MODEL MATEMATIKA WAKTU PENGOSONGAN TANGKI AIR

Irmawati[1], Kuntjoro Adji Sidarto[2]

1. *Guru SMA Neg.1 Lipunoto Kab.Buol Sulawesi Tengah*
2. *Prodi Matematika Institut Teknologi Bandung*

Abstrak

Sebuah tangki diisi air dengan ketinggian tertentu dan pada dasar tangki tersebut dibuat lubang kecil, sehingga air mengalir melalui lubang tersebut. Menurut Hukum Torricelli, apabila tangki dikosongkan maka kecepatan keluar air akan berubah secara kontinu dipengaruhi oleh ketinggian air. Lamanya waktu yang digunakan untuk mengosongkan tangki apabila diisi air dengan ketinggian tertentu disebut waktu pengosongan. Waktu pengosongan juga dipengaruhi oleh bentuk tangki. Tulisan ini membahas tentang *depletion ratio.* Seandainya kecepatan keluar air adalah tetap, maka *depletion ratio* adalah perbandingan antara waktu pengosongan jika kecepatan keluar air berubah dipengaruhi oleh ketinggian air dengan waktu pengosongan jika kecepatan air keluar tetap. Selanjutnya jika diketahui *depletion ratio*nya maka dapat ditentukan bentuk geometri tangki tersebut.

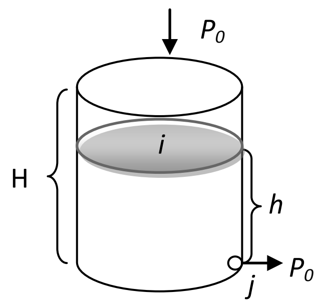
Kata kunci : Hukum Torricelli, waktu pengosongan, *depletion ratio*.

PENDAHULUAN

Sebuah tangki diisi dengan air sampai dengan ketinggian tertentu. Pada dasar tangki tersebut dibuat lubang kecil. Menurut Hukum Torricelli kecepatan air yang keluar dari lubang dipengaruhi oleh ketinggian air. Kecepatan air yang keluar semakin lama semakin kecil, sesuai dengan penurunan ketinggian air. Meskipun tanki mempunyai volume, tinggi dan luas penampang saluran keluar air yang sama, diperlukan waktu yang berbeda untuk mengosongkan tangki. Dalam situasi tertentu diperlukan bentuk tangki yang memberikan waktu pengosongan minimal. Groetsch (2008) dalam tulisannya membahas tentang *depletion ratio*. Uraian dalam tulisan ini dibatasi pada model matematika waktu pengosongan tangki air dan *depletion ratio*. Selanjutnya jika *depletion ratio* tangki diketahui maka dapat ditentukan bentuk geometri tangki tersebut.

PEMBAHASAN

Hukum Torricelli



Gambar 1

Sebuah tangki seperti pada gambar 1 diberi lubang kecil dibagian bawahnya. Tangki tersebut diisi air sampai dengan ketinggian tertentu. Misalkan i adalah titik awal pada permukaan air, dan j adalah titik pada lubang. h menyatakan ketinggian air dan h merupakan fungsi dari waktu. Karena lubang sangat kecil maka kecepatan turunnya air di i juga cukup kecil. Karena permukaan air di i dan di j langsung berhubungan dengan udara luar, maka tekanan di titik i (P_i) dan tekanan dititik j (P_j) akan sama yaitu sama dengan tekanan udara luar (P_0). Sehingga $P_i = P_j = P_0$. Dengan menggunakan persamaan Bernoulli (Massey,1989) diperoleh (gesekan antara air dengan tangki diabaikan) :

$$P_i + \frac{1}{2} m v_i^2 + m\,g\,h_i = P_j + \frac{1}{2} m v_j^2 + m\,g\,h_j$$

Karena $P_i = P_j = P_0$ dan $v_i = 0$, maka

$$P_0 + 0 + m\,g\,h_i = P_0 + \frac{1}{2} m v_j^2 + m\,g\,h_j$$

Maka

$$\frac{1}{2} v_j^2 = g\,(h_i - h_j)$$

Sehingga $v_j = \sqrt{2\,g\,h}$ dengan $h = h_i - h_j$

Karena kecepatan di *j* bergantung nilai *h* maka v_j dapat diganti oleh v_h atau secara umum ditulis v.

Jadi, $v_h = v = \sqrt{2\,g\,h}$

Persamaan ini ditemukan oleh Evangelista Torricelli (1608-1647) pada tahun 1640, yang kemudian popular disebut sebagai Hukum Torricelli.

Model Matematika Waktu Pengosongan Tangki dan *Depletion ratio*

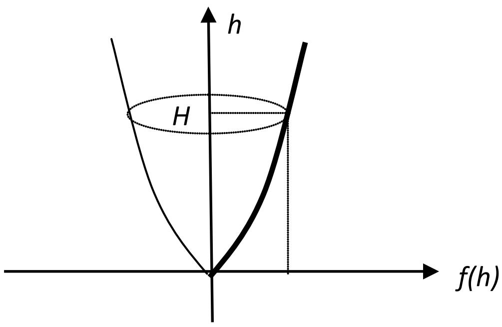
Perhatikan gambar 1, misalkan H adalah tinggi tangki, H positif, *h* adalah tinggi air pada saat *t*, dan *A* adalah luas penampang tangki. Jika dalam selang waktu Δt, ketinggian air turun sebesar Δh, maka penurunan volume air selama selang waktu Δt adalah:

$$\Delta V = A.\Delta h$$

Penurunan volume air juga dapat ditentukan dari volume air yang keluar dari lubang selama selang waktu Δt. Jika kecepatan air keluar dari lubang pada saat ketinggian air h adalah v dan a adalah luas lubang yang ada pada dasar tangki maka volume air yang keluar dari lubang selama selang waktu Δt menjadi:

$$\Delta V = a.v.\Delta t$$

Perhatikan kurva dibawah ini:



Gambar 2

Apabila kurva pada gambar 2 yaitu $\{(f(h), h) : h \in [0, H]\}$,*f* kontinu pada [0,H] dan *f* bernilai positif pada (0,H] diputar terhadap sumbu vertikal maka diperoleh suatu benda putar.

Dalam bentuk integral volume benda putar yang terbentuk dari kurva pada gambar 2 adalah

$$V = \int_0^h \pi\, f(s)^2\, ds$$

Karena $v = \sqrt{2\,g\,h}$ dan terjadi penurunan ketinggian permukaan air dalam tangki, maka persamaan $\Delta V = a.v.\Delta t$ menjadi:

$$\Delta\left(\int_0^h \pi f\left(s\right)^2 ds\right) = -a\sqrt{2gh}\ \Delta t$$

Jika $\Delta t \to 0$, diperoleh suatu persamaan diferensial:

$$-\frac{d}{dt}\pi\int_0^h \left(f\left(s\right)\right)^2 ds = a\sqrt{2gh}$$

Disederhanakan menjadi

$$-\pi\left(f\left(h\right)\right)^2\frac{dh}{dt} = a\sqrt{2gh}$$

Maka

$$dt = \frac{-\pi}{a\sqrt{2g}}\frac{\left(f\left(h\right)\right)^2}{\sqrt{h}}dh \qquad \textbf{(1)}$$

Jika tangki diisi air sampai ketinggian y, dengan waktu pengosongan $T(y)$, maka

$$T\left(y\right) = -\int_{T(y)}^{0} dt$$

Dengan mensubtitusi persamaan (1) ke $T\left(y\right)$ dan mengingat bahwa pada saat $t = 0$, ketinggian air adalah y dan pada saat $T\left(y\right)$, ketinggian air adalah 0, maka diperoleh

$$T\left(y\right) = \frac{\pi}{a\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{\left(f\left(h\right)\right)^2}{\sqrt{h}}dh$$

Jika tangki dikosongkan maka ketinggian air akan menurun secara kontinu, akibatnya kecepatan air juga menurun. Atau dengan kata lain kecepatan air keluar semakin lama semakin kecil, sesuai dengan penurunan ketinggian air. Sehingga jika kecepatan keluar air adalah tetap, dimana kecepatan awal menjadi $a\sqrt{2gy}$, maka waktu pengosongan $T^*\left(y\right)$ berbentuk

$$T^*\left(y\right) = \frac{\pi\int_0^y \left(f\left(h\right)\right)^2 dh}{a\sqrt{2gy}}$$

Sekarang anggap kecepatan air keluar tetap, maka *depletion ratio* adalah perbandingan waktu pengosongan apabila kecepatan keluar air berubah terhadap ketinggian dengan waktu pengosongan apabila kecepatan keluar air tetap. Sehingga *depletio ratio,* $\dfrac{T\left(y\right)}{T^*\left(y\right)}$ adalah

$$\frac{T\left(y\right)}{T^*\left(y\right)} = \frac{\sqrt{y}\int_0^y \frac{\left(f\left(h\right)\right)^2 dh}{\sqrt{h}}}{\int_0^y \left(f\left(h\right)\right)^2 dh} \qquad (2)$$

Misalkan $h = s^2, 0 \le s^2 \le y$ atau $\sqrt{h} = s, 0 \le s \le \sqrt{y}$, maka $dh = 2s\,ds$ dan tulis $g\left(s\right) = \left(f\left(s^2\right)\right)^2$ maka dari persamaan (2) diperoleh

$$\frac{T\left(y\right)}{T^*\left(y\right)} = \frac{\sqrt{y}\int_0^{\sqrt{y}} g\left(s\right)s\,ds}{\int_0^{\sqrt{y}} s\,g\left(s\right)\,ds} \qquad (3)$$

Beberapa Sifat

Misalkan perbandingan waktu pengosongan $\frac{T(y)}{T^*(y)}$ dinotasikan dengan k. Dari persamaan (3) jika $u = \sqrt{y}$ maka

$$k(u) = \frac{u\int_0^u g(s)\,ds}{\int_0^u s\,g(s)\,ds}\text{, untuk } u > 0 \tag{4}$$

Karena fungsi f kontinu pada $[0, H]$ dan positif pada $(0, H]$, fungsi g kontinu pada $\left[0, \sqrt{H}\right]$ dan positif pada $(0, H]$.

Ingat kembali bahwa fungsi f dikatakan *homogen berderajat m* jika $f(\alpha s) = \alpha^m f(s)$ untuk setiap α dan s, khususnya fungsi konstan adalah homogen berderajat 0.

Sifat 1:

g homogen berderajat m jika dan hanya jika f homogen berderajat $\frac{m}{4}$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Akan ditunjukkan jika g homogen berderajat m maka f berderajat $\frac{m}{4}$.

Perhatikan bahwa $g(\alpha s) = \left(f(\alpha s)^2\right)^2$

Maka

$$f(\alpha s) = \left(g(\alpha s)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Karena g homogen berderajat m diperoleh

$$f(\alpha s) = \left(\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^m g\left(s^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \alpha^{\frac{m}{4}}\left(g\left(s^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \alpha^{\frac{m}{4}}\left(f^2\left(s^{\frac{1}{2}\cdot 2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \alpha^{\frac{m}{4}} f(s)$$

Atau f homogen berderajat $\frac{m}{4}$.

$(\Leftarrow)$ Akan ditunjukkan jika f berderajat $\frac{m}{4}$, maka g homogen berderajat *m*.

Karena $g(\alpha s) = \left(f(\alpha s)^2\right)^2$

Dan f berderajat $\frac{m}{4}$, maka

$$g(\alpha s) = \left(\left(\alpha^2\right)^{\frac{m}{4}} f(s)^2 \right)^2$$

$$= \left(\alpha^2\right)^{\frac{m}{2}} f^2\left(s^2\right)$$

$$= \alpha^m \left(f\left(s^2\right)\right)^2$$

$$= \alpha^m g(s)$$

Atau g homogen berderajat *m.*

Selanjutnya misalkan dipilih variabel $s = u\,w$ dengan $u = \sqrt{y}$. Maka $ds = u\,dw$, sehingga dari persamaan (4) diperoleh

$$k(u) = \frac{\int_0^1 g(u\,w)\,dw}{\int_0^1 w\,g(u\,w)\,dw} \tag{5}$$

Sifat 2:

Andaikan bahwa $k(u)$ konstan: $k(u) = k > 1$ pada $\left[0, \sqrt{H}\right]$, akan ditunjukkan bahwa g homogen berderajat *m* dan f homogen berderajat $\frac{m}{4}$, *m* suatu nilai tertentu, dengan $m = \frac{(2-k)}{(k-1)}$.

Bukti:

Dari persamaan (4) diperoleh

$$k\int_0^u s\,g(s)\,ds = u\int_0^u g(s)\,ds$$

Jika diturunkan

$$\frac{d}{du}\left(k\int_0^u s\,g(s)\,ds\right) = \frac{d}{du}\left(u\int_0^u g(s)\,ds\right),$$

diperoleh

$$(k-1)u\,g(u) = \int_0^u g(s)\,ds$$

Sehingga

$$\int_0^u g(s)\,ds = (k-1)u\,g(u), \text{ untuk } 0 < u < \sqrt{H}$$

Jadi

$$g(u) = \frac{\int_0^u g(s)\,ds}{(k-1)u}$$

Karena g adalah hasil bagi dua fungsi yang dapat diturunkan, maka g juga memiliki turunan, yaitu :

$$g'(u) = \frac{g(u)(k-1)u - (k-1)\int_0^u g(s)\,ds}{\left((k-1)u\right)^2}$$

Maka diperoleh

$$g'(u) = \frac{g(u)(k-1)u - (k-1)(k-1)u\,g(u)}{\left((k-1)u\right)^2}$$

Sehingga

$$g'(u) - \frac{(2-k)}{(k-1)}\,\frac{1}{u}\,g(u) = 0$$

Maka $g'(u) - \dfrac{m}{u}g(u) = 0$ dengan $m = \dfrac{(2-k)}{(k-1)}$.

Selanjutnya akan dicari solusi dari $g'(u) - \dfrac{m}{u}g(u) = 0$

Jika diintegralkan maka diperoleh $\ln\left|g(u)\right| = m\,\ln|u| + \ln|C|$

Sehingga

$$g(u) = Cu^m$$

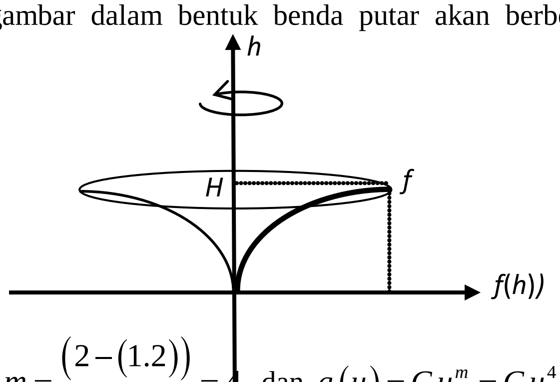
Jadi, diperoleh $g(u) = Cu^m$ dengan $m = \dfrac{(2-k)}{(k-1)}$ dan *C* konstanta (positif).

Jadi, jika *k(u)* konstan maka *g* homogen berderajat *m* dan menurut sifat (1) fungsi *f* homogen berderajat $\dfrac{m}{4}$.

Beberapa Bentuk Tangki

- Jika $k = \dfrac{10}{9} \approx 1{,}1$, maka $m = \dfrac{\left(2-\frac{10}{9}\right)}{\left(\frac{10}{9}-1\right)} = 8$, dan $g(u) = C\,u^8$

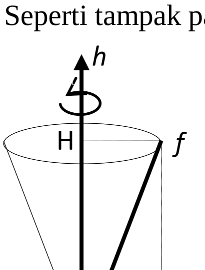
  Sehingga $f(h) = C\,h^2$ untuk suatu konstanta C, pilih $C = 2$. Dengan demikian tangki dengan $k = \dfrac{10}{9}$ apabila digambar dalam bentuk benda putar akan berbentuk seperti tampak pada gambar 4 berikut:



Gambar 4

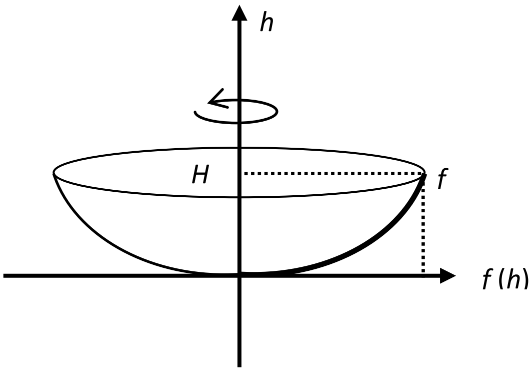
- Jika $k = 1.2$ maka $m = \dfrac{\left(2-(1.2)\right)}{\left((1.2)-1\right)} = 4$, dan $g(u) = C\,u^m = C\,u^4$

  Sehingga $f(h) = C\,h$ untuk suatu konstanta C, pilih $C = 2$. Dengan demikian tangki dengan $k = 1.2$ akan berbentuk kerucut terbalik. Seperti tampak pada gambar 3 berikut:



- Jika $k = 1.4$ maka $m = \dfrac{(2-(1.4))}{(1.4-1)} = \dfrac{3}{2}$, dan $g(u) = C\,u^{\frac{3}{2}}$

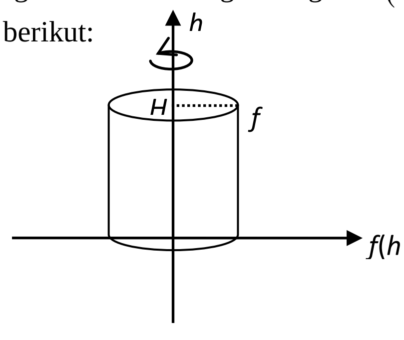
  Sehingga $f(h) = C\,h^{\frac{3}{8}}$ untuk suatu konstanta C, pilih $C = 2$. Dengan demikian tangki dengan $k = 1.4$ apabila digambar dalam bentuk benda putar akan berbentuk seperti tampak pada gambar 5 berikut:



Gambar 5

- Jika $k = 2$ maka $m = \dfrac{(2-2)}{(2-1)} = 0$, dan $g(u) = C\,u^{m} = C\,u^{0} = C$

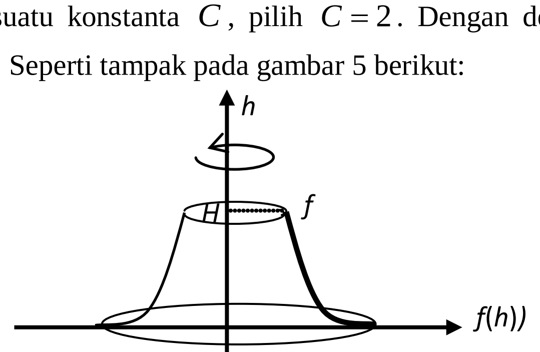
  Sehingga f konstan, pilih $C = 2$. Dengan demikian tangki dengan $k(u) = 2$ akan berbentuk silinder. Seperti tampak pada gambar 6 berikut:



Gambar 6

- Jika $k = 3.2$ maka $m = \dfrac{(2-3.2)}{(3.2-1)} = -\dfrac{6}{11}$, dan $g(u) = C\,u^{-\frac{6}{11}}$

  Sehingga $f(h) = C\,h^{-\frac{6}{44}}$ untuk suatu konstanta C, pilih $C = 2$. Dengan demikian tangki dengan $k = 3.2$ berbentuk kerucut. Seperti tampak pada gambar 5 berikut:



Dengan memanfaatkan *depletion ratio* diperoleh bentuk tangki yang berbeda-beda. Kecepatan waktu pengosongan tangki juga dapat dilihat dari *depletion ratio.* Semakin besar *depletion ratio* maka semakin lambat waktu pengosongan tangki. Sebagai contoh tangki yang berbentuk kerucut terbalik *depletion ratio*nya lebih kecil daripada tangki yang berbentuk silinder, berarti tangki yang berbentuk kerucut terbalik mempunyai waktu pengosongan lebih cepat daripada tangki yang berbentuk silinder.

KESIMPULAN

Berdasarkan Hukum Torricelli, kecepatan air keluar dari tangki dipengaruhi oleh ketinggian air dalam tangki. Lebih tepatnya kecepatan air keluar dari tangki berbanding lurus dengan akar dari ketinggian air dalam tangki. Waktu pengosongan tangki dipengaruhi oleh ketinggian air dan bentuk tangki. Tangki berbentuk silinder jika *depletion ratio* = 2, berbentuk kerucut terbalik jika *depletion ratio* = 1.2. Tangki yang berbentuk kerucut terbalik mempunyai waktu pengosongan lebih cepat daripada tangki yang berbentuk silinder.

DAFTAR PUSTAKA

Groetsch, C.W. (2008) : The Depletion Ratio, *The College Mathematics Journal*, **39**, 43 – 48.
Massey, B.S. (1989) : *Mechanics of Fluids*, Champman and Hall, London.