PEMODELAN PASAR KEUANGAN DENGAN MEKANIKA KUANTUM

Dwi Satya Palupi
Jurusan Fisika FMIPA UGM

Abstrak

Mekanika Kuantum dicoba untuk digunakan dalam pemodelan pasar keuangan. Pasar finansial tersusun atas pelaku pasar, jumlah uang yang dimiliki penanam modal, sekuritas dan harga sekuritas. Penyusun pasar finansial tersebut dapat menjadi basis lengkap yang menyusun keadaan sistem pasar keuangan. Observabel dalam mekanika kuantum dinyatakan dalam bentuk operator Hermitian. Akan dicari operator-operator yang merubah keadaan pasar finansial dengan melakukan analog dengan operator-operator yang ada dalam fisika.

Kata kunci: mekanika kuantum, operator, pasar finansial

PENDAHULUAN

Pendekatan pada sistem pasar keuangannya umumnya dilakukan dengan pendekatan stokhastik. Berdasarkan sifat stokastik pasar keuangan kemudian disusun persamaan diferensial stokastik untuk sistem pasar, distribusi peluang sekuritas dapat ditemukan dengan memecahkan persamaan diferensial stokastik tersebut. Penyelesaian dapat dilakukan dengan berbagai cara, salah satunya dengan membawa persamaan diferensial tersebut ke ranah mekanika kuantum seperti model path integral. [Dragulescu,dkk , 2002]. Dalam makalah ini akan dimodelkan suatu sistem pasar dengan dilakukan pendekatan mekanika kuantum sejak awal.

Mekanika kuantum dapat digunakan untuk memodelkan pasar keuangan [Schaden,2002]. Dalam mekanika kuantum keadaan suatu sistem diekspansikan pada basis diruang Hilbert. Semua informasi dapat dicari dengan mengenakan suatu operator yang berkaitan dengan informasi tersebut pada fungsi gelombang sistem. Suatu perdagangan sekuritas dapat dimodelkan dengan cara yang sama. Pasar dapat dinyatakan dengan state-state dalam ruang Hilbert. Karena penyusun pasar adalah penanam modal, sekuritas dan harga sekuritas, maka basis bagi keadaan pasar dibangun penyusun pasar tersebut. Kegiatan yang dilakukan pelaku pasar dapat dinyatakan dengan operator. Operator dalam pasar keuangan dapat dicari dengan menganalogkan operator-operator yang telah dikenal dalam fisika berdasarkan kesamaan sifat pasar keuangan dengan observabel dalam fisika. Beberapa operator tersebut adalah operator anihilasi, kreasi, Hamiltonian untuk pasar dan arus kas, serta operator evolusi.

BASIS UNTUK PASAR

Dalam Fisika dikenal vektor ruang. Vektor ruang terdiri dari sebuah himpunan beranggotakan vektor. Sebuah kumpulan vektor dikatakan merentang pada suatu ruang jika setiap vektor dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari anggota himpunan tersebut. Sebuah himpunan vektor yang beranggotakan vektor yang saling bebas linear yang menjangkau ruang disebut basis. Jumlah vektor pada suatu basis dinamakan sebagai dimensi ruang tersebut. Suatu basis $|\alpha\rangle$ dikatakan ortonormal jika perkalian skalar antara dua anggota basis bernilai δ_{ij} atau dapat dituliskan sebagai

$$\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = \delta_{ij} \tag{1}$$

Basis suatu vektor ruang yang menyatakan keadaan suatu sistem unumnya berupa suatu fungsi. Basis-basis tersebut menyatakan state-state murni atau keadaan-keadan yang menyusun sistem tersebut. Ruang Hilbert adalah ruang perkalian skalar yang lengkap [Griffith,1995].

Suatu pasar dapat disajikan oleh state dalam ruang Hilbert [Schaden,2002]. Suatu pasar berisi berbagai tipe sekuritas dan pelaku pasar yang lebih dari satu. Sebagai contoh sekuritas adalah saham, opsi, obligasi, surat hutang dan masih banyak lagi [Bodie,2006]. Tipe sekuritas dan pelaku pasar dapat diberi indeks *i* dan *j*, dengan *i,j* =1,2,3.......*I,J*. *I* dan *J* berupa bilangan bulat. Setiap pelaku pasar pasti memiliki kekayaan yang dapat berupa cash atau kredit sebesar x^j. Suatu basis lengkap yang menggambarkan penyusun pasar dengan demikian dapat dituliskan sebagai

$$\mathrm{B} := \left\{ \left\{ x^j, \left\{ n_j^i(s) \geq 0, i = 1,...I \right\}, j = 1,....J \right\} \right\} \tag{2}$$

dengan $N_j^i(s) = \int_0^s ds' n_i^j(s')$ yang menyatakan jumlah sekuritas jenis *i* dengan harga kurang dari *s* yang dimiliki oleh pelaku pasar *j*. Jumlah sekuritas dipasar tidak mungkin negatif dan berupa bilangan bulat. Maka $N_i^j(s)$ juga tidak mungkin bernilai negatif . $N_i^j(s)$ adalah fungsi konstan dengan step bulat. Basis tunggal yang dinyatakan dalam pers.(1) merupakan informasi maksimal yang dapat diperoleh oleh seseorang yang akan berada di pasar pada sebarang moment pada suatu waktu. Suatu pengukuran yang lengkap pada suatu pasar dapat dilakukan jika semua pelaku memperlihatkan semua cash miliknya dan memperdagangkan semua sekuritas yang dimilikinya secara simultan. Para pelaku pasar akan menetapkan harga tiap sekuritas. Nilai tiap sekuritas dan siapa yang memegang sekuritas tersebut pada suatu waktu pada akhirnya akan diketahui dengan pasti dan pasar akan digambarkan secara lengkap oleh state tunggal dari basis B. Seperti halnya penngukuran yang lengkap tidak dapat dilakukan, informasi tentang pasar pada kenyataannya tidak pernah benar-benar presisi. Namun secara prinsip pengukuran lengkap dapat terjadi dan seseorang tidak mungkin mendapatkan pengukuran yang lebih akurat dari pengukuran secara lengkap.

Fungsi gelombang menjadi basis dalam ruang Hilbert harus ternormalisasi. Fungsi gelombang tersebut merupakan keadaan-keadaan yang mungkin teradi dalam suatu sistem terntentu. Semua informasi fisis dapat ditemukan dengan mengenakan suatu operator Hermitian yang berkaitan dengan suatu observabel pada fungsi gelombang terebut. Sebagai contoh nilai pengukuran observabel *Q* dapat dicari dengan mengenakan operator $\hat{Q}$ yang berupa operator Hermitian. Harga harap dari observabel tesebut adalah perkalian skalar $\langle \varphi | \hat{Q}\varphi \rangle$, yang merupakan nilai yang diharapkan muncul saat pengukuran dilakukan. Suatu operator yang dikenakan pada suatu keadaan akan menghasilkan suatu nilai eigen tertentu yang mencirikan operator tesebut.

Sebagaimana state atau keadaan suatu sistem fisis pada waktu tertentu dapat disajikan dalam basis-basis penyusunnya yang disajikan pada pers.(1). Keadaan pasar pada moment tertentu pada saat *t* dapat disajikan oleh state $|\mathrm{M}\rangle$ yang merupakan superposisi linier dari basis keadaan $|n\rangle \in \mathrm{B}$ atau dapat dituliskan

$$|\mathrm{M}\rangle = \sum_n A_n |n\rangle \tag{3}$$

dengan A_n adalah amplitudo kompleks, $|A_n|^2$ diinterpretasikan sebagai kebolehjadian bahwa pasar digambarkan oleh state murni $|n\rangle$,

Sesuai pers.(1) setiap dua state $|m\rangle$, $|n\rangle \in \mathrm{B}$, asumsi bahwa B berisi state lengkap memberikan

$$\langle m | n \rangle = 0 \text{, jika } m \neq n \tag{4}$$

Seperti halnya sistem dalam fisika, dalam sistem finansial pers.(4) menyatakan jika pasar disajikan oleh state murni $|n\rangle \in \mathrm{B}$, sehingga kebolehjadian yang dideskripsikan oleh state yang lain akan lenyap.

Pasar yang terisolasi didefinisikan sebagai pasar dimana tidak ada sekuritas baru yang diterbitkan ataupun tidak ada sekuritas yang dihilangkan, serta pemain pasar tidak berubah. Batasan tersebut tidak setegas seperti yang tampak . Keadda pelaku pasar tidak berubah dan jumlah sekuritas tidak berubah dapat diperluas dengan peninjauan pemain semu dan sekuritas yang tidak diperdagangkan.

Pasar terisolasi dalam ruang Hilbert tidak bergantung pada waktu. Kebolehjadiannya adalah

$$P = \sum_n \left| A_n^2 \right| \tag{5}$$

Perdagangan yang terjadi merupakan fungsi waktu atau tidak statik, dengan demikian amplitudo A_n juga bergantung waktu. Untuk menunjukan awal mula dari suatu pasar, maka didefinisikan suatu keadaan awal yang menjadi titik awal state-state yang lain yaitu

$$\left|0\right\rangle := \left|\left\{x^j = 0, n_i^j = 0, \forall i, j, s\right\}\right\rangle \tag{6}$$

Keadaan awal tersebut menyajikan pasar dalam keadaan tidak ada cadangan cash dan tidak ada sekuritas. Pada keadaan tersebut tidak mungkin menaikan cash, membeli ataupun menjual sekuritas. State tersebut menggambarkan state terisolasi.

TRANSFER DANA, JUMLAH CASH , PEMBELIAN DAN PENJUALAN SEKURITAS DALAM BENTUK OPERATOR

Salah satu hal yang pasti terjadi dalam suatu pasar adalalah transfer dana. Adanya suatu transfer dana dari seorang pelaku pasar kepelaku pasar yang akan merubah jumlah uang yang dimiliki oleh tiap pelaku pasar setiap saat. Sama halnya dengan terjadi perubahan keadaan dari suatu waktu ke waktu berikutnya. Transfer dana dapat dinyatakan sebagai operator linear pada H , operator tersebut jika dikenakan akan menyebabkan terjadi peningkatkan jumlah cash yang dipegang oleh pelaku j dengan s dollar. Operator uniter tersebut adalah

$$\hat{c}^{+j}(s) = \exp\left(-is\hat{p}_j\right) = \exp\left(-s\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \tag{7}$$

dengan $s \geq 0$ dan $\hat{p}_j = -i\dfrac{\partial}{dx^j}$. Jika dikenakan pada basisnya

$$\hat{c}^{+j}(s)\left|\left\{x^1, x^2, .., x^j, .., x^J\right\}\right\rangle = \left|\left\{x^1, x^2, ..., x^j + s, ...x^J\right\}\right\rangle \tag{8}$$

Jika terjadi transfer dana ke seorang pelaku sehingga jumlah uangnya meningkat maka pelaku yang lain akan mengalami pengurangan uang. Aksi pengurangan uang dapat ditunjukan dengan mengenakan Hermitian konjugat operator $\hat{c}^{+j}(s)$ yaitu $\hat{c}^j(s) = \hat{c}^{+j}(-s)$. Operator $\hat{c}^j$ akan menurunkan cash yang dipegang oleh pemain j sebanyak s dollar. Operator $\hat{c}^j$ dan $\hat{c}^{+j}$ komut dan berlaku kaitan

$$\hat{c}^{+j}(s)\hat{c}^{+j}(s') = \hat{c}^{+j}(s+s') \tag{9}$$

dengan

$$\hat{c}^{+j}(-s) = \hat{c}^j(s) \text{ dan } \hat{c}^j(0) = 1 \tag{10}$$

Besarnya cash yang dimiliki oleh pelaku ke k dapat dimunculkan dengan mengenakan operator $\hat{x}^k$. Nilai eigen operator $\hat{x}^k$ menyatakan cash yang dipegang oleh pelaku ke k. Operator $\hat{x}^k$ setara dengan operator posisi dalam fisika. Komutasi antara $\hat{c}^{+j}$ dan $\hat{x}^k$ adalah

$$\left[\hat{c}^{+j}(s), \hat{x}^k\right] = \hat{c}^{+j}(s)\hat{x}^k - \hat{x}^k\hat{c}^{+j}(s) = -s\delta^{jk}\hat{c}^{+j}(s) \tag{11}$$

Pers.(11) menunjukan bahwa $\hat{c}^{+j}(s)$ adalah operator translasi, yang menyebabkan terjadinya translasi dari koordinat *x* ke *x*+ *s*.

Jumlah sekuritas yang setipe di pasar finansial sangat banyak [Bodie,2006]. Tinjau suatu sekuritas tipe tertentu dengan harga yang sama. Seorang pelaku pasar ke *j* mungkin memiliki lebih dari satu sekuritas tipe *i* yang harganya sama. Sekuritas tersebut dapat berpindah dari seorang pelaku pasar ke pelaku pasar yang lain. Dengan demikian pada suatu waktu sekuritas yang dimiliki pelaku *j* dapat berkurang (hilang) jika dijual atau bertambah (tercipta) jika pelaku membeli sekuritas yang sama. Dalam fisika dikenal operator anihilasi dan operator creasi. Salah satu penggunaannya dapat dilihat pada sistem osilator harmonik. Operator creasi akan menaikan tenaga suatu partikel menuju state tenaga yang lebih tinggi, sedangkan operator anihilasi akan menurunkan tenaga suatu partikel menuju state tenaga yang lebih rendah. [Towsend,1992]. Operator kreasi dan anihilasi dapat diterapkan dalam pasar finansial dengan mencari operator yang dapat memberi pengaruh yang sama yaitu menambah atau mengurangi suatu observable. Pembelian dan penjualan sekuritas dapat disajikan oleh operator kreasi dan anilihilasi pada partikel Bosson. Operator anihilasi $\hat{a}_i^j(s)$ menghilangkan sebuah sekuritas sebuah tipe *i* dengan harga *s* dari portofolio pelaku *j* dan operator hermitian konjugatnya yaitu operator kreasi menambahkan sekuritas yang sama pada portofolio pelaku *j*.

Harga pembelian atau penjualan sebesar *s* masuk dalam definisi operator, karena harga *s* akan tercatat pada saat pembelian atau penjualan. Harga sekuritas akan berubah setiap saat. Harga saham yang terpampang mungkin bukan harga yang sebenarnya, tetapi harga tersebut adalah harga yang paling bisa diharapkan tercapai pada saat sekuritas diperdagangkan. Hal ini serupa dengan hasil pengukuran suatu observable pada sistem fisis. Harga harap dari suatu operator merupakan nilai yang memiliki peluang terbesar yang dapat terjadi jika dilakukan pengukuran.

Harga pembayaran sebuah sekuritas dan perbedaan harga antara harga jual dengan harga sesungguhnya pada saat penjualannya merupakan hal yang sangat pokok pada perdagangan [Bode, dkk,2006]. Dari pandangan pelaku pasar dua buah sekuritas dengan tipe yang sama tidak ekuivalen jika sekuritas tersebut dijual dengan harga berbeda. Menjual dua sekuritas dengan tipe yang sama dengan harga yang berbeda mungkin lebih mudah tetapi mungkin juga lebih susah dibandingkan dengan menjual keduanya dengan harga rata-rata. Dengan demikian meskipun secara menyeluruh pengembalian pada dua pelaku sama, tetapi jika ditinjau dari sisi dinamika dua penjual tersebut tidak ekuivalent.

Operator kreasi dan anihilasi untuk sekuritas memenuhi aljabar komutator sebagai

$$\begin{aligned}&\left[\hat{a}_i^j(s), \hat{a}_l^{+k}(s')\right] = s\delta(s-s')\delta^{jk}\delta_{il}\\&\left[\hat{a}_i^j(s), \hat{a}_l^k(s')\right] = \left[\hat{a}_i^{+j}(s), \hat{a}_l^{+k}(s')\right] = 0\end{aligned} \tag{12}$$

Operator kreasi dan anihilasi tidak berdimensi sehingga harga sekuritas komut.

Tinjau $|0\rangle \in \mathrm{B}$ yang merupakan state unik pada pers.(6) yang menggambarkan sebuah pasar dengan pelaku-pelaku tidak memiliki cash maupun sekuritas. Karena tidak ada sekuritas yang dapat dijual, operator anihilasi jika dikenakan pada state terebut adalah

$$\hat{a}_i^j(s)|0\rangle = 0, \forall i, j, s \geq 0 \tag{13}$$

Yang berarti tidak ada ada lagi state yang lebih rendah yang dapar dicapai. State-state yang lain pada pers.(5) dibangun dengan mengenakan operator kreasi pada state nol beberapa kali sebagai

$$\left|\left\{x^j, n_j^i(s)\right\}\right\rangle \propto \prod_{j=i}^{J} \hat{c}^{+j}\left(x^j\right) \prod_{i=1}^{I} \prod_{\left\{s; m_i^j(s) \in N\right\}} \left(\hat{a}_i^{+j}(s)\right)^{m_i^j(s)} \left|0\right\rangle \tag{14}$$

dengan jumlah sekuritas berupa bilangan bulat dapat dan

$$m_i^j(s) = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_s^{s+\varepsilon} ds' n_i^j(s') \tag{15}$$

adalah bilangan bulat menyatakan sekuritas- sekuritas tipe *i* dari investor tipe *j* dengan harga antara *s* dan $s+\varepsilon$ dollar. Dengan menggunakan pers.(11) dan (12) dapat diperlihatkan bhawa state pada pers.(16) adalah eigenstate dari operator kerapatan jumlah sekuritas yaitu

$$\hat{n}_i^j(s) := \frac{1}{s} \hat{a}_i^{+j}(s) \hat{a}_i^j(s) \tag{16}$$

dan bersama dengan operator cash yang dipegang pelaku yaitu $\hat{x}^j$ berlaku

$$\begin{aligned} \hat{n}_i^j(s)\left|\left\{x^k, n_l^k(s')\right\}\right\rangle &= n_i^j(s)\left|\left\{x^k, n_l^k(s')\right\}\right\rangle \\ \hat{x}^k(s)\left|\left\{x^k, n_l^k(s')\right\}\right\rangle &= x^k(s)\left|\left\{x^k, n_l^k(s')\right\}\right\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

Mengingat sekuritas harus dibayar, membeli sekuritas sesungguhnya tidak sederhana. Untuk mendapatkan perubahan cash dari investor *j* pada perhitungan saat dia membeli atau menjual sekuritas perlu ditinjau kombinasi antara operator anihilasi dan operator kreasi dengan operator translasi pada pers.(7). Kombinasi tersebut dapat berupa

$$\begin{aligned} \hat{b}_i^{+j}(s) &:= \hat{a}_i^{+j}(s)\hat{c}^j(s) \\ \hat{b}_i^j(s) &:= \hat{a}_i^j(s)\hat{c}^{+j}(s) \end{aligned} \tag{18}$$

Karena operator translasi $\hat{c}^j$ adalah operator uniter dan komute dengan operator kreasi ataupun anihilasi untuk sekuritas, serta memenuhi aturan multiplikasi pada pers.(13), operator $\hat{b}$ yang didefinisikan pada pers.(21) juga memenuhi kaitan komutasi yang sama seperti operator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^+$. Operator $\hat{b}$ memenuhi aljabar komutasi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} &\left[\hat{b}_i^j(s), \hat{b}_i^{+j}(s')\right] = s\delta(s-s')\delta^{jk}\delta_{il} \\ &\left[\hat{b}_i^j(s), \hat{b}_i^j(s')\right] = \left[\hat{b}_i^{+j}(s), \hat{b}_i^{+j}(s')\right] = \left[\hat{b}_i^j(s), \hat{p}^k\right] = \left[\hat{b}_i^j(s'), \hat{p}^k\right] = 0 \\ &\left[\hat{b}_i^{+j}(s), \hat{x}^k\right] = s\delta^{jk}\hat{b}_i^{+j}(s) \\ &\left[\hat{b}_i^j(s), \hat{x}^k\right] = -s\delta^{jk}\hat{b}_i^j(s) \end{aligned} \tag{19}$$

Dua kaitan komutasi terakhir memiliki interpretasi bahwa seorang investor adalah penghutang (debitor) sebesar *s* dollar saat sebuah sekuritas dijual (dibeli) untuk jumlah tersebut.

IV. EVOLUSI PASAR

Tinjau suatu keadaan atau state pada suatu sistem fisis $|\varphi(t=0)\rangle$, pada saat t=0. State pada saat t berikutnya $|\varphi(t)\rangle$ dapat dicari dengan mengenakan operator evolusi pada state $|\varphi(t=0)\rangle$ [Towsend,1992]

$$\hat{U}(t)|\varphi(0)\rangle = |\varphi(t)\rangle \tag{20}$$

Tinjau pada translasi waktu pada selang *dt* infinitesimal [Towsend,sakurai]

$$\hat{U}(dt) = 1 - \frac{i}{\hbar}\hat{H}dt \tag{21}$$

$\hat{H}$ adalah generator translasi waktu. Mengingat

$$\hat{U}(t+dt) = \hat{U}(dt)\hat{U}(t) \tag{22}$$

Pers.(21) dan pers.(22) akan memberikan

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{U} = \hat{H}\hat{U}(t) \tag{23}$$

Jika pers.(22) dikenakan pada state awal $|\varphi(t=0)\rangle$, maka akan diperoleh persamaan Schrodinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\varphi(t)\rangle = \hat{H}|\varphi(t)\rangle \tag{24}$$

Untuk kasus $\hat{H}$ tidak tergantung waktu maka diperoleh operator evolusi

$$\hat{U} = \exp\left(-\hat{H}t/\hbar\right) \tag{25}$$

Bagaimana dengan evolusi waktu pada pasar finansial. State $|M\rangle_t$,yang menyajikan pasar pada saat *t*, dihubungkan dengan state yang berkaitan pada waktu berikutnya yaitu *t'* dengan sebuah operator evolusi $\hat{U}$ sehingga berlaku

$$|M\rangle_{t'} = \hat{U}(t,t')|M\rangle_t \tag{26}$$

Evolusi waktu dari semua state pasar yang mungkin didefinisikan sebagai sebuah operator linear pada ruang Hilbert. Pers.(26) pada menghubungkan state $|M\rangle_{t'}$ pada saat t' dengan state $|M\rangle_t$ pada saat t secara unik. Evolusi yang terjadi adalah sebuah evolusi distribusi keblehjadian, karena sebuah state dalam H menunjukan kebolehjadian bahwa pasar berhubungan dengan sebuah state murni di B.

Mengingat bahwa pasar terisolasi atau dengankata lain B adalah basis yang lengkap,maka berdasarkan pers.(5) berlaku

$$1 = {}_t\langle M\|M\rangle_t \quad \forall t \tag{27}$$

Jika pers.(27) terpenuhi untuk sebuah set dari state – state pasar $\{|M\rangle_t\}$ yang terentang dalam H maka , $\hat{U}(t',t)$ pada pers.(22) dapat membalik dan menjadi sebuah operator uniter.

$$\hat{U}^{-1}(t,t') = \hat{U}^{+}(t,t') = \hat{U}(t,t') \text{ ; dengan } \hat{U}(t,t) = 1 \tag{28}$$

Bersama pers.(22) dengan demikian untuk sebarang $\varepsilon > 0$, berlaku

$$\hat{U} = (t' + \in, t) = \hat{U}(t' + \varepsilon, t')\hat{U}(t', t) \tag{29}$$

Jika operator evolusi uniter $\hat{U}(t',t)$ dapat dideferensialkan pada sekitar *t'=t* , maka untuk state pasarm $\{|M\rangle_t\}$ dapat dianalogakan dengan pers.(22) yang membangkitkan evolusi temporal dari sistem kuantum.

$$i\frac{\partial}{\partial t}|M\rangle_t = \hat{H}(t)|M\rangle_t \tag{30}$$

Pers.(30) menyatakan sebuah evolusi kontinu state dengan waktu. Pers.(30) tepat jika perubahan state kecil untuk perubahan dari t menjadi t' sangat kecil. Sayangnya tidak demikian pada pasar finansial. Dalam waktu yang sangat singkat mungkin sudah terjadi perubahan keadaan yang sangat besar.

Pers.(30) mengatakan bahwa perubahan state pasar dalam selang waktu pendek pada saat t disebabkan oleh aksi dari $-i\hat{H}(t)dt$ pada state awal. Di pasar finansial perubahan akan terjadi jika pelaku menukar cash atau menukar sekuritas, atau dengankata lain terjadi transaksi finansial. Maka dapat dikatakan Hamilitonial yang membangkitkan evolusi waktu menyajikan transaksi finansial. Mengingat dalam waktu yang sangat singkat transaksi yang yang terjadi dapat lebih dari satu, maka model evolusi waktu diatas hanya bisa untuk mendekati transaksi sederhana.

ARUS UANG

Aliran dana yang mengalir melewati seorang pelaku dapat terjadi karena berbagai hal seperti pembelian sekuritas atau penjualan sekuritas, konsumsi, pemasukan (income), konsumsi, atau pertumbuhan dalam laporan pasar keuangan. Dari berbagai hal yang mempengaruhi tersebut yang memberi pengaruh dominan adalah pertumbuhan laporan keuangan. Sudah barang tentu hal ini terjadi jika masyarakat yang menjadi pelaku pasar aktif menggunakan uangnya dalam pasar finansial. Pertumbuhan laporan keuangan sebanding dengan penanaman modal. .

Dalam mekanika klasik berlaku [Goldstein,1980]

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left.\frac{\partial H(x,p;t)}{\partial t}\right|_{\substack{x=x(t)\\p=p(t)}} \quad , \quad \frac{dp(t)}{dt} = -\left.\frac{\partial H(x,p;t)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x(t)\\p=p(t)}} \tag{31}$$

$H(x,p;t)$ adalah fungsi Hamilton.. Jika dikenakan pada keuangan, yaitu $x(t) = x^j(t)$ dan $H^j(x^j, p_j; t) = r^j(t)x^j p_j$ [Sceiden,2002] Persamaan pertama pada pers.(31) memberikan pertumbuhan uang pada pelaku pasar ke j dengan suku bunga $r^j(t)$. Sehingga pers.(31) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx^j(t)}{dt} = \left.\frac{\partial r^j(t)x^j p_j}{\partial p_j}\right|_{\substack{x^j=x^j(t)\\p^j=p^j(t)}} = r^j(t)x^j(t) \tag{32}$$

Sebuah potensial $V(\{x^k\})$ dapat digunakan untuk pinjaman yang dipinalti yang menentukan likuiditas investor. Namun untuk kesederhanaan diasumsikan semua sekuritas likuid sehingga digunakan V=0.

Dalam mekanika kuantum observable dinyatakan dalam operator Hermitian. Operator Hamiltonian yang merupakan padanan fungsi Hamiltonian pada pers.(31) adalah

$$\hat{H}_c(t) = \sum_{j=1}^{J} H_c^j(t) \tag{33}$$

dengan

$$H_c^j(t) = \frac{r^j(t)}{2}\left(\hat{x}^j \hat{p}_j + \hat{p}_j \hat{x}^j\right) = rj(t)\left(\hat{p}_j \hat{x}^j + \frac{i}{2}\mathbf{1}\right) \tag{34}$$

Operator Hamiltonian pada pers.(34) menjelaskan evolusi dari laporan keuangan dengan suku bunga yang telah diketahui. Dengan demikian, jika pasar pada saat t digambarkan oleh state

$$\left|M\right\rangle_t = \left[\prod_{j=1}^{J} \int_{-\infty}^{\infty} dx^j \phi^j\left(x^j, t\right)\right]\left|x^1, \ldots x^J\right\rangle \tag{35}$$

Hamiltonian untuk arus kas adalah

$$\hat{H}(t) = \frac{1}{2}\sum_j \left[\psi^j\left(\{\hat{x}\}, t\right)\hat{p}_j + \hat{p}_j \psi^j\left(\{\hat{x}\}, t\right)\right] \tag{36}$$

Distribusi kebolehjadian bahwa investor j pada saat t' memiliki uang x adalah

$$P^j(x, t') = \left|\varphi^j(x, t')\right|^2 \tag{37}$$

fungsi $\psi^j\left(\{\hat{x}\}, t\right)$ ditafsirkan sebagai arus kas eksternal pada saat t pada penanam modal j. Arus kas sesaat sebesar s yang mengalir pada penanam modal j pada saat $t = t_0$, dapat dimodelkan sebagai $\psi^j\left(\{\hat{x}\}, t\right) = s\delta(t - t_o)$

KESIMPULAN

Sistem pasar dapat dinyatakan dalam basis yang disusun oleh penyusun pasar seperti sekuritas, pelaku pasar, harga sekuritas. Perubahan dalam pasar dapat dinyatakan dengan membentuk operator bagi pasar, kemudian mengenakannya pada state pasar.

DAFTAR PUSTAKA

Baaqute, BE.,Coriano.C., Srikanti.M., *Quantum mechanics,Path Itegral ans Option Pricing: Reducing The Complexity of Finance*, arXiv:cond-math/0208191v2, 2002

Bodie.Zvi.,Kane. Alex.,Marcus.AJ., *Investment*, Mcgraw-Hill, 2006

Dragulescu.A.A., Yakovenko. VM., *Probability Distribution of Return in the Heston model with Stochastic Volatility*, 2002.

Goldstein. H., *Classical mechanics*, Addison –Wesley, 1980.

Griffith. DJ., *Introduction to Quantum Mechanic* , Prentice Hall,1995.

Towsend. JS., *A Modern Approach to Quantum Mechanic* , McGraw-Hill,1992

Schaden, M., Quantum Finance, arXiv:physics/0202006v2, 2002