

## PENERAPAN METODE INTEGRASI MONTE CARLO PADA LEMBARKERJA EXCEL

Eko Sulistya

Jurusan Fisika, FMIPA UGM, Sekip Utara Kotak Pos Bls 21 Yogyakarta 55281

**Intisari** :Telah dilakukan penerapan metode integrasi Monte-Carlo pada lembarkerja Excel, yaitu penentuan nilai  $\pi$ , dan menentukan titik pusat massa suatu bentuk toroida terpotong. Hasil komputasi dapat langsung ditampilkan dalam lembarkerja setiap ada perubahan parameter masukan sehingga membantu dari segi pembelajaran komputasi. Pada penentuan  $\pi$  diperoleh  $\pi = 3,12 \pm 0,04$  untuk 2000 cacah bilangan acak, sesuai dengan nilai yang disepakati umum. Pada penentuan volume dan titik pusat massa suatu toroida terpotong, untuk 2000 cacah bilangan acak, diperoleh volume  $21,6 \pm 0,5$  (satuan bebas) dan koordinat  $x_{cm} = 2,43$ ;  $y_{cm} = 0,15$ ;  $z_{cm} = -0,0001$ ; dengan ketakpastian relatif pada semua titik sebesar 0,02. Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa lembarkerja Excel dapat digunakan untuk komputasi.

**Kata kunci** : Monte-Carlo, Excel, Integrasi

### Implementattion of Monte-Carlo Integration Method in Excel Worksheet

Eko Sulistya

Physics Departement, FMIPA UGM, Sekip Utara Kotak Pos Bls 21 Yogyakarta 55281

**Abstract** : An implementation of Monte-Carlo integration method have done in Microsoft Excel worksheet. The method used to determine the value of  $\pi$ , and the center mass of a sliced torus. Computational results can be observed immediatly if there any change in the input parameter, an advantage for computation learning process. The value of  $\pi$  obtained is  $\pi = 3,12 \pm 0,04$  for 2000 generated random number, a good agreement with the accepted value. The determination of volume and center of mass point yield  $21,6 \pm 0,5$  (free unit) for volume, and  $x_{cm} = 2,43$ ;  $y_{cm} = 0,15$ ;  $z_{cm} = -0,0001$ ; for 2000 generated random number with relative uncertainty 2% in each value. The results show that Microsoft Excel can be used in numerical computation.

**Keywords** : Monte-Carlo, Excel, Integration

#### 1. PENDAHULUAN

Dua macam penerapan metode Monte-Carlo adalah simulasi dan pengintegralan. Pada metode simulasi, suatu model determistic diuji dengan satu set bilangan acak sebagai masukan, yang dilakukan berulang (iteratif). Metode ini sangat berguna untuk menyelesaikan masalah yang kompleks, nonlinear, atau melibatkan lebih dari satu pasang parameter yang tidak diketahui.

Metode integrasi Monte-Carlo digunakan untuk menentukan suatu luasan atau volume bangun yang tidak beraturan. Pada kedua metode itu selalu melibatkan pembangkitan bilangan acak, yang bisa mencapai ribuan kali iterasi, yang sangat sukar dilakukan tanpa bantuan komputer. Sebelum rutin pembangkitan bilangan acak dengan

komputer ditemukan, bilangan-bilangan acak dituliskan lebih dahulu kemudian disimpan ke dalam memori komputer untuk kemudian digunakan dalam pemrograman.

Beberapa perangkat lunak yang khusus untuk menyelesaikan masalah-masalah sains dan teknik, seperti Matlab, Mathcad, Scilab, Mathematica, dan lain sebagainya, dapat dengan mudah digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dengan metode Monte-Carlo. Demikian juga, berbagai bahasa pemrograman, seperti Fortran, C, C++, dan sebagainya dapat digunakan untuk menuliskan rutin penerapan metode Monte-Carlo. Keuntungan dari penggunaan perangkat-perangkat lunak sains, dan bahasa pemrograman adalah kecepatan. Hasilnya akan segera ditampilkan.

Dari segi pembelajaran, diperlukan penyajian hasil langkah-per-langkah. Untuk maksud ini, kode program dapat diubah agar dapat menampilkan hasil untuk tiap langkah iterasi, atau menggunakan lem

barkerja (*spreadsheet*). Pada saat ini, lembarkerja yang populer dan dipakai banyak orang adalah Microsoft Excel®.

Perbedaan antara Excel dengan perangkat-perangkat lunak sains serta bahasa pemrograman adalah, bahwa dengan Excel seseorang tidak harus menguasai bahasa dan teknik pemrograman. Yang diperlukan adalah pemahaman alur proses dan persamaan yang akan digunakan. Persamaan tersebut dituliskan dalam suatu sel lembarkerja.

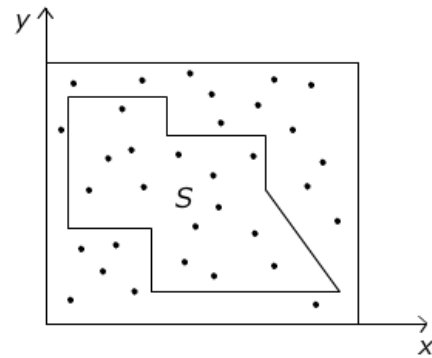
Lembarkerja (*worksheet*) Excel bagaikan satu lembar dokumen yang hidup. Setiap rumus yang terdapat dalam suatu sel dihitung secara otomatis setiap ada perubahan isi di setiap bagian lembarkerja itu, atau bisa diatur agar dilakukan manual dengan tombol F9 (Frye, 2004).

Pada makalah ini disajikan dua penerapan metode integrasi Monte-Carlo dengan Excel, yaitu : penentuan nilai  $\pi$  dan penentuan titik pusat massa suatu bentuk tak beraturan, yang pertama dengan formula lembar kerja, dan kedua dengan VBA (*Visual Basic for Application*).

## 2. LANDASAN TEORI

Metode numerik untuk menghitung suatu integral tertentu dengan metode Monte-Carlo dapat dijabarkan secara murni matematis (Koonin, 1990; DeVries, 1994), atau dengan metode sederhana, yang disebut metode “*Hit-or-Miss*”, (Sobol, 1993). Mencari nilai suatu integral tertentu suatu fungsi adalah sama dengan menghitung luas yang dibatasi oleh kurva fungsi itu dan batas-batas integralnya. Bila daerah yang akan dihitung luasnya berupa suatu daerah yang bentuknya tidak beraturan, metode monte-Carlo dapat digunakan.

Misal akan dihitung luas suatu bangun sembarang  $S$  yang berada di dalam suatu daerah bangun persegi seperti ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Bangun sembarang yang akan ditentukan luasnya

Pilih sejumlah  $N$  titik di dalam daerah persegi secara acak, dan untuk titik-titik yang masuk di dalam daerah  $S$  diberi simbol  $n$ . Secara geometri, nampak bahwa perbandingan luas bangun  $S$  dapat didekati dengan perbandingan  $n/N$ . Jika luas bangun  $S$  adalah  $A_S$  dan luas bangun persegi adalah  $A_P$ , maka

$$A_S \cong \frac{n}{N} A_P \quad (1)$$

Ketidakpastian  $\sigma$  dalam penentuan  $n$  diberikan oleh deviasi standar dari agihan binomial dengan kebolehjadian  $p = A_S/A_P$  (Bevington, 2003)

$$\sigma = \sqrt{Np(1-p)} = \sqrt{n(1-p)}, \quad (2)$$

sehingga hasilnya disajikan sebagai  $n \pm \sigma$ . Ketidakpastian relatifnya,

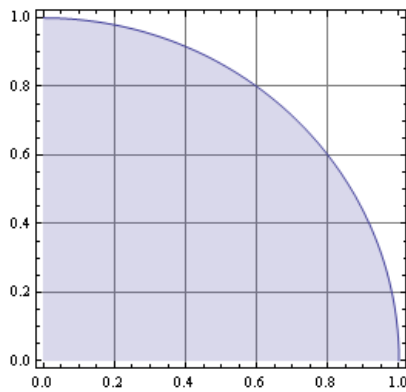
$$\frac{\sigma}{n} = \frac{\sqrt{n(1-p)}}{n} = \sqrt{\frac{1-p}{n}} \quad (3)$$

yang menunjukkan bahwa ketidakpastian relatif pada hasil berbanding terbalik dengan akar kuadrat  $n$ , yang berarti semakin besar  $N$  maka semakin akurat penentuan luas  $S$ .

## 3. IMPLEMENTASI

### 3.1 Menentukan nilai $\pi$

Cara numerik untuk menentukan nilai  $\pi$  adalah dengan menghitung luas  $\frac{1}{4}$  lingkaran berjari 1, seperti ditunjukkan pada Gambar 2. Luas sebenarnya adalah  $\frac{1}{4}\pi$ .



Gambar 2 Luas ¼ lingkaran berjari 1

Titik-titik dibangkitkan secara acak pada interval  $0 \leq x \leq 1$  dan  $0 \leq y \leq 1$ . Pada Excel, bilangan acak dibangkitkan dengan rumus : RAND(), yang akan memberikan nilai acak antara 0 sampai 1. Rumus tersebut diisikan pada dua sel untuk membangkitkan nilai  $x$  dan  $y$ . Selanjutnya koordinat itu diuji apakah berada di dalam luasan ¼ lingkaran atau tidak dengan syarat

$$\sqrt{x^2 + y^2} < 1 \quad (4)$$

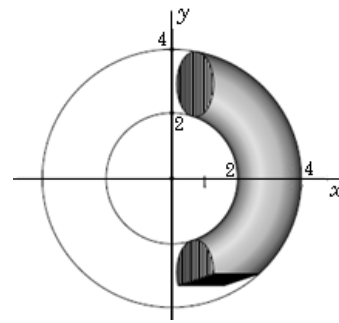
Jika dari sebanyak  $N$  koordinat acak ada sebanyak  $n$  yang berada di dalam ¼ lingkaran, maka nilai  $\pi$  bisa didekati dengan

$$\pi \cong \frac{n}{N} \times 4 \quad (5)$$

### 3.2 Menentukan titik pusat massa

Gambar 1 jika diterapkan pada bentuk 3 dimensi, maka titik-titik dibangkitkan secara acak pada suatu volume bangun sederhana  $V$  yang di dalamnya ada bangun sembarang  $W$ . Volume bangun sembarang dapat didekati dari hasil kali  $V$  dengan prosentase titik yang berada di dalam  $W$  dengan jumlah keseluruhan titik.

Dengan memandang titik-titik yang berada di dalam volume  $W$  sebagai suatu sistem partikel dengan massa yang sama, maka secara pendekatan dapat dicari titik pusat massa dari  $W$ . Bentuk yang akan dicari titik pusat massanya adalah toroida terpotong seperti pada Gambar 3 (Press, 2007).



Gambar 3. Suatu toroida terpotong

Persamaan untuk toroidanya adalah

$$z^2 + \left( \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 \leq 1 \quad (6)$$

dengan batas pemotongan

$$x \geq 1 \quad \text{dan} \quad y \geq -3 \quad (7)$$

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4	$x$	$y$	$z$	$z^2 + \left( \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2$	Di dalam?
5	2,38	1,88	0,76	2,08	FALSE
6	2,88	2,75	0,83	1,66	FALSE
7	2,01	3,33	-0,90	1,60	FALSE

Gambar 4. Sebagian tampilan lembarkerja

Persamaan (7) menentukan bentuk rumus randomnya, yaitu  $x$  berada antara 1 sampai 4,  $y$  antara  $-3$  sampai 4 dan  $z$  antara  $-1$  sampai 1 (tidak dipotong pada sumbu- $z$ ). Rumus-rumus tersebut dituliskan berturut-turut pada sel A5, B5, dan C5, seperti ditampilkan pada Gambar 5. Pada sel D5 diisikan rumus

$$=(SQRT(A5^2+B5^2)-3)^2+C5^2 \quad (8)$$

sedangkan sel E5 diisikan

$$=AND(D5<=1) \quad (9)$$

untuk menguji apakah koordinat  $(x,y,z)$  yang dibangkitkan berada di dalam toroida terpotong.

Pengujian dengan persamaan (9) dapat pula dilakukan dengan VBA (*Visual Basic for Application*), suatu *macro* pada Excel (Billo, 2007).

Jika terdapat sebanyak  $n$  titik yang berada di dalam, maka koordinat pusat massanya didekati dengan (Serway, 2004).

$$x_{cm} \approx \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} = \frac{m \sum_{i=1}^n x_i}{nm} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (10)$$

$$y_{cm} \approx \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} = \frac{m \sum_{i=1}^n y_i}{nm} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \quad (11)$$

$$z_{cm} \approx \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} = \frac{m \sum_{i=1}^n z_i}{nm} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} \quad (12)$$

dengan menganggap bahwa semua titik koordinat (sebagai titik partikel) massanya sama. Dengan kata lain, benda dianggap homogen, sehingga kerapatannya tetap dan sama di semua titik.

Dengan demikian, untuk setiap iterasi, setelah titik diuji, jika berada di dalam volume toroida, nilai-nilai  $x$ ,  $y$  dan  $z$  diakumulasikan, kemudian hasil akhirnya dibagi dengan total titik di dalam volume untuk memperoleh titik koordinat pusat massanya.

#### 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

##### 4.1 Menghitung $\pi$

Gambar 4 menampilkan sebagian dari lembar kerja Excel. Kolom-kolom perhitungan memanjang ke bawah sampai pada baris 59, sehingga  $N = 50$ . Diperoleh  $n = 38$  dan  $\sigma = 3$ . Dengan demikian diperoleh nilai untuk  $\pi$ , 3,0 dengan ketidakpastian 0,2.

	A	B	C	D	E	F
1	Menentukan nilai $\pi$					
2	$N =$	50				
3	$n =$	38				
4	$\sigma =$	3				
5	$\pi =$	3,04				
6	$\Delta\pi =$	0,24				
7	$\Delta\pi/\pi =$	0,079				
8						
9	$x$	$y$	$(x^2+y^2)^{1/2}$	$\leq 1?$	$x$	$y$
10	0,4	0,97	1,05	FALSE	#N/A	#N/A
11	0,45	0,46	0,64	TRUE	0,45	0,46
12	0,51	0,67	0,84	TRUE	0,51	0,67
13	0,56	0,24	0,61	TRUE	0,56	0,24
14	0,84	0,93	1,25	FALSE	#N/A	#N/A
15	0,68	0,82	1,07	FALSE	#N/A	#N/A
16	0,67	0,47	0,82	TRUE	0,67	0,47
17	0,21	0,96	0,98	TRUE	0,21	0,96
18	0,29	0,69	0,75	TRUE	0,29	0,69
19	0,49	0	0,49	TRUE	0,49	0

Gambar 4. Hasil untuk  $N = 50$

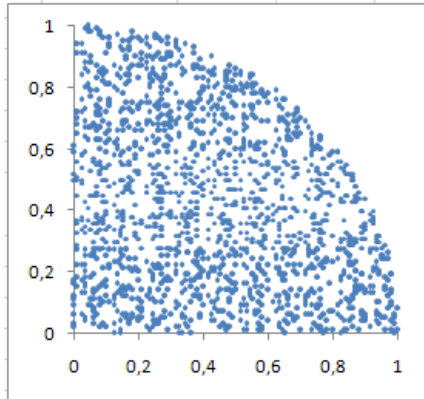
Jumlah iterasi dapat diperbanyak dengan cara menyalin kolom-kolom perhitungan ke bawah sampai jumlah  $N$  yang dikehendaki. Tabel 1 berikut ini menyajikan beberapa hasil untuk  $N$  yang berbeda-beda.

Tabel 1. Hasil menentukan  $\pi$  untuk beberapa nilai  $N$

$N$	$n$	$\sigma$	$\pi$	$\Delta\pi$	$\Delta\pi/\pi$
50	40	3	3,20	0,23	0,079
100	77	4	3,08	0,17	0,055
400	309	8	3,09	0,08	0,027
1000	818	12	3,27	0,05	0,015
2000	1560	19	3,12	0,04	0,012

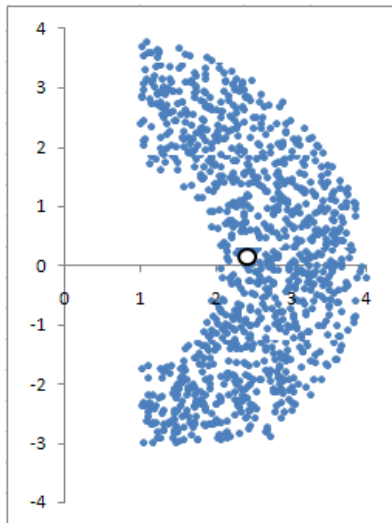
Dari Tabel 1 terlihat bahwa dengan melipatkan  $N$  sebesar  $p$  kali, maka ketakpastian relatif berkurang menjadi sekitar  $1/\sqrt{p}$  kalinya. Sebagai contoh untuk  $N = 100$  menjadi  $N = 400$ , faktor kelipatannya  $p = 4$ , ketakpastian relatifnya menjadi setengahnya. Oleh karena itu dengan menambah  $N$  dari 1000 menjadi 2000 tidak banyak berpengaruh pada ketakpastian relatif, walaupun secara komputasi langkah perhitungan menjadi lebih besar dan waktu yang diperlukan juga lebih lama. Jadi ada batas untuk menentukan seberapa  $N$  agar sesuai dengan ketakpastian yang diharapkan.

Gambar 5 menampilkan sejumlah  $n$  titik koordinat dari sejumlah  $N = 2000$  titik acak.



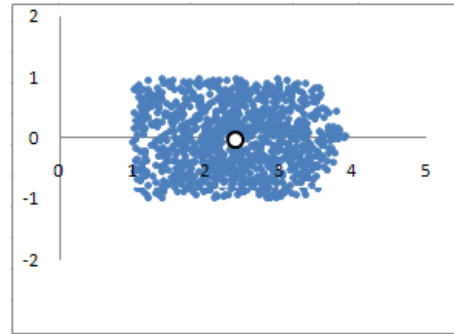
Gambar 5. Hasil untuk  $N = 2000$

#### 4.2 Menentukan titik pusat massa

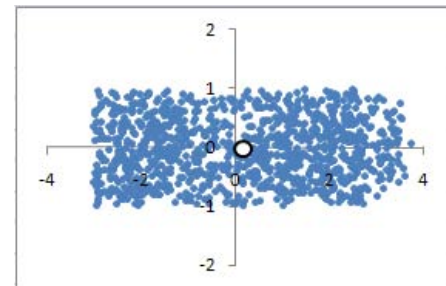


Gambar 6. Grafik 2-dimensi  $xy$

Sejumlah 2000 titik data acak yang dibangkitkan pada suatu bangun geometri yang melingkupi volume toroida terpotong. Bangun tersebut memiliki ukuran : 2 (batas-batas pada sumbu- $z$ ), 7 (batas-batas pada sumbu- $y$ ) dan 3 (batas-batas pada sumbu- $x$ ), sehingga volumenya adalah  $2 \times 7 \times 3$ . Gambar 6 menampilkan grafik 2 dimensi titik-titik yang berada di dalam toroida terpotong. Sumbu vertikal adalah sumbu- $y$  sedangkan sumbu horisontal adalah sumbu- $x$ .



Gambar 7. Grafik  $xz$



Gambar 8. Grafik  $yz$

Titik besar berwarna merah adalah titik pusat massa hasil perhitungan. Dapat dilihat bahwa ada kemiripan antara Gambar 6 dengan Gambar 3. Gambar 7 dan 8 menampilkan grafik 2-dimensi  $xz$  dan  $yz$  untuk objek yang sama.

$N =$	2000		
$n =$	1077		
$\sigma =$	22.29		
$\Sigma x =$	2555.934		
$\Sigma y =$	314.632		
$\Sigma z =$	9.367		
Volume =	22.617		
Koordinat pusat massa			
$x =$	2.373	$\Delta x =$	0.02896
$y =$	0.292	$\Delta y =$	0.03054
$z =$	0.009	$\Delta z =$	0.05099

Gambar 9. Tampilan hasil untuk  $N = 2000$

Lembarkerja Excel yang menampilkan hasil-hasil perhitungan ditunjukkan pada Gambar 9.

Untuk jumlah bilangan acak yang lebih banyak, misalnya lipat dua kali dari 2000, yaitu 4000 jumlah titik acak, proses perhitungan pada lembarkerja menjadi sangat banyak, dan dengan komputer yang digunakan (Celeron 1,4 GHz dan RAM 1,25 GB) tidak memperoleh output.

Perhitungan untuk jumlah titik acak yang besar dilakukan dengan menulis makro VBA (*Visual Basic for Application*) dan hasilnya ditampilkan pada lembar kerja. Gambar 10 menampilkan hasil perhitungan untuk  $N = 10.000$  dengan VBA.

	A	B	C	D
1				
2	N =	10000		Hitung
3	sw =	5328		
4	sx =	12863.13672		
5	sy =	773.9920654		
6	sz =	13.44371128		
7	x =	2.434635401		
8	y =	2.399374962		
9	z =	-0.103903651		
10				
11	Volume =	22.38	$\Delta V =$	0.20955
12				
13	$x_{cm} =$	2.4143	$\Delta x =$	0.02261
14	$y_{cm} =$	0.1453	$\Delta y =$	0.00136
15	$z_{cm} =$	0.0025	$\Delta z =$	0.00002

Gambar 10. Tampilan hitungan VBA untuk  $N = 10.000$

## 5. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil-hasil yang diperoleh dapat ditunjukkan bahwa lembarkerja Microsoft Excel dapat digunakan sebagai perangkat untuk komputasi numerik. Kekurangan pada lembarkerja adalah keterbatasan dalam hal kapasitas data yang dapat diolah, dan waktu komputasi, namun dengan menuliskan algoritma numerik dalam VBA pada Excel, jumlah data yang dapat diolah bisa sangat besar dan dengan waktu yang cukup cepat.

### DAFTAR PUSTAKA

- Bevington, P.R., dan D.K. Robinson, 2006, *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Company, New York
- Billo, E.J., 2007, *Excel® for Scientist and Engineers – Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- DeVries, P.L., *A First Course in Computational Physics*, 1994, John Wiley & Sons, Inc., Canada

Frye,C., *Microsoft Office Excel 2003 Step by Step*, 2004, Microsoft Press, Canada.

Koonin, S.E., Meredith, D.C., *Computational Physics Fortran Version*, 1990, Westview Press, Canada

Press, W.H., Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, 2007, Cambridge University Press, New York.

Serway, R.A, Jewett, J.W., *Physics for Scientist and Engineers*, edisi 6, 2004, Thomson Brooks/Cole, New York.

Sobol, Ilya M., *A Primer for the Monte Carlo Method*, 1994, CRC Press, Inc., USA