain dikatakan berpelurus, juga dikatakan bersisian.

Definisi 2.1 (Keedy, dkk, 1967: 87)

Dua sudut dikatakan kongruen jika dan hanya jika kedua sudut tersebut sama besar.

2. Segitiga

Segitiga merupakan gabungan tiga ruas yang dibentuk oleh tiga titik yang tidak segaris yang sepasang-sepasang saling dihubungkan oleh ruas garis-ruas garis yang disebut sisi-sisi segitiga (keddy, dkk , 1967: 102). Sudut-sudut yang terbentuk oleh pasangan sisi-sisi tersebut di sebut sudut-sudut segitiga, dengan ketiga titiknya disebut titik sudut.

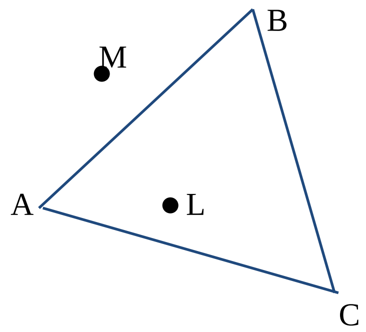


Gambar 2.9 Segitiga ABC

Gambar 2.9 merupakan segitiga ABC yang disimbolkan dengan ΔABC. Sisi-sisi dari ΔABC, yaitu $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, dan $\overline{AC}$, dengan $AB = a$, $BC = b$, dan $AC = c$. Sudut-sudut pada ΔABC yaitu $\angle ABC$, $\angle BCA$, dan $\angle CAB$, dengan titik-titik sudutnya A, B, dan C.

Suatu sisi pada sebuah segitiga dikatakan *inklusi* antara dua sudut (kaki sekutu dua sudut) jika dan hanya jika ujung-ujung sisi tersebut merupakan titik-titik sudut dari kedua sudut pada segitiga tersebut. Suatu sudut pada sebuah segitiga dikatakan inklusi antara dua sisi (diapit dua sisi) jika dan hanya jika sudut tersebut memuat dua sisi segitiga tersebut. Suatu sisi pada sebuah segitiga dikatakan menghadap sebuah sudut jika dan hanya jika sisi tersebut tidak memuat titik sudut dari sudut tersebut, sudut tersebut juga dikatakan menghadap sisi.

Sebuah titik dikatakan terletak pada *interior* (daerah dalam) suatu segitiga jika dan hanya jika titik tersebut terletak pada daerah dalam setiap sudut segitiga tersebut dan sebuah titik dikatakan terletak pada daerah luar suatu segitiga jika dan hanya jika titik tersebut sebidang dengan segitiga tersebut tetapi bukan merupakan bagian dari segitiga tersebut maupun interiornya.



Gambar 2.10 Titik-titik di *interior* dan di *eksterior* Δ ABC

Gambar 2.10 menunjukkan letak titik interior dan eksterior pada segitiga. Titik-titik A, B, dan C terletak pada segitiga. Titik L dikatakan terletak pada interior segitiga karena berada di setiap interior sudut Δ ABC dan titik M dikatakan terletak pada eksterior segitiga karena tidak berada pada interior setiap sudut Δ ABC.

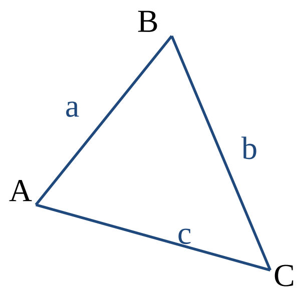
a. Jenis-jenis Segitiga

Segitiga diklasifikasikan berdasarkan kesamaan panjang sisi, berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, dan berdasarkan perpaduan antara jenis sudut yang dimiliki dan kesamaan panjang sisi (Rich dan Thomas, 2009: 9-10).

1) Segitiga berdasarkan kesamaan panjang sisi-sisinya

a) Segitiga Sembarang (*scalene triangle*)

Segitiga sembarang adalah segitiga yang tidak mempunyai sisi-sisi yang kongruen.

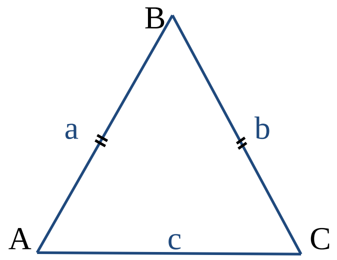


Gambar 2.11 Segitiga Sembarang ABC

Gambar 2.11 menunjukkan segitiga sembarang ABC dengan a ≠ b ≠ c serta besar setiap sudutnya berbeda. Segitiga sembarang sering juga disebut sebagai segitiga tidak samasisi atau segitiga sederhana.

b) Segitiga Samakaki (*isosceles triangle*)

Segitiga samakaki adalah segitiga yang sedikitnya mempunyai dua sisi yang kongruen.

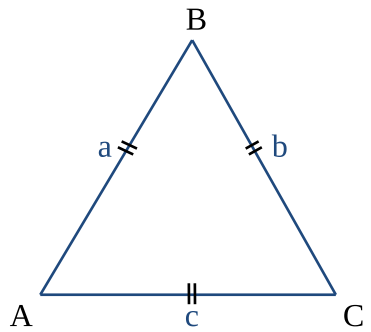


Gambar 2.12 Segitiga Samakaki ABC

Gambar 2.12 menunjukkan segitiga samakaki ABC dengan a = b. Sisi-sisi yang kongruen dinamakan kaki-kaki segitiga samakaki, sisi yang lainnya dinamakan alas segitiga. Sudut-sudut di kanan kiri alas segitiga disebut sudut kaki dan sudut yang berada di hadapan alas segitiga disebut sudut puncak. ∠CAB dan ∠ACB merupakan sudut kaki Δ ABC. Serta sudut puncaknya yaitu ∠ABC.

c) Segitiga samasisi (*equilateral triangle*)

Segitiga samasisi adalah segitiga yang mempunyai tiga sisi yang kongruen.



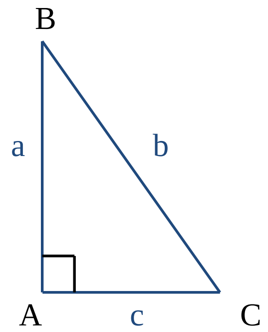
Gambar 2.13 Segitiga Samasisi ABC

Gambar 2.13 menunjukkan segitiga samasisi ABC dengan $a = b = c$. Ketiga sisi segitiga samasisi mempunyai panjang yang sama. Segitiga samasisi juga merupakan segitiga samakaki.

2) Segitiga berdasarkan jenis sudut yang dimiliki

a) Segitiga Siku-siku

Segitiga siku-siku adalah segitiga yang mempunyai sudut siku-siku. Dua dari tiga sisinya berpotongan tegak lurus.

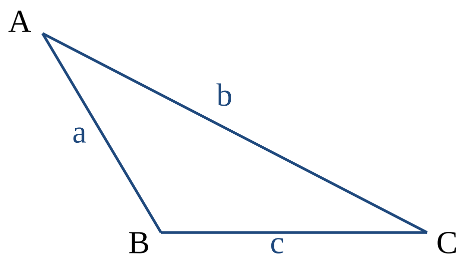


Gambar 2.14 Segitiga Siku-siku ABC

Gambar 2.14 menunjukkan segitiga siku-siku ABC. Sudut BAC pada segitiga siku-siku merupakan sudut siku-siku. Sisi b yang berhadapan dengan sudut siku-siku disebut *hipotenusa* (sisi miring) yang merupakan sisi terpanjang pada segitiga siku-siku. Sisi-sisi b dan c saling tegak lurus dan disebut dengan kaki atau lengan segitiga siku-siku

b) Segitiga Tumpul

Segitiga tumpul adalah segitiga yang mempunyai sudut tumpul.

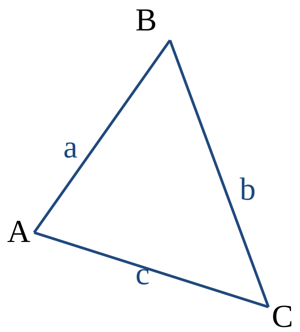


Gambar 2.15 Segitiga Tumpul ABC

Gambar 2.15 menunjukkan segitiga tumpul ABC. Sudut ABC merupakan sudut tumpul. Sudut lainya merupakan sudut lancip.

c) Segitiga lancip

Segitiga lancip adalah segitiga yang ketiga sudut yang dimiliki merupakan sudut lancip.

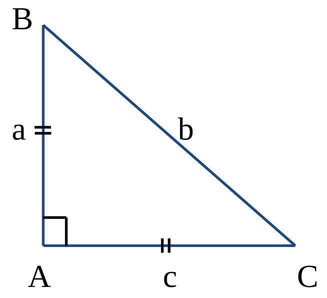


Gambar 2.16 Segitiga lancip ABC

3) Segitiga berdasarkan perpaduan jenis sudut dan kesamaan panjang sisi

a) Segitiga siku-siku samakaki

Segitiga siku-siku sama kaki adalah segitiga yang sisi-sisi siku-sikunya saling kongruen.

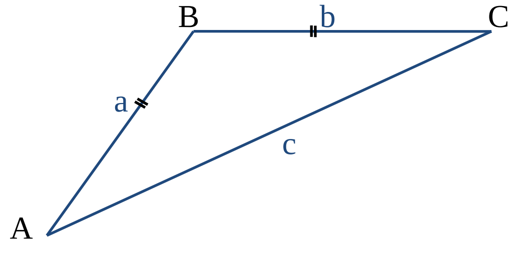


Gambar 2.17 Segitiga siku-siku samakaki ABC

Gambar 2.17 menunjukkan segitiga siku-siku samakaki ABC. Sudut BAC merupakan sudut siku-siku. Jarak AB = a, BC = b, dan AC = c yang merupakan sisi-sisi segitiga siku-siku samakaki. Ruas garis BC berhadapan dengan sudut siku-siku dan disebut hipotenusa (sisi miring) yang merupakan sisi terpanjang pada segitiga siku-siku sama kaki, sedangkan sisi lainya merupakan sisi yang sama panjang.

b) Segitiga tumpul samakaki

Segitiga tumpul samakaki adalah segitiga tumpul yang sudut tumpulnya diapit oleh dua sisi yang saling kongruen.

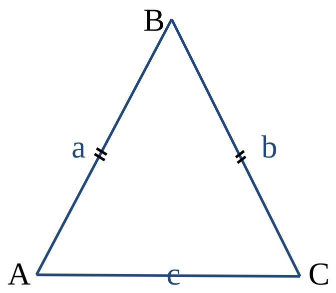


Gambar 2.18 Segitiga tumpul samakaki ABC

Gambar 2.18 menunjukkan segitiga tumpul samakaki ABC. ∠ABC merupakan sudut tumpul pada segitiga tumpul samakaki ABC, sedangkan sisi kongruen yang mengapitnya adalah $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$. Sudut-sudut yang lainya, yaitu ∠BAC dan ∠ACB merupakan sudut lancip.

c) Segitiga lancip samakaki

Segitiga lancip samakaki adalah segitiga lancip yang memiliki dua sisi yang sama panjang.



Gambar 2.19 Segitiga lancip samakaki ABC

Gambar 2.19 menunjukkan segitiga segitiga lancip samakaki ABC. ∠ABC merupakan satu dari tiga sudut lancip pada segitiga lancip samakaki ABC, sedangkan sisi kongruen yang mengapitnya adalah $\overline{AB}$ dan $\overline{BC}$.

d) Segitiga lancip samasisi

Segitiga lancip samasisi adalah segitiga lancip yang memiliki tiga sisi yang saling kongruen. Besar setiap sudut pada segitiga samasisi adalah 60° sehingga segitiga samasisi pasti merupakan segitiga lancip samasisi.

e) Segitiga tumpul sembarang

Segitiga tumpul sembarang adalah segitiga tumpul yang tidak mempunyai sisi-sisi yang kongruen

f) Segitiga siku-siku sembarang

Segitiga siku-siku sembarang adalah segitiga siku-siku yang tidak mempunyai sisi-sisi yang kongruen.

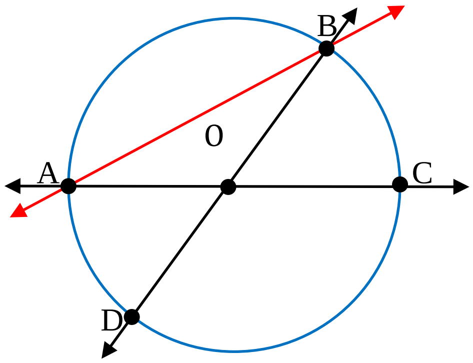
b. Sifat-sifat Segitiga

Adapun sifat-sifat yang dimiliki oleh segitiga antara lain yaitu:

1) Selisih ukuran sebarang dua sisi segitiga lebih kecil dari ukuran sisi ketiga
2) Jumlah ukuran sebarang dua sisi dari suatu segitiga lebih besar dari ukuran sisi ketiga
3) Jumlah ukuran sudut-sudut dari sebuah segitiga adalah 180^{o}. Untuk sebarang segitiga, ukuran sudut luar adalah jumlah ukuran sudut-sudut yang tidak bersisian dengan sudut luar tersebut
4) Ukuran sudut luar segitiga lebih besar daripada ukuran sudut yang tidak bersisian dengannya
5) Jika suatu segitiga mempunyai satu sudut siku-siku maka dua sudut yang lain merupakan sudut lancip
6) Sudut-sudut lancip dari sebuah segitiga siku-siku saling berpenyiku
7) Sudut-sudut di hadapan sisi-sisi yang kongruen pada segitiga samakaki saling kongruen
8) Sudut yang dibentuk oleh garis-bagi sudut puncak dan sisi alas pada segitiga samakaki adalah sudut siku-siku
9) Jika dua sisi dari suatu segitiga tidak kongruen maka sudut-sudut di hadapan sisi-sisi tersebut juga tidak kongruen dan sudut yang lebih besar berhadapan dengan sisi yang lebih panjang.

3. Lingkaran

Lingkaran adalah himpunan semua titik pada bidang yang berjarak sama terhadap titik tertentu yang disebut titik pusat lingkaran (Keddy, dkk, 1967: 425). Jarak titik pusat dengan suatu titik pada lingkaran disebut jari-jari (*radius*) lingkaran, disimbolkan dengan huruf r, yang berupa suatu bilangan riil positif. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat lingkaran dengan suatu titik sebarang pada lingkaran juga disebut jari-jari. Selain jari-jari lingkaran juga memiliki tali busur yang merupakan ruas garis yang menghubungkan dua titik sembarang pada lingkaran. Diameter adalah tali busur yang melalui titik pusat lingkaran dan berukuran dua kali dari jari-jari lingkaran.



Gambar 2.20 Lingkaran dengan titik pusat O, dan tiga garis yang memotong lingkaran

a. Sudut-sudut dalam lingkaran

Pada gambar 2.20, terbentuk sudut pusat akibat perpotongan dua garis yaitu, $\overleftrightarrow{BD}$ dan $\overleftrightarrow{AC}$ dengan $\odot O$. Sudut pusat-sudut pusat tersebut yaitu, $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, dan $\angle DOA$. Sudut pusat adalah sudut yang terbentuk oleh dua jari-jari yang bersekutu di titik pusat lingkaran. Suatu sudut dinamakan sudut keliling dalam lingkaran jika dan hanya jika kaki-kaki sudut dan titik sudutnya termuat pada lingkaran. Sudut $\angle DAB$ dan $\angle ADB$ merupakan sudut keliling dalam lingkaran.

Interior (daerah-dalam) suatu lingkaran dibentuk dari gabungan titik pusat lingkaran O dan semua titik yang berjarak kurang dari jari-jari dari titik pusat lingkaran. Sedangkan *eksterior* (daerah-luar) suatu lingkaran adalah komplemen dari gabungan lingkaran dan interiornya, atau himpunan semua titik yang berjarak lebih besar dari jari-jari lingkaran.

Juring atau sektor lingkaran didefinisikan sebagai interior lingkaran yang dibatasi oleh kaki sudut pusat dan busur yang berada di interior sudut pusat tersebut (Cummins, dkk, 2001: 484). Tembereng suatu lingkaran adalah interior lingkaran yang dibatasi oleh tali busur dan busurnya. Pada ilustrasi gambar 2.20, terdapat $\angle AOB$ dan juring OAB. Busur $\widehat{AB}$ dan kedua kaki sudut, yaitu $\overline{OA}$ dan $\overline{OB}$ membatasi juring OAB, sedangkan tali busur $\overline{AB}$ dan $\widehat{AB}$ membatasi tembereng AB.

Pada ilustrasi gambar 2.20, busur $\widehat{AB}$ dan semua titik pada lingkaran yang merupakan *interior* $\angle AOB$ disebut busur *minor*, busur $\widehat{AB}$ dan semua titik pada lingkaran yang merupakan *eksterior* $\angle AOB$ disebut busur *mayor*. Jika titik-titik O, A, dan B segaris (titik A terletak pada titik D), maka gabungan dari titik A dan B, serta semua titik yang terletak diantara titik A dan B pada lingkaran disebut setengah lingkaran. Busur $\widehat{AB}$ merupakan busur *minor* dari $\odot O$. Busur $\widehat{ACB}$ merupakan busur mayor, sedangkan $\widehat{ABC}$ dan $\widehat{BAD}$ adalah setengah lingkaran.

Definisi 2.2 (Keddy, dkk, 1967: 466)

Ukuran busur suatu lingkaran sama dengan besar sudut pusat yang membentuknya, sehingga:

1) jika $\widehat{AB}$ merupakan busur miror, maka $m\widehat{AB}$ sama dengan besar sudut yang dibentuk $\angle AOB$ ($m\angle AOB$).
2) Jika $\widehat{ABC}$ merupakan setengah lingkaran, maka $m\widehat{ABC}$ sama dengan 180^o.
3) Jika $\widehat{AXB}$ merupakan busur mayor, maka $m\widehat{BCDA} = 180^o - m\widehat{AB}$, dengan $\widehat{AB}$ adalah busur miror pada lingkaran tersebut.

b. Garis singgung lingkaran

Dalam sebuah bidang, sebuah garis dapat memotong lingkaran di 0 titik, 1 titik atau 2 titik. Hal ini bergantung pada jarak antara titik pusat lingkaran dengan salah satu titik pada sebuah garis.

Teorema 2.1 (Keddy, dkk, 1967: 428)

Pada sebuah garis dan lingkaran yang koplanar, diketahui jarak antara titik pusat lingkaran O dan garis adalah OP dan jari-jari r. Dengan demikian berlaku:

1) Jika $OP > r$, maka garis dan lingkaran tidak berpotongan.
2) Jika $OP = r$, maka garis dan lingkaran berpotongan tepat di satu titik.
3) Jika $OP < r$, maka garis dan lingkaran berpotongan di dua titik.

Bukti:

Diberikan lingkaran O dengan jari-jari r dan garis g. Jarak titik pusat lingkaran dengan garis g adalah OP.

Kasus 1:

Akan dibuktikan jika $\mathrm{OP} > \mathrm{r}$, maka garis dan lingkaran tidak berpotongan. Karena

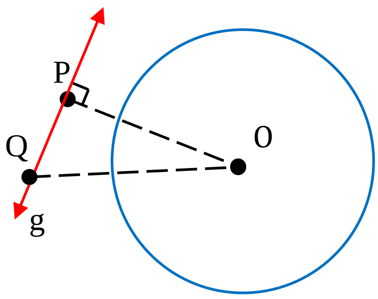
$$\mathrm{OP} > \mathrm{r}$$

Ambil sebarang titik yang lain pada garis g, misalkan titik Q. Titik P dan Q merupakan titik-titik segaris pada garis g.

Maka

$$\mathrm{OQ} > \mathrm{OP} > r.$$

Titik P dan Q segaris, maka garis g berada di eksterior lingkaran O. Hal ini berarti garis g dan lingkaran O tidak berpotongan. ■



Gambar 2.21 Lingkaran O tidak berpotongan dengan garis g

Kasus 2:

Akan dibuktikan jika $\mathrm{OP} = \mathrm{r}$, maka garis dan lingkaran berpotongan tepat di satu titik. Karena

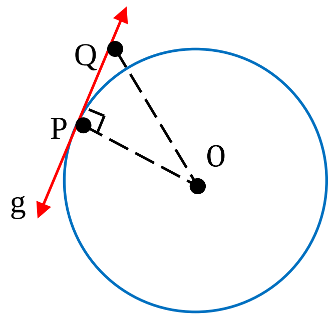
$$\mathrm{OP} = \mathrm{r}$$

, sehingga P terletak pada lingkaran O.

Ambil sebarang titik yang lain pada garis g, misalkan titik Q. Titik P dan Q merupakan titik-titik segaris pada garis g. Berdasarkan pembuktian pada kasus 1, maka

$$OQ > OP \text{ dan } OQ > r.$$

Titik P dan Q terletak segaris, tetapi titik P berada pada lingkaran O dan titik Q berada di *eksterior* lingkaran O. Hal ini berarti garis g dan lingkaran O berpotongan tepat pada satu titik yaitu titik P.■



Gambar 2.22 Lingkaran O berpotongan dengan garis g tepat pada satu titik

Kasus 3:

Akan dibuktikan jika $OP < r$, maka garis dan lingkaran berpotongan di dua titik.

Karena $OP < r$, hal ini memungkinkan untuk $OP = 0$ dan $OP > 0$

Kasus 3a

Jika $P = O$, maka garis g melalui pusat lingkaran dan berpotongan dengan lingkaran O di dua titik. Misalkan titik perpotongan tersebut titik Q dan R yang terletak pada lingkaran, maka titik-titik P, Q dan R merupakan titik-titik segaris pada garis g dengan $\mathrm{PQ} = \mathrm{PR} = \mathrm{r}$ (Gambar 2.3a).

Kasus 3b

Jika

$$\mathrm{OP} < \mathrm{r} \text{ dan } \mathrm{OP} > 0$$

berarti $\mathrm{r} > \mathrm{OP} > 0$, maka OP dan r merupakan bilangan positif.

Dan jika

$$(\mathrm{OP})^2 < \mathrm{r}^2 \text{ dan } \mathrm{r}^2 - (\mathrm{OP})^2 > 0,$$

berarti $\sqrt{\mathrm{r}^2 - (\mathrm{OP})^2}$ bernilai dan merupakan bilangan positif.

Oleh karena itu, terdapat dua titik , yaitu Q dan R yang berkoordinat di $\sqrt{\mathrm{r}^2 - (\mathrm{OP})^2}$ dan $-\sqrt{\mathrm{r}^2 - (\mathrm{OP})^2}$.

Q, P, dan R merupakan titik-titik yang terletak segaris di g, dengan

$$\mathrm{QP} = \mathrm{PR}$$

sehingga

$$\mathrm{QP} = \mathrm{PR} = \sqrt{\mathrm{r}^2 - (\mathrm{OP})^2}.$$

Dari empat titik yang ada, yaitu O, Q, P dan R terbentuk dua segitiga, yaitu $\Delta\mathrm{QPO}$ dan $\Delta\mathrm{RPO}$ yang berjenis segitiga siku-siku. Oleh karena itu, dengan menggunakan Phytagoras diperoleh:

$$(\mathrm{OP})^2 + (\mathrm{PQ})^2 = (\mathrm{OQ})^2 \text{ dan } (\mathrm{OP})^2 + (\mathrm{PR})^2 = (\mathrm{OR})^2,$$

sehingga

$$\mathrm{r}^2 = \mathrm{OQ}^2 = \mathrm{OR}^2$$

dan

$$r = OQ = OR.$$

Dengan demikian Q dan R berada pada lingkaran (Gambar 2.23b).

Untuk menunjukkan tidak ada titik lain selain Q dan R pada perpotongan garis g dengan lingkaran O, diberikan penyataan berikut:

Jika titik X merupakan salah satu titik perpotongan antara garis g dengan lingkaran O, maka

$OX = r$ dan $(OP)^2 + (PX)^2 = (OX)^2$

sehingga

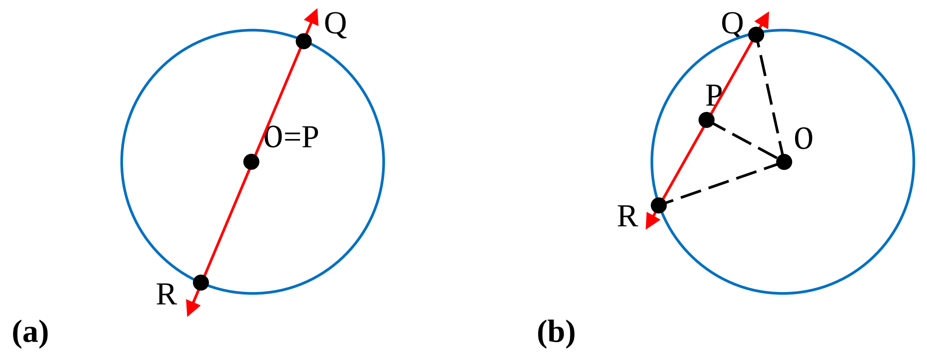
$$(OP)^2 + (PX)^2 = r^2$$

dan

$$(XP)^2 = r^2 - (OP)^2.$$

Dengan demikian $XP = \sqrt{r^2 - (OP)^2}$.

Titik P membagi $\overline{QR}$ menjadi dua bagian yang sama panjang. Oleh karena itu, jika sebuah titik berada pada suatu lingkaran dan sekaligus terletak pada suatu garis, maka titik tersebut harus terletak di $\sqrt{r^2 - OP^2}$ dan $-\sqrt{r^2 - OP^2}$, tetapi titik yang terletak tersebut hanyalah titik Q atau R saja. Oleh karena itu, tidak terdapat titik yang lain selain Q dan R pada perpotongan garis g dan lingkaran O. ■



Gambar 2.23   Garis dan lingkaran berpotongan di dua titik

Definisi 2.3 (Keddy, dkk, 1967: 436)

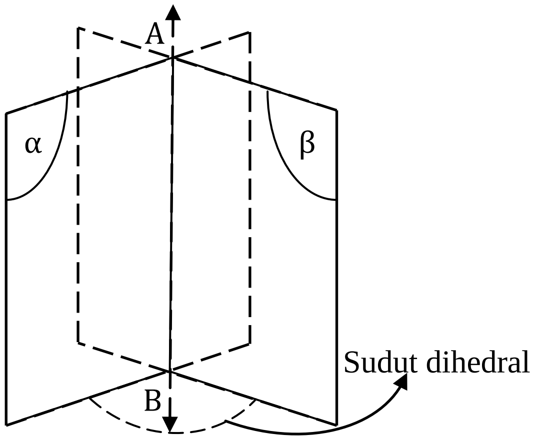
Sebuah garis dan sebuah lingkaran dikatakan bersinggungan jika dan hanya jika garis dan lingkaran koplanar dan mereka berpotongan tepat di satu titik. Garis tersebut disebut garis singgung lingkaran (*tangent*) dan titik perpotongan garis dan lingkaran disebut titik singgung (*point of tangency*). Sebuah garis yang memotong suatu lingkaran tepat di dua titik disebut garis-potong lingkaran (*secant*). Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik dan tegak lurus dengan jari-jari lingkaran yang melalui titik singgungnya.

B. Geometri Ruang

Ruang adalah himpunan semua titik (Rich dan Thomas, 2009: 270). Dalam geometri ruang objek-objek pada geometri bidang juga berlaku.

Aksioma 2.1 (keddy, dkk, 1967:41).

Jika terdapat dua bidang yang berpotongan, maka dari perpotongan tersebut terbentuk sebuah garis.



Gambar 2.24 Perpotongan bidang α dan bidang β

Gambar 2.24 merupakan perpotongan dua bidang, yaitu bidang α dan bidang β. Dari perpotongan tersebut terbentuk sebuah garis AB. Garis $\overleftrightarrow{AB}$ disebut garis sekutu. Dari perpotongan dua bidang tersebut selain terbentuk garis sekutu juga terbentuk sudut yang disebut sudut dihedral.

1. Sudut antar bidang

a. Sudut dihedral

Definisi 2.4 (Rich dan Thomas, 2009: 266)

Suatu sudut dihedral adalah gabungan dari sebuah garis dan dua buah setengah-bidang-non-koplanar yang sekutunya garis tersebut.

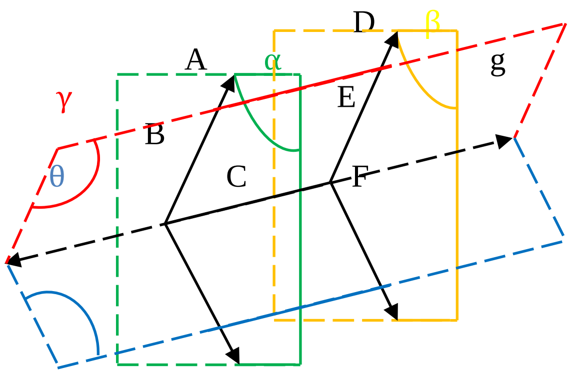
Definisi 2.5 (Rich dan Thomas, 2009: 272)

Melalui sebarang titik pada rusuk dari suatu sudut dihedral terdapat sebuah bidang yang melaluinya dan tegaklurus terhadap rusuk tersebut. Perpotongan bidang tersebut dengan setiap bidang-sisi sudut dihedral tersebut berupa sebuah sinar garis yang berpangkal sama pada sebarang titik tersebut. Sudut yang dibentuk oleh kedua sinar garis tersebut dinamakan sudut bidang dari sudut dihedral.

Jika garis sekutu dari sudut dihedral berpotongan pada dua titik berlainan dengan bidang-bidang yang tegak lurus garis sekutu tersebut, maka bidang-bidang tersebut sejajar satu sama lain. Garis-garis yang merupakan perpotongan antara bidang-bidang sejajar tersebut dengan sisi-sisi sudut dihedral akan sejajar. Setiap titik sepanjang garis persekutuan menentukan sudut dihedral yang sama besar. Oleh karena itu, dirumuskan Teorema 2.2 sebagai berikut:

Teorema 2.2 (Nielsen and Vanlonkhuyzen, 1949: 105)

Jika dua sudut (tidak pada bidang yang sama) sepasang-sepasang kakinya sejajar dengan arah yang sama, maka kedua sudut tersebut sama besar.



Gambar 2.25 Bidang α, β, γ, dan θ

Bukti:

Misalkan diketahui ∠ABC terletak pada bidang α dan ∠DEF terletak pada bidang β. Diketahui bahwa sepasang-sepasang kaki-kaki sudut tersebut sejajar. Dengan kata lain $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{ED}$ dan $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$.

Akan dibuktikan bahwa m∠ABC = m∠DEF.

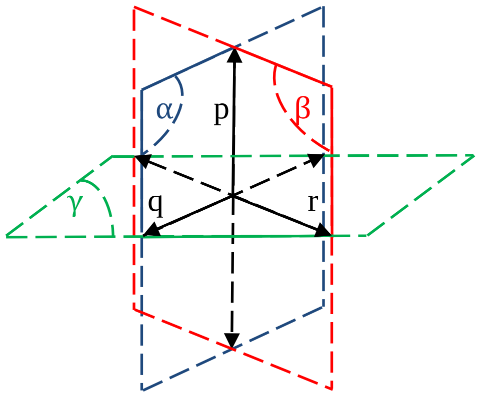
Karena $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{ED}$ dan $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{EF}$, serta ∠ABC terletak pada bidang α dan ∠DEF terletak pada bidang β, maka bidang α dan bidang β sejajar.

Berdasarkan Aksioma 2.1, dari perpotongan dua bidang terbentuk sebuah garis. Perpotogan bidang γ dan bidang θ membentuk garis g yang merupakan garis sekutu dua bidang yang berpotongan tersebut. Sudut ∠ABC dan ∠DEF meupakan sudut dihedral dari bidang γ dan bidang θ (sudut yang terbentuk dari dua bidang yang berpotongan). Oleh karena itu, m∠ABC = m∠DEF ,sehingga terbukti bahwa jika dua sudut (tidak sebidang) yang sepasang-sepasang kaki sudutnya sejajar satu sama lain, maka kedua sudut tersebut sama besar. ■

Berdasarkan bukti dari Teorema 2.2, sudut dihedral dapat diukur dari sebarang bidang yang melalui suatu titik pada garis persekutuan yang sekaligus tegaklurus pada garis persekutuan tersebut.

Teorema 2.3 (Nielsen and Vanlonkhuyzen, 1949: 106)

Suatu bidang γ tegak lurus pada dua bidang (α dan β) yang berpotongan jika dan hanya jika bidang γ tegak lurus pada garis persekutuan bidang α dan β.



Gambar 2.26 Bidang γ tegak lurus pada dua bidang (α dan β) yang berpotongan

Bukti:

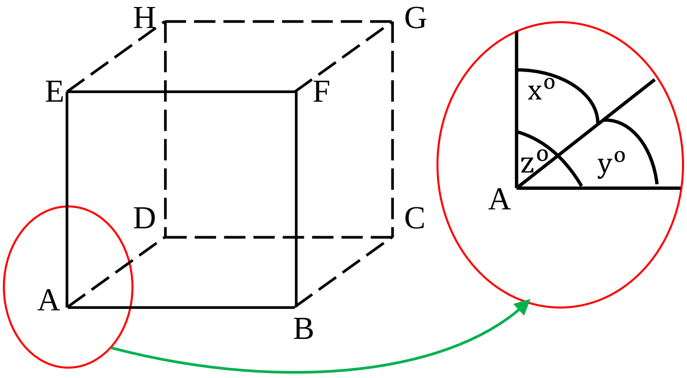
Gambar 2.26 menunjukkan bidang γ yang berpotongan tegak lurus dengan kedua bidang (α dan β). p, q, dan r merupakan garis sekutu akibat perpotogan tiga bidang α, β, dan γ.

Akan dibuktikan bidang γ tegak lurus pada dua bidang (α dan β) yang berpotongan jika dan hanya jika bidang γ tegak lurus pada garis persekutuan bidang α dan β.

Terdapat dua bidang, yaitu α dan β yang berpotongan. Dari perpotongan kedua tersebut terbentuk sebuah garis sekutu, yaitu garis p. Garis p terletak pada bidang α dan β. Jika terdapat bidang yang lain, yaitu bidang γ yang berpotongan dengan bidang α dan β, maka akan terbentuk dua garis sekutu yang lain, yaitu r dan s. Sehingga pada perpotongan tiga bidang tersebut membentuk tiga garis sekutu p, q, da r. Garis r merupakan hasil perpotongan bidang α dengan bidang γ. Garis r terletak pada bidang α dan bidang γ. Garis s merupakan hasil perpotongan bidang β dan bidang γ. Garis s terletak pada bidang β dan bidang γ. Jika p berpotongan tegak lurus dengan bidang γ, maka bidang γ tegak lurus pada bidang α dan β.■

b. Sudut trihedral

Tiga bidang yang berpotongan pada satu titik membentuk sudut ruang atau sudut trihedral dan titik titik sekutunya disebut titik sudut. Sebuah sudut trihedral mempunyai tiga sudut sisi yang terbentuk dari masing-masing garis persekutuan bidang. Setiap dua sisi dari sudut trihedral membentuk sudut dihedral. Hal ini diilustrasikan gambar 2.27 berikut



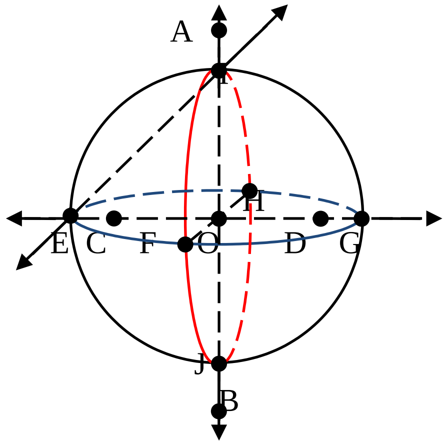
Gambar 2.27 Sudut trihedal pada kubus ABCD-EFGH

Teorema 2.4 (Nielsen and Vanlonkhuyzen, 1949: 106-107)

Jumlah sebarang dua sudut sisi dari sebuah sudut trihedral lebih besar dari sudut sisi ketiga.

2. Bola (Sphere)

Bola merupakan himpunan titik-titk dalam ruang yang mempunyai jarak sama terhadap titik pusatnya (Keddy, dkk, 1967: 426). Seperti halnya lingkaran, pada bola juga terdapat jari-jari (r), talibusur, dan diameter. Jari-jari pada bola merupakan ruas garis yang menghubungkan titik pusat bola dengan sembarang garis pada bola. Busur-busur pada bola merupakan busur-busur lingkaran yang membentuknya. Tali busur adalah ruas garis yang menghubungkan dua titik sebarang pada bola, sedangkan diameter bola adalah tali busur yang melalui titik pusat dan berukuran dua kali jari-jari bola.



Gambar 2.28 Bola dengan titik pusat O dan jari-jari r berpotongan dengan tiga garis

a. Unsur-unsur Bola

Gambar 2.28 menunjukkan bola dengan titik pusat O dan jari-jari r yang berpotongan dengan tiga garis. Bola tersebut merupakan perpotongan dari duabuah lingkaran besar. Penamaan bola tersebut dapat ditulis dengan lebih singkat, yaitu bola $\odot(O, r)$. Pada ilustrasi gambar 2.28 terdapat tiga garis yang berpotongan dengan bola $\odot(O, r)$, yaitu $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AE}$, dan $\overleftrightarrow{EG}$. $\overleftrightarrow{AE}$ berpotongan dengan bola di dua titik, yaitu titik A dan E , sehingga $\overline{AE}$ yang merupakan tali busur bola. Terdapat tali busur yang lain, yaitu $\overline{AB}$ dan $\overline{EG}$. $\overline{AB}$ dan $\overline{EG}$ masing-masing melalui titik O yang merupakan titik pusat bola, sehingga $\overline{AB}$ dan $\overline{EG}$ merupakan diameter bola $\odot(O, r)$. Busur-busur pada bola tersebut merupakan busur-busur dari duabuah lingkaran yang membentuknya. Busur-busur tersebut antara lain, $\widehat{EF}$, $\widehat{AF}$, $\widehat{GHE}$, $\widehat{AHB}$, $\widehat{EFGH}$, dan seterusnya. Pada setiap diameter bola terdapat dua titik yang merupakan ujung-ujung diameter bola, titik-titik tersebut merupakan titik diametral bola. Misalkan pada $\overline{AB}$, titik A dan B merupakan titik diametral bola $\odot(O, r)$.

Seperti pada lingkaran, pada bola juga terdapat daerah interior dan eksterior. Daerah interior bola merupakan gabungan pusat bola dan semua titik yang berjarak kurang dari jari-jari bola, serta semua titik-titik pada bola. Daerah eksterior bola merupakan himpunan semua titik yang berjarak lebih dari jari-jari bola.

b. Perpotongan bidang datar dengan bola

Andaikan terdapat sebuah bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ dan bidang α yang memuat titik P. Jarak antara titik pusat bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ dengan bidang α adalah OP, maka terdapat tiga kemungkinan, yaitu:

1) Jika $\mathrm{OP} > \mathrm{r}$
2) Jika $\mathrm{OP} = \mathrm{r}$
3) Jika $\mathrm{OP} < \mathrm{r}$

Dari tiga kemungkinan tersebut terdapat teorema 2.5 berikut:

Teorema 2.5 (Keddy, dkk, 1967: 432)

Andaikan terdapat sebuah bola yang titik pusatnya O dengan jari-jari r dan sebuah bidang. Jarak titik pusat bola dengan bidang adalah OP, maka:

1) Jika $\mathrm{OP} > \mathrm{r}$, bidang dan bola tidak berpotongan
2) Jika $\mathrm{OP} = \mathrm{r}$, bidang menyinggung bola tepat pada satu titik
3) Jika $\mathrm{OP} < \mathrm{r}$, bidang berpotongan dengan bola dan perpotongan tersebut membentuk sebuah lingkaran.

Bukti:

Diberikan sebuah bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ dan sebuah bidang α yang memuat titik P. Jarak titik pusat bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ dengan bidang α adalah OP.

Kasus 1:

Akan dibuktikan Jika $\mathrm{OP} > \mathrm{r}$, maka bidang dan bola tidak berpotongan.

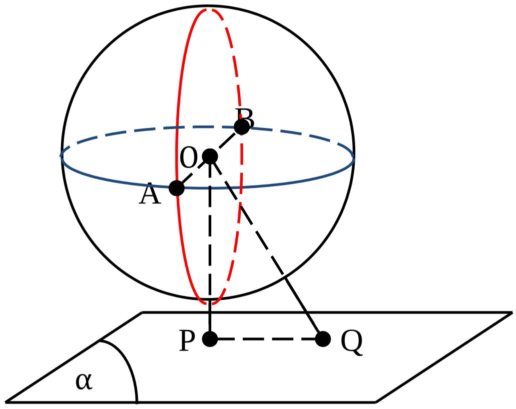
Tarik garis dari pusat bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ ke titik P, sehingga terbentuk $\overline{\mathrm{OP}}$ yang tegak lurus dengan bidang α. Jarak titik pusat bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ dengan bidang α sama dengan panjang $\overline{\mathrm{OP}}$.

Karena $\mathrm{OP} > \mathrm{r}$, maka P berada di daerah eksterior bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$.

Ambil sebarang titik yang lain pada bidang α selain titik P, misalkan titik Q dan tarik garis dari titik pusat bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$ sehingga terbentuk $\overline{\mathrm{OQ}}$. P dan Q merupakan titik sebidang pada bidang α. Tarik garis dari titik P sampai titik Q sehingga terbentuk $\overline{\mathrm{PQ}}$ yang tegak lurus terhadap $\overline{\mathrm{OP}}$ yang berada pada bidang α, sehingga

$$\mathrm{OQ} > \mathrm{OP} > r.$$

Oleh karena itu, bidang α berada di daerah eksternal bola $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{r})$. Hal ini berarti bidang α tidak berpotongan dengan bidang α.■



Gambar 2.29 Bola $\odot(O, r)$ tidak berpotongan dengan bidang α

Kasus 2:

Akan dibuktikan jika $OP = r$, bidang menyinggung bola tepat pada satu titik.

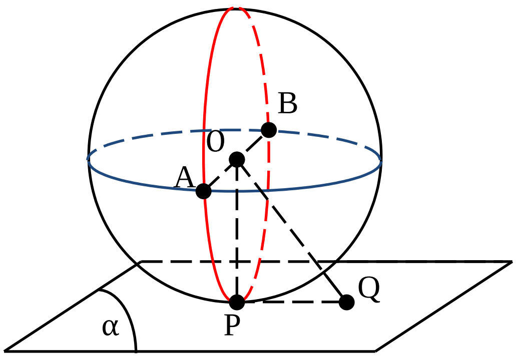
Tarik garis dari pusat bola $\odot(O, r)$ ke titik P, sehingga terbentuk $\overline{OP}$ yang tegak lurus dengan bidang α. Jarak titik pusat bola $\odot(O, r)$ dengan bidang α sama dengan panjang $\overline{OP}$.

Karena $OP = r$, maka $\overline{OP} = r$ dan titik P terletak pada bola $\odot(O, r)$.

Ambil sebarang titik yang lain pada bidang α, misalkan titik Q dan tarik garis dari titik pusat bola $\odot(O, r)$ sehingga terbentuk $\overline{OQ}$. Titik P dan Q merupakan titik sebidang pada bidang α. Tarik garis dari titik P sampai titik Q sehingga terbentuk $\overline{PQ}$ yang tegak lurus terhadap $\overline{OP}$ yang berada pada bidang α, sehingga

$$OQ > OP.$$

Titik P terletak pada bola dan titik Q berada di daerah eksterior bola. Hal ini berarti bidang α menyinggung bola $\odot(O, r)$ tepat pada satu titik.



Gambar 2.30 Bidang α menyinggung bola ⊙(O, r) tepat pada satu titik

Kasus 3

Akan dibuktikan jika $OP < r$, bidang berpotongan dengan bola dan perpotongan tersebut membentuk sebuah lingkaran. Pada kasus ini ada dua kemungkinan, yaitu $OP > 0$ dan $OP = 0$ dengan kata lain $r > OP > 0$ dan $OP = r$.

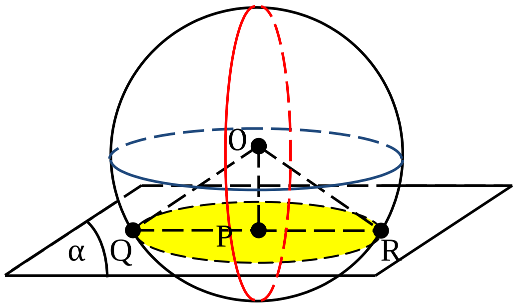
Tarik garis dari pusat bola $\odot(O, r)$ ke titik P, sehingga terbentuk $\overline{OP}$ yang tegak lurus dengan bidang α. Jarak titik pusat bola $\odot(O, r)$ dengan bidang α sama dengan panjang $\overline{OP}$.

Karena $OP < r$, maka P berada di daerah interior bola $\odot(O, r)$, sehingga bidang α berpotongan dengan bola $\odot(O, r)$.

a. Jika $r > OP > 0$, maka r dan OP bernilai dan merupakan bilangan positif.

   Ambil sebarang dua titik yang yang berjarak sama dengan titik pusat bola $\odot(O, r)$ dan dua titik tersebut merupakan perpotongan bidang α dengan bola $\odot(O, r)$. Misalkan titik Q dan R, sehingga $OQ = OR$. Karena P, Q dan R merupakan titik-titik sebidang pada bidang α, tarik sebuah garis dari Q sampai R yang melalui P, maka terbentuk $\overline{QR}$ yang memuat P. Titik P membagi $\overline{QR}$ menjadi dua ruas garis yang sama panjang, sehingga $QP = PR$ Karena $\overline{OP}$ tegak lurus dengan bidang α dan $QP = PR$, maka $\overline{OP} \perp \overline{QP}$ dan $\overline{OP} \perp \overline{PR}$, sehingga

$$QP = \sqrt{OQ^2 - OP^2} \text{ atau } OP = \sqrt{r^2 - OP^2}$$



Gambar 2.31 Bidang α memotong bola $\odot(O, r)$ di dua titik

Semua titik yang merupakan titik-titik perpotongan bidang α berpotongan dengan bola $\odot(O, r)$ mempunyai sifat yang sama dan berjarak $\sqrt{r^2 - OP^2}$ terhadap P. Oleh karena itu, perpotongan bidang α dengan bola $\odot(O, r)$ merupakan sebuah lingkaran dengan titik pusat P dan berjari-jari $\sqrt{r^2 - OP^2}$.■

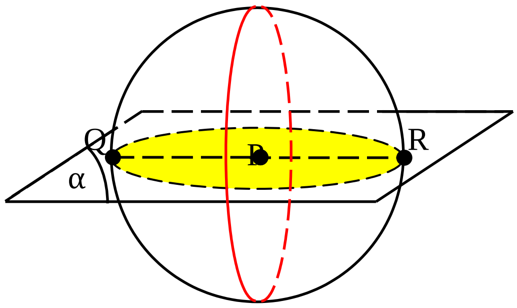
b. Jika $OP > r$ dan $P = O$, maka P berhimpitan dengan O. Akibatnya bidang α berpotongan dengan bola $\odot(O, r)$ tepat melalui titik pusat bola $\odot(O, r)$. Ambil sebarang dua titik yang merupakan titik-titik perpotongan bidang α berpotongan dengan bola $\odot(O, r)$, misalkan Q dan R. Karena

$$P = O,$$

,maka

$$QP = PR.$$

QP dan PR merupakan jari-jari lingkaran yang terbentuk akibat bidang α dengan bola $\odot(O, r)$ yang berpotongan dan sekaligus merupakan jari-jari bola $\odot(O, r)$ atau dapat ditulis $r = QP = PR$, sehingga semua titik yang merupakan titik-titik perpotongan bidang α berpotongan dengan bola $\odot(O, r)$ bersifat sama dan berjarak sama dengan titik P ataupun O. Oleh karena itu, jari-jari bola $\odot(O, r)$ dan lingkaran yang terbentuk akibat bidang α dengan bola $\odot(O, r)$ sama. Lingkaran yang terbentuk akibat bidang α dengan bola $\odot(O, r)$ tersebut dinamakan sebagai lingkaran besar pada bola.



Gambar 2.32 Bidang α memotong bola $\odot(O, r)$ tepat pada titik pusat bola $\odot(O, r)$

Terdapat teorema lainnya yang menyatakan hubungan suatu bidang yang menyinggung sebuah bola. Hal tersebut terdapat pada teorema berikut:

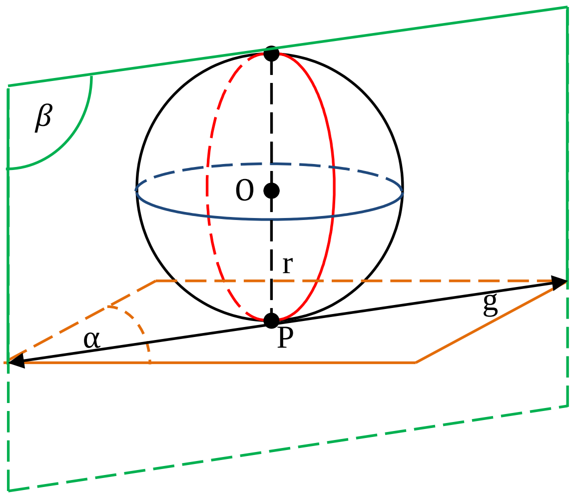
Teorema 2.6 (A. Sarjana, 2008: 96)

Sebuah bidang singgung pada sebuah bola, berdiri tegak lurus jari-jari bola yang melalui titik singgungnya.

Bukti:

Misalkan terdapat bidang α dan bola $\odot(O, r)$ bersinggungan di titik P.

Diberikan sebuah bidang β yang memotong bola tepat melalui titik pusat bola dan titik P, sehingga antara bidang α dan bidang β berpotongan dan terbentuk sebuah garis yang memuat P. Misalkan garis tersebut g, maka P terletak pada garis g, bola $\odot(O, r)$, bidang α dan bidang β. Titik P merupakan titik sekutu dari bidang α yang bersinggungan dengan bola $\odot(O, r)$ dan juga P merupakan salah satu titik yang terletak pada garis g (akibat perpotongan bidang α dengan bidang β). Hal ini diilustrasikan oleh gambar berikut:



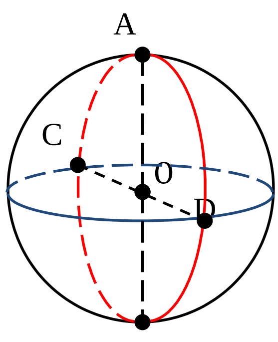
Gambar 2.33 Bidang α, bidang β, dan bola $\odot(O, r)$ bersekutu pada satu titik P

Oleh karena itu, bidang α berpotongan tegak lurus dengan bidang β. Dengan demikian berati bidang α menyinggung bola dan tegak lurus terhadap $\overline{OP}$ yang merupakan jari-jari bola $\odot(O, r)$. ■

c. Lingkaran besar

Lingkaran besar merupakan hasil perpotongan antara sebuah bola dan sebuah bidang yang melalui pusat bola. Karena banyaknya bidang yang dapat dibuat melalui titik pusat bola adalah tak terhingga, maka banyaknya lingkaran besar juga tak berhingga. Pada setiap lingkaran besar, terdapat tak terhingga pasangan titik diametral. Akibatnya, jika terdapat dua lingkaran besar pada bola maka kedua lingkaran besar akan memiliki diameter yang sama dengan diameter bola dan kedua lingkaran besar tersebut akan berpotongan satu sama lain. Karena diameter keduanya sama, maka kedua lingkaran besar tersebut akan kongruen satu sama lain sehingga titik pusat bola merupakan titik pusat kedua lingkaran besar tersebut. Kedua lingkaran besar tersebut dapat saling tegak lurus namun tidak bisa saling sejajar.

Untuk setiap lingkaran besar pada bola, diameter bola yang tegak lurus terhadap diameter lingkaran besar disebut sumbu. Dua titik yang termuat pada sumbu dan berada pada bola merupakan titik kutub dari lingkaran besar yang diberikan. Oleh karena itu, titik pusat lingkaran besar, titik pusat bola serta kedua titik kutub lingkaran besar terdapat pada suatu garis lurus yang disebut sumbu. Akibatnya, jika sebuah lingkaran besar A melalui satu titik kutub suatu lingkaran besar B maka lingkaran besar A akan melalui titik kutub lingkaran besar B yang lain.



Gambar 2.34 Perpotongan dua lingkaran besar

Gambar 2.34 merupakan bola yang terbentuk dari perpotongan dua lingkaran besar yang berpotongan di titik C dan D. Ruas garis $\overline{\mathrm{AB}}$ dan $\overline{\mathrm{CD}}$ merupakan diameter dari lingkaran besar dan juga diameter bola tersebut. Oleh karena itu, jika dianggap bahwa $\overline{\mathrm{CD}}$ sebagai diameter bola dan $\overline{\mathrm{AB}}$ sebagai diameter lingkaran serta dua diameter tersebut tegaklurus, maka $\overline{\mathrm{CD}}$ disebut sumbu bola dengan C dan D sebagai titik kutubnya, begitu juga berlaku untuk sebaliknya.

Teorema 2.7 (Cresswell, 1816: 12)

Jika dua buah lingkaran besar pada bola tegak lurus satu sama lain maka kutub dari salah satu lingkaran besar tersebut akan berada pada lingkaran besar yang lain, dan sebaliknya.

Bukti:

Jika dua lingkaran besar berpotongan tegak lurus satu sama lain maka diameter kedua lingkaran besar tersebut akan saling tegak lurus satu sama lain. Artinya, diameter lingkaran besar pertama merupakan sumbu dari lingkaran besar kedua, dan sebaliknya. Oleh karena itu, kutub dari salah satu lingkaran besar akan berada pada lingkaran besar yang lain, dan sebaliknya. ■

Teorema 2.8 (Cresswell, 1816: 15)

Jika sebarang dua lingkaran besar pada bola berpotongan tegak lurus pada suatu lingkaran besar ketiga yang diberikan, maka titik perpotongan lingkaran besar pertama dan kedua merupakan kutub dari lingkaran besar ketiga yang diberikan.

Bukti:

Dari Teorema 2.7 diperoleh bahwa kutub dari salah satu lingkaran besar akan berada pada lingkaran besar yang lain jika kedua lingkaran besar tersebut berpotongan tegak lurus. Lingkaran besar pertama dan kedua berpotongan tegak lurus dengan lingkaran besar ketiga sehingga kutub dari lingkaran besar ketiga terdapat pada lingkaran besar pertama dan kedua. Artinya, dua titik kutub lingkaran besar ketiga tersebut merupakan titik perpotongan lingkaran besar pertama dan kedua.

Terdapat beberapa istilah pada bola terkait jarak, antara lain *direct distance*, *spherical distance*, dan *polar distance*. Misalkan terdapat sebarang dua titik pada bola. *Direct distance* adalah garis lurus yang menghubungkan kedua titik tersebut. *Spherical distance* adalah busur dari lingkaran besar yang menghubungkan kedua titik tersebut. Jika kedua titik tersebut merupakan titik kutub dari sebuah lingkaran besar maka jarak salah satu titik tersebut terhadap titik-titik di lingkaran besar disebut *polar distance*.

Teorema 2.9 (Cresswell, 1816: 20)

Polar distance yang menghadap sudut pada pusat lingkaran itu sendiri disebut kuadran, dan tali busurnya merupakan sisi bangun segi pada lingkaran besar dalam bola. Jika *polar distace* merupakan satu kuadran, maka lingkaran tersebut dinamakan lingkaran besar.

Bukti:

Pertama, jika sumbu tegak lurus terhadap suatu lingkaran besar (bidang yang memotong bola melalui pusatnya), maka jelas bahwa *polar distance* akan menghadap sudut siku-siku sedemikian sehingga *polar distance* merupakan kuadran dan tali busurnya merupakan sisi dari suatu bangun segi pada lingkaran besar dalam bola (Elements, 4: 4).

Kedua, jika *polar distance* berupa satu kuadran, maka jelas bahwa sebarang diameter dari lingkaran besar yang diberikan akan memotong lingkaran besar lainnya, melalui *axis* dan diameter. Sedemikian sehingga lingkaran tersebut adalah lingkaran besar itu sendiri.

Definisi 2.6 (Cresswell, 1816: 15)

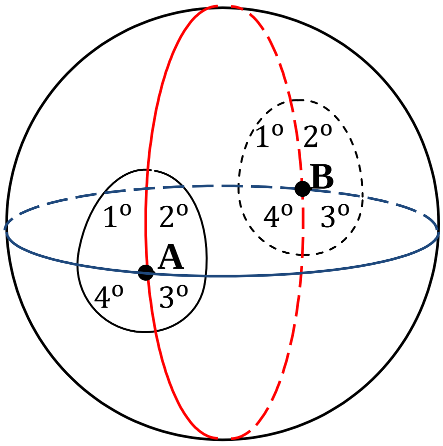
Empat bagian dari sebuah lingkaran besar pada sebuah bola (busur-busur pada lingkaran) disebut kuadran.

Pada bola, jika dua lingkaran besar berbeda berpotongan maka perpotongan tersebut akan membetuk sudut. Besar sudut tersebut dapat diukur dengan menggunakan garis singgung pada setiap lingkaran besar di titik perpotongan kedua lingkaran besar tersebut.

Definisi 2.7 (Cresswell, 1816: 27)

Sudut pada bola merupakan hasil perpotongan dua busur dari lingkaran besar berbeda yang berpotongan di suatu titik.

Akibatnya, jika terdapat dua lingkaran besar berpotongan, maka kedua busur yang berpotongan tersebut membentuk dua sudut pada segidua-bola yang jumlah keduanya sama dengan dua sudut siku-siku. Pada dua lingkaran besar berpotongan di suatu titik, sudut yang bertolak belakang ataupun berhadapan akan sama besarnya, sehingga pada setiap titik perpotongan kedua lingkaran besar tersebut akan terbentuk empat sudut yang berjumlah 360^{o}. Hal ini diilustrasikan gambar 2.35 berikut:



Gambar 2.35 Sudut-sudut pada segidua-bola AB

Gambar 2.35 menunjukkan dua lingkaran besar berpotongan di titik A dan B. Pada titik sudut A, terbentuk empat sudut, yaitu $\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle A_2$, $\sphericalangle A_3$, dan $\sphericalangle A_4$. Pada titik sudut B, terbentuk empat sudut, yaitu $\sphericalangle B_1$, $\sphericalangle B_2$, $\sphericalangle B_3$, dan $\sphericalangle B_4$. Pada sudut tersebut berlaku:

$$\sphericalangle A_1 \cong \sphericalangle A_4, \sphericalangle A_2 \cong \sphericalangle B_2, \sphericalangle A_3 \cong \sphericalangle B_3, \sphericalangle A_4 \cong \sphericalangle B_4$$

dan

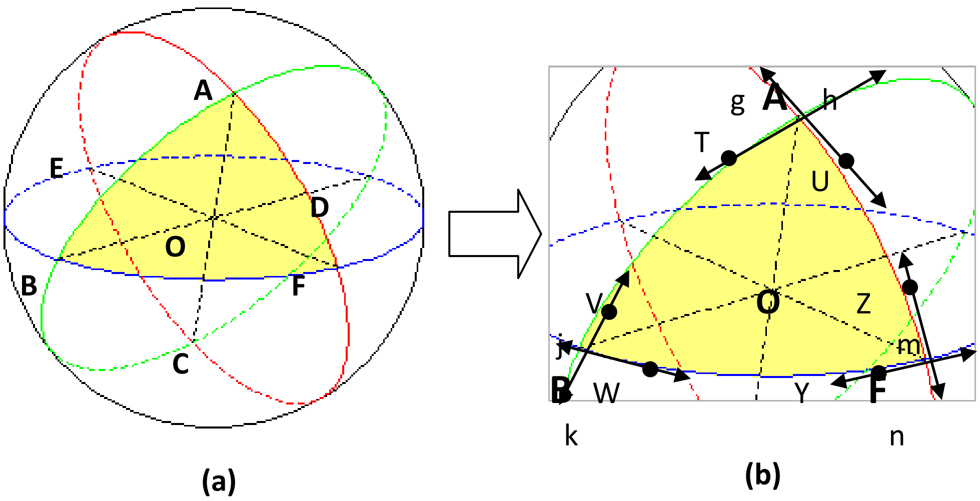
$$\sphericalangle A_1 \cong \sphericalangle A_3, \sphericalangle A_2 \cong \sphericalangle A_4, \sphericalangle B_1 \cong \sphericalangle B_3, \sphericalangle B_2 \cong \sphericalangle B_4$$

Selain kekongruenan sudut pada bola, sudut-sudut tersebut merupakan sudut yang besisian atau berpelurus. $\sphericalangle A_1$ berpelurus dengan $\sphericalangle A_2$, $\sphericalangle A_1$ berpelurus dengan

$\measuredangle A_4$, $\measuredangle B_1$ berpelurus dengan $\measuredangle B_2$, $\measuredangle B_1$ berpelurus dengan $\measuredangle B_4$, dan seterusnya. Pada sudut yang berpelurus, jumlah dua sudut yang berpelurus sama dengan 180^o. Sudut-sudut yang bertolak belakang, besar sudutnya sama besar.

3. Segitiga-bola

Segitiga-bola adalah segitiga yang terletak pada permukaan bola yang terbentuk dari gabungan tiga busur lingkaran besar pada sebuah bola, perpotongan-perpotongan tiga busur lingkaran tersebut akan membentuk segitiga (Cresswell, 1816:48). Busur-busur lingkaran disebut busursisi pada segitiga dengan satuan derajad. Besar busursisi tergantung pada besar sudut pusat lingkaran besar yang membentuk busursisi tersebut, sedangkan titik potong dari lingkaran besar juga disebut titik sudut segitiga.



Gambar 2.36 Segitiga pada permukaan bola

Gambar 2.36 merupakan segitiga yang terbentuk dari tiga lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang berpotongan di titik yang berbeda. Perpotongan dari tiga lingkaran besar berbeda membentuk enam titik yang berbeda, yaitu titik A, B, C, D, E dan F. Pada gambar 2.36 membentuk delapan segitiga, yaitu segitiga ABF, segitiga AFD, segitiga ADE, segitiga AEB, segitiga CBF, segitiga CDE segitiga CFD dan segitiga CEB.

Misalkan pada segitiga ABF, terdapat tiga titik perpotongan dari tiga busur lingkatan, yaitu A, B, dan F, sehingga pada segitiga ABF terdapat tiga sudut yaitu ∢A, ∢B, dan ∢F atau ∢ABF, ∢BFA, dan ∢FAB. Busursisi-busursisi pada segitiga ABF adalah $\widehat{AB}$, $\widehat{BF}$, dan $\widehat{AF}$.

Definisi 2.8 (Cresswell, 1816: 27)

Ukuran sudut segitiga-bola sama dengan ukuran sudut yang dibentuk oleh garis singgung yang menyinggung busur pada suatu titik perpotongan.

Menurut Definisi 2.8, akan ditentukan m∢BAF pada segitiga ABF. Pada gambar 2.36b terdapat segitiga ABF pada bola O dengan $\widehat{AB}$, $\widehat{BF}$, dan $\widehat{AF}$ sebagai sisi-sisi segitiga yang disebut busursisi. Terdapat garis singgung h di titik A terhadap $\widehat{AB}$, dan garis singgung g di titik A terhadap $\widehat{AF}$. Oleh karena itu, m∢BAF pada segitiga ABF sama dengan ukuran sudut yang dibentuk oleh dua garis singgung g dan h. Jika terdapat titik T pada garis h dan titik U pada garis g maka m∢BAF sama dengan m∠TAU.

Pada Gambar 2.36a, titik A merupakan salah satu titik kutub dari lingkaran besar yang memuat titik B,F,E, dan D. Besar sudut m∢BAF akan mempunyai ukuran yang sama dengan m$\widehat{BF}$, sesuai dengan teorema yang diungkapkan oleh Nielsen & Vanlokhuyzen sebagai berikut :

Teorema 2.10 (Nielsen & Vanlokhuyzen, 1949: 109)

Sudut segitiga-bola mempunyai ukuran yang sama dengan busur lingkaran besar yang kutubnya adalah titik sudut tersebut.

Bukti:

Berdasarkan gambar 2.36b, akan dibuktikan bahwa $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BAF} = \mathrm{m}\widehat{\mathrm{BF}}$.

Lingkaran hijau dengan kutub A memotong lingkaran biru dan lingkaran merah di titik B dan F.

Akan dibuktikan bahwa $\mathrm{m}\widehat{\mathrm{BF}} = \mathrm{m}\angle\mathrm{BOF} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BAF} = \mathrm{m}\angle\mathrm{TAU}$.

1) Sesuai Definisi 2.8, $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BAF} = \mathrm{m}\angle\mathrm{TAU}$
2) Akan dibuktikan $\mathrm{m}\angle\mathrm{BOF} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BAF}$

Tarik garis sebagai jari-jari bola, yaitu $\overline{\mathrm{AO}}$, $\overline{\mathrm{BO}}$, dan $\overline{\mathrm{FO}}$

Dilukis garis singgung h pada $\widehat{\mathrm{AB}}$ dan garis singgung g pada $\widehat{\mathrm{AF}}$ yang berpotongan di A.

Titik A merupakan titik kutub yang berpasangan dengan titik C. Jarak suatu lingkaran besar terhadap kutubnya berukuran sebesar satu kuadran sehingga $\angle\mathrm{AOB}$ dan $\angle\mathrm{AOF}$ siku-siku.

Karena $\angle\mathrm{AOB}$ dan $\angle\mathrm{AOF}$ siku-siku, maka $\overline{\mathrm{BO}} \perp \overline{\mathrm{AO}}$ dan $\overline{\mathrm{FO}} \perp \overline{\mathrm{AO}}$.

Karena garis singgung tegak lurus dengan jari-jari lingkaran, maka $\mathrm{g} \perp \overline{\mathrm{AO}}$ dan $\mathrm{h} \perp \overline{\mathrm{AO}}$.

Pada sebuah bidang, jika dua garis tegak lurus dengan garis ketiga, maka kedua garis tersebut sejajar satu sama lain sehingga $\overline{\mathrm{BO}} \parallel \overline{\mathrm{TA}} \parallel \overline{\mathrm{FO}} \parallel \overline{\mathrm{UA}}$.

Karena semua kaki $\angle BOF$ telah sejajar terhadap kaki $\angle TAU$ maka $m\angle BOF = m\angle TAU$. Menurut definisi, $m\sphericalangle BAF = m\angle TAU$ sehingga didapatkan $m\angle BOF = m\sphericalangle BAF$.

3) Akan dibuktikan $m\sphericalangle BAF = m\widehat{BF}$.

Sudut pusat diukur melalui perpotongan busurnya sehingga diperoleh $m\angle BOF = m\widehat{BF}$.

Sudut pada segitiga-bola sama dengan sudut yang dibentuk oleh garis singgung busur pada suatu titik perpotongan sehingga dapat ditulis $m\sphericalangle BAF = m\widehat{BF}$.

Terbukti $m\widehat{BF} = m\angle BOF = m\sphericalangle BAF = m\angle TAU$.■

a. Jenis-jenis segitiga bola

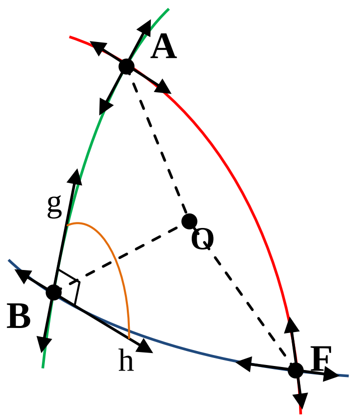
Hasil penelitian Lina Dwi Khusnawati (2011) menyatakan bahwa, seperti pada segitiga bidang datar, segitiga-bola juga dibagi berdasarkan jenis-jenis dan sifat-sifatnya (Lina Dwi Khusnawati, 2011: 159). Adapun cara menentukan jenis-jenis dari segitiga-bola adalah berdasarkan jenis sudut segitiga-bola. Ukuran sudut pada segitiga-bola didefinisikan sebagai sudut antara garis singgung- garis singgung lingkaran besar.

Selain memiliki sudut, segitiga-bola juga memiliki sisi-sisi yang merupakan busur dari lingkaran besar yang disebut dengan derajad sisi dan diukur dengan menggunakan satuan derajad. Derajat sisi segitiga-bola dinyatakan dalam tiga jenis, yaitu kurang dari 90°, lebih dari 90°, dan sama dengan 90°. Derajat sisi segitiga-bola yang diukur akan dibandingkan dengan derajad sisi yang lain dari segitiga-bola tersebut. Kesamaan derajad sisi akan menentukan jenis segitiga bola yang terbentuk.

1) Berdasarkan jenis sudut

a) Segitiga-bola siku-siku

Segitiga-bola siku-siku merupakan segitiga pada permukaan bola yang memiliki sudut siku-siku dan sudut yang terbentuk tersebut merupakan perpotongan dari dua busur lingkaran besar yang berpotongan tegak lurus berdasarkan pengukuran garis singgung-garis singgung antar lingkaran besar.



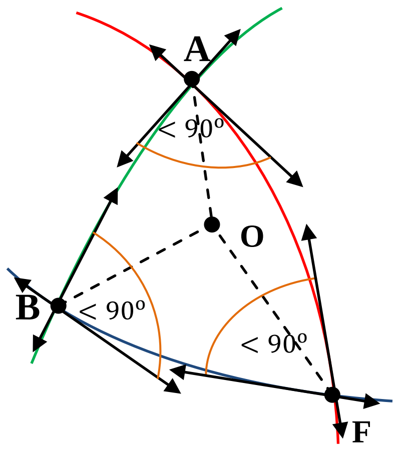
Gambar 2.37 Segitiga-bola siku-siku

Gambar 2.36 merupakan tiga busur yang saling berpotongan di tiga titik berbeda yang membentuk segitiga-bola. Dua dari tiga busursisi tersebut berpotongan tegak lurus , yaitu $\widehat{AB} \perp \widehat{BF}$. Perpotongan tersebut di titik B, sehingga segitiga-bola ABF siku-siku di B.

b) Segitiga-bola lancip

Segitiga-bola lancip merupakan segitiga pada permukaan bola yang ketiga sudutnya adalah sudut lancip dan sudut yang terbentuk tersebut merupakan perpotongan dari dua busur lingkaran besar yang berpotongan kurang dari

90^o berdasarkan pengukuran garis singgung- garis singgung antar lingkaran besar.

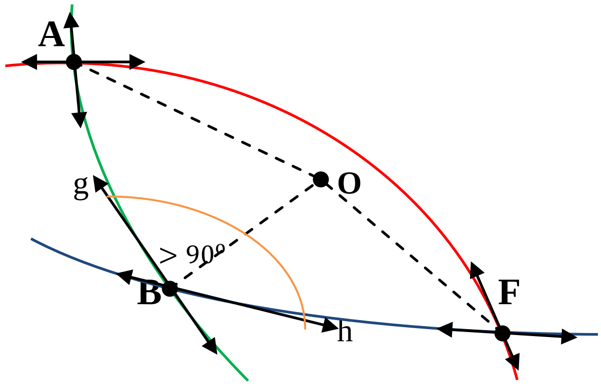


Gambar 2.38 Segitiga-bola lancip

Gambar 2.37 merupakan tiga busur yang saling berpotongan di tiga titik berbeda yang membentuk segitiga-bola. Perpotongan dari masing-masing busur tersebut membentuk sudut kurang dari 90^o.

c) Segitiga-bola tumpul

Segitiga-bola tumpul merupakan segitiga pada permukaan bola yang salah satu sudutnya adalah sudut tumpul dan sudut yang terbentuk tersebut merupakan perpotongan dari dua busur lingkaran besar yang berpotongan lebih dari 90^o berdasarkan pengukuran garis singgung-garis singgung antar lingkaran besar.



Gambar 2.39 Segitiga-bola tumpul

Gambar 2.38 merupakan tiga busur yang saling berpotongan di tiga titik berbeda yang membentuk segitiga-bola. Dua dari tiga busur tersebut berpotongan di titik B dengan sudut yang dibentuk lebih dari 90^{o}.

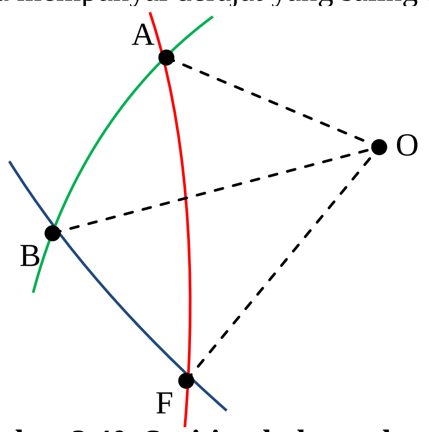
d) Segitiga-bola lancip tumpul

Segitiga-bola tumpul merupakan segitiga pada permukaan bola yang mempunyai dua sudut tumpul dan sudut tersebut merupakan perpotongan dari dua busur lingkaran besar yang berpotongan lebih dari 90^{o} berdasarkan pengukuran garis singgung-garis singgung antar lingkaran besar.

2) Berdasarkan kesamaan besar busursisi

a) Segitiga-bola sembarang

Segitiga-bola sembarang merupakan segitiga pada permukaan bola yang busursisi-busursisinya mempunyai derajat yang saling berbeda.

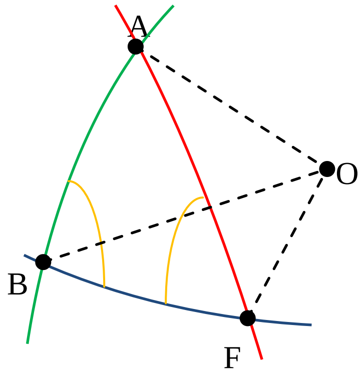


Gambar 2.40 Segitiga-bola sembarang

Gambar 2.39 merupakan perpotongan tiga busur yang membentuk segitiga-bola sembarang ABF dengan busursisi-busursisi $\widehat{AB}$, $\widehat{BF}$, dan $\widehat{AF}$. Besar busursisi saling berbeda, sehingga sudut-sudut segitiga-bola ABF saling berbeda (sesuai Teorema 2.10).

b) Segitiga-bola samakaki

Segitiga-bola samakaki merupakan segitiga pada permukaan bola yang mempunyai dua busursisi sama besar.

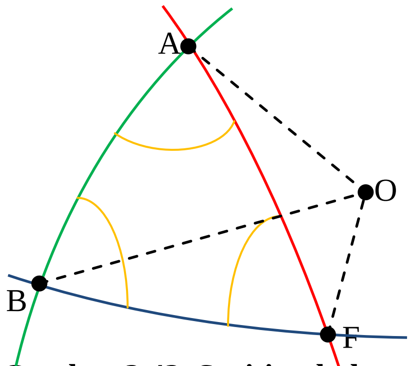


Gambar 2.41 Segitiga-bola samakaki

Gambar 2.41 merupakan perpotongan tiga busur yang membentuk segitiga-bola samakaki ABF dengan busursisi-busursisi $\widehat{AB}$, $\widehat{BF}$, dan $\widehat{AF}$. Pada segitiga-bola samakaki berlaku $m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle AFB$, sehingga $m\widehat{AB} = m\widehat{AF}$, maka dua ukuran busursisi segitiga-bola ABF sama besar (sesuai Teorema 2.10).

c) Segitiga-bola sama sisi

Segitiga-bola samasisi merupakan segitiga pada permukaan bola yang mempunyai dua busursisi sama besar.



Gambar 2.42 Segitiga-bola samasisi

Gambar 2.42 merupakan perpotongan tiga busur yang membentuk segitiga-bola samasisi ABF dengan busursisi-busursisi $\widehat{AB}$, $\widehat{BF}$, dan $\widehat{AF}$. Pada segitiga sama sisi berlaku $m\sphericalangle BAF = m\sphericalangle ABF = m\sphericalangle AFB$, sehingga $m\widehat{AB} = m\widehat{BF} = m\widehat{AF}$, oleh karena itu besar susut dan ukuran busursisi segitiga-bola ABF saling sama (sesuai Teorema 2.10).

3) Berdasarkan perpaduan jenis sudut dan kesamaan panjang sisi

Seperti halnya segitiga pada bidang, pada segitiga-bola terdapat jenis-jenis berdasarkan perpaduan antara jenis sudut dan kesamaan panjang sisi, yaitu: segitiga-bola siku-siku samakaki, segitiga-bola siku-siku samasisi, segitiga-bola lancip samasisi, segitiga-bola lancip samakaki, segitiga-bola tumpul samasisi, segitiga-bola tumpul samakaki, segitiga-bola lancip-tumpul samakaki, dan segitiga-bola lancip-tumpul sembarang.

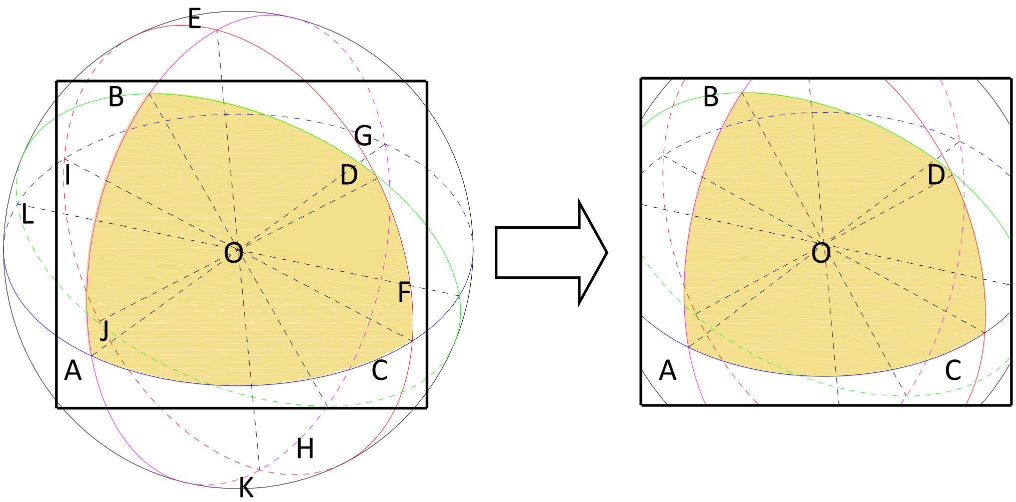
4. Segiempat-bola

Segiempat-bola merupakan sebuah gambaran pada permukaan bola yang terbentuk dari gabungan empat busur lingkaran besar pada sebuah bola. Segiempat pada permukaan bola memiliki empat titik, empat rusuk, empat busur, dan empat sudut. Busur pada segiempat terbentuk karena perpotongan empat lingkaran besar. Perpotongan dari busur-busur pada segiempat-bola yang terdapat pada bola membentuk empat titik, sehingga keempat titik-titik tersebut membentuk empat rusuk yang memotong terhadap titik pusat bola. Perpaduan antara titik, busur dan rusuk tersebut akan membentuk suatu sudut dan bidang. Maka disimpulkan bahwa pada segiempat-bola mempunyai satu titik pusat bola, empat rusuk, empat busur, empat sudut, dan empat bidang. Masing-masing besar sudut terhadap titik pusat bola sama dengan besar busur pada masing-masing bola.

Hasil penelitian Elmada Pitra Negara (2013: 192) menyatakan bahwa penjenisan jenis-jenis segiempat-bola berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, kesamaan derajat sisi, serta perpaduan antara jenis sudut dan kesamaan derajat sisi.

Definisi 2.9 (Elmada Pitra Negara, 2013: 61)

Segiempat-bola adalah segiempat yang terletak pada permukaan bola yang terbentuk dari perpotongan empat lingkaran besar berbeda pada sebuah bola.

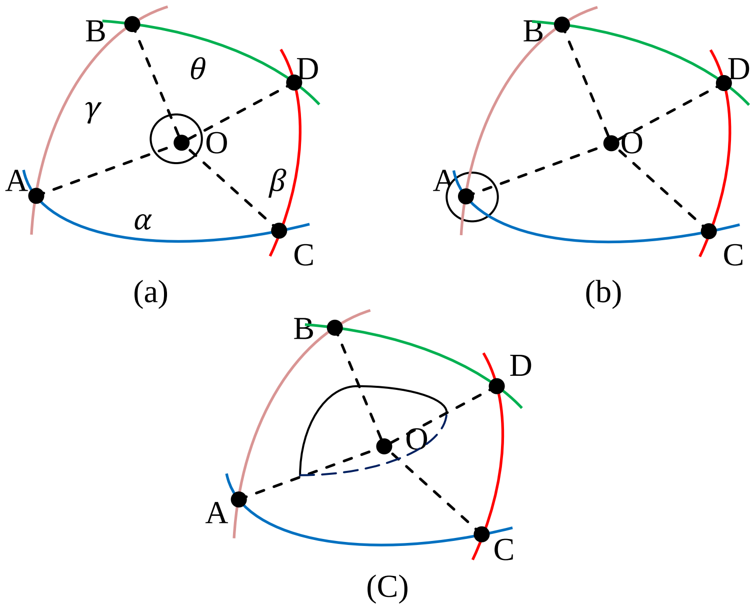


Gambar 2.43 Segiempat pada permukaan bola

Gambar 2.43 merupakan segiempat yang terbentuk dari empat lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang berpotongan di titik yang berbeda. Perpotongan dari empat lingkaran besar membentuk duabelas titik, yaitu A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, dan K. Pada gambar 2.43 terbentuk enam segiempat, yaitu segiempat ACDB, segiempat GIJH, segiempat CFHK, segiempat ILBE, segiempat FGED, dan segiempat LAKJ.

Misalkan pada segiempat ACDB, terdapat empat titik perpotongan dari empat lingkaran, yaitu A, C, D, dan B, sehingga pada segiempat ACDB terdapat empat sudut yaitu ∢A, ∢C, ∢D, dan ∢F atau ∢ABD, ∢BDC, ∢DCA,dan ∢CAB. Busursisi-busursisi pada segiempat ACDB adalah $\widehat{AC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DB}$, dan $\widehat{AB}$.

Seperti pada segitiga-bola, unsur-unsur pada segiempat-bola sama seperti unsur-unsur pada segitiga-bola. Pengukuran sudut-sudut pada segiempat-bola sama pada pengukuran segitiga-bola, dengan menggunakan garis singgung lingkaran besar. Sudut-sudut pada segiempat-bola termasuk jenis sudut tetrahedral, sehingga segiempat-bola memiliki empat sudut dihedral, empat sudut trihedral, dan satu sudut tetrahedral.



Gambar 2.44 Sudut tetrahedral, trihedral, dan dihedral pada Segiempat-bola ABDC

Gambar 2.44(a) merupakan sudut tetrahedral yang terbentuk pada pusat bola. Jika AOC terletak pada suatu bidang α, COD terletak pada suatu bidang β, DOB terletak pada suatu bidang θ, dan AOB terletak pada suatu bidang γ, maka dari empat bidang tersebut bersekutu pada titik O. Titik persekutuan dari empat bidang tersebut membentuk sudut tetrahedral.

Gambar 2.44(b) merupakan sudut trihedral yang terbentuk pada titik A, C, D, dan B. Pada titik A jika AOC terletak pada suatu bidang α dan AOB terletak pada suatu bidang γ, maka titik persekutuan dari bidang α, bidang γ, dan permukaan bola membentuk sudut trihedral.

Gambar 2.44(c) merupakan sudut dihedral yang terbentuk pada jari-jari bola, yaitu BO. Titik A jika AOB terletak pada suatu bidang γ dan AOB terletak pada suatu bidang γ dan DOB terletak pada suatu bidang θ, maka persekutuan kedua bidang tersebut membentuk sebuah garis. Pada garis persekutuan tersebut membentuk sudut dihedral.

Jenis-jenis dan sifat pada segiempat-bola ditentukan berdasarkan besar sudut pada sisi berdekatan yaitu sudut lancip yang besar sudutnya $< 90^o$, sudut tumpul yang besarsudutnya $> 90^o$ dan sudut siki-siku yang besar sudutnya sama dengan 90^o.

a. Jenis-jenis segiempat-bola

Jenis-jenis pada segiempat-bola ditentukan berdasarkan besar sudut pada sisi berdekatan dan besar derajat sisi. Jenis-jenis pada segiempat-bola dibagi menjadi tiga macam, yaitu berdasarkan jenis sudut, berdasarkan kesamaan panjang sisi, dan berdasarkan perpaduan jenis sudut dan kesamaan panjang sisi.

1) **Berdasarkan jenis sudut**

a) Segiempat-bola siku-lancip-tumpul-lancip

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan siku-siku, lancip, tumpul dan lancip.

b) Segiempat-bola doublesiku-lancip-tumpul

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan siku-siku, siku-siku, lancip dan tumpul.

c) Segiempat-bola siku-tumpul-lancip-tumpul

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan siku-siku, tumpul, lancip dan tumpul.

d) Segiempat-bola siku-doubletumpul-lancip

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan siku-siku, tumpul, tumpul dan lancip.

e) Segiempat-bola tumpul-lancip-tumpul-lancip

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan tumpul, lancip, tumpul dan lancip.

f) Segiempat-bola siku-tumpul-siku-lancip

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan siku-siku, tumpul, siku-siku dan lancip.

g) Segiempat-bola tripeltumpul-lancip

Segiempat pada permukaan bola yang mempunyai sudut pada setiap perpotongan busursisinya berurutan tumpul, tumpul, tumpul dan lancip.

2) **Berdasarkan kesamaan panjang busursisi atau derajad sisi**

a) Segiempat-bola samakaki

Segiempat-bola samakaki merupakan segiempat pada permukaan bola yang dua busursisi yang berhadapannya sama besar.

b) Segiempat-bola samasisi

Segiempat pada permukaan bola samasisi merupakan segiempat-bola yang semua busursisinya sama besar.

c) Segiempat-bola sembarang

Segiempat pada permukaan bola sembarang merupakan segiempat-bola yang tidak empat busursisinya saling berbeda besarnya.

3) **Berdasarkan perpaduan jenis sudut dan kesamaan panjang sisi**

a) Segiempat-bola siku-tumpul-lancip-tumpul sembarang,

b) Segiempat-bola siku-doubletumpul-lancip sembarang,

c) Segiempat-bola siku-lancip-tumpul-lancip sembarang,

d) Segiempat-bola tumpul-lancip-tumpul-lancip sembarang,

e) Segiempatbola tripeltumpul-lancip sembarang,

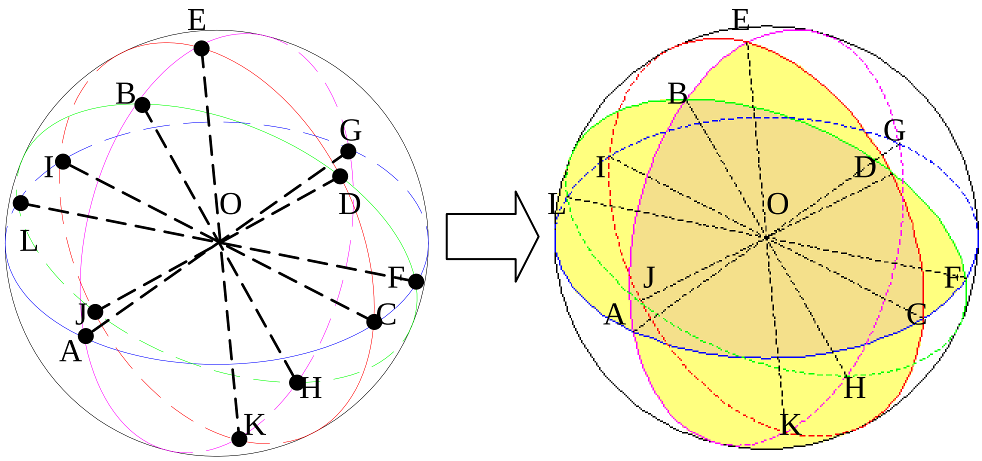
f) Segiempat-bola siku-tumpul-siku-lancip sembarang, dan

g) Segiempat-bola doublesiku-lancip-tumpul sembarang

BAB III
PEMBAHASAN

A. Segitiga-segitiga yang bersisian dengan segiempat pada sebuah bola

Jika terdapat empat lingkaran yang berbeda pada sebuah bola yang masing-masing saling berpotongan, maka akan terbentuk segiempa dan segitiga pada permukaan bola. Di setiap eksterior segiempat yang terbentuk segitiga yang jenisnya bermacam-macam.



Gambar 3.1 Empat lingkaran besar berbeda berpotongan di titik-titik yang berbeda

Gambar 3.1 menggambarkan duabelas titik berbeda yang terbentuk dari empat lingkaran besar berbeda yang sepasang-sepasang saling berpotongan pada titik yang berbeda. Pada setiap lingkaran besar, akan terdapat enam titik sebagai hasil perpotongan satu lingkaran besar dengan tiga lingkaran besar yang lain. Akibat dari perpotongan empat lingkaran besar tersebut terbentuk segiempat dan segitiga pada permukaan bola. Busur-busur dari lingkaran besar merupakan busursisi-busursisi segiempat dan segitiga. Untuk setiap busursisi-busursisi dari segiempat yang terbentuk juga merupakan busursisi-busursisi dari segitiga yang berbeda. Dari perpotongan empat lingkaran besar pada bola tersebut terdapat setiap bangun yang terbentuk mempunyai pasangan yang saling kongruen dan yang merupakan pasangan kutub. Pada gambar tersebut terbentuk segiempat ABDC yang berpasangan dengan segiempat GHJI. Setiap busursisi dari dua segiempat yang berpasangan kongruen tersebut termuat pada salah satu lingkaran besar. Pada segiempat ABDC busursisi-busursisinya adalah $\widehat{AB}$, $\widehat{BD}$, $\widehat{DC}$, dan $\widehat{AC}$, sedangkan segiempat GHJI busursisi-busursisinya adalah $\widehat{GH}$, $\widehat{HJ}$, $\widehat{JI}$, dan $\widehat{GI}$. Busursisi $\widehat{AB}$ dan $\widehat{GH}$ termuat pada lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik A, B, E, G, H, K ($\odot\ (O, ABEGHK)$). Begitu juga berlaku untuk busursisi-busursisi segiempat yang lain dan segitiga yang terbentuk.

Pada gambar 3.1 terdapat segiempat ACDB dengan busursisinya $\widehat{AC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DB}$, dan $\widehat{AB}$. Di eksterior segiempat ACDB terdapat segitigabola-segitiga yang berbeda. Setiap busur sisi dari segiempat ACDB merupakan salah satu busur dari suatu segitiga yang berada di dekatnya (bersisian). Segiempat ACDB bersisisan dengan segitiga ABL, segitiga DBE, segitiga DCF, dan segitiga CAK. Ukuran sudut pada segitiga didefinisikan sebagai ukuran sudut antara garis singgung- garis singgung lingkaran besar yang sebidang.Ukuran busursisi-busursisi pada segiempat dan segitiga diketahui sebagai ukuran derajat sisi dan sebesar ukuran sudut pusat. Terdapat sudut-sudut pada segiempat ACDB, yaitu $\sphericalangle$ABD, $\sphericalangle$BDC. $\sphericalangle$DCA, dan $\sphericalangle$CAB. Sudut-sudut tersebut merupakan sudut yang berpelurus dengan sudut-sudut segitiga yang bersisisan dengan segiempat ACDB.

Pada segitiga ABL memiliki busursisi $\widehat{AB}$, $\widehat{BL}$, dan $\widehat{AL}$. Busursisi $\widehat{AB}$ pada segitiga ABL juga merupakan busursisi darisegiempat ACBD. Sudut $\sphericalangle$LAB pada segitiga ABL berpelurus dengan $\sphericalangle$CAB pada segiempat. Sudut $\sphericalangle$ABL pada segitiga ABL berpelurus dengan $\sphericalangle$ABD pada segiempat ACBD. Sudut $\sphericalangle$BLA merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan dua lingkaran besar di titik L dan F. Lingkaran tesebut yaitu lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik L, A, C, F, G, I ($\odot(\mathrm{O}, \mathrm{LACFGI})$) dan lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik L, B, D, F, H, J ($\odot(\mathrm{O}, \mathrm{LBDFHJ})$).

Pada segitiga BDE memiliki busursisi $\widehat{\mathrm{BD}}$, $\widehat{\mathrm{DE}}$, dan $\widehat{\mathrm{DE}}$. Busursisi $\widehat{\mathrm{BD}}$ pada segitiga BDE juga merupakan busursisi dari segiempat ACBD. Sudut $\sphericalangle$EBD pada segitiga BDE berpelurus dengan $\sphericalangle$ABD pada segiempat. Sudut $\sphericalangle$BDE pada segitiga BDE berpelurus dengan $\sphericalangle$BDC pada segiempat ACBD. Sudut $\sphericalangle$DEB merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan dua lingkaran besar di titik E dan K. Lingkaran tersebut yaitu lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik E, D, C, K, J, dan I ($\odot(\mathrm{O}, \mathrm{EDCKJI})$) dan lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik E, B, A, K, H, dan G ($\odot(\mathrm{O}, \mathrm{EBAKHG})$).

Pada segitiga DCF memiliki busursisi $\widehat{\mathrm{DC}}$, $\widehat{\mathrm{CF}}$, dan $\widehat{\mathrm{DF}}$. Busursisi $\widehat{\mathrm{DC}}$ pada segitiga DCF juga merupakan busursisi dari segiempat ACBD. Sudut $\sphericalangle$FDC pada segitiga DCF berpelurus dengan $\sphericalangle$BDC pada segiempat. Sudut $\sphericalangle$DCF pada segitiga DCF berpelurus dengan $\sphericalangle$DCA pada segiempat ACBD. Sudut $\sphericalangle$CFD merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan dua lingkaran besar di titik F dan L. Lingkaran tesebut yaitu lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik L, A, C, F, G, dan I ($\odot(\mathrm{O}, \mathrm{LACFGI})$) dan lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik L, B, D, F, H, dan J ($\odot(\mathrm{O}, \mathrm{LBDFHJ})$), sehingga $\sphericalangle$CFD sama dengan $\sphericalangle$BLA pada segitiga ABL.

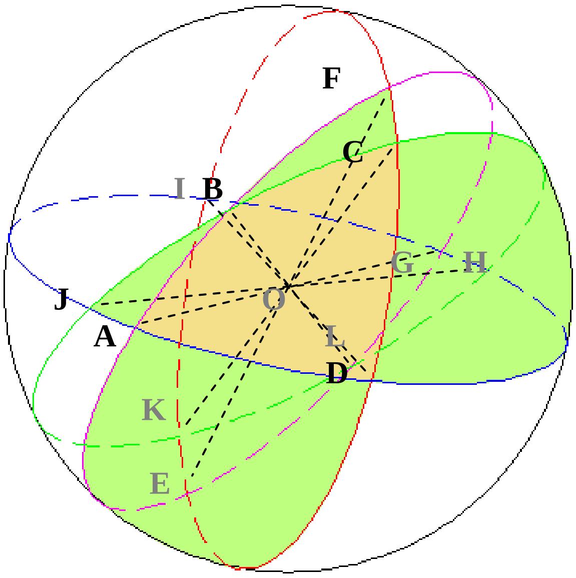
Pada segitiga CAK memiliki busursisi $\widehat{CA}$, $\widehat{AK}$, dan $\widehat{CK}$. Busursisi $\widehat{CA}$ pada segitiga CAK juga merupakan busursisi dari segiempat ACBD. Sudut $\measuredangle$KCA pada segitiga CAK berpelurus dengan $\measuredangle$DCA pada segiempat ACBD. Sudut $\measuredangle$KAC pada segitiga CAK berpelurus dengan $\measuredangle$BAC pada segiempat ACBD. Sudut $\measuredangle$CKA pada segitiga CAK merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan dua lingkaran besar di titik K dan E. Lingkaran tesebut yaitu lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik E, D, C, K, J, dan I ($\odot(O, EDCKJI)$) dan lingkaran besar yang berpusat di O dan melalui titik-titik E, B, A, K, H, dan G ($\odot(O, EBAKHG)$), sehingga $\measuredangle$CKA sama dengan $\measuredangle$DEB pada segitiga BDE.

B. Jenis-Jenis Segitiga yang terbentuk dari jenis Segiempat pada sebuah Bola

Terdapat beberapa jenis segitiga yang terbentuk dari gabungan empat lingkaran besar yang berpotongan pada titik yang berbeda. Dari perpotongan tersebut akan terbentuk enam segiempat dan delapan segitiga. Pada subbab sebelumnya telah dibahas jenis-jenis segiempat yang penggolongannya berdasarkan jenis sudut, kesamaan derajat sisi, serta perpaduan antara jenis sudut dan kesamaan derajat sisi. Jenis-jenis segitiga yang terbentuk bergantung pada jenis-jenis segiempat. Berikut uraian jenis-jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya segiempat.

1. Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat siku-lancip-tumpul-lancip

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, lingkaran besar kedua memotong tegaklurus, lingkaran besar ketiga memotong lancip, dan lingkaran besar keempat memotongan tumpul lingkaran ketiga, maka berdasarkan sudut antar busursisi berdekatan terbentuk segiempat siku-lancip-tumpul-lancip (Elmada P.N, 2013: 113). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.2 Segiempat siku-lancip-tumpul-lancip ABCD

Pada gambar 3.2 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut pada segiempat ABCD, yaitu ∢CDA yang merupakan sudut siku-siku, ∢DAB merupakan sudut lancip, ∢ABC merupakan sudut tumpul, dan ∢BCD merupakan sudut lancip. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat siku-lancip-tumpul lancip.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.2 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada segiempat siku-lancip-tumpul-lancip ABCD, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-busursisinya $\widehat{\mathrm{CD}}$, $\widehat{\mathrm{DH}}$, dan $\widehat{\mathrm{CH}}$. Busursisi $\widehat{\mathrm{AD}}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{\mathrm{DE}}$, $\widehat{\mathrm{EA}}$, dan $\widehat{\mathrm{AD}}$.

a) Segitiga ABJ

Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AELGFB})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{AB}}$, $\widehat{\mathrm{BJ}}$, dan $\widehat{\mathrm{AJ}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{JAB}$, $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$, dan $\sphericalangle\mathrm{BJA}$.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle\mathrm{DAB}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{JAB} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DAB}.$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DAB} < 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{JAB} > 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle\mathrm{ABC}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABJ} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC}.$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC} > 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABJ} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ di titik J dan H. Dua lingkaran besar tersebut berpotongan tidak tegak lurus, sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BJA} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DHC}$ dan merupakan sudut lancip. Berdasarkan teorema 2.10 $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BJA} = \mathrm{m}\widehat{\mathrm{BA}}$, maka $\mathrm{m}\widehat{\mathrm{AJ}} < 90^{\mathrm{o}}$.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga ABJ merupakan segitiga tumpul.

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDEKI)$, $\odot(O, AELGFB)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BF}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle BDF$, dan $\sphericalangle CFB$.

Sudut $\sphericalangle FBC$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle ABJ$, sehingga

$$m\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC > 90^o$ dan $m\sphericalangle JAB < 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle FBC$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle BCF$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD < 90^o$, maka $m\sphericalangle BCF > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut tumpul. Sudut $\sphericalangle CFB$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, FCDEKI)$ dengan $\odot(O, AELGFB)$ di F dan E. Dua lingkaran besar tersebut berpotongan tidak tegak lurus, sehingga $m\sphericalangle BJA = m\sphericalangle DHC$ dan merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul dengan busursisi-busursisinya saling berbeda.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDEKI)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle HCD$, $\sphericalangle CDH$, dan $\sphericalangle DHC$.

Sudut $\sphericalangle HCD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle BCF$, sehingga

$$m\sphericalangle HCD = \sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC < 90^o$ dan $m\sphericalangle BCF > 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle HCD$ merupakan sudut tumpul. Sudut CDH merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ yang merupakan sudut siku-siku pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - 90^o.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA = 90^o$, maka $m\sphericalangle CDH = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle DHC$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan lingkaran besar P dengan lingkaran besar R di Titik H. Titik H merupakan titik kutub yang berpasangan dengan titik J. Telah diketahui jenis sudut pada $\sphericalangle BJA$ merupakan sudut lancip. Sesuai kajian sudut pada bola di subbab sebelumnya, sudut pada segidua-bola mempunyai besar sudut yang sama, sehingga $\sphericalangle BJA = \sphericalangle DHC$, yaitu sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga CDH merupakan segitiga siku-siku dengan busursisi-busursisinya saling berbeda.

d) Segitiga DEA

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, \mathrm{FCDEKI})$, $\odot(O, \mathrm{JADHGI})$, dan $\odot(O, \mathrm{AELGFB})$ di titik-titik D, E, dan A. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{DE}}$, $\widehat{\mathrm{EH}}$, dan $\widehat{\mathrm{DH}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle$ADE, $\sphericalangle$DEA, dan $\sphericalangle$EAD.

Sudut $\sphericalangle$ADE merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle$CDA pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle$CDH, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{ADE} = \sphericalangle \mathrm{CDH} = 180^o - 90^o.$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{ABC} = 90^o$ dan $\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{CDH} = 90^o$. Hal ini berarti, m$\sphericalangle$HCD merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle$DEA merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, \mathrm{FCDEKI})$ dengan $\odot(O, \mathrm{AELGFB})$ di F dan E. Dua lingkaran besar tersebut berpotongan tidak tegak lurus, sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{BJA} = \mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{DHC}$ dan merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle$EAD merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle$DAB pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle$JAB, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{EAD} = \sphericalangle \mathrm{JAB} = 180^o - \mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{DAB}.$$

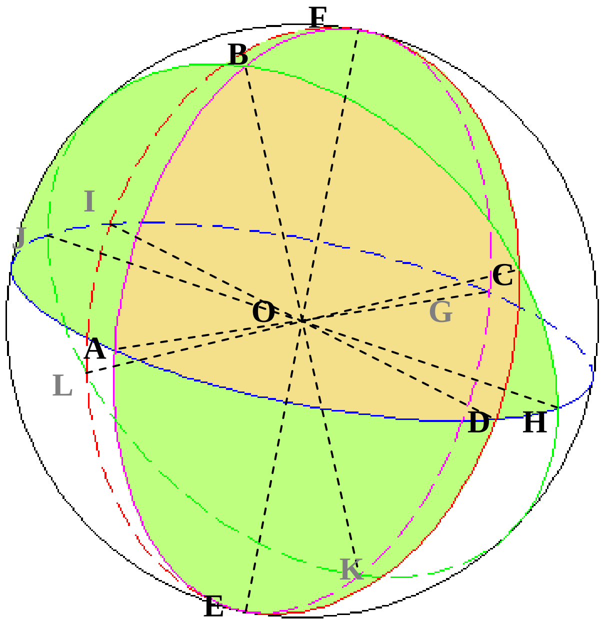
Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{DAB} < 90^o$ dan $\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{EAD} > 90^o$, hal ini berarti $\sphericalangle$EAD merupakan sudut tumpul.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga DEA merupakan segitiga siku-siku busursisi-busursisinya saling berbeda.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat siku-lancip-tumpul-lancip, maka terbentuk segitiga tumpul dan segitiga siku-siku.

2. Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat doblesiku-lancip-tumpul

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, lingkaran besar kedua memotong tegaklurus, lingkaran besar ketiga memotong tegaklurus, dan lingkaran besar keempat memotong lancip, maka berdasarkan sudut antar busursisi berdekatan akan terbentuk segiempat doblesiku-lancip-tumpul (Elmada P.N, 2013: 170). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.3 Segiempat doblesiku-lancip-tumpul ABCD

Pada gambar 3.3 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut yang terbentuk pada segiempat ABCD, yaitu

$\sphericalangle$CDA yang merupakan sudut siku-siku, $\sphericalangle$DAB merupakan sudut siku-siku, $\sphericalangle$ABC merupakan sudut lancip, dan $\sphericalangle$BCD merupakan sudut tumpul. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat doblesiku-lancip-tumpul.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.3 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada gambar segiempat doblesiku-lancip-tumpul ABCD diatas, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}, \widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}, \widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-busursisinya $\widehat{CD}, \widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Busursisi $\widehat{AD}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{DE}, \widehat{EA}$, dan $\widehat{AD}$.

a) Segitiga ABJ

Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AEKGFB})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHKL})$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle$JAB, $\sphericalangle$ABJ, dan $\sphericalangle$BJA.

Sudut $\sphericalangle$JAB merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle$DAB pada segiempat ABCD dan titik A merupakan titik perpotongan dua lingkaran besar P dan R yang tegak lurus, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle \mathrm{JAB} = 180^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}}.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle DAB = 90^o$, maka $m\sphericalangle JAB = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC < 90^o$, maka $m\sphericalangle ABJ > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle BJA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik J dan H. Dua lingkaran besar tersebut berpotongan tidak tegak lurus, sehingga $m\sphericalangle BJA = m\sphericalangle DHC$ dan merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga ABJ merupakan segitiga siku-siku.

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AELGFB)$, $\odot(O, FCDELI)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BF}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle BDF$, dan $\sphericalangle CFB$.

Sudut $\sphericalangle FBC$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle ABJ$, sehingga

$$m\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC < 90^o$ dan $m\sphericalangle ABJ > 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle FBC$ merupakan sudut tumpul.

Sudut BCF merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD > 90^o$, maka $m\sphericalangle BCF < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle CFB$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AELGFB)$ $\odot(O, FCDELI\,)$ yang tidak tegaklurus di F dan E, sehingga $m\sphericalangle CFB = m\sphericalangle AED < 90^o$. Oleh karena itu, $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul dengan busursisi-busursisinya saling berbeda.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDELI)$, $\odot(O, JADHGIL\,)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle HCD$, $\sphericalangle CDH$, dan $\sphericalangle DHC$.

Sudut $\sphericalangle HCD$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle BCF$, sehingga

$$m\sphericalangle HCD = \sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD > 90^o$ dan $m\sphericalangle BCF < 90^o$, maka $m\sphericalangle HCD$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle CDA$ yang merupakan sudut siku-siku pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - 90^o.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA = 90^o$, maka $m\sphericalangle CDH = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle DHC$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik J dan H, sehingga $m\sphericalangle DHC = m\sphericalangle BJA$. Hal ini berarti $\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle CHD$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga siku-siku.

d) Segitiga DEA.

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDELI)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, FBAEKG)$ di titik-titik D, E, dan A. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$, dan $\widehat{DA}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle DEA$, dan $\sphericalangle EAD$.

Sudut $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle CDH$. Karena lingkaran besar P dan Q berpotongan tegaklurus, maka $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AELGFB)$ $\odot(O, FCDELI)$ yang tidak tegaklurus di F dan E, sehingga

$m\sphericalangle CFB = m\sphericalangle AED < 90^o$. Oleh karena itu, $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Oleh karena itu, ∢CFB dan ∢DEA merupakan sudut lancip.

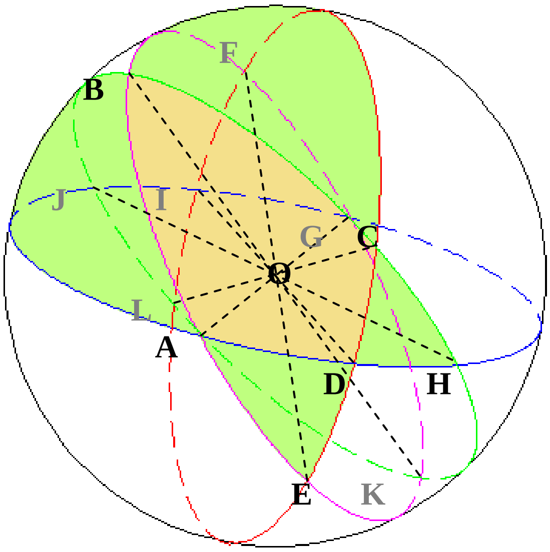
Sudut ∢EAD merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan lingkaran P dan R yang tegaklurus, sehingga ∢EAD merupakan sudut siku-siku.

Dengan demikian, jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga lancip dengan dua sudut siku-siku ,maka $m\widehat{AE} = m\widehat{DE}$, sehingga segitiga BCF merupakan segitiga lancip.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat doblesiku-lancip-tumpul, maka terbentuk segitiga siku-siku, segitiga tumpul, dan segitiga siku-siku.

3. Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, lingkaran besar kedua memotong tegaklurus, lingkaran besar ketiga memotong tumpul, dan lingkaran besar keempat memotong lancip lingkaran ketiga, maka berdasarkan sudut antar busursisi berdekatan akan terbentuk segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul (Elmada P.N, 2013: 94). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.4 Segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul ABCD

Pada gambar 3.4 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut yang terbentuk pada segiempat ABCD, yaitu ∢CDA yang merupakan sudut siku-siku, ∢DAB merupakan sudut tumpul, ∢ABC merupakan sudut lancip, dan ∢BCD merupakan sudut tumpul. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.4 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada gambar segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul ABCD diatas, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}, \widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}, \widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-busursisinya $\widehat{CD}, \widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Busursisi $\widehat{AD}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{\mathrm{AD}}$, $\widehat{\mathrm{DE}}$, dan $\widehat{\mathrm{EA}}$

a) Segitiga ABJ

Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AEKGFB})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHKL})$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{AB}}$, $\widehat{\mathrm{BJ}}$, dan $\widehat{\mathrm{AJ}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{JAB}$, $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$, dan $\sphericalangle\mathrm{BJA}$.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{DAB}$ pada segiempat ABCD dan sudut yang bertolak belakang dengan $\sphericalangle\mathrm{EAD}$ pada segitiga ADE, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{JAB} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DAB}.$$

Karena $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DAB} > 90^{\mathrm{o}}$ dan $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{EAD} < 90^{\mathrm{o}}$,berarti $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{ABC}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABJ} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC},$$

Karena $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC} < 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ADE} > 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{ADE}$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHKL})$ yang tidak tegaklurus di titik J dan H, sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BJA} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DHC}$, maka $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga CDH merupakan segitiga tumpul.

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AELGFB)$, $\odot(O, FCDELI)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BF}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle BDF$, dan $\sphericalangle CFB$.

Sudut $\sphericalangle FBC$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle ABJ$, sehingga

$$m\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC < 90^o$ dan $m\sphericalangle ABJ > 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle FBC$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle BCF$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle HCD$ pada segitiga bola CDH, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = m\sphericalangle HCD = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD > 90^o$, maka $m\sphericalangle BCF < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle CFB$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AELGFB)$ dengan $\odot(O, FCDELI)$ di F dan E. Sudut yang terbentuk dari perpotongan lingkaran besar tersebut merupakan sudut lancip, sehingga $m\sphericalangle CFB = \sphericalangle AED < 90^o$. Oleh karena itu, $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDELI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGIL})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{CD}}$, $\widehat{\mathrm{DH}}$, dan $\widehat{\mathrm{CH}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{HCD}$, $\sphericalangle\mathrm{CDH}$, dan $\sphericalangle\mathrm{DHC}$.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{HCD}$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle\mathrm{BCD}$ pada segiempat ABCD dan bertolak belakang degan $\sphericalangle\mathrm{BCF}$ pada segitiga BCF, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{HCD} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} > 90^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCD}.$$

Karena $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCD} > 90^{\mathrm{o}}$ dan $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} < 90^{\mathrm{o}}$, maka $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{CDH}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{CDA}$ pada segiempat ABCD. Pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CAD} = 90^{\mathrm{o}}$, maka

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDH} = 180^{\mathrm{o}} - 90^{\mathrm{o}},$$

sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDH} = 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{CDH}$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{DHC}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGIL})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ yang tidak tegaklurus di titik J dan H, sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DHC} < 90^{\mathrm{o}}$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga CDH merupakan segitiga siku-siku.

d) Segitiga ADE

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDELI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FBAEKG})$ di titik-titik A, D, dan

E. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$, dan $\widehat{DA}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle DEA$, dan $\sphericalangle EAD$.

Sudut $\sphericalangle EAD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle DAB$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle EAD = 180^o - m\sphericalangle DAB.$$

Karena $m\sphericalangle DAB > 90^o$, maka $m\sphericalangle EAD < 90^o$, berarti $m\sphericalangle HCD$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle ADC$ pada segiempat ABCD. $m\sphericalangle ADC = 90^o$, maka

$$m\sphericalangle ADE = 180^o - 90^o,$$

sehingga $m\sphericalangle ADE = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut siku-siku.

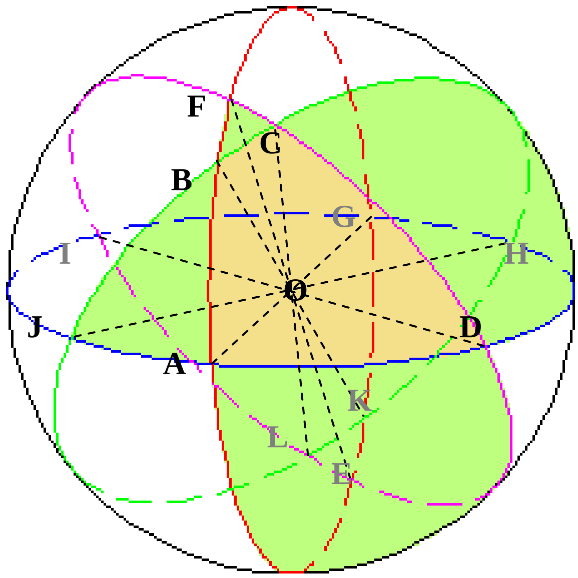
Sudut $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, FCDELI)$ dengan $\odot(O, FBAEKG)$ di titik E dan F. Karena telah diketahui bahwa $m\sphericalangle CFB = \sphericalangle AED < 90^o$,maka $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga CDH merupakan segitiga siku-siku.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul, maka terbentuk segitiga siku-siku dan segitiga tumpul.

4. Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat siku-dobletumpul-lancip

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, lingkaran besar kedua memotong tegaklurus, lingkaran besar ketiga dan keempat berpotongan tumpul, maka berdasarkan sudut antar busursisi berdekatan akan terbentuk segiempat siku-dobletumpul-lancip (Elmada P.N, 2013: 100). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.5 Segiempat siku-dobletumpul-lancip ABCD

Pada gambar 3.5 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut yang terbentuk pada segiempat ABCD, yaitu ∢DAB merupakan sudut siku-siku, ∢ABC merupakan sudut tumpul, dan ∢BCD merupakan sudut tumpul, dan ∢CDA yang merupakan sudut lancip. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat siku-dobletumpul-lancip.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.5 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada gambar segiempat siku-dobletumpul-lancip ABCD diatas, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}, \widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}, \widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-busursisinya $\widehat{CD}, \widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Busursisi $\widehat{AD}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, dan $\widehat{EA}$,

a) Segitiga ABJ

Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, JADHGI)$, $\odot(O, AEKGFB)$, dan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu ∢JAB, ∢ABJ, dan ∢BJA.

Sudut ∢JAB merupakan sudut berpelurus dan berdampingan dengan ∢DAB pada segiempat ABCD dan titik A merupakan titik perpotongan dua lingkaran besar $\odot(O, JADHGI)$ dan $\odot(O, AEKGFB)$ yang tegak lurus, sehingga

$$m\sphericalangle JAB = 180^o - m\sphericalangle DAB.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle DAB = 90^o$, maka $m\sphericalangle JAB = 90^o$. Hal ini berarti, ∢JAB merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut berpelurus dan berdampingan dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD. Karena $m\sphericalangle ABC > 90^o$ pada sehingga segiempat ABCD, maka

$$m\sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC > 90^o$, maka $m\sphericalangle ABJ < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle BJA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik J dan H. Karena perpotongan dua lingkaran besar membentuk sudut lancip, maka pada $\sphericalangle BJA = \sphericalangle CDA$. Oleh karena itu, $m\sphericalangle BJA = m\sphericalangle CDA < 90^o$, sehingga $\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle CDA$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga ABJ merupakan segitiga siku-siku.

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AEKGFB)$, $\odot(O, FCDELI)$, dan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BF}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle BDF$, dan $\sphericalangle CFB$.

Sudut $\sphericalangle FBC$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle ABJ$, sehingga

$$m\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC > 90^o$ dan $m\sphericalangle JBA < 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle FBC$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\measuredangle BCF$ merupakan sudut berpelurus dengan $\measuredangle BCD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\measuredangle BCF = 180^o - m\measuredangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\measuredangle BCD > 90^o$, maka $m\measuredangle BCF < 90^o$. Hal ini berarti, $\measuredangle JAB$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\measuredangle CFB$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AEKGFB)$ dengan $\odot(O, FCDELI)$ yang tidak tegaklurus di F dan E. Karena perpotongan dua lingkaran besar membentuk sudut lancip, maka $m\measuredangle CFB = \measuredangle AED < 90^o$. Oleh karena itu, $\measuredangle CFB$ dan $\measuredangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga lancip.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDELI)$, $\odot(O, JADHGIL)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\measuredangle HCD$, $\measuredangle CDH$, dan $\measuredangle DHC$.

Sudut $\measuredangle HCD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\measuredangle BCD$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\measuredangle BCF$, sehingga

$$m\measuredangle HCD = \measuredangle BCF = 180^o - m\measuredangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\measuredangle BCD > 90^o$ dan $m\measuredangle BCF < 90^o$. Hal ini berarti, $m\measuredangle HCD$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle CDA\ .$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA < 90^o$, maka $m\sphericalangle CDH > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle DHC$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGIL\ )$ dengan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik J dan H. Karena telah diketahui bahwa $m\sphericalangle CFB = \sphericalangle AED < 90^o$, maka $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul.

d) Segitiga DEA

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDELI)$, $\odot(O, JADHGI\ )$, dan $\odot(O, FBAEKG)$ di titik-titik A, D, dan E. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$, dan $\widehat{DA}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle DEA$, dan $\sphericalangle EAD$.

Sudut $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle CDH$, sehingga

$$m\sphericalangle ADE = m\sphericalangle CDA > 90^o$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA < 90^o$, maka $m\sphericalangle ADE > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle EAD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle DAB$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle EAD = 180^o - m\sphericalangle DAB$$

Karena $m\sphericalangle DAB = 90^o$, maka $\sphericalangle$EAD merupakan sudut siku-siku.

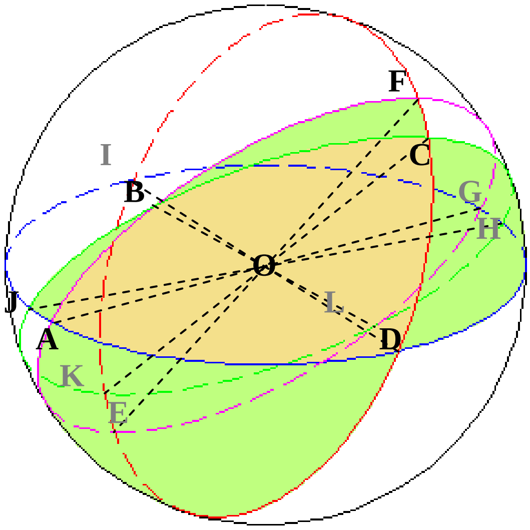
Sudut $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AEKGFB)$ dengan $\odot(O, FCDELI)$ yang tidak tegaklurus di F dan E. Karena telah diketahui bahwa $m\sphericalangle DEA = m\sphericalangle CFB$, maka $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga siku-siku.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat doblesiku-lancip-tumpul, maka terbentuk segitiga siku-siku, segitiga tumpul dan segitiga lancip.

5. Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, lingkaran besar kedua memotong tumpul, lingkaran besar ketiga memotong lancip dan lingkaran besar keempat memotong tumpul, maka berdasarkan sudut antar busursisi berdekatan akan terbentuk segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip (Elmada P.N, 2013: 119). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.6 Segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip ABCD

Pada gambar 3.6 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut yang terbentuk pada segiempat ABCD, yaitu ∡DAB merupakan sudut siku-siku, ∡ABC merupakan sudut tumpul, dan m∡BCD merupakan sudut tumpul, dan ∡CDA yang merupakan sudut lancip. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat siku-dobletumpul-lancip.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.6 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada gambar segiempat siku-dobletumpul-lancip ABCD diatas, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-busursisinya $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Busursisi $\widehat{AD}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, dan $\widehat{EA}$.

a) Segitiga ABJ

Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, JADHGI)$, $\odot(O, AELGFB)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle JAB$, $\sphericalangle ABJ$, dan $\sphericalangle BJA$.

Sudut $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle DAB$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle JAB = 180^o - m\sphericalangle DAB$$

Karena pada segiempatbola ABCD, $m\sphericalangle DAB < 90^o$, maka $m\sphericalangle JAB > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD. Karena $m\sphericalangle ABC > 90^o$ pada sehingga segiempat ABCD, maka

$$m\sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC > 90^o$, maka $m\sphericalangle ABJ < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle BJA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik J dan H. Karena perpotongan dua lingkaran besar tersebut tidak tegaklurus, maka $m\sphericalangle BJA = m\sphericalangle DHC < 90^o$, sehingga $\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle CDA$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga ABJ merupakan segitiga tumpul.

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AELGFB)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BF}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle BDF$, dan $\sphericalangle CFB$.

Sudut $\sphericalangle FBC$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle ABJ$, sehingga

$$m\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC > 90^o$ dan $m\sphericalangle ABJ < 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle FBC$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle BCF$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD < 90^o$, maka $m\sphericalangle BCF > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle CFB$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AELGFB)$ dengan $\odot(O, JBCHLK)$ di F dan E. Karena perpotongan dua lingkaran besar tersebut tidak tegaklurus, sehingga $m\sphericalangle CFB = \sphericalangle AED < 90^o$. Oleh karena itu, $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDEKI)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle HCD$, $\sphericalangle CDH$, dan $\sphericalangle DHC$.

Sudut $\sphericalangle HCD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle BCF$, sehingga

$$m\sphericalangle HCD = \sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD < 90^o$ dan $m\sphericalangle BCF > 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle HCD$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle CDA \ .$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA > 90^o$, maka $m\sphericalangle CDH < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle DHC$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik J dan H. Karena $\sphericalangle BJA$ pada segitiga ABJ telah diketahui, sehingga $m\sphericalangle DHC = m\sphericalangle BJA$. Hal ini berarti $\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle CHD$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul.

d) Segitiga DEA

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AELGFB})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDEKI})$ di titik-titik A, D, dan E. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{DE}}$, $\widehat{\mathrm{EA}}$, dan $\widehat{\mathrm{DA}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{ADE}$, $\sphericalangle\mathrm{DEA}$, dan $\sphericalangle\mathrm{EAD}$.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{ADE}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{CDA}$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle\mathrm{CDH}$, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ADE} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDH} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDA}$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDA} > 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ADE} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{ADE}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{EAD}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{BAD}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{EAD} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BAD}$$

Karena $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BAD} < 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{EAD} > 90^{\mathrm{o}}$. $\sphericalangle\mathrm{EAD}$ merupakan sudut tumpul.

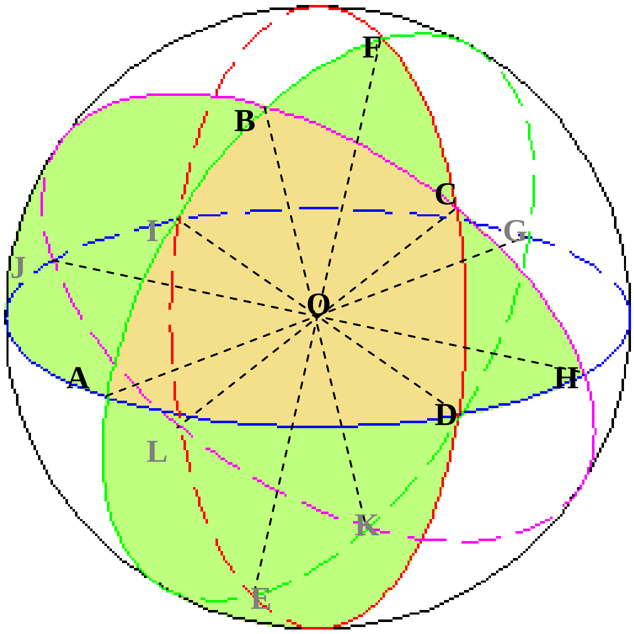
Sudut $\sphericalangle\mathrm{DEA}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AELGFB})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDEKI})$ di Titik F dan E. Karena telah diketahui bahwa $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DEA} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CFB} < 90^{\mathrm{o}}$, maka $\sphericalangle\mathrm{CFB}$ dan $\sphericalangle\mathrm{DEA}$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip, maka terbentuk segitiga tumpul.

6. **Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat siku- tumpul-siku-lancip**

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, dengan lingkaran besar kedua memotong tegaklurus, lingkaran besar ketiga memotong tumpul, dan lingkaran besar memotong tegaklurus, maka berdasarkan sudut perpotogan lingkaran besar terbentuk segiempat siku-tumpul-siku-lancip (Elmada Pitra Negara, 2013: 125). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.7 Segiempat siku-tumpul-siku-lancip ABCD

Pada gambar 3.7 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut yang terbentuk pada segiempat ABCD, yaitu

$\sphericalangle$DAB merupakan sudut siku-siku, $\sphericalangle$ABC merupakan sudut tumpul, dan m$\measuredangle$BCD merupakan sudut tumpul, dan $\sphericalangle$CDA yang merupakan sudut lancip. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat siku-tumpul-siku-lancip.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.7 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada gambar segiempat siku-tumpul-siku-lancip ABCD diatas, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}, \widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-busursisinya $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Busursisi $\widehat{AD}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AD}$, $\widehat{DE}$, dan $\widehat{EA}$,

a) Segitiga ABJ

Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, JADHGI)$, $\odot(O, AEKGFB)$, dan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle$JAB, $\sphericalangle$ABJ, dan $\sphericalangle$BJA.

Sudut $\sphericalangle$JAB merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle$DAB pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle JAB = 180^o - m\sphericalangle DAB$$

Karena pada segiempatbola ABCD, $m\sphericalangle DAB < 90^o$, maka $m\sphericalangle JAB > 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle$JAB merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD, maka

$$m\sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC = 90^o$, maka $m\sphericalangle ABJ = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ABJ$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle BJA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik J dan H. Perpotongan dua lingkaran besar tersebut tidak tegaklurus dan membentuk sudut lancip pada $\sphericalangle BJA$, sehingga $m\sphericalangle BJA = m\sphericalangle DHC < 90^o$, sehingga $\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle CDA$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga ABJ merupakan segitiga siku-siku .

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AEKGFB)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, FCDELI)$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BF}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle FBC$, $\sphericalangle BDF$, dan $\sphericalangle CFB$.

Sudut $\sphericalangle FBC$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle ABC$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle ABJ$, sehingga

$$m\sphericalangle FBC = \sphericalangle ABJ = 180^o - m\sphericalangle ABC.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle ABC = 90^o$ dan $m\sphericalangle ABJ = 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle FBC$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle BCF$ merupakan sudut pelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD > 90^o$, maka $m\sphericalangle BCF < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle JAB$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle CFB$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AEKGFB)$ dengan $\odot(O, FCDELI)$ di F dan E. Perpotongan dua lingkaran besar tersebut tidak tegaklurus dan merupakan sudut lancip, sehingga $m\sphericalangle CFB = \sphericalangle AED < 90^o$. Oleh karena itu, $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle AED$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga siku-siku.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, FCDELI)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, JBCHLK)$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{CD}$, $\widehat{DH}$, dan $\widehat{CH}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle HCD$, $\sphericalangle CDH$, dan $\sphericalangle DHC$.

Sudut $\sphericalangle HCD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BCD$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle BCF$, sehingga

$$m\sphericalangle HCD = \sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle BCD.$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle BCD > 90^o$ dan $m\sphericalangle BCF < 90^o$. Hal ini berarti, $m\sphericalangle HCD$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle BCF = 180^o - m\sphericalangle CDA \text{ .}$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA = 90^o$, maka $m\sphericalangle CDH = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle CDH$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle DHC$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, JADHGI)$ dengan $\odot(O, JBCHKL)$ di titik J dan H. Karena $m\sphericalangle DHC = m\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle BJA$ telah diketahui, maka $\sphericalangle BJA$ dan $\sphericalangle CHD$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga siku-siku.

d) Jenis segitiga DEA

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AEKGFB)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, FCDELI)$ di titik-titik A, D, dan E. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$, dan $\widehat{DA}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle DEA$, dan $\sphericalangle EAD$.

Sudut $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle CDH$, sehingga

$$m\sphericalangle ADE = m\sphericalangle CDH = 180^o - m\sphericalangle CDA$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA = 90^o$, maka $m\sphericalangle ADE = 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut siku-siku.

Sudut $\sphericalangle EAD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BAD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle EAD = 180^o - m\sphericalangle BAD$$

Karena $m\sphericalangle BAD < 90^o$, maka $m\sphericalangle EAD > 90^o$. $\sphericalangle EAD$ merupakan sudut tumpul.

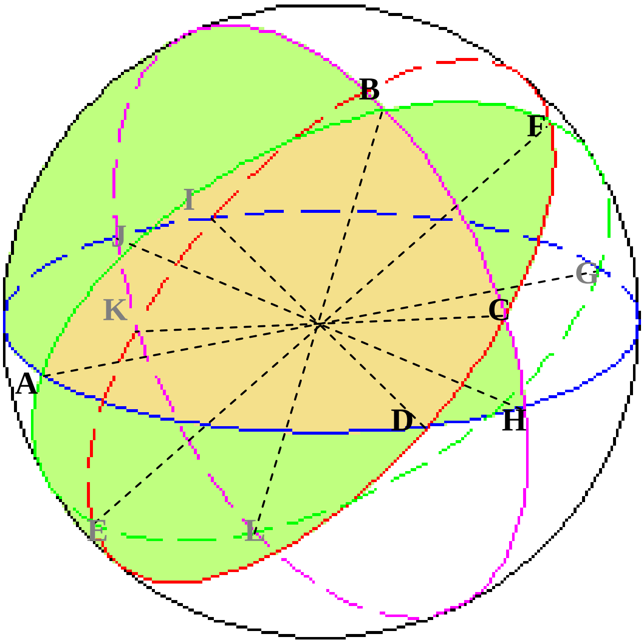
Sudut $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AEKGFB)$ dengan $\odot(O, FCDELI)$ di F dan E. Karena $m\sphericalangle DEA = m\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle CFB$ telah diketahui, maka $\sphericalangle CFB$ dan $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga DEA merupakan segitiga siku-siku.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat siku-tumpul-siku-lancip, maka terdapat segitiga tumpul, segitiga lancip, dan segitiga siku-siku.

7. Jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat tripletumpul-lancip

Jika terdapat empat lingkaran besar yang saling berpotongan, lingkaran besar kedua memotong tumpul, lingkaran besar ketiga memotong tumpul, dan lingkaran besar memotong tumpul, maka berdasarkan sudut perpotogan lingkaran besar terbentuk segiempat tripletumpul-lancip (Elmada Pitra Negara, 2013: 139). Berikut ilustrasi gambar dari penemuan tersebut:



Gambar 3.8 Segiempat tripletumpul-lancip ABCD

Pada gambar 3.8 terdapat segiempat ABCD dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ dan $\widehat{AD}$. Sudut-sudut yang terbentuk pada segiempat ABCD, yaitu ∢DAB merupakan sudut siku-siku, ∢ABC merupakan sudut tumpul, dan ∢BCD merupakan sudut tumpul, dan ∢CDA yang merupakan sudut lancip. Berdasarkan jenis sudut segiempat ABCD adalah segiempat siku-dobletumpul-lancip.

Busursisi segiempat ABCD pada gambar 3.8 merupakan busursisi dari segitiga-segitiga yang mengelilinginya. Pada gambar segiempat siku-dobletumpul-lancip ABCD diatas, busursisi $\widehat{AB}$ juga merupakan busursisi segitiga ABJ dengan busursisi-busursisinya $\widehat{AB}$, $\widehat{BJ}$, dan $\widehat{AJ}$. Busursisi $\widehat{BC}$ juga merupakan busursisi segitiga BCF dengan busursisi-busursisinya $\widehat{BC}$, $\widehat{CF}$, dan $\widehat{BC}$. Busursisi $\widehat{CD}$ juga merupakan busursisi segitiga CDH dengan busursisi-

busursisinya $\widehat{\mathrm{CD}}, \widehat{\mathrm{DH}}$, dan $\widehat{\mathrm{CH}}$. Busursisi $\widehat{\mathrm{AD}}$ pada segiempat ABCD juga merupakan busursisi segitiga DEA dengan busursisi-busursisinya $\widehat{\mathrm{AD}}$, $\widehat{\mathrm{DE}}$, dan $\widehat{\mathrm{EA}}$,

a) Segitiga ABJ

   Segitiga ABJ terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AELGFB})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ di titik-titik A, B, dan C. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{AB}}$, $\widehat{\mathrm{BJ}}$, dan $\widehat{\mathrm{AJ}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{JAB}$, $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$, dan $\sphericalangle\mathrm{BJA}$.

   Sudut $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle\mathrm{DAB}$ pada segiempat ABCD, sehingga

   $$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{JAB} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DAB}$$

   Karena pada segiempatbola ABCD, $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DAB} < 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{JAB} > 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut tumpul.

   Sudut $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$ merupakan sudut pelurus berdampingan dengan $\sphericalangle\mathrm{ABC}$ pada segiempat ABCD, maka

   $$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABJ} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC}.$$

   Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC} > 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABJ} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$ merupakan sudut lancip.

   Sudut $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ di titik J dan H. Perpotongan dua lingkaran besar membentuk sudut lancip pada $\sphericalangle\mathrm{BJA}$, sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BJA} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DHC} < 90^{\mathrm{o}}$, sehingga $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ dan $\sphericalangle\mathrm{CDA}$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga ABJ merupakan segitiga tumpul.

b) Segitiga BCF

Segitiga BCF terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AELGFB})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDEKI})$ di titik-titik B, C, dan F. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{BC}}$, $\widehat{\mathrm{CF}}$, dan $\widehat{\mathrm{BF}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{FBC}$, $\sphericalangle\mathrm{BDF}$, dan $\sphericalangle\mathrm{CFB}$.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{FBC}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{ABC}$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle\mathrm{ABJ}$, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{FBC} = \sphericalangle\mathrm{ABJ} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC}.$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABC} > 90^{\mathrm{o}}$ dan $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{ABJ} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{FBC}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{BCF}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{BCD}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCD}.$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCD} > 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{JAB}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{CFB}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{AELGFB})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDEKI})$ di F dan E. Perpotongan lingkaran besar tersebut merupakan sudut lancip pada $\sphericalangle\mathrm{FBC}$, sehingga $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CFB} = \sphericalangle\mathrm{AED} < 90^{\mathrm{o}}$. Oleh karena itu, $\sphericalangle\mathrm{CFB}$ dan $\sphericalangle\mathrm{AED}$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga lancip.

c) Segitiga CDH

Segitiga CDH terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDEKI})$, $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$, dan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{FCDEKI})$ di titik-titik C, D, dan H. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{\mathrm{CD}}$, $\widehat{\mathrm{DH}}$, dan $\widehat{\mathrm{CH}}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle\mathrm{HCD}$, $\sphericalangle\mathrm{CDH}$, dan $\sphericalangle\mathrm{DHC}$.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{HCD}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{BCD}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCD}.$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCD} > 90^{\mathrm{o}}$ dan $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{HCD}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{CDH}$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle\mathrm{CDA}$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BCF} = 180^{\mathrm{o}} - \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDA}\ .$$

Karena pada segiempat ABCD $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDA} > 90^{\mathrm{o}}$, maka $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{CDH} < 90^{\mathrm{o}}$. Hal ini berarti, $\sphericalangle\mathrm{CDH}$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle\mathrm{DHC}$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JADHGI})$ dengan $\odot(\mathrm{O}, \mathrm{JBCHLK})$ di titik J dan H. Karena $\mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{DHC} = \mathrm{m}\sphericalangle\mathrm{BJA}$ dan $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ telah diketahui jika merupakan sudut lancip, maka $\sphericalangle\mathrm{BJA}$ dan $\sphericalangle\mathrm{CHD}$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga lancip.

d) Jenis segitiga DEA

Segitiga DEA terbentuk akibat perpotongan tiga lingkaran besar, yaitu $\odot(O, AELGFB)$, $\odot(O, JADHGI)$, dan $\odot(O, FCDEKI)$ di titik-titik A, D, dan E. Busursisi-busursisinya yaitu $\widehat{DE}$, $\widehat{EA}$, dan $\widehat{DA}$. Sudut-sudut yang terbentuk yaitu $\sphericalangle ADE$, $\sphericalangle DEA$, dan $\sphericalangle EAD$.

Sudut $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle CDA$ pada segiempat ABCD dan juga sudut yang bertolak belakang dengan sudut $\sphericalangle CDH$, sehingga

$$m\sphericalangle ADE = m\sphericalangle CDH = 180^o - m\sphericalangle CDA$$

Karena pada segiempat ABCD $m\sphericalangle CDA > 90^o$, maka $m\sphericalangle ADE < 90^o$. Hal ini berarti, $\sphericalangle ADE$ merupakan sudut lancip.

Sudut $\sphericalangle EAD$ merupakan sudut berpelurus dengan $\sphericalangle BAD$ pada segiempat ABCD, sehingga

$$m\sphericalangle EAD = 180^o - m\sphericalangle BAD$$

Karena $m\sphericalangle BAD < 90^o$, maka $m\sphericalangle EAD > 90^o$. Hal ini berarti $\sphericalangle EAD$ merupakan sudut tumpul.

Sudut $\sphericalangle DEA$ merupakan sudut yang terbentuk akibat perpotongan $\odot(O, AELGFB)$ dengan $\odot(O, FCDEKI)$ di F dan E. Karena $\sphericalangle CFB$ telah diketahui jenis sudutnya, maka $\sphericalangle CFB = \sphericalangle DEA$ merupakan sudut lancip.

Dengan demikian, berdasarkan jenis-jenis sudut yang dimiliki segitiga BCF merupakan segitiga tumpul.

Dari penjabaran diatas, dapat disimpulkan jika pada sebuah bola yang terdapat segiempat tripletumpul-lancip, maka terbentuk segitiga tumpul dan segitiga lancip.

Berdasarkan uraian jenis-jenis segitiga yang bersisian dengan segiempat pada sebuah bola yang berdasarkan jenis sudut yang dimiliki, dapat diringkas dalam tabel berikut:

Tabel Jenis Segitiga berdasarkan jenis sudut segiempat yang terbentuk

Segiempat-bola	Segitiga-bola
1.Siku-Lancip-Tumpul-Lancip	Tumpul Tumpul Siku-siku Siku-siku
2.DobleSiku-Lancip-Tumpul	Siku-siku Lancip Siku-siku Siku-siku
3.Siku-Tumpul-Lancip-Tumpul	Tumpul Tumpul Siku-siku Siku-siku
4.Siku-dobleTumpul-Lancip	Siku-siku Lancip Tumpul Siku-siku
5.Tumpul-Lancip-Tumpul-Lancip	Tumpul Tumpul Tumpul Tumpul
6.Siku-Tumpul-Siku-Lancip	Siku-siku Siku-siku Siku-siku Siku-siku
7. TripleTumpul-Lancip	Tumpul Lancip Lancip Tumpul

Dari tabel terlihat bahwa jenis segitiga dobletumpul tidak terbentuk pada sebuah bola yang terdapat empat lingkaran besar berbeda yang masing-masing saling berpotongan dititik yang tidak sama. Hal ini berarti, terdapat perbedaan jenis-jenis segitiga yang terbentuk, antara pada bola yang terdapat tiga lingkaran besar berbeda yang masing-masing saling berpotongan dititik yang tidak sama dengan jenis-jenis segitiga yang terbentuk antara pada bola yang terdapat empat lingkaran besar berbeda yang masing-masing saling berpotongan dititik yang tidak sama.

BAB IV
PENUTUPAN

A. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada Bab III mengenai jenis-jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya segiempat pada sebuah bola dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-lancip-tumpul-lancip, maka akan terdapat segitiga tumpul dan segitiga siku-siku
2. Jika pada suatu bola terdapat segiempat doblesiku-lancip-tumpul, maka akan terdapat segitiga siku-siku dan segitiga tumpul
3. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-tumpul-lancip-tumpul, maka akan terdapat segitiga siku-siku dan segitiga tumpul
4. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-dobletumpul-lancip, maka akan terdapat segitiga siku-siku, segitiga tumpul, dan segitiga lancip
5. Jika pada suatu bola terdapat segiempat tumpul-lancip-tumpul-lancip, maka akan terdapat segitiga tumpul
6. Jika pada suatu bola terdapat segiempat siku-tumpul-siku-lancip, maka akan terdapat segitiga siku-siku
7. Jika pada suatu bola terdapat segiempat tripletumpul-lancip, maka akan terdapat segitiga tumpul dan segitiga lancip

B. Saran

Skripsi ini membahas tentang jenis-jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya segiempat berdasarkan jenis yang dimiliki segiempat pada sebuah bola. Penulis menyarankan menggembangkan pembahasan terkait aplikasi dari setiap jenis segitiga yang terbentuk akibat terbentuknya segiempat pada sebuah bola. Terkait geometri, penulis menyarankan untuk pembahasan lebih lanjut jika terdapat segilima, segienam, dan lainnya di dalam lingkup kajian geometri bola.

DAFTAR PUSTAKA

Cresswell, D. 1816. *A Treatise on Spherics, Comprising the Element of Spherical Geometry, and of Plane and Spherical Trigonometry, together with a Series of Trigometrical Table*. Cambridge: J. Mawman

Cummins, dkk. 2001. *Geometry Concept and Aplications.* New York: McGraw-Hill

Elmada Pitra Negara. 2013. *Jenis-jenis Segiempat-bola dan sifat-sifatnya*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta

Elmada Pitra Negara. 2013. Jenis-jenis dan Sifat-sifat Segiempat-bola/*journal studen uny*.

Greenberg, M.J. 1980. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*. San Fransisco: W.H. Freemanand Company

Hadiwidjojo, Moeharti. 1975. *Ilmu Ukur Analitik Ruang Bagian II*. Yogyakarta: FKIP-IKIP Yogyakarta

Hadiwidjojo, Moeharti. 1975. *Ilmu Ukur Analitik Ruang Bagian III*. Yogyakarta: FKIP-IKIP Yogyakarta

Keedy, M. L., Jameson, R. E., Smith, A. A., Mould, E. 1967. *Exploring Geometry*. New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc

Lina Dwi Khusnawati. 2011. *Jenis-jenis Segitiga-bola dan sifat-sifatnya*. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta

Murdanu. (2003). *Geometri Euclide secara deduktif-aksiomatik*. Yogyakarta: IKIP Yogyakarta

Nielsen, K.L. dan Vanlonkhuyzen, J.H. 1949. *An Outline of Plane and Spherical Trigonometry*. New York: Barnes & Noble Inc.

Rich, B. 2000. *Geometry 3rd Ed*. New York: McGraw-Hill

Rich, B. 2000. *Geometri*. (Diterjemahkan oleh: Irzam Harmein). Jakarta: Erlangga

Rich, B. Dan Thomas, C. 2009. *Geometry 4th Ed*. New York: McGraw-Hill

Wirasto. (1967). *Penuntun Ilmu Ukur Ruang*. Yogyakarta: IKIP Yogyakarta

www. zyant.com/resources/math/geometry. Diakses pada tanggal 14 Juli 2014 pukul 20.10