PENDEKATAN MASALAH MULTIOBJEKTIF STOKASTIK DENGAN PENDEKTAN STOKASTIK DAN PENDEKATAN MULTIOBJEKTIF

Indarsih
Ch. Rini Indrati

Jurusan Matematika
FMIPA Universitas Gadjah Mada
e-mail:indarsih@ugm.ac.id, rinii@ugm.ac.id

Abstrak

Masalah optimisasi yang mempunyai tujuan lebih dari satu dikenal dengan masalah optimisasi multiobjektif. Masalah linear multiobjektif mempunyai fungsi objektif dan kendala linear. Jika ada parameter stokastik dalam masalah multiobjektif, masalahnya dikenal dengan masalah multiobjektif stokastik. Masalah yang dikemukakan dalam paper ini masalah multiobjektif linear dengan koefisien fungsi tujuan merupakan parameter random. Masalah multiobjektif stokastik akan ditransformasi menjadi masalah deterministik dengan dua pendekatan, yaitu pendekatan stokastik dan pendekatan multiobjektif.

Kata kunci : Masalah Multiobjektif Stokastik, Pendekatan Stokastik, Pendekatan Multiobjektif.

PENDAHULUAN

Dalam masalah riil, terkadang dijumpai pembuat keputusan menginginkan untuk mengoptimumkan beberapa tujuan pada saat yang sama, sedangkan ada parameter dalam masalah tidak diketahui dengan pasti. Parameter yang tidak diketahui merupakan variabel random. Masalah ini dikenal dengan masalah multiobjektif stokastik.

Penyelesaian optimal lengkap masalah multiobjektif deterministik maupun stokastik terkadang tidak selalu ditemukan, untuk itu diperlukan konsep penyelesaian efisien dalam masalah multiobjektif stokastik, seperti penyelesaian efisien, penyelesaian efisien Pareto dan penyelesaian efisien proper. Definisi penyelesaian efisien tersebut akan diberikan pada pembahasan selanjutnya. Masalah multiobjektif stokastik akan ditransformasi menjadi masalah deterministik dengan dua pendekatan, yaitu pendekatan stokastik dan pendekatan multiobjektif. Dalam pendekatan stokastik, beberapa konsep penyelesaian efisien telah dikemukakan oleh White pada tahun 1982, yaitu penyelesaian efisien nilai harapan, penyelesaian efisien minimum variansi, dan penyelesaian efisien nilai harapan standar deviasi. Kemudian pada tahun 1984 Stancu-Minasian dan Tigan mengemukakan penyelesaian efisien minimum resiko pada suatu level dan penyelesaian efisien dengan probabilitas tertentu.

PEMBAHASAN

Masalah multiobjektif deterministik dirumuskan dengan

$$\min_{x \in D} \left(z_1(\boldsymbol{x}), \ldots, z_q(\boldsymbol{x}) \right). \qquad \text{(MD)}$$

Pada masalah multiobjektif deterministik MD, penyelesaian optimal lengkap terkadang tidak selalu ditemukan, untuk itu diperlukan konsep penyelesaian efisien. Berikut diberikan definisi penyelesaian efisien, penyelesaian efisien Pareto dan penyelesaian efisien proper.

Definisi 1: Penyelesaian Efisien (Ehrgott dan Ruzika, 2004)

Vektor x^* *disebut penyelesaian efisien untuk masalah MD jika tidak ada* $x \in D$ *sehingga* $z_k(x) \leq z_k(x^*)$ *untuk semua k=1,2,..,q.*

Definisi 2: Penyelesaian Efisien Pareto (Sakawa, 1993)
Vektor x^* disebut penyelesaian efisien Pareto untuk masalah MD jika tidak ada $x \in D$ sehingga $z_k(x) \le z_k(x^*)$ untuk semua k=1,2,..,q dan $z_j(x) \neq z_j(x^*)$ paling sedikit satu .
Definisi 3: Efisien Proper (Singh and Hanson, 1988**)**
Vektor x^* disebut efisien proper jika terdapat $M>0$ sehingga untuk setiap k dengan $z_k(x) < z_k(x^*)$ terdapat j dengan $z_j(x) > z_j(x^*)$ dan berlaku $\frac{z_k(x^*)-z_k(x)}{z_j(x)-z_j(x^*)} \le M$.
Definisi 4: Penyelesaian Efisien Proper (Ehrgott dan Ruzika, 2004)
Vektor x^* disebut penyelesaian efisien proper untuk masalah MD jika x^* penyelesaian efisien dan jika terdapat $M>0$ sehingga untuk semua k, $k \in \{1,2,\ldots,q\}$ dan untuk setiap $x \in D$ dengan $z_k(x) < z_k(x^*)$, terdapat paling sedikit satu j, $\in \{1,2,\ldots,q\}$ dengan $z_j(x) > z_j(x^*)$ dan berlaku $\frac{z_k(x^*)-z_k(x)}{z_j(x)-z_j(x^*)} \le M$.
Konsep penyelesaian dalam masalah multiobjektif deterministik dipakai untuk mendefinisikan penyelesaian dalam masalah multiobjektif stokastik.

Masalah multiobjektif stokastik dirumuskan dengan

$$\min_{x \in D} \tilde{z}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}}) = (\tilde{z}_1(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}}), \tilde{z}_2(\boldsymbol{x}, \tilde{c}), \cdots, \tilde{z}_q(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{c}})), \qquad \text{(MS)}$$

dengan fungsi tujuan bergantung pada parameter random kontinu $\tilde{c}$ yang independen terhadap variabel keputusan. Penyelesaian fisibel pada masalah MS diasumsikan himpunan konveks.

Seperti telah disebutkan sebelumnya, penyelesaian efisien masalah MS ditentukan dengan dua pendekatan.

2.1. Pendekatan Multiobjektif

Pada pendekatan ini, fungsi tujuan stokastik ditransformasi menjadi deterministik sesuai dengan kriteria pada pemrograman stokastik. Berikut didefinisikan beberapa penyelesaian efisien dalam pemrograman stokastik (Caballero *et al*, 2004*)*.
Definisi 5 : **Penyelesaian Efisien Nilai Harapan**
Vektor variabel $\boldsymbol{x} \in D$ disebut penyelesaian efisien nilai harapan untuk MS, jika x merupakan penyelesaian efisien Pareto untuk masalah

$$min_{x \in D}(\bar{z}_1(\boldsymbol{x}), \bar{z}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \bar{z}_q(\boldsymbol{x})) \qquad \text{(E)}$$

dengan $\bar{z}_k(\boldsymbol{x})$ menyatakan nilai harapan untuk variabel random $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x}, \tilde{c})$, $k \in \{1,2,\ldots,q\}$.
Nilai harapan $\bar{z}_k(\boldsymbol{x})$ dapat ditentukan berdasar definisi nilai harapan variabel random. Diketahui pula, $\bar{z}_k(\boldsymbol{x})$ konveks jika $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x}, \tilde{c})$ (Haneveld dan Maarten, 2003).
Definisi 6 : **Penyelesaian Efisien Minimum Variansi**
Vektor variabel $\boldsymbol{x} \in D$ disebut penyelesaian efisien minimum variansi untuk MS, jika x merupakan penyelesaian efisien Pareto untuk masalah

$$\min_{x \in D}(\sigma_1^2(\boldsymbol{x}), \sigma_2^2(\boldsymbol{x}), \ldots, \sigma_q^2(\boldsymbol{x})) \qquad \text{(V)}$$

dengan $\sigma_k^2(\boldsymbol{x})$ menyatakan variansi untuk fungsi tujuan ke-k, $k \in \{1,2,\ldots,q\}$.
Definisi 7 : **Penyelesaian Efisien Nilai Harapan Standar Deviasi**
Vektor variabel $x \in D$ disebut penyelesaian efisien nilai harapan standar deviasi untuk MS, jika x merupakan penyelesaian efisien Pareto untuk masalah

$$\min_{x \in D}(\bar{z}_1(\boldsymbol{x}), \bar{z}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \bar{z}_q(\boldsymbol{x}), \sigma_1(x), \sigma_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \sigma_q(\boldsymbol{x})) . \qquad \text{(E}\sigma\text{)}$$

Definisi 8: Penyelesaian efisien minimum resiko pada level $u_1, \ldots, u_q$
Pembuat keputusan menetapkan level aspirasi pada setiap fungsi tujuan stokastik.
Vektor variabel $\boldsymbol{x} \in D$ disebut penyelesaian minimum resiko pada level $u_1, \ldots, u_q$, jika x merupakan penyelesaian efisien Pareto untuk masalah

$$\max_{x \in D}\left(P(\tilde{z}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_1), \ldots, P(\tilde{z}_q(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_q)\right). \qquad (\mathrm{MR}(\boldsymbol{u}))$$

Definisi 9: Penyelesaian efisien dengan probabilitas β (kriteria Kataoka)

Vektor variabel $\boldsymbol{x} \in D$ merupakan penyelesaian efisien dengan probabilitas $\beta_1, \ldots, \beta_q$, jika ada $\boldsymbol{u} \in R^q$ sehingga $(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{u}^T)^T$ penyelesaian efisien untuk masalah

$$\begin{aligned} &\min_{x,u}(u_1, \ldots, u_q) \\ &\text{dengan kendala } P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k) \ge \beta_k, k = 1,2,\ldots,q \qquad (\mathrm{K}(\boldsymbol{\beta})) \\ &\qquad \boldsymbol{x} \in D. \end{aligned}$$

Teorema berikut menunjukan hubungan antara penyelesaian efisien untuk masalah MR($\boldsymbol{u}$) dan K($\boldsymbol{\beta}$). Teorema tersebut dimuat dalam paper Caballero *et al*. tanpa bukti. Di sini teorema tersebut akan dibuktikan.

Teorema 1

Diasumsikan fungsi distribusi variabel random $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ kontinu dan naik tegas. Vektor $\boldsymbol{x}^*$ merupakan penyelesaian efisien untuk masalah MR($\boldsymbol{u}$) jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{u}^{*T})^T$ merupakan penyelesaian efisien untuk masalah K($\boldsymbol{\beta}$) dengan $\boldsymbol{u}^*$ dan $\boldsymbol{\beta}^*$ sedemikian hingga

$$P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) = \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\}.$$

Bukti

⇒) Diketahui $\boldsymbol{x}^*$ merupakan penyelesaian efisien untuk masalah MR($\boldsymbol{u}$), maka

$$P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) \le P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x}^*,\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) = \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\}, x \in D,$$

paling sedikit untuk satu k berlaku tanda tidak sama dengan.

Andaikan $(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{u}^{*T})^T$ bukan merupakan penyelesaian efisien untuk masalah K($\boldsymbol{\beta}$), berarti ada $(\boldsymbol{x}^T, \boldsymbol{u}^T)^T$ yang fisibel dan memenuhi $\boldsymbol{u}<\boldsymbol{u}^*$ sehingga

$$P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k) = \beta_k^*, u_k < u_k^*, k \in \{1,2,\ldots,q\}, x \in D.$$

Akan tetapi fungsi distribusi variabel random $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ kontinu dan naik tegas, sehingga

$$P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) = P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x}^*,\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k) + P(u_k < \tilde{z}_k(\boldsymbol{x}^*,\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) = \beta_k^* + \theta$$
$$k \in \{1,2,\ldots,q\},$$

dengan $\theta = P(u_k < \tilde{z}_k(\boldsymbol{x}^*,\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) > 0$. Hal ini berarti ada $x \in D$ dengan $P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) > \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\}$. Terjadi kontradiksi.

⇐)Diketahui $(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{u}^{*T})^T$ merupakan penyelesaian efisien untuk masalah K($\boldsymbol{\beta}$) pada level $\boldsymbol{\beta}^*$. Hal ini berarti $(\boldsymbol{x}^{*T}, \boldsymbol{u}^{*T})^T$ fisibel untuk K($\boldsymbol{\beta}$), artinya $x^* \in D$ dan

$$P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) = \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\},$$

paling sedikit satu k berlaku $P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) < u_k^*) = \beta_k^*$.

Demikian juga jika $(x^T, u^T)^T$ dan $P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k) = \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\}$, maka $\boldsymbol{u}^* \le \boldsymbol{u}$.

Andaikan $\boldsymbol{x}^*$ bukan merupakan penyelesaian efisien untuk masalah MR($\boldsymbol{u}$). Jadi terdapat vektor $x \in D$ dengan

$$P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k^*) > \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\},$$

Karena fungsi distribusi variabel random $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ kontinu dan naik tegas, berarti benar bahwa ada $\boldsymbol{u}^*<\boldsymbol{u}$ dengan $P(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u_k) = \beta_k^*, \forall k \in \{1,2,\ldots,q\}$. Terjadi kontradiksi.□

Akibat 1

Himpunan penyelesaian efisien masalah MR($\boldsymbol{u}$) dan K($\boldsymbol{\beta}$) sama.

2.2. Pendekatan Stokastik

Pada pendekatan stokastik ini digunakan pembobotan non negatif untuk setiap fungsi tujuan. Diambil vektor pembobotan $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_q)^T, \mu_k \in R^+$. Masalah MS bersesuaian dengan vektor bobot $\boldsymbol{\mu}$ menjadi masalah pemrograman stokastik

$$\min_{x\in D}\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})=\sum_{i=1}^{q}\mu_k\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})\right). \qquad \text{(PS)}$$

Masalah PS diselesaikan dengan mengaplikasikan satu dari kriteria dalam pemrograman stokastik, yaitu nilai harapan, minimum variansi, minimum resiko atau kriteria Kataoka. Aplikasi kriteria-kriteria ini pada PS akan menentukan empat masalah deterministik yang berbeda yang penyelesaian optimalnya menjadi penyelesaian efisien untuk MS.

Akan dijelaskan hubungan antara penyelesaian efisien pada masalah multiobjektif deterministik pada pendekatan multiobjektif dan penyelesaian optimal bersesuaian pada masalah pembobotan. Diberikan masalah multiobjektif

$$\min_{x\in D}\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})=\left(z_1(\boldsymbol{x}),\dots,z_q(\boldsymbol{x})\right) \qquad \text{(MD)}$$

dan masalah bersesuaian dengan MD dengan metode pembobotan

$$\min_{x\in D} z_\mu(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(MD}(\boldsymbol{\mu})\text{)}$$

Teorema berikut menentukan hubungan antara penyelesaian masalah MD($\boldsymbol{\mu}$) dan penyelesaian efisien masalah MD. Teorema tersebut dimuat dalam paper Caballero *et al*. tanpa bukti. Di sini teorema tersebut akan dibuktikan dengan pendekatan yang berbeda.

Teorema 2

a) *Diberikan fungsi tujuan $z_1,\dots,z_q$ konveks. Jika $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian efisien proper untuk masalah MD, maka ada $\mu_1,\dots,\mu_q,\mu_k>0$ untuk setiap $k\in\{1,2,..,q\}$ sehingga $\boldsymbol{x}^*$ merupakan penyelesaian masalah MD($\boldsymbol{\mu}$).*
b) *Jika $\boldsymbol{x}^*$ merupakan penyelesaian masalah MD($\boldsymbol{\mu}$) dengan $\boldsymbol{\mu}>0$, maka $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian efisien proper untuk masalah MD.*
c) *Jika $\boldsymbol{x}^*$ hanya penyelesaian untuk masalah MD($\boldsymbol{\mu}$) dengan $\boldsymbol{\mu}\geq 0$, maka $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian efisien untuk MD. Jika penyelesaian ini tidak tunggal, maka penyelesaian ini merupakan penyelesaian efisien lemah untuk MD.*

Bukti

a) Diketahui $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian efisien proper untuk masalah MD. Berdasarkan Definisi 1 dan Definisi 4 , berarti untuk semua $x\in D$ dan untuk semua $k=\{1,2,\dots,q\}$berlaku $z_k(x)>z_k(x^*)$. Karena $z_k(x^*)-z_k(x)<0$ dan $z_k(x)-z_k(x^*)>0$ untuk semua $k=\{1,2,\dots,q\}$, maka untuk sembarang $M>0$ selalu berlaku $\frac{z_k(x^*)-z_k(x)}{z_j(x)-z_j(x^*)}\leq M$. Pandang masalah MD($\boldsymbol{\mu}$), jika diambil $\sum_{k=1}^{q}\mu_k=1,\ 0<\mu_k<1$, dan karena $z_k(x)>z_k(x^*)$, maka
$$\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x)>\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x^*)=z_\mu(x^*).$$
Karena z_k konveks, maka $z_\mu(\boldsymbol{x})>z_\mu(\boldsymbol{x}^*)$, untuk semua $x\in D$.□
b) Diketahui $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian masalah MD($\boldsymbol{\mu}$), dengan $\mu_k>0, k\in\{1,2,\dots,q\}$, berarti untuk semua $x\in D$ berlaku $\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x)>\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x^*)$. Karena $\mu_k>0, k\in\{1,2,\dots,q\}$, maka berlaku
$$\mu_k z_k(x)>\mu_k z_k(x^*)\Leftrightarrow z_k(x)>z_k(x^*).$$
Jadi terbukti x^* penyelesaian efisien. Berdasarkan Definisi 3, karena $z_k(x^*)-z_k(x)<0$ dan $z_k(x)-z_k(x^*)>0$ untuk semua $k=\{1,2,\dots,q\}$, maka untuk sembarang $M>0$ selalu berlaku $\frac{z_k(x^*)-z_k(x)}{z_j(x)-z_j(x^*)}\leq M$. Terbukti x^* penyelesaian efisien proper untu MD.□
c) Diketahui $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian masalah MD($\boldsymbol{\mu}$), dengan $\mu_k\geq 0, k\in\{1,2,\dots,q\}$, berarti untuk semua $x\in D$ berlaku $\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x)>\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x^*)$. Karena $\mu_k\geq 0, k\in\{1,2,\dots,q\}$, maka berlaku
$$\mu_k z_k(x)>\mu_k z_k(x^*)\Leftrightarrow z_k(x)\geq z_k(x^*).$$
Jadi terbukti x^* penyelesaian untuk MD.

Diketahui x^* tidak tunggal, jadi terdapat penyelesaian x_1^* dan x_2^* sehingga $\sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x_1^*) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k z_k(x_2^*)$. Karena $\mu_k \geq 0, k \in \{1,2,..,q\}$, maka berlaku

$$\mu_k z_k(x) > \mu_k z_k(x_1^*) \Leftrightarrow z_k(x) \geq z_k(x_1^*)$$

dan

$$\mu_k z_k(x) > \mu_k z_k(x_2^*) \Leftrightarrow z_k(x) \geq z_k(x_2^*).$$

Andaikan $\boldsymbol{x}^*$ bukan penyelesaian efisien lemah untuk masalah MD sehingga berlaku $z_k(x) > z_k(x^*)$. Ambil $z_k(x^*) = \min\{z_k(x_1^*), z_k(x_2^*)\}$, $k \in \{1,2,..,q\}$. Diperoleh $z_k(x) > \min\{z_k(x_1^*), z_k(x_2^*)\}$. Misalkan $\min\{z_k(x_1^*), z_k(x_2^*)\} = z_k(x_1^*)$. Kontradiksi dengan $z_k(x) \geq z_k(x_1^*)$. Jadi $\boldsymbol{x}^*$ penyelesaian efisien lemah untuk masalah MD. □

Berdasarkan Teorema 2, jika himpunan penyelesaian fisibel dan fungsi tujuan konveks, maka penyelesaian efisien masalah MD ditentukan dengan menyelesaikan masalah MD($\boldsymbol{\mu}$) untuk semua nilai vektor bobot yang mungkin dengan semua bobot bernilai positif.

2.3. Pendekatan Stokastik versus Pendekatan Multiobjektif

Akan ditentukan hubungan penyelesaian efisien masalah multiobjektif stokastik MS yang diselesaikan dengan pendekatan multiobjektif dan pendekatan stokastik. Pada pendekatan stokastik, metode pembobotan diaplikasikan pada empat kriteria pada pemrograman stokastik berikut.

1) Kriteria nilai harapan diaplikasikan pada masalah PS, diperoleh

$$\min_{x\in D} \bar{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \bar{z}_k(\boldsymbol{x}), \qquad \text{(PSE)}$$

dengan $\bar{f}(\boldsymbol{x})$ menyatakan nilai harapan variabel random

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \tilde{z}_k(\boldsymbol{x}).$$

Fungsi tujuan pada PSE merupakan kombinasi linear nilai harapan pada masalah E dengan koefisiennya merupakan bobot. Setelah keduanya ditransformasi menjadi masalah deterministik, maka berdasar teorema 2 hubungan antara penyelesaian efisien masalah E dan PSE sama seperti hubungan penyelesaian pada masalah MD dan MD($\boldsymbol{\mu}$).

2) Kriteria minimum variansi diaplikasikan pada masalah PS.

Diketahui variabel random $\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ merupakan fungsi linear terhadap variabel random $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$,$k$=1,2,..,$q$. Variansi $\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ bergantung pada variansi variabel-variabel randomnya dan kovariansinya. Diperoleh

$$\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k^2\sigma_k^2(\boldsymbol{x}) + 2\sum_{k,s=1,k<s}^{q}\mu_k\mu_s\sigma_{ks}(\boldsymbol{x}),$$

dengan $\sigma_{ks}(\boldsymbol{x})$ menyatakan kovariansi variabel random $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ dan $\tilde{z}_s(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$, dengan

$$\sigma_{ks}(\boldsymbol{x}) = E\{(\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) - \bar{z}_k(\boldsymbol{x}))(\tilde{z}_s(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) - \bar{z}_s(\boldsymbol{x}))\}.$$

Jika kriteria minimum variansi diaplikasikan pada PS, diperoleh

$$\min_{x\in D}\sigma^2(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{q}\mu_k^2\sigma_k^2(\boldsymbol{x}) + 2\sum_{k,s=1,k<s}^{q}\mu_k\mu_s\sigma_{ks}(\boldsymbol{x}). \qquad \text{(PSV)}$$

Teorema 2 berlaku pada kasus ini hanya jika $\sigma_{ks} = 0, k, s \in \{1,2,..,3\}, k \neq s$ dan untuk setiap $\boldsymbol{x} \in D$.

3) Kriteria minimum resiko/maksimum probabilitas diaplikasikan pada PS, diperoleh

$$\max_{x\in D} P\left\{\sum_{k=1}^{q}\mu_k \tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \leq u\right\}, \qquad \text{(PS MR(}\boldsymbol{u}\text{))}$$

dengan $u = \sum_{k=1}^{q}\mu_k u_k$.

Jika kriteria Kataoka diaplikasikan pada PS, diperoleh

$$\min_{x,u} u$$

$$\text{dengan kendala } P\left(\sum_{k=1}^{q}\mu_k \tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \leq u\right) = \beta, \qquad \text{(PSK(}\boldsymbol{\beta}\text{))}$$

dengan $\beta = \sum_{k=1}^{q}\mu_k \beta_k$.

Untuk menentukan hubungan penyelesaian pada masalah MR($\boldsymbol{u}$) dan PS MR($\boldsymbol{u}$) tidaklah mudah, karena fungsi distribusi $\tilde{z}_1(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$, …, $\tilde{z}_q(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ dan $\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) = \sum_{k=1}^{q} \mu_k \tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}})$ bergantung pada distribusi probabilitas $\tilde{\boldsymbol{c}}$ dan juga vektor variabel keputusan $\boldsymbol{x}$. Akan dibahas satu kasus sederhana berikut.

Kasus variabel random sederhana

Diasumsikan untuk setiap $k \in \{1,2,.., q\}$, fungsi tujuan linear dengan $\tilde{z}_k(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) = \tilde{\boldsymbol{c}}_k{}^T \boldsymbol{x}$ dan semua fungsi tujuan stokastik bergantung pada variabel random yang sama, yaitu $\tilde{t}$, sehingga $\tilde{\boldsymbol{c}}_k = \boldsymbol{c}_k^1 + \tilde{t}\boldsymbol{c}_k^2$. Diasumsikan pula variabel random $\tilde{t}$ kontinu dengan nilai harapan $\bar{t}$, variansi v_t^2, fungsi distribusi F_t naik tegas, dan untuk setiap $x \in D$ dan untuk setiap $k \in \{1,2,.., q\}$, ${\boldsymbol{c}_k^2}^T \boldsymbol{x} > 0$.

Jika semua asumsi dipenuhi, maka himpunan penyelesaian efisien dengan probabilitas $\beta_1, \dots, \beta_q$ pada masalah MS merupakan penyelesaian MR($\boldsymbol{u}$),

$$\min_{x\in D}\left({\boldsymbol{c}_1^1}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}_t^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1){\boldsymbol{c}_1^2}^T\boldsymbol{x}, \dots, {\boldsymbol{c}_q^1}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}_t^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1){\boldsymbol{c}_q^2}^T\boldsymbol{x}\right) \qquad (1)$$

Jika $\beta_1 = \cdots = \beta_q = \beta$ maka MR($\boldsymbol{u}$) menjadi

$$\min_{x\in D}\left({\boldsymbol{c}_1^1}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}_t^{-1}(\boldsymbol{\beta}){\boldsymbol{c}_1^2}^T\boldsymbol{x}, \dots, {\boldsymbol{c}_q^1}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}_t^{-1}(\boldsymbol{\beta}){\boldsymbol{c}_q^2}^T\boldsymbol{x}\right),$$

dengan pendekatan stokastik didapat

$$P\left(\tilde{f}(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{c}}) \le u\right) = P\left(\sum_{k=1}^{q} \mu_k {\boldsymbol{c}_k^1}^T\boldsymbol{x} + \tilde{t}\mu_k {\boldsymbol{c}_k^2}^T\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}\right) = F_t\left(\frac{u - \mu_k {\boldsymbol{c}_k^1}^T\boldsymbol{x}}{\mu_k {\boldsymbol{c}_k^2}^T\boldsymbol{x}}\right) = \beta$$

yang menyatakan bahwa

$$u = \sum_{k=1}^{q} \mu_k {\boldsymbol{c}_k^1}^T\boldsymbol{x} + F_t^{-1}(\beta)\sum_{k=1}^{q} \mu_k {\boldsymbol{c}_k^2}^T\boldsymbol{x}.$$

Aplikasi kriteria Kataoka menjadi

$$\min_{x\in D} \sum_{k=1}^{q} \mu_k {\boldsymbol{c}_k^1}^T\boldsymbol{x} + F_t^{-1}(\beta)\sum_{k=1}^{q} \mu_k {\boldsymbol{c}_k^2}^T\boldsymbol{x}. \qquad (2)$$

Berdasar teorema 2 hubungan antara penyelesaian masalah 1 dan 2 sama seperti hubungan penyelesaian masalah multiobjektif dan masalah pembobotan.

PENUTUP

Pada makalah ini masalah multiobjektif stokastik ditransformasi menjadi masalah deterministik dengan dua pendekatan, yaitu pendekatan stokastik dan pendekatan multiobjektif. Pada pendekatan multiobjektif, ada lima model deterministik yang ekuivalen dengan model stokastik sesuai dengan kriteria dalam pemrograman stokastik. Berdasarkan penyelesaian optimal Pareto dalam masalah multiobjektif deterministik diperoleh penyelesaian efisien untuk masalah multiobjektif stokastik. Berdasarkan Teorema 1 yang telah dibuktikan, diperoleh hubungan antara penyelesaian efisien untuk masalah meminimumkan resiko pada level $u_1, \dots, u_q$ dan masalah dengan kriteria Kataoka.

Pada pendekatan stokastik, metode pembobotan non negatif digunakan untuk setiap fungsi tujuan pada masalah multiobjektif stokastik. Kemudian kriteria dalam pemrograman stokastik diaplikasikan, sehingga diperoleh masalah deterministik yang ekuivalen. Penyelesaian masalah deterministik ini menjadi penyelesaian efisien untuk masalah multiobjektif stokastik.

Berdasarkan Teorema 2 yang telah dibuktikan , terdapat hubungan antara penyelesaian efisien masalah multiobjektif deterministik dan masalah pembobotan. Teorema 2 ini juga berlaku untuk menentukan hubungan penyelesaian efisien antara masalah multiobjektif stokastik yang diselesaikan dengan pendekatan multiobjektif dan pendekatan stokastik dengan kriteria pemrograman stokastik yang sama, yaitu kriteria minimum nilai harapan dan minimum variansi. Pada kasus variabel random sederhana, hubungan penyelesaian antara masalah multiobjektif stokastik yang diselesaikan dengan pendekatan multiobjektif dan pendekatan stokastik dengan kriteria minimum resiko dan Kataoka sama seperti pada Teorema 2.

DAFTAR PUSTAKA

Caballero, R.,Cerda, E., Munoz, M.M. and Rey, L., 2004, *Stochastic Approach versus Multiobjective Approach for Obtaining Efficient Solutions in Multiobjective Programming Problem*, http://eprints.ucm.es/7674/1/0217.pdf, diakses 2 Maret 2009.

Ehrgott, M. and Ruzika, S., 2004, *An Improved* ε*-Constraint Method for Multiobjective Programming*, http://kluedo.ub.uni-kl.de/volltexte/2005/1893/pdf/org6.pdf, diakses 8 Mei 2009.

Haneveld, W.K.K. and Maarten, H., 2003, *Stochastic Programming*, Department of Econometries & OR, University of Groninben, Netherlands.

Sakawa, M., 1993, *Fuzzy Sets and Interactive Multi-objective Optimization*, Plenium Press, New York.

Singh, C. and Hanson, M.A., 1988, *Generalized Proper Efficiency in Multiobjective Programming*, http://stat.fzu.edu/techreports/M786.pdf, diakses 24 April 2009.