# PENDEKATAN SISTEM PERSAMAAN MAXWELL UNTUK STUDI MODEL MEDAN GEOMAGNET

**John Maspupu**

*Pusfatsainsa LAPAN, Jl. Dr. Djundjunan No. 133 Bandung 40173,*
*Tlp. 0226012602 Pes. 106. Fax. 0226014998*
*E-mail: john_mspp@yahoo.com*

## Abstrak

Studi awal model medan magnet bumi yang dibahas dalam makalah ini, dimulai dengan suatu pendekatan yang mengarah pada sistem persamaan Maxwell. Topologi medan magnet dengan persamaan Maxwell ini nantinya ditulis menurut notasi-notasi kalkulus vektor yang diterjemahkan kedalam suatu bentuk persamaan diferensial parsial (PDP). Oleh karena itu metode analisis yang digunakan untuk membedah sistem persamaan Maxwell ini tentunya terkait dengan konsep-konsep PDP. Pendekatan sistem persamaan Maxwell ini pada dasarnya bertujuan untuk mendukung pembentukan model medan geomagnet regional di Indonesia. Dengan demikian pendekatan sistem tersebut juga mempunyai kontribusi yang cukup berarti didalam memunculkan informasi aktivitas geomagnet dari model medan geomagnet regional yang terbentuk.

**Kata kunci** *:* Sistem persamaan *Maxwell,* Model medan geomagnet.

## PENDAHULUAN

Sampai saat ini masih terdapat keterbatasan alat fluks magnetometer yang terinstal di setiap stasion pengamat dirgantara (SPD) LAPAN. Selain itu faktor jarak lokasi antar setiap SPD juga cukup jauh (lebih dari 200 km). Dipihak lain magnetometer ini adalah suatu alat pengukur variasi medan magnet untuk ketiga komponen H, D, Z dengan sensitivitas yang cukup tinggi serta resolusi waktu satu detik. Sedangkan kemampuan sebuah alat magnetometer untuk menangkap sinyal geomagnet dan magnet antariksa hanya sekitar radius maksimal 200 km. Dengan demikian sulit untuk dapat mengamati dan mengetahui perilaku dari variasi medan geomagnet di lokasi-lokasi yang berada di luar jangkauan magnetometer tersebut. Oleh karena itu diperlukan suatu model medan magnet seperti di [3] yang regional untuk dapat memprediksi setiap aktivitas geomagnet di lokasi-lokasi tersebut. Namun sebelum membentuk atau mengkonstruksi model medan geomagnet tersebut, lebih dahulu dilakukan studi awal dengan pendekatan sistem persamaan Maxwell (lihat [4]). Dengan demikian tentunya semua uraian di atas inilah yang melatarbelakangi penentuan judul makalah tersebut. Selain itu tujuan pembahasan makalah ini adalah untuk menjabarkan persamaan Maxwell ke dalam suatu bentuk PDP dan menentukan jenis PDP yang terkait serta menelusuri solusinya. Namun demikian yang menjadi masalahnya adalah bagaimana menjabarkan persamaan Maxwell ke dalam suatu PDP?. Kemudian bagaimana menentukan jenis PDP yang terkait dan bagaimana cara menelusuri solusinya?. Untuk itu perlu disusun suatu metodologi yang dapat diterapkan untuk membahas permasalahan tersebut. Selain itu manfaat dari studi awal ini tiada lain adalah untuk mendukung pembentukan model medan geomagnet regional di Indonesia.

## METODOLOGI

Konsep yang digunakan dalam pembahasan makalah ini adalah menyangkut kalkulus vektor, matriks dan analisis PDP. Sedangkan tahapan untuk mencapai sasaran tujuan pembahasan ini adalah sebagai berikut :

i) Formulasikan sistem persamaan Maxwell tersebut ke dalam konsep kalkulus vektor.
ii) Penjabaran sistem persamaan Maxwell tersebut ke dalam bentuk PDP.
iii) Penyederhanaan sistem persamaan diferensial parsial (PDP).
iv) Penentuan jenis atau tipe persamaan diferensial parsial (PDP).

v) Menelusuri solusi persamaan diferensial parsial (PDP).

Selanjutnya akan dijelaskan bentuk umum PDP orde satu sebagai berikut :

$a(x,t)\ \partial v/\partial x + b(x,t)\ \partial v/\partial t = c(x,t)\ v + d(x,t)$ .......... (1)

Dalam hal ini a, b, c dan d adalah fungsi-fungsi dua variabel dari x dan t yang diasumsikan terdiferensial. Sedangkan kurva karakteristik dari PDP di persamaan(1) adalah sebagai berikut, $\partial x/\partial s = a(x,t)$ dan $\partial t/\partial s = b(x,t)$ .........(2)

Selanjutnya menurut [5], $\partial v/\partial s = (\partial v/\partial x)(\partial x/\partial s) + (\partial v/\partial t)(\partial t/\partial s)$ atau dengan perkataan lain $\partial v/\partial s = a\ \partial v/\partial x + b\ \partial v/\partial t = cv + d$ ........(3)

Keluarga dari kurva x = x(s) dan t = t(s) maupun v = v(s) ditentukan oleh solusi dari sistem persamaan-persamaan (2) dan (3). Persamaan(2) menentukan keluarga dari kurva x = x(s) dan t = t(s) dengan tangen vektor $[x'(s)\ ,\ t'(s)]$ pada setiap titik yang terdefinisi di [a , b] dan tidak nol. Persamaan-persamaan (2) dan (3) di atas disebut sebagai Metode Karakteristik. Perlu dicatat bahwa untuk menyelesaikan masalah nilai awal dari PDP orde satu di atas harus diasumsikan nilai awal kurva tersebut sebagai berikut, $x = x(\tau)$ dan $t = t(\tau)$ serta $v = v(\tau)$. Atau $x = x(s, \tau)$ dan $t = t(s, \tau)$ serta $v = v(s, \tau)$ dengan s = 0.

Menurut [1] klasifikasi jenis sistem PDP orde satu dapat dicirikan dengan penjelasan metodologi sebagai berikut : Misalkan bentuk sistem PDP orde satu secara umum ditulis $Au_x + Bu_y = C$. Dalam hal ini $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks berukuran $n \times n$, $u = (u_1\ ,\ u_2\ ,\ ......,\ u_n\ )^T$ dan $c = (c_1\ ,\ c_2\ ,\ ......,\ c_n\ )^T$ adalah vektor-vektor kolom. Sedangkan diferensial parsial u terhadap x maupun terhadap y masing-masing adalah $u_x = \partial u/\partial x = (\partial u_1/\partial x, \partial u_2/\partial x, ......., \partial u_n/\partial x\ )^T$ dan $u_y = \partial u/\partial y = (\partial u_1/\partial y, \partial u_2/\partial y, ......., \partial u_n/\partial y\ )^T$.

Untuk mengklasifikasikan sistem PDP di atas ke dalam suatu jenis tertentu, umumnya A dan B masing-masing merupakan matriks yang non singulir. Selanjutnya definisikan polinom berderajat n dalam $\lambda$ sebagai berikut, $P_n(\lambda) = \mathrm{Det}\ (A - \lambda B) = 0$. Kemudian jenis dari sistem PDP tersebut di atas dicirikan dalam bentuk pernyataan-pernyataan berikut :

i) Jika $\lambda_i \in R$ , untuk i = 1, 2,..., n dan berlainan maka jenis sistem PDP orde satu di atas adalah *hiperbola.* Atau jika $\lambda_i \in R$ untuk i = 1, 2,..., n dan minimal ada satu $\lambda$ yang berulang serta masalah nilai eigen dari persamaan matriks $(A - \lambda B)t = 0$ menghasilkan n vektor eigen t yang bebas linier maka jenis sistem PDP orde satu di atas adalah juga *hiperbola.*

ii) Jika $\lambda_i \notin R$ , untuk i = 1, 2,..., n maka jenis sistem PDP orde satu di atas adalah *ellips.*

iii) Jika $\lambda_i \in R$ , untuk i = 1, 2,..., n dan minimal ada satu $\lambda$ yang berulang serta masalah nilai eigen dari persamaan matriks $(A - \lambda B)t = 0$ menghasilkan j vektor eigen t yang bebas linier ( j < n ) maka jenis sistem PDP orde satu di atas adalah *parabola.*

Tahapan-tahapan pencapaian dalam metodologi ini semuanya akan diterapkan dalam hasil pembahasan berikut.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Menurut [2] bentuk umum persamaan Maxwell dapat ditulis dalam notasi-notasi kalkulus vektor sebagai berikut:

$$\nabla .D = \rho(z\ ,\ t)\ ;\ \ \nabla \times E = -\ \partial B/\partial t\ ;\ \nabla .B = 0\ ;\ \ \nabla \times H = \partial E/\partial t + J(z\ ,\ t).$$

Dengan $D = D(z\ ,\ t) = \varepsilon_o\ E(z\ ,\ t)$; $B = B(z\ ,\ t) = \mu_o\ H(z\ ,\ t)$; $J = \sigma_o\ E(z\ ,\ t)$ dan $z = (x\ ,\ y)$.

Dalam hal ini E adalah medan listrik, H adalah medan magnet, B adalah induksi magnet, J adalah kerapatan arus, $\mu_o$ adalah permebilitas magnet dan $\varepsilon_o$ adalah konstanta dielektrik serta $\rho$ adalah kerapatan muatan elektron (lihat [4]) . Karena $\varepsilon_o$ , $\mu_o$ merupakan besaran-besaran yang bersifat konstanta jadi sistem persamaan Maxwell di atas dapat ditulis kembali sebagai , $\nabla .E = \rho(z\ ,\ t)$ begitu juga rotasi medan listrik atau $\nabla \times E = -\ \partial B/\partial t$ dan $\nabla .B = 0$ serta rotasi induksi magnet atau $\nabla \times B = \partial E/\partial t + J(z\ ,\ t)$.

Selanjutnya nyatakanlah B dan E dalam bentuk persamaan-persamaan vektor berikut:

$B = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ dan $E = E_1\mathbf{i} + E_2\mathbf{j} + E_3\mathbf{k}$ dengan $B_1 = B_1(x,y,t)$, $B_2 = B_2(x,y,t)$ , $B_3 = B_3(x,y,t)$ dan $E_1 = E_1(x,y,t)$ , $E_2 = E_2(x,y,t)$ , $E_3 = E_3(x,y,t)$ .

Dengan demikian $\nabla .E = \partial E_1/\partial x + \partial E_2/\partial y + \partial E_3/\partial t = \rho(x,y,t)$ .............(4)

$\nabla .B = \partial B_1/\partial x + \partial B_2/\partial y + \partial B_3/\partial t = 0$ .............(5)

Sedangkan rotasi $\nabla \times E = (\partial E_3/\partial y - \partial E_2/\partial t)\mathbf{i} + (\partial E_1/\partial t - \partial E_3/\partial x)\mathbf{j} + (\partial E_2/\partial x - \partial E_1/\partial y)\mathbf{k}$ dan $-\partial B/\partial t = -\mathbf{i}\,\partial B_1/\partial t - \mathbf{j}\,\partial B_2/\partial t - \mathbf{k}\,\partial B_3/\partial t$ . Dengan cara yang serupa diperoleh rotasi $\nabla \times B = (\partial B_3/\partial y - \partial B_2/\partial t)\mathbf{i} + (\partial B_1/\partial t - \partial B_3/\partial x)\mathbf{j} + (\partial B_2/\partial x - \partial B_1/\partial y)\mathbf{k}$ dan juga $\partial E/\partial t = \mathbf{i}\,\partial E_1/\partial t + \mathbf{j}\,\partial E_2/\partial t + \mathbf{k}\,\partial E_3/\partial t$ . Begitu juga $J = J_1\mathbf{i} + J_2\mathbf{j} + J_3\mathbf{k}$ dengan $J_1 = J_1(x,y,t)$ dan $J_2 = J_2(x,y,t)$ serta $J_3 = J_3(x,y,t)$ .

Selanjutnya dilakukan pembedahan terhadap sistem persamaan Maxwell di atas, dengan meninjau kembali persamaan-persamaan (1) dan (2) sebagai berikut :

$\partial E_1/\partial x + \partial E_2/\partial y + \partial E_3/\partial t = \rho(x,y,t)$ dan $\partial B_1/\partial x + \partial B_2/\partial y + \partial B_3/\partial t = 0$. Karena rotasi medan listrik E atau $\nabla \times E = -\partial B/\partial t$. Jadi diperoleh $(\partial E_3/\partial y - \partial E_2/\partial t)\mathbf{i} = -\mathbf{i}\,\partial B_1/\partial t$ dan $(\partial E_1/\partial t - \partial E_3/\partial x)\mathbf{j} = -\mathbf{j}\,\partial B_2/\partial t$ begitu juga $(\partial E_2/\partial x - \partial E_1/\partial y)\mathbf{k} = -\mathbf{k}\,\partial B_3/\partial t$ .

Dengan demikian $\partial E_3/\partial y + \partial/\partial t\,(B_1 - E_2) = 0$ ............(6)

dan juga $\partial/\partial t\,(E_1 + B_2) - \partial E_3/\partial x = 0$ ...........(7)

begitu juga $\partial E_2/\partial x - \partial E_1/\partial y + \partial B_3/\partial t = 0$ ...........(8)

Karena rotasi induksi magnet B atau $\nabla \times B = \partial E/\partial t + J$. Jadi dapat diperoleh $(\partial B_3/\partial y - \partial B_2/\partial t)\mathbf{i} = (\partial E_1/\partial t + J_1)\mathbf{i}$ dan $(\partial B_1/\partial t - \partial B_3/\partial x)\mathbf{j} = (\partial E_2/\partial t + J_2)\mathbf{j}$ begitu juga $(\partial B_2/\partial x - \partial B_1/\partial y)\mathbf{k} = (\partial E_3/\partial t + J_3)\mathbf{k}$.

Dengan demikian $\partial B_3/\partial y - \partial/\partial t\,(B_2 + E_1) - J_1 = 0$ .............(9)

dan $\partial/\partial t\,(B_1 - E_2) - \partial B_3/\partial x - J_2 = 0$ ............(10)

begitu juga $\partial B_2/\partial x - \partial B_1/\partial y - \partial E_3/\partial t - J_3 = 0$ ............(11)

Jika persamaan (6) disubtitusi ke persamaan (10) dan persamaan (7) ke persamaan (9) maka diperoleh sistem persamaan sebagai berikut:

$\partial E_1/\partial x + \partial E_2/\partial y + \partial E_3/\partial t = \rho(x,y,t)$ .............(4)

$\partial B_1/\partial x + \partial B_2/\partial y + \partial B_3/\partial t = 0$ .............(5)

$-\partial E_2/\partial x + \partial E_1/\partial y - \partial B_3/\partial t = 0$ .............(8)

$\partial B_2/\partial x - \partial B_1/\partial y - \partial E_3/\partial t - J_3 = 0$ ............(11)

$\partial E_3/\partial y + \partial B_3/\partial x + J_2 = 0$ ............(12)

$\partial B_3/\partial y - \partial E_3/\partial x - J_1 = 0$ .............(13)

Kemudian sistem persamaan di atas disederhanakan lagi dengan cara menjumlahkan persamaan-persamaan (4) dan (11) , (5) dan (8) , (12) dan (13) sehingga diperoleh suatu sistem persamaan sebagai berikut:

$\partial/\partial x\,(B_2 + E_1) - \partial/\partial y\,(B_1 - E_2) = \rho(x,y,t) + J_3$ ...............(14)

$\partial/\partial x\,(B_1 - E_2) + \partial/\partial y\,(B_2 + E_1) = 0$ .............(15)

$\partial/\partial x\,(B_3 - E_3) + \partial/\partial y\,(B_3 + E_3) = J_1 - J_2$ .............(16)

Dari sistem persamaan diferensial parsial yang terakhir inilah akan ditelusuri jenis PDP yang terkait yaitu dengan memperhatikan persamaan-persamaan (14) dan (15) sebagai berikut:

$\partial/\partial x\,(B_2 + E_1) - \partial/\partial y\,(B_1 - E_2) = \rho(x,y,t) + J_3$ dan $\partial/\partial x\,(B_1 - E_2) + \partial/\partial y\,(B_2 + E_1) = 0$.

Selanjutnya misalkan $B_2 + E_1 = u$ dan $B_1 - E_2 = v$. Dengan demikian persamaan-persa maan (14) dan (15) menjadi $u_x - v_y = \rho + J_3$ dan $u_y + v_x = 0$. Atau dapat juga ditulis dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut , A U + B V = C dengan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{begitu juga } U = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad V = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

sedangkan $C = \begin{pmatrix} \rho + J_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Selanjutnya tinjau matriks $(A - \lambda B)$ , sebagai berikut ,

$$A - \lambda B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Det $(A - \lambda B) = 1 + \lambda^2$ , sehingga $P_2(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda B) = 1 + \lambda^2 = 0$ dan ini mengakibatkan $\lambda \notin R$. Jadi jenis PDP pada persamaan-persamaan (14) dan (15) adalah *ellips.* Selanjutnya bila PDP pada persamaan (16) yaitu $\partial/\partial x\ (B_3 - E_3) + \partial/\partial y\ (B_3 + E_3) = J_1 - J_2$ dikembalikan ke PDP pada persamaan-persamaan (12) dan (13) yang berbentuk seperti
$\partial E_3/\partial y + \partial B_3/\partial x + J_2 = 0$ dan $\partial B_3/\partial y - \partial E_3/\partial x - J_1 = 0$ maka dengan cara yang serupa akan diperoleh $P_2(\lambda)$ yang sama dengan di atas yaitu $P_2(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda B) = 1 + \lambda^2 = 0$ dan ini juga mengakibatkan $\lambda \notin R$. Jadi jenis PDP pada persamaan (16) juga adalah *ellips.* Selanjutnya untuk memperoleh solusi PDP dari persamaan Maxwell dengan mengabaikan medan listrik (E = 0) perlu ditinjau kembali persamaan-persamaan (14), (15) dan (16). Karena E = 0 ($E_1 = E_2 = E_3 = 0$) akibatnya $J = \sigma_o E(z, t) = 0$ sehingga
$J_1 = J_2 = J_3 = 0$ begitu juga $\rho(z, t) = \nabla . E = 0$. Dengan demikian PDP pada persamaan-persamaan (14) dan (15) menjadi $\partial B_2/\partial x - \partial B_1/\partial y = 0$ dan $\partial B_1/\partial x + \partial B_2/\partial y = 0$. Sedangkan PDP pada persamaan (16) akan berubah menjadi $\partial B_3/\partial x + \partial B_3/\partial y = 0$ dengan syarat awal pada y = 0 dan $B_3(x, 0) = F(x)$. Dalam hal ini F(x) adalah suatu fungsi kontinyu yang diberikan. Selanjutnya parameter awal dari kurva C diasumsikan sebagai $x = \tau$ dan $y = 0$ serta $B_3 = F(\tau)$ ......... (17)
Sedangkan kurva karakteristiknya adalah $\partial x/\partial s = 1$, $\partial y/\partial s = 1$ dan $\partial B_3/\partial s = 0$ .........(18)
Penyelesaian relasi (18) terhadap relasi (17) dengan s = 0 akan memberikan hasil-hasil sebagai berikut $x(s, \tau) = s + \tau$ , $y(s, \tau) = s$ dan $B_3(s, \tau) = F(\tau)$ ..........(19)
Dari sini juga akan diperoleh $s = y$ dan $\tau = x - y$ ...........(20)
Kemudian jika relasi (20) disubtitusikan ke relasi (19) maka akan diperoleh solusi
$B_3(s, \tau) = F[\tau(x, y)] = F(x - y)$. Dengan demikian solusi $B_3(x, y) = F(x - y)$ memenuhi persamaan $\partial B_3/\partial x + \partial B_3/\partial y = 0$.

**PENUTUP**

Dari hasil penentuan jenis PDP terkait dan proses penelusuran solusinya ternyata hanya ditemukan solusi $B_3(x,y)$. Namun dari hasil proses yang serupa ini perlu dipikirkan bagaimana caranya untuk memperoleh solusi-solusi lainnya yaitu $B_2(x,y)$ dan $B_1(x,y)$, secara eksak maupun numerik. Inilah yang menjadi masalah (*open problem*) untuk pembahasan makalah berikutnya dengan memperhatikan hasil reduksi PDP (14) dan (15) yaitu $\partial B_2/\partial x - \partial B_1/\partial y = 0$ dan $\partial B_1/\partial x + \partial B_2/\partial y = 0$.

**Ucapan Terima Kasih**

Secara khusus saya ucapan terima kasih kepada rekan sekerja di bidang Apgeomagsa-LAPAN yaitu saudara Drs. La Ode Musafar MSc yang telah memberikan banyak sumbangan pemikiran didalam diskusi-diskusi serta bantuan informasinya tentang proses fisis pembentukan model medan geomagnet .

## DAFTAR PUSTAKA

[1]. Duchateau P. et.al., (2000) , *Partial Differential Equations* ,McGraw-Hill Book Co., New-York.
[2]. Hayek S.I.,(2001) , *Advanced Mathematical Methods in Science and Engineering*, Marcel Dekker, Inc. New York.
[3]. Luhmann J.G and Friesen L.M, (1979), *A simple Model of the Magnetosphere*, JGR, Vol. 84 no. A8, pp. 4405 – 4407.
[4]. Wallace P.R,(2002), *Mathematical Analysis of Physical Problems*, Dover Publish. Inc.New-York.
[5]. Zauderer E.,(2003) , *Partial Differential Equations of applied mathematics* , John wiley & sons. , New-York.