SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN NILAIEIGEN DAN VEKTOREIGEN MULTIPLISITAS TIGA ATAU LEBIH

L.H. Wiryanto

leo@math.itb.ac.id
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Bandung

Abstrak

Pembelajaran sistem persamaan diferensial didukung alat bantu berupa software MAPLE merupakan suatu alternative pendekatan yang layak dikembangkan, mengingat cakupannya yang menuntut pengetahuan dasar nilaieigen-vektoreigen dan dekomposisi matrik. Pembahasan teori dan contoh soal biasanya terbatas pada ukuran matrik 2x2, sehingga mahasiswa kurang mampu memahaminya dan kurang termotivasi. Salah satunya adalah menentukan solusi sistem persamaan diferensial dengan nilaieigen dan vektoreigen yang mempunyai multiplisitas 3 atau lebih. Dengan bantuan MAPLE disertai petunjuk praktikumnya, mahasiswa dapat ditugaskan untuk menggali kemampuannya sendiri. Makalah ini menjelaskan langkah-langkah yang dapat dilakukan untuk menyusun petunjuk praktikum tersebut.

PENDAHULUAN

Sistem persamaan diferensial merupakan salah satu topik yang ada pada matakuliah metoda matematika di Program Studi Matematika FMIPA ITB. Matakuliah tersebut diberikan pada tingkat kedua, setelah mahasiswa mengenal Kalkulus dan Aljabar Linear. Topik tersebut dibahas dalam waktu 12 jam, kurang lebih 20% waktu yang ada dalam satu semester, dengan materi yang banyak menuntut pemahaman aljabar linear, nilaieigen-vektoreigen dan dekomposisi dari matrik, lihat [1,2]. Beban yang berat ini biasanya tidak dapat mencapai target seperti pada sasaran pengajaran, begitu juga pembahasan pada sistem persamaan diferensial dengan ukuran yang lebih besar dari 2.

Sebagai alternative penyelesaian, selama tiga tahun terakhir ini dicoba digunakan paket program MAPLE untuk membantu pemahaman mahasiswa dalam matakuliah metoda matematika, tetapi dalam tinjauan ini dikhususkan pada aljabar linear yang digabung dengan persamaan diferensial. Pemakaian MAPLE pada topik lain dapat dibuat lembar kerjanya, seperti deret Fourier, lihat [3]. Perbedaan utama antara sistem persamaan diferensial dan deret Fourier adalah alat bantu yang terkait, aljabar matrik lawan integral tentu.

NILAIEIGEN MULTIPLISITAS TIGA

Salah satu masalah dalam sistem persamaan diferensial (SPD) adalah menentukan solusi. Untuk SPD yang berbentuk

$$\bar{x}' = A\bar{x} \tag{1}$$

dimana $\bar{x}$ berupa vektor $nx1$ dan A matrik konstan nxn, solusi dapat ditentukan dari nilaieigen dan vektoreigen dari A. Jika $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ nilaieigen berbeda dari A, dan $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \cdots, \bar{v}_n\}$ vektoreigen yang berpadanan, maka n solusi bebas linearnya adalah $\bar{x}^{(k)} = e^{\lambda_k t}\bar{v}_k$, untuk $k = 1, 2, \cdots, n$.

Masalah muncul pada kasus nilaieigen dan vektoreigen kembar. Untuk multiplisitas 2 pada matrik SPD ukuran 2x2, solusi pertama diperoleh dari nilaieigen λ dan vektoreigen $\bar{v}$ yang ada, yaitu $\overline{x}^{(1)} = e^{\lambda t}\overline{v}$. Sedangkan solusi kedua, yang bebas linear terhadap $\overline{x}^{(1)}$ diperoleh dengan menyatakannya sebagai $\overline{x}^{(2)} = e^{\lambda t}\overline{u} + e^{\lambda t}t\overline{v}$ dengan $\overline{u}$ vektor yang harus ditentukan. Secara teknis $\overline{u}$ diperoleh dengan mensubstitusikan $\overline{x}^{(2)}$ pada SPD, yang memberikan hubungan

$$(A-\lambda I)\overline{u} = \overline{v} \tag{2}$$

dengan I menyatakam matrik identitas.

Dalam perkuliahan, kasus di atas merupakan bentuk standar yang harus dibahas dan diikuti dengan contoh, misalnya pada SPD

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Matrik 2x2 yang ada mempunyai nilaieigen $\lambda = 2$ dan vektoreigen $\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sehingga dua solusi bebas linearnya adalah

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \end{bmatrix} = e^{2t}t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Di sini $\overline{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, yang diperoleh dengan menyelesaikan (2).

Untuk multiplisitas 3, penentuan solusi dapat dibahas di kelas dengan cara serupa, tetapi memerlukan waktu dan penjelasan yang lebih panjang. Begitu juga dengan contoh yang diberikan, perlu ukuran matrik yang lebih besar dari multiplisitas 2. Keterbatasan waktu dan rumitnya pembahasan biasanya menjadi kendala dalam suatu kuliah, sehingga dijadikan alasan untuk tidak membahasnya atau menyerahkan kepada mahasiswa sebagai bahan study literatur, yang pada akhirnya tidak pernah dikerjakan oleh mahasiswa. Untuk menghindari hal tersebut, mahasiswa perlu dipacu dengan diberikan tugas, setidaknya secara intuitive, melalui petunjuk praktikum pada MAPLE.

MAPLE SEBAGAI PENDUKUNG PERKULIAHAN

Pengalaman dalam mengelola matakuliah yang membahas topik SPD, pemahaman SPD untuk matrik ukuran 3x3 atau lebih diberikan dalam bentuk tugas melalui *worksheet* yang dapat dikerjakan menggunakan MAPLE. Dalam worksheet tersebut bahkan diberikan tugas mulai dari bentuk sederhana, dan mahasiswa diminta membandingkan dengan teori yang ada. Berikut contoh tugas yang diberikan

Solusi dari Nilaieigen Kembar dua. Diberikan matrik

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan nilaieigen dan vektoreigen dari A menggunakan MAPLE dengan perintah berikut:

```
restart:with(linalg):
A:=array([[3,1],[-1,1]]);
v:=eigenvects(A);
```

Tuliskan hasilnya pada tempat yang tersedia: Nilaieigen $\lambda =$ _ _ _ _ _ dan ruangeigen dengan basis $\overline{v} =$ _ _ _ _ _ _ _

b. Pada sistem persamaan diferensial

$$\overline{X}' = A\overline{X}$$

selesaikan menggunakan perintah berikut

```
with(DEtools):
de:={diff(x1(t),t)=3*x1(t)+x2(t),
diff(x2(t),t)=-x1(t)+x2(t)}:
sol:=dsolve(de,{x1(t),x2(t)});
```

Tuliskan solusi yang diperoleh tersebut dalam bentuk $\overline{X} = c_1\overline{X}^{(1)} + c_2\overline{X}^{(2)}$. Apakah diperoleh $\overline{X}^{(1)} = e^{2t}\overline{v}$, $\overline{X}^{(2)} = e^{2t}t\,\overline{v} + e^{2t}\overline{\xi}$, dengan $\overline{\xi}$ = _ _ _ _ _ _ _ _ (sesuai dengan yang ada di kuliah?)

Dengan menggunakan MAPLE, jawab pertanyaan (a) dapat diperoleh berupa nilaieigen dari matrik A adalah $\lambda = 2$, multiplisitas 2; dan $\overline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Sedangkan pertanyaan (b) MAPLE memberikan

sol := {x1(t) = exp(2*t)*(_C1+_C2*t), x2(t) = -exp(2*t)*(_C1+_C2*t-_C2)}

Dalam format yang diminta, kita peroleh dua solusi yang bebas linear adalah

$$\overline{X}^{(1)} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ dan } \overline{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ -e^{2t}(t-1) \end{bmatrix} = te^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dengan $\overline{\xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Hasil vektor terakhir ini dapat dibandingkan dengan perhitungan secara analitik (2).

Pada tugas pertama ini, mahasiswa diharapkan mampu memahami keterkaitan nilaieigen-vektoreigen dengan solusi SPD seperti yang dibahas di kelas. Pengertian ini kemudian ditingkatkan untuk nilaieigen dengan multiplisitas lebih tinggi, seperti pada tugas kedua berikutnya. Secara analitik, diharapkan mahasiswa mampu menentukan rumusan permisalan solusi ketiga terkait dengan matrik yang mempunyai nilaieigen dengan multiplisitas 3. Berikut tugas terkait nilaieigen dengan multiplisitas 3

Solusi dari Nilaieigen Kembar tiga. Ulangi prosedur pada tugas sebelumnya untuk

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

a. Tentukan semua nilaieigen λ dan vektoreigen $\overline{v}$. Apakah diperoleh nilaieigen kembar?
b. Pada SPD $\overline{X}' = B\overline{X}$, selesaikan menggunakan perintah *dsolve* pada MAPLE, kemudian susun 3 solusi bebas linear $\left\{\overline{X}^{(1)}, \overline{X}^{(2)}, \overline{X}^{(3)}\right\}$ sesuai nilaieigen dan vektoreigen yang ada. Kesimpulan apa yang dapat saudara peroleh.

Sebagai jawaban, kita peroleh nilaieigen $\lambda = 3$ multiplisitas 3 dan vektoreigen $\overline{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Tiga solusi bebas linear dari SPD terkait dengan matrik yang diberikan adalah

$$\overline{X}^{(1)} = e^{3t}\begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{X}^{(2)} = te^{3t}\begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \overline{X}^{(3)} = \frac{t^2}{2}e^{3t}\begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + te^{3t}\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari hasil ini diharapkan, dosen dapat memberi penjelasan bahwa dalam menentukan solusi bebas linearnya digunakan permisalan

$\overline{x}^{(1)} = e^{\lambda t}\overline{v}$, $\overline{x}^{(2)} = e^{\lambda t}\overline{u} + e^{\lambda t}t\overline{v}$ dan $\overline{x}^{(3)} = \frac{t^2}{2}e^{\lambda t}\overline{v} + e^{\lambda t}t\overline{w} + e^{\lambda t}\overline{p}$ (3)

dengan $\overline{u}, \overline{w}, \overline{p}$ ditentukan. Bila $\overline{x}^{(2)}, \overline{x}^{(3)}$ disubstitusikan pada SPD, diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \overline{v} + \lambda\overline{w} &= B\overline{w} \\ \overline{w} + \lambda\overline{p} &= B\overline{p} \end{aligned} \tag{4}$$

Jadi tahapan menentukan 3 solusi bebas linear adalah menentukan nilaieigen dan vektoreigen dari matrik B. Untuk nilaieigen dengan multiplisitas 3, solusi pertama dibentuk dari nilaieigen dan vektoreigen yang ada, dan solusi kedua dan ketiga dari SPD berbentuk (3) dengan vektor $\overline{u}, \overline{w}, \overline{p}$ dihitung memenuhi (4). Untuk multiplisitas yang lebih besar dari 3 dapat diformulasikan dengan cara yang sama.

Begitu juga untuk variasi yang lain. Misalnya kita mempunyai matrik 3x3 yang mempunyai nilaieigen dengan multiplisitas 3 dan ruangeigennya berdimensi 2, ada 2 vektoriegen bebas linear, seperti pada contoh berikut

$$\overline{X}' = B\overline{X}$$

dengan

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Permasalahannya adalah bagaimana menentukan 3 solusi bebas linear dari SPD tersebut.

KESIMPULAN

Di atas telah diuraikan bagaimana paket program MAPLE digunakan untuk membantu pengajaran sistem persamaan diferensial, khususnya untuk ukuran yang besar. Dalam menyelesaikan SPD, keterkaitan antara aljabar linear dan penentuan solusi bebas linear dapat diamati melalui paket program MAPLE, dan dapat ditugaskan kepada mahasiswa. Akan tetapi perlu dibuatkan lembar kerja untuk memberi arahan yang mendukung perkuliahan.

Ucapan Terimakasih

Makalah ini disampaikan dalam Seminar Nasional di Universitas Negeri Yogyakarta, 2009, dengan dukungan dana dari Riset KK ITB nomer kontrak 258/K01.7/PL/2009. Oleh karena itu, ucapan terimakasih disampaikan kepada ITB.

REFERENSI

1. W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Edisi 7, John Wiley & Sons, 2001.
2. E. Kreyzig, *Advance Engineering Mathematics*, 8th edition, John Wiley, 1999.
3. L. H. Wiryanto, Petunjuk praktikum Metoda Matematika, 2006.