INTEGRAL MCSHANE-υ DI DALAM RUANG METRIK KOMPAK LOKAL

Manuharawati

Jurusan Matematika FMIPA Unesa, manuhara1@yahoo.co.id

Abstrak

Diilhami oleh banyak ahli yang telah membangun Integral McShane di dalam ruang ukuran lengkap (X, A, μ), dibangun integral Integral McShane-υ di dalam ruang metrik kompak lokal, dengan υ adalah fungsi volume pada koleksi semua himpunan elementer di dalam ruang metrik kompak lokal. Selanjutnya dibahas beberapa sifat fungsi terintegral McShane-υ dan ekuivalensi antara integral McShane-υ dengan integral-μ, di mana μ adalah ukuran yang dibangkitkan oleh μ^* melalui fungsi volume υ.

Kata kunci: ruang metrik kompak lokal, himpunan elementer, fungsi volume

PENDAHULUAN

Di dalam ruang ukuran lengkap (X, A, µ), telah banyak ahli membahas Integral McShane dan Integral Lebesgue, yang antara lain di muat dalam buku Real Analysis (Royden; 1989: 253-287). Integral McShane dan Integral Lebesgue ini sangat banyak peranannya dalam teori integral antara lain dalam integral Henstock di dalam garis real (Soeparana: 1995).

Dari uraian di atas dan telah dibangunnya ruang ukuran yang lengkap di dalam ruang metrik kompak lokal (Manuharawati: 2002), dibahas tentang sifat-sifat integral McShane di dalam ruang metrik kompak lokal. Hasil Penelitian ini diharapkan dapat memperluas wawasan penulis dalam teori integral dan dapat memperluas ruang lingkup matematika terapan.

Penelitian ini merupakan penelitian pustaka, yang mengkaji hasil-hasil para ahli melalui jurnal-jurnal dan texbook yang terkait yang selanjutnya dikembangkan dalam ruang abstrak, khususnya ruang metrik kompak lokal nondekrit.

PENGERTIAN DASAR DAN TEORI PENDUKUNG

Beberapa konsep dasar dan sifat-sifat yang digunakan dalam pembasahan diuraikan sebagai berikut.

Di dalam makalah ini, ruang metrik kompak lokal, khususnya ruang metrik kompak lokal non-diskret, dinotasikan dengan X; himpunan semua bilangan real diperluas dengan $\Re^*$; himpunan semua bilangan real positif murni dengan $\Re^+$; koleksi semua himpunan elementer di dalam X dengan E(X), sistem interval pada X dinotasikan dengan S, dan μ merupakan ukuran yang lengkap pada X yang dibangkitkan oleh μ^*.

Di dalam ruang metrik kompak lokal (X,d). Koleksi $S \subset 2^X$ yang tidak kosong disebut **sistem interval** (*system of intervals*) jika memenuhi:

(i) untuk setiap $p \in X$, $\{p\} \in S$,

(ii) untuk setiap $p \in X$, jika $cl(N(p,r))$ kompak maka $N(p,r) \in S$,

(iii) jika $A \in S$ maka A konveks, $cl(A)$ kompak, $cl(A) \in S$, dan $int(A) \in S$,

(iv) untuk setiap $A, B \in S$, $A \cap B \in S$.

(v) untuk setiap $A, B \in S$ terdapat $C_i \in S$, $1 \le i \le n$ dengan $\{C_i\}_{i=1}^{n}$ tidak tumpang tindih dan

$$A - B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i .$$

Jika S merupakan sistem interval di dalam ruang metrik (X,d), setiap anggota S disebut **interval**.

Interval $A \in S$ dikatakan ***degenerate*** jika $int(A) = \emptyset$ dan ***nondegenerate*** jika $int(A) \neq \emptyset$.

Sel adalah interval kompak yang nondegenerate. Himpunan $A \subset X$ disebut **himpunan elementer** (*elementary set*) jika A dapat disajikan sebagai gabungan hingga interval-interval. Jadi A himpunan elementer jika dan hanya jika terdapat $C_i \in S$, $(1 \le i \le n)$ sehingga

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i .$$

$N(x_i, \delta(x_i))$ and $\{A_{x_i}\}$ is a partition on E.

Jika E(X) menyatakan koleksi semua himpunan elementer yang termuat di dalam X, fungsi *volume* ν : E $(X) \to \Re$ disebut **ukuran** pada E (X) jika:

(i) $\nu(A) = 0$ jika $int(A) = \emptyset$ dan $\nu(A) > 0$ jika $int(A) \neq \emptyset$,

(ii) $\nu(A) \le \nu(B)$ untuk setiap $A, B \in$ E (X) dengan $A \subset B$,

(iii) $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$ untuk setiap barisan himpunan $\{A_i\} \subset$ E (X) yang tidak tumpang tindih dengan $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in$ E (X).

Selanjutnya di dalam makalah ini, X merupakan ruang metrik kompak lokal nondiskret.

Definisi B.1: *Diberikan himpunan elementer kompak E dengan* $int(E) \neq \emptyset$ *dan fungsi* $\delta: E \to \Re^+$. *Koleksi hingga pasangan sel-titik*

$$P = \{(A_{x_i}, x_i), 1 \le i \le n\} = \{(A_x, x)\}$$

disebut ***Partisi Perron*** $\boldsymbol{\delta}$***-fine*** (*Perron* δ*-fine partition*) ***pada*** *E jika* $x_i \in A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ *dan* $\{A_{x_i}\}$ *merupakan partisi pada E*. Jika $A_{x_i} \subset N(x_i, \delta(x_i))$ dihilangkan, maka partisi tersebut disebut partisi McShane δ*-fine*δ*-fine*.

Jika diberikan himpunan elementer kompak $E \subset X$ dengan $int(E) \neq \emptyset$, dan fungsi $\delta: E \to \Re^+$, maka terdapat partisi Perron δ*-fine* pada E. (Manuharawati,2002: 18)

Lebih lanjut, jika fungsi $\delta_1 : E \to \Re^+$ dengan $\delta_1(x) \le \delta(x)$ untuk setiap $x \in E$, maka setiap partisi Perron δ_1*-fine* pada E merupakan partisi Perron δ*-fine* pada E. (Manuharawati, 2002: 19).

Definisi B.2: *Fungsi* $g : X \to \Re^*$ *dikatakan* ***terintegral-*** ν ***Henstock*** (*Henstock* ν *- integrable*) *pada sel* $E \subset X$ *jika terdapat bilangan real* α *dengan sifat untuk setiap bilangan* $\varepsilon > 0$ *terdapat fungsi* $\delta : E \to \Re^+$ *sehingga untuk setiap partisi Perron* δ*-fine*

$$P = \left\{A_{x_1}, A_{x_2}, \ldots, A_{x_n}; x_1, x_2, \ldots, x_n\right\} = \left\{(A_x, x)\right\}$$

pada E berlaku

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\nu(A_{x_i}) - \alpha\right| = |P\textstyle\sum g(x)\,\nu\,(A_x) - \alpha| < \varepsilon$$

dengan $P\sum$ *merupakan jumlahan atas partisi* P.

Jika $A \in S$ *dengan* $\nu(A) = 0$, *maka integral-* ν *Henstock fungsi* $g : X \to \Re^+$ *pada A didefinisikan sama dengan nol*.

PEMBAHASAN

Beberapa sifat yang akan terkait dengan dengan teorema pengkajian teorema kekonvergenan pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal adalah sebagai berikut.

Teorema C.1 (Teorema Kekonvergenan Monoton): *Diberikan sel* $E \subset X$ *dan untuk setiap n*, $g_n \in M(E, \nu)$ *dengan primitif* G_n. *Jika berlaku:*

(i) barisan fungsi $\{g_n\}$ *konvergen ke fungsi g hampir di mana-mana pada E,*

(ii) barisan fungsi $\{g_n\}$ monoton hampir di mana-mana pada E, dan
(iii) barisan $\{G_n(E)\}$ konvergen ke suatu bilangan α,
maka g $\in$ M(E, v) dan

$$(M)\int_E gdv = \alpha = \lim_{n\to\infty}(M)\int_E g_n d\upsilon$$

Bukti: Cukup dibuktikan untuk barisan fungsi $\{g_n\}$ naik monoton dan konvergen ke fungsi g pada *E*. Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$. Karena $\{G_n(E)\}$ konvergen ke α dan $g_n \leq g_{n+1}$ hampir di mana-mana pada *E*, maka terdapat bilangan asli $m(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq m(\varepsilon)$ dan $k \in \boldsymbol{N}$ berlaku

$$|G_{n+k}(E) - \alpha| \leq |G_n(E) - \alpha| < \delta_n. \quad (1)$$

Karena barisan fungsi $\{g_n\}$ konvergen ke fungsi *g* pada *E* dan $g_n \leq g_{n+1}$ hampir di mana-mana pada *E*, maka untuk sebarang $x \in E$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon, x) \geq m(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq N(\varepsilon, x)$ dan $k \in N$ berlaku

$$\left|gn + k(x) - g(x)\right| \leq \left|gn(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3(v(E)+1.} \quad (2)$$

untuk setiap partisi McShane δ_n-fine $P_n = \{(A_x, x)$ berlaku

$$P_n\sum\left|g_n(x)v(x) - G_n(A_x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3)$$

Dibentuk fungsi $\delta: E \to \Re^+$ dengan

$$\delta(x) = \delta_{N(\varepsilon,x)}(x)$$

Jika $P = \{(A_x, x)$ partisi McShane δ-fine pada *E*, maka *P* merupakan, partisi McShane $\delta_{N(\varepsilon,x)}$-fine pada *E*. Berdasarkan (1), (2), (3), diperoleh

$$\left|P\sum G_{N(\varepsilon,x)} - \alpha\right| = \left|G_{m(\varepsilon)}(E) - \alpha_{m(}\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

$$\left|g_{N(\varepsilon,x)}(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3(\upsilon(E)+1} \quad (5)$$

dan

$$P\sum\left|g_{N(\varepsilon,x)}(x)\upsilon(A_x) - G_{N(\varepsilon,x)}(A_x)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6)$$

Dari (4), (5), dan (6) diperoleh

$$\left| P\sum g(x)\upsilon(A_x) - \alpha \right| < \varepsilon$$

Jadi g $\in$ *M*(E, v) dan

$$(M)\int_E gdv = \alpha = \lim_{n\to\infty}(M)\int_E g_n d\upsilon \bullet$$

Lemma berikut berguna dalam pembuktian ekuivalensi integral-μ dan integral-υ McShane.

Lemma C.2: *Diberikan sel $E \subset X$.* Jika g: $E \to \Re^*$ terukur-μ dan terbatas pada *E*, maka **g $\in$ *M(E, v)* *dengan***

$$(M)\int_E gdv = L\int_E gd\mu$$

Teorema C.3: *Diberikan sel $E \subset X$.* Fungsi g: $E \to \Re^*$ terintegral-μ pada *E* jika *g* terintegral-υ McShane pada *E*.

Bukti: Syarat perlu: Tidak mengurangi arti jika hanya dibuktikan g tak negatif. Untuk setiap bilangan asli *n*, dibentuk fungsi g_n: $X \to \Re^*$ dengan

$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & jika \quad g(x) \le n \\ 0 & jika \quad g(x) > n \end{cases}$

Karena g terintegral-μ pada E, maka g terintegral-μ^* pada E, yang berakibat g_n terukur-μ^* pada E, dan karena g_n terbatas pada E, maka g_n terintegral-μ pada E. Perlu diperhatikan bahwa barisan fungsi$\{g_n\}$ naik monoton pada E dan

$\lim_{n\to\infty} g_n = g$.

Menurut Teorema Kekonvergenan Monoton integral-μ (Manuharawati, 2002) diperoleh

$$(L)\int_E g d\mu \quad = \quad \lim_{n\to\infty}(L)\int_E g_n d\mu \,.$$

Karena g_n terukur terbatas pada E, maka menurut Lemma C.2, $g_n \in M(E, v)$ dengan

$$(M)\int_E g dv = \lim_{n\to\infty}(M)\int_E g_n d\upsilon \quad = \quad \lim_{n\to\infty}(L)\int_E g_n d\mu = L\int_E g d\mu \,.$$

Syarat cukup: Untuk setiap bilangan asli n, dibentuk fungsi g_n: X $\to \Re^*$ dengan

$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & jika \quad |g(x)| \le n \\ 0 & jika \quad |g(x)| > n \end{cases}$

Dari pendefinisian g_n, jelas bahwa g_n terukur-μ^* dan terbatas pada E. Berdasarkan Teorema C.1, $g_n \in L(E,\mu)$ dan

$$(L)\int_E g_n d\mu = \alpha = (M)\int_E g_n d\upsilon$$

Karena g_n terbatas pada E, maka cukup dibuktikan untuk g_n taknegatif pada E. Jadi untuk setiap n diperoleh $g_n \le g_{n+1}$, dan karena barisan fungsi $\{g_n\}$ konvergen ke fungsi g pada E, maka berdasarkan Teorema Kekonvergenan Monoton integral-μ, berlaku

$g \in L(E,\mu)$ dan

$$L\int_E g d\mu = \quad \lim_{n\to\infty}(L)\int_E g_n d\mu = \quad \lim_{n\to\infty}(M)\int_E g_n d\upsilon = (M)\int_E g dv \,.\bullet$$

Dari Teorema C.3, diperoleh hubungan antara integral-μ dengan integral Henstock-ν

Teorema 4: Diketahui sel $E \subset X$ dan g: $E \to \Re^*$. Jika $g \in L(E, \mu)$, maka $g \in H(E, \nu)$.

Bukti: Akibat langsung dari Teorema C.3.

KESIMPULAN

Ekuivalensi antara integral McShane dengan integral Lebesgue masih berlaku pada ruang metrik kompak lokal, dan pada ruang metrik kompak lokal, setiap fungsi yang terintegral Lebesgue juga terintegral Henstock.

REKOMENDASI

Dengan hasil penelitian ini, teori sifat-sifat pada integral Henstock di dalam ruang metrik kompak lokal masih terbuka untuk dis**e**lesaikan (diadakan penelitian lanjut)

DAFTAR PUSTAKA

Manuharawati, 2002. *Integral Henstock di dalam Ruang Metrik Kompak Lokal*, Disertasi S3, Yogyakarta: PPs Universitas Negeri Yogyakarta.

Rpyden, H.,L., 1989. *Real Analysis*, New York: Macmilan Publishing Company.

Soeparna, D., 1995. *Some Small Riemann Sum Properties* (*Position of Lebesgue's in the Henstock Integrable Function*), Researc Report, Yogyakarta: FMIPA UGM.