

## Konstruksi Model Multi-pita Pada Perhitungan Struktur Elektronik Semikonduktor dan Aplikasinya Pada Sistem Quantum Dot Nanokristal

Moh.Adhib Ulil Absor, Muh. Darwis Umar dan Kamsul Abraha  
Jurusan Fisika FMIPA UGM Yogyakarta

### Intisari

Telah dilakukan penurunan model multi-pita untuk perhitungan struktur elektronik semikonduktor menggunakan pendekatan massa efektif  $k.p$  berbasis pada teori gangguan terdegenerasi. Hasil perhitungan menunjukkan adanya efek ketidakparabolikan dari pita valensi yang mana sangat berbeda ketika peninjauan yang sama dilakukan pada pita konduksi. Penggunaan model multi-pita pada perhitungan struktur elektronik CdTe quantum dot (QD) nanokristal juga dilakukan dalam paper ini yang dalam praktiknya melibatkan tehnik Clebs-Gordan dalam teori penjumlahan momentum sudut. Hasil perhitungan menunjukkan adanya korelasi yang sangat kuat antara struktur elektronik dan ukuran dot.

Kata kunci: model multi-pita, Quantum dot.  
Email: adhib\_2004ugm@yahoo.com

### I. Pendahuluan

Untuk memprediksikan sifat optik dan elektronik semikonduktor perlu untuk mengetahui bentuk Hamiltonian dan basis wakilan yang akan digunakan dalam perhitungan baik itu dengan atau tanpa memperhitungkan efek gandengan spin-orbit. Secara umum dalam perhitungan struktur elektronik dalam material semikonduktor, terdapat dua kategori umum diantaranya adalah i) perhitungan yang dilakukan dengan melibatkan seluruh pita valensi dan pita konduksi, ii) perhitungan yang melibatkan daerah didekat tepi-tepi pita valensi maupun konduksi.

Pendekatan-pendekatan seperti *tight-binding*, pseudo-potensial, gelombang bidang terortogonalisasi (*Orthogonalized Plane Waves/OPW*), perluasan gelombang bidang (*Augmented Plane Waves /APW*), atau kombinasi keduanya yang saat ini sedang dikembangkan yaitu yang dikenal dengan pendekatan kue tipis (*muffin tin approximation*) merupakan pendekatan-pendekatan yang tergolong dalam kategori pertama, sementara itu pendekatan teori gangguan yang dikenal sebagai pendekatan massa efektif  $k.p$  tergolong dalam kategori kedua. Untuk kajian yang melibatkan perhitungan disekitar tepi-tepi pita valensi maupun konduksi, pendekatan massa efektif  $k.p$  merupakan pendekatan yang paling cocok dan valid untuk diterapkan, sehingga terkait dengan penelitian yang kami lakukan ini, maka kami menggunakan pendekatan massa efektif  $k.p$  sebagai metode perhitungan.

Sebagian besar fenomena kristal baik itu optik, elektronik maupun magnetik dalam semikonduktor dapat diketahui dengan memeriksa sebgaiian kecil dari keseluruhan struktur pita. Daerah yang terpenting dari struktur pita tersebut adalah daerah yang sebagian besar ditempati oleh pembawa muatan kristal yaitu titik terendah dalam pita konduksi dan titik tertinggi pita valensi. Titik tertinggi pita valensi dikenal sebagai titik- $\Gamma$ , dan merupakan titik ( $k_x = 0, k_y = 0, k_z = 0$ ) dalam ruang- $k$ . Berdasarkan campuran letak titik terendah dari pita konduksi dan titik tertinggi pita valensi, semikonduktor digolongkan dalam dua jenis diantaranya adalah: i) semikonduktor celah-langsung (*direct*) yaitu semikonduktor dimana campuran, maksimum pita valensi dan minimum pita konduksi terjadi pada titik yang sama yaitu pada titik- $\Gamma$  dalam ruang- $k$ . Semikonduktor yang demikian biasanya digunakan pada sebagian perangkat optik, ii) semikonduktor celah-tidak langsung (*indirect*) yaitu semikonduktor dengan minimum pita konduksi dicapai pada beberapa titik lain di ruang- $k$  dan berada pada titik yang berbeda dengan maksimum pita valensi [11].

Pendekatan  $k.p$  merupakan salah satu pendekatan yang cukup handal dalam menghitung struktur pita  $E_n(\mathbf{k})$  disekitar tepi pita (di bawah pita konduksi dan di atas pita valensi) dan dapat diaplikasikan pada kasus pita merosot (terdegenerasi) tunggal maupun merosot banyak serta sebagai salah satu dasar dalam penurunan dan pengembangan model multi-pita dalam sistem semikonduktor kristal. Sehingga dalam paper ini akan kami paparkan secara garis besar tentang

bagaimana mengkonstruksi model multi-pita berbasis pendekatan massa efektif  $\mathbf{k.p}$  serta perhitungan struktur elektronik dapat diperoleh dengan menggunakan model multi-pita yang diperoleh tersebut. Adapun keuntungan menggunakan model ini adalah secara matematik lebih sederhana sementara perhitungan secara komputasi lebih mudah. Adapun sistematika dari paper ini adalah **Seksi I** berupa pendahuluan kemudian dilanjutkan **Seksi II** yang membahas tentang pengkonstruksian model multi-pita berbasis pendekatan massa efektif  $\mathbf{k.p}$ . Pada **Seksi III** dilakukan perhitungan struktur elektronik CdTe QD sebagai aplikasi dari model multi-pita yang diperoleh, akhirnya pembahasan dan kesimpulan diberikan pada **Seksi IV**.

## II. Penurunan Model Multi-pita

### II.A Persamaan Shrodinger Untuk Material Bulk Semikonduktor

Pada material semikonduktor, langkah awal perhitungan keadaan pita valensi dan pita konduksi adalah dimulai dari persamaan Shrodinger untuk *bulk* semikonduktor yang dapat dituliskan sebagai,

$$\left[ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + \hat{V}(r) + \frac{\hbar}{4m_0^2c^2} (\hat{\sigma} \times \nabla V) \cdot \hat{p} \right] \psi(r) = [H_0 + H_{so}] \psi(r) = E\psi(r) \quad (1)$$

dengan  $V(r)$  adalah potensial kristal dan  $m_0$  adalah massa electron bebas serta  $\hat{p}$  dan  $\hat{\sigma}$  adalah operator momentum dan spin pauli. Bentuk pertama dan kedua pada persamaan (2) adalah sumbangan dari bagian kinetik dan potensial sementara itu bentuk ketiga menggambarkan interaksi spin-orbit yang memenuhi kaitan relativistik. sebagai akibat dari pergerakan elektron disekitar inti yang bermuatan positif pada kecepatan relativistik sehingga muncul medan listrik dari inti yang bertransformasi-Lorentz menjadi medan magnetik dalam perspektif elektron dan akan berinteraksi dengan spin atau lebih tepatnya dengan momen magnetik elektron. Oleh karena elektron valensi terletak lebih dekat dengan inti dibandingkan dengan elektron konduksi, maka efek spin-orbit tersebut akan sebagian besar disumbangkan oleh elektron valensi dan biasa di dimasukkan dalam penggambaran pita valensi, sehingga jika gerakan relatif elektron diasumsikan sebuah gerakan yang menyerupai garis lurus, maka berlaku

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cong (\mathbf{v} \times \mathbf{E})/c \quad (2)$$

Dengan menggunakan persamaan (2), maka bentuk interaksi spin orbit dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} V^{so} &= -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} = 2\mu_B \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \frac{e}{mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{e}{mc^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{E}) \\ &= \frac{e}{m^2c^2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{p} \times \nabla\phi) \\ &= -\frac{1}{mc^2} (\mathbf{S} \times \nabla(e\phi)) \cdot \mathbf{p} \end{aligned} \quad (3)$$

dengan  $\mu_B$  adalah magneton Borh dan  $\mathbf{S}$  adalah operator spin ( $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \hbar \boldsymbol{\sigma}$ ). Dalam langkah Persamaan (3) telah digunakan kaitan:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \quad \text{dan} \quad (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (4)$$

Penggambaran ini tidak sebenarnya benar setelah diasumsikan elektron bergerak dalam garis lurus, untuk sistem dimana elektron bergerak dalam suatu orbit tertentu perlu dimasukkan efek presisi Thomas dengan menambahkan suatu faktor 2 terhadap pembagi pada persamaa (2). Untuk potensial simetri bola (misalnya  $\phi(\mathbf{r}) = \phi(r)$ ) persamaan (3) dapat ditulis sebagai:

$$H_{so} = \frac{-1}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial(e\phi(r))}{\partial r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \quad (5)$$

dengan  $\mathbf{L}$  adalah momentum sudut pergerakan elektron. Untuk elektron yang berasal dari orbital-s (elektron pita konduksi untuk semikonduktor *direct* ( $L \approx 0$ )) maka interaksi spin-orbit akan dalam orde nol sebagaimana telah dijelaskan sebelumnya di atas sementara itu, untuk elektron yang berasal dari orbital-p ( $L \approx 1$ ) efek interaksi spin-orbit tidak dapat diabaikan.

Dalam semikonduktor kristal, potensial kristal mempunyai bentuk yang periodik sebagaimana keperiodikan kristal sehingga terema Bloch sangat berperan dalam penggambaran struktur pita (Kittel, 1996; Jena, 2004; Darwis, 2007). Apabila  $a_i (i=1,2,3)$  menyatakan sebagai vektor basis dari kristal, maka kita dapat menuliskan:

$$V(\vec{r} + \sum_i n_i \vec{a}_i) = V(\vec{r}) \quad (6)$$

Yang mana valid untuk setiap nilai  $\vec{r}$  dan bilangan bulat  $n_i$ . Sehingga dapat ditentukan bahwa fungsi gelombang sebagai solusi dari Pers.(1) juga merupakan swafungsi dari operator translasi  $\hat{T}_d$  dengan  $\vec{d} = \sum_i n_i \vec{a}_i$ :

$$\hat{T}_d \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{d}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{d}} \psi(\vec{r}). \quad (7)$$

Dengan kata lain, solusi Pers.(1) dan (7) dapat dituliskan dalam bentuk gelombang Bloch ((Kittel, 1996; Jena, 2004; Darwis, 2007):

$$\psi(\vec{r}) = N u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{d}} \quad (8)$$

dengan  $N$  adalah konstanta normalisasi,  $u_{n,\vec{k}}(\vec{r})$  adalah fungsi dengan periodisitas kisi kristal, serta  $n$  dan  $\vec{k}$  menyatakan indeks pita dan vektor gelombang kristal. Oleh karena pada kebanyakan semikonduktor, daerah yang terpenting dari struktur pita tersebut adalah daerah yang sebagian besar ditempati oleh pembawa muatan kristal yaitu titik terendah dalam pita konduksi dan titik tertinggi pita valensi yang dikenal sebagai titik- $\Gamma$ , dan merupakan titik  $\vec{k}_0 (k_x = 0, k_y = 0, k_z = 0)$  dalam ruang- $\vec{k}$ , maka  $u_{n,\vec{k}}(\vec{r})$  dapat diekspansikan dalam bentuk fungsi sel periodic pada pusat zone  $\vec{k}_0$ ,  $u_{n,\vec{k}_0}(\vec{r})$ :

$$u_{n,\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{\gamma} C_{\gamma} u_{n,\vec{k}_0} \quad (9)$$

Sebuah analisis  $\mathbf{k.p}$  dari Pers.(1) menggunakan teori gangguan orde kedua menghasilkan kaitan disperse yang mempunyai bentuk kuadratik sebagai fungsi  $k$  untuk semua keadaan ujung pita yang ternyata hanya valid untuk peninjauan disekitar titik- $\Gamma$ . Untuk orde  $k$  yang lebih tinggi meskipun menambah keakuratan hasil perhitungan, namun sangatlah tidak praktis sehingga metode lain perlu diterapkan. Beberapa pendekatan telah dibuat, diantaranya yang diperkenalkan oleh Luttinger-kohn (1955) yang dikenal sebagai Model Luttinger-Kohn dalam bentuk Hamiltonian 6x6 dan 4x4 untuk pita valensi, selain Luttinger-Kohn, Kane (19 ) juga memperkenalkan pendekatannya yang disebut sebagai model Kane dalam bentuk Hamiltonian 8x8. Pendekatan-pendekatan yang dijelaskan tersebut berbasis pada pendekatan  $\mathbf{k.p}$  yang dikombinasikan dengan diagonali langsung dari Hamiltonian yang selanjutnya disebut sebagai pendekatan multi-pita. Pada semikonduktor dengan celah tenaga yang cukup besar maka perhitungan struktur pita semikonduktor hanya valid jika peninjauan dilakukan dengan memisahkan keadaan masing-masing pita, dengan kata lain untuk peninjauan elektron dilakukan hanya dengan meninjau keadaan tepi pita konduksi saja dimana dalam praktiknya menggunakan Hamiltonian pita tunggal untuk pita tunggal, sementara itu untuk hole dilakukan dengan meninjau pita valensi yang dalam praktiknya dilakukan dengan menggunakan model Luttinger-Kohn.

## II.B Konstruksi Basis Multi-pita

Pada kasus semikonduktor celah-langsung (*direct-gap semiconductor*), fungsi kisi Bloch  $u_{ck}(\mathbf{r}) = u_{c0}(\mathbf{r})$  memiliki sifat simetri sebagaimana keadaan  $|s\rangle$  pada pita konduksi minimum ( $\mathbf{k}=0$ ) atau mempunyai simetri bola. Sedangkan seluruh pita maksimum valensi akan mempunyai simetri sebagaimana orbital-orbital- $p$ . Pada semikonduktor yang mempunyai celah pita tidak langsung (*indirect-gap semiconductor*) keadaan minimum pita konduksi tidak lagi seperti  $|s\rangle$  melainkan adalah campuran  $|s\rangle$  dengan  $|X\rangle, |Y\rangle, |Z\rangle$ . Secara umum keadaan-keadaan pita valensi dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari orbital-orbital- $p$ .

Tanpa pengaruh interaksi spin-orbit, tepi pita konduksi terdegenerasi lipat dua sebagaimana telah disebutkan sebelumnya dimana keadaan tepi-pita konduksi diwakili oleh keadaan fungsi Bloch  $|S \uparrow\rangle$  dan  $|S \downarrow\rangle$  yang mempunyai sifat yang sama sebagaimana orbital molekul  $s$ . Sementara itu pada keadaan tertinggi tepi pita valensi terdegenerasi lipat enam dan diwakili oleh keadaan fungsi Bloch  $|X \uparrow\rangle, |Y \uparrow\rangle, |Z \uparrow\rangle, |X \downarrow\rangle, |Y \downarrow\rangle$  dan  $|Z \downarrow\rangle$  yang mewakili sifat yang sama dengan orbital  $p$ . Keadaan  $s$  dan  $p$  itu sendiri merupakan swakeadaan-swakeadaan bersama terhadap operator-operator  $\mathbf{L}^2$  dan  $\mathbf{S}^2$ , dengan  $\mathbf{L}$  dan  $\mathbf{S}$  operator momentum sudut dan spin. Oleh karena  $\mathbf{L}$  dan  $\mathbf{S}$  belum bisa mengkarakterisasi keadaan pita valensi secara unik, maka dibutuhkan observable/operator lain yang komut dengan operator  $\mathbf{L}$  dan  $\mathbf{S}$  tersebut yaitu dengan memilih proyeksi  $\mathbf{L}$  sepanjang sumbu  $z$ ,  $m_L -1, 0, 1$ . Dengan mengambil kombinasi linear fungsi Bloch yang telah dijelaskan diatas, fungsi Bloch baru dapat dikonstruksi yang mana merupakan swakeadaan bersama dari  $\mathbf{L}^2$  dan  $\mathbf{L}_z$  sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned} |1,+1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X + iY) \\ |1,0\rangle &= Z \\ |1,-1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY) \end{aligned} \quad (10)$$

dengan tiap keadaan  $|\mathbf{L}, m_L\rangle$  mempunyai spin *up* dan *down*.

Apabila Interaksi spin-orbit diperhitungkan maka akan terjadi kopling antara  $\mathbf{L}$  dan  $\mathbf{S}$  sehingga perlu diperkenalkan momentum sudut total  $\mathbf{J}$  memenuhi yang memenuhi kaitan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 &= (\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 \\ &= \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

Dalam persamaan diatas kopling spin orbit diwakili oleh besaran :

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2). \quad (12)$$

Sehingga operator  $\mathbf{J}^2$  mempunyai swakeadaan bersama dengan operator  $H_{SO}$  dan  $\mathbf{J}_z$  yang merupakan proyeksi operator  $\mathbf{J}$  pada sumbu- $z$ . Dengan menggunakan teknik Clebs-Gordan sederhana pada kasus penjumlahan momentum sudut, maka didapatkan basis-basis Bloch yang mewakili keadaan-keadaan tepi pita konduksi maupun pita valensi sebagai berikut:

a) pita konduksi

$$\begin{aligned} |e^+\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |\mathbf{S} \uparrow\rangle \\ |e^-\rangle &= \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |\mathbf{S} \downarrow\rangle \end{aligned} \quad (13)$$

b) pita valensi

$$|hh^+\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|(X + iY) \uparrow\rangle$$

$$\begin{aligned}
 |lh^+\rangle &= \left|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}|Z\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|(X+iY)\downarrow\rangle \\
 |lh^-\rangle &= \left|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}|(X-iY)\uparrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|Z\downarrow\rangle \\
 |hh^-\rangle &= \left|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|(X-iY)\downarrow\rangle \\
 |so^+\rangle &= \left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|(X+iY)\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|Z\uparrow\rangle \\
 |so^-\rangle &= \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}|-(X-iY)\uparrow\rangle + |Z\downarrow\rangle
 \end{aligned} \tag{14}$$

### II.C Konstruksi Hamiltonian Multi-pita

Dalam kerangka basis wakilan yang telah dikonstruksi pada Sub-Bab sebelumnya, maka dapat ditentukan bentuk Hamiltonian yang mewakili keadaan tepi-tepi pita konduksi-maupun pita valensi. Pada pita konduksi, oleh karena keadaannya hanya diwakili oleh keadaan Bloch yang memiliki simetri sebagaimana keadaan  $|s\rangle$ , maka Hamiltonian yang mewakili pita konduksi dapat dituliskan sebagai:

$$H_e = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2 \tag{15}$$

Dengan  $\nabla^2$  merupakan operator Laplasian yang bergantung pada koordinat yang dipakai sebagai peninjauan.  $m_e$  merupakan massa efektif elektron di pita konduksi.

Pada pita valensi, bentuk Hamiltonian dapat dikonstruksi menggunakan pendekatan massa efektif  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$  berbasis teori gangguan terdegenerasi yang dikombinasikan dengan diagonalisasi langsung berdasarkan basis wakilan pita valensi Pers.(14). Dengan menggunakan teori gangguan untuk kasus yang terdegenerasi, keadaan tepi pita konduksi dan valensi dapat dibagi dalam dua kelompok misalnya kelompok  $A$  dan  $B$ . Menurut metode gangguan Löwdin apabila kelompok  $A$  diasumsikan sebagai keadaan utama maka keadaan yang termasuk dalam kelompok  $B$  dapat diperlakukan sebagai sebuah gangguan terhadap keadaan  $A$  sehingga secara matematik ungkapan tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$u_k(\mathbf{r}) = \sum_{j'}^A a_{j',k} u_{j',0}(\mathbf{r}) + \sum_{\gamma'}^B a_{\gamma',k} u_{\gamma',0}(\mathbf{r}) \tag{16}$$

dengan  $j'$  adalah keadaan dalam kelas  $A$  dan  $\gamma'$  adalah keadaan dalam kelas  $B$ , metode Löwdin menyatakan bahwa persamaan schrödinger tak bergantung waktu dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\sum_{j'}^A (U_{jj'}^A - E\delta_{jj'}) a_{j',k} = 0 \tag{17}$$

sebagai pengganti terhadap persamaan berikut:

$$\sum_{j'}^{A,B} (H_{jj'} - E\delta_{jj'}) a_{j',k} = 0 \tag{18}$$

Pada persamaan (17) ungkapan  $U_{jj'}^A = H_{jj'} (j, j' \in A)$  +pengaruh  $B$  pada  $A$ . Apabila  $B$  diperlakukan sebagai gangguan maka bentuk  $U_{jj'}^A$  dalam koreksi orde pertama terhadap  $H_{jj'}$  adalah:

$$\begin{aligned}
 U_{jj'}^A &= H_{jj'} + \sum_{\gamma \neq j, j'}^B \frac{H_{j\gamma} H_{j'\gamma}}{E_0 - E_\gamma} \\
 H_{jj'} &= \langle u_{j,0} | H | u_{j',0} \rangle = \left[ E_j(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \right] \delta_{jj'} \quad (j, j' \in A) \\
 H_{j\gamma} &= \langle u_{j,0} | \frac{\hbar}{m_0} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p} | u_{\gamma,0} \rangle = \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\hbar k_\alpha}{m_0} p_{j\gamma}^\alpha \quad (j \in A, \gamma \notin A)
 \end{aligned} \tag{19}$$

Oleh karenanya  $U_{jj'}^A$  dapat diungkapkan sebagai:

$$U_{jj'}^A = \left[ E_j(0) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \right] \delta_{jj'} + \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\hbar k_\alpha}{m_0} p_{j\gamma}^\alpha + \frac{\hbar^2}{m_0} \sum_{\gamma \neq j,j'} \sum_{\alpha,\beta} \frac{k_\alpha k_\beta p_{j\gamma}^\alpha p_{\gamma j'}^\beta}{E_0 - E_\gamma} \quad (20)$$

Dengan melabeli kembali bentuk  $U_{jj'}^A$  menjadi  $D_{jj'}$  serta menyederhanakan persamaan (20) menjadi:

$$D_{jj'} = E_j(0) \delta_{jj'} + \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\hbar k_\alpha}{m_0} p_{j\gamma}^\alpha + \sum_{\alpha,\beta} D_{jj'}^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \quad (21)$$

dengan  $D_{jj'}^{\alpha\beta}$  didefinisikan sebagai

$$D_{jj'}^{\alpha\beta} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left[ \delta_{jj'} \delta_{\alpha\beta} + \sum_{\gamma} \frac{p_{j\gamma}^\alpha p_{\gamma j'}^\beta + p_{j\gamma}^\beta p_{\gamma j'}^\alpha}{m_0 (E_0 - E_\gamma)} \right] \quad (21)$$

Penyederhanakan persamaan (21) dapat dilakukan dengan membatasi keadaan yang terkait dengan keadaan sekitar tepi pita valensi dan konduksi yang menjadi perhatian yaitu dua pita valensi teratas misalnya pita HH dan LH yang mana masing-masing merosot (tergenerasi) dua apabila dikaitkan dengan spin. Oleh karena itu pita-pita valensi ini dimasukkan dalam kelompok A sedangkan pita-pita yang lainnya misalnya pita konduksi dimasukkan dalam kelompok B. Untuk menyederhanakan persamaan (21) didefinisikan:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\hbar^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2}{2m_0^2} \sum_{\gamma}^B \frac{p_{x\gamma}^x p_{\gamma x}^x}{E_0 - E_\gamma} \\ B_0 &= \frac{\hbar^2}{2m_0} + \frac{\hbar^2}{2m_0^2} \sum_{\gamma}^B \frac{p_{x\gamma}^y p_{\gamma x}^y}{E_0 - E_\gamma} \\ C_0 &= \frac{\hbar^2}{2m_0} \sum_{\gamma}^B \frac{p_{x\gamma}^x p_{\gamma x}^x + p_{x\gamma}^y p_{\gamma x}^y}{E_0 - E_\gamma} \end{aligned} \quad (22)$$

Juga didefinisikan parameter Luttinger  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  dalam bentuk (23):

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{2m_0}{3\hbar^2} (A_0 + 2B_0) \\ \gamma_2 &= -\frac{2m_0}{3\hbar^2} (A_0 - B_0) \\ \gamma_3 &= -\frac{2m_0}{3\hbar^2} C_0 \end{aligned} \quad (23)$$

yang merupakan pendefinisian parameter empiris yang membantu dalam penyerdehanaan perhitungan matrik elemen, dimana parameter Luttinger ini dapat dihubungkan dengan pengukuran massa efektif secara eksperimental dari sebuah *bulk* kristal oleh kaitan:

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{m_{hh}^{[001]}} &= \gamma_1 - 2\gamma_2 \\ \frac{m_0}{m_{lh}^{[001]}} &= \gamma_1 + 2\gamma_2 \\ \frac{m_0}{m_{hh}^{[111]}} &= \gamma_1 - 2\gamma_3 \\ \frac{m_0}{m_{lh}^{[111]}} &= \gamma_1 + 2\gamma_3 \end{aligned} \quad (24)$$

Sehingga dengan menggabungkan (22), (23) dan (24), serta dalam basis yang didefinisikan dalam persamaan (13) dan (14), akhirnya diperoleh Hamiltonian Luttinger-Kohn dalam orde matrik 6x6 yang mempunyai bentuk eksplisit sbb:

$$H_{LK}^{6 \times 6} = \begin{bmatrix} -P-Q & S & -R & 0 & S/\sqrt{2} & -\sqrt{2}R \\ S^* & -P+Q & 0 & -R & \sqrt{2}Q & -\sqrt{3/2}S \\ -R^* & 0 & -P+Q & -S & -\sqrt{3/2}S^* & -\sqrt{2}Q \\ 0 & -R^* & -S^* & -P-Q & \sqrt{2}R^* & S^*/\sqrt{2} \\ S^*/\sqrt{2} & \sqrt{2}Q^* & -\sqrt{3/2}S & \sqrt{2}R & -P-\Delta & 0 \\ -\sqrt{2}R^* & -\sqrt{3/2}S^* & -\sqrt{2}Q^* & S/\sqrt{2} & 0 & -P-\Delta \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{HH} \\ \text{LH} \\ \text{LH} \\ \text{HH} \\ \text{SO} \\ \text{SO} \end{matrix} \quad (25)$$

dengan elemen matrik  $H_{LK}^{6 \times 6}$  adalah:

$$\begin{aligned} p_{\pm} &= p_x \pm ip_y, \quad p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2 \\ P &= \frac{\gamma_1}{2m_0} p^2, \quad Q = \frac{\gamma}{2m_0} (p^2 - 3p_z) \\ S &= \frac{-i\sqrt{3}\gamma}{m_0} p_z p_-, \quad R = \frac{\sqrt{3}\gamma}{m_0} p_-^2 \\ \Delta &= \frac{\hbar^2 \delta}{2m_0}, \end{aligned} \quad (26)$$

### III. Aplikasi Model Multipita pada Perhitungan Struktur Elektronik Quantum Dot CdTe

Dalam QD CdTe, oleh karena energi gap cukup besar maka peninjauan struktur elektronik dilakukan dengan memisahkan peninjauan untuk keadaan elektron di pita valensi dan keadaan hole di pita valensi. Pada pita konduksi dinamika elektron diwakili oleh Hamiltonian:

$$H_e = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 + U_e(r_e), \quad (27)$$

sementara itu dinamika hole di pita valensi diwakili oleh Hamiltonian pada Pers.(25). Parameter yang digunakan dalam perhitungan dapat dilihat pada tabel 1:

Parameters for CdTe	Values
$\gamma_1^L$	5,37
$\gamma_2^L$	1,67
$\gamma_3^L$	1,98
$E_p$	17,9 eV
$\delta$	0,953 eV
$m_e$	$0,091m_0$
$E_g$	1,6069 eV

Dalam sistem QD bola dimana setiap keadaan elektron maupun hole dikarakterisasi oleh paritasnya yang memunculkan keadaan genap dan ganjil, total momentum sudutnya  $F = J + L$  dimana  $L$  adalah fungsi momentum sudut total envelope yang terkait dengan potensial pengungkung sementara  $J$  adalah momentum sudut total yang terkait dengan potensial kristal (potensial inti). Potensial pengungkung pada sistem QD bola ini dimodelkan dengan menggunakan potensial sumur infinit dengan model matematis sbb:

$$\begin{cases} V(r) = 0 & r \leq R \\ V(r) = \infty & r > R \end{cases} \quad (28)$$

Dengan menggunakan sistem koordinat bola, maka element matriks dalam Hamiltonian (28) dapat dilakukan transformasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \varphi \cos \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\end{aligned}\quad (29)$$

Dengan menerapkan tehnik standar Clebs-Gordan, maka basis wakilan dalam sistem QD dapat dituliskan kombinasi linier dari fungsi-fungsi Bloch yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Psi_{m_f}^{c,v}(r, \theta, \varphi) = \sum_n \sum_{l > |m_l|} C(l; m_l m_j | f m_f) \psi_{n,l,m_l} u_{j,m_j} \quad (30)$$

Dengan  $C(l; m_l m_j | f m_f)$  adalah koefisien Clebs-Gordan yang dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}C(l; m_l m_j | f m_f) &= (-1)^{l-j+m_j} (2f+1)^{1/2} [(l-m_l)!(j-m_j)!(f-m_f)!(l+m_l)!(j+m_j)!(f+m_f)!]^{1/2} \\ &\quad \times \delta_{m_l+m_j, m_f} (-1)^{l-j+m_j} \left[ \frac{(l+j-f)!(l-j+f)!(-l+j+f)!}{(l+j+f+1)!} \right]^{1/2} \\ &\quad \times \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(l+j+f-k)!(l-m_l-k)!(j+m_j-k)!(f-j+m_l+k)!(f-l-m_j+k)!}\end{aligned}\quad (31)$$

dimana indeks  $k$  dalam jumlahan di atas memiliki jangkauan

$$\text{maks}(0, j-f-m_l, l-f+m_j) \leq k \leq \min(l+j-f, l-m_l, j+m_j). \quad (32)$$

Sementara itu  $\psi_{n,L,m_L}(r, \theta, \phi)$  adalah fungsi envelope sebagai sumbangan dari bentuk geometri dot yang secara eksplisit dapat ditentukan dari pers. Schrodinger termodifikasi sebagai berikut

$$\nabla^2 \mathcal{R}(r) + k^2 \mathcal{R}(r) = 0 \quad (33)$$

Syarat batas menyebabkan  $\psi_{n,L,m_L}(r, \theta, \phi) = 0$  pada jari-jari dot  $a$ . Solusi Pers.(33) dapat dituliskan sebagai

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{2}{a^3}} \frac{1}{\mathfrak{Z}_{l+1}(\beta_n^l)} \mathfrak{Z}_l\left(\beta_n^l \frac{r}{a}\right) Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \quad (34)$$

dengan  $\mathfrak{Z}_l(x)$  is fungsi spherical Bessel, and  $\beta_n^l$  adalah nol ke- $n$  dari fungsi  $\mathfrak{Z}_l(x)$ . Dengan menerapkan teknik standar koefisien Clebs-Gordan coefficient berbasis persamaan (34), bentuk analitik dari swafungsi elektron dan hole dapat dituliskan sebagai:

i) for electron state in the bottom of conduction band:

$$\psi_{f,m_f}^{l,e} = \sum_n \sum_{L < |m_L|} \sqrt{\frac{2}{a^3}} \frac{1}{\mathfrak{Z}_{l+1}(\beta_n^l)} \mathfrak{Z}_l\left(\beta_n^l \frac{r}{a}\right) \left( \begin{array}{c} \sqrt{\frac{f+m_f}{2f}} Y_{f-\frac{1}{2}, m_f-\frac{1}{2}} |e^+\rangle \\ \sqrt{\frac{f-m_f}{2f}} Y_{f-\frac{1}{2}, m_f+\frac{1}{2}} |e^-\rangle \end{array} \right) \quad (35)$$

and

$$\psi_{f,m_f}^{I,e} = \sum_n \sum_{L < |m_L|} \sqrt{\frac{2}{a^3}} \frac{1}{\mathfrak{S}_{l+1}(\beta_n^l)} \mathfrak{S}_l \left( \beta_n^l \frac{r}{a} \right) \left( \begin{array}{c} \sqrt{\frac{f-m_f+1}{2f+2}} Y_{f+\frac{1}{2},m_f-\frac{1}{2}} |e^+ \rangle \\ \sqrt{\frac{f+m_f+1}{2f+2}} Y_{f+\frac{1}{2},m_f+\frac{1}{2}} |e^- \rangle \end{array} \right) \quad (36)$$

ii) for hole state in top of valence band:

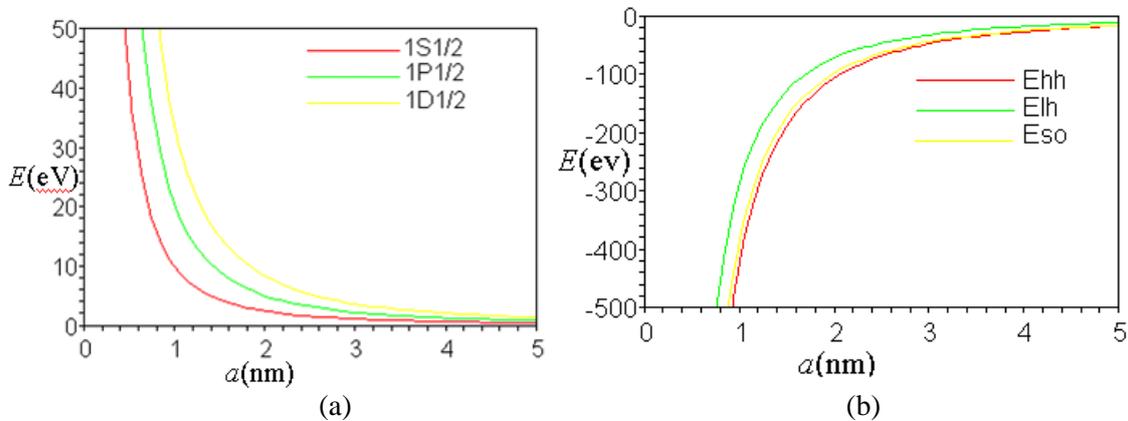
$$\psi_{f,m_f}^{I(h)} = \sum_n \sum_{l < |m_l|} \sqrt{\frac{2}{a^3}} \frac{1}{\mathfrak{S}_{l+1}(\beta_n^l)} \mathfrak{S}_l \left( \beta_n^l \frac{r}{a} \right) \left( \begin{array}{c} \left( \frac{\sqrt{3(f+m_f)(f-m_f+1)(f-m_f+2)} Y_{f+\frac{1}{2},m_f-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f+3)}} - \frac{\sqrt{(f+m_f)(f+m_f-1)(f+m_f-2)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(2f-1)(2f-2)}} \right) |hh^+ \rangle \\ \left( \frac{i(j+3m_f)\sqrt{(f-m_f+1)} Y_{f+\frac{1}{2},m_f-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f+3)}} + \frac{i\sqrt{3(f-m_f)(f+m_f-1)(f+m_f)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2f(2f-1)(2f-2)}} \right) |lh^+ \rangle \\ \left( \frac{(f-3m_f)\sqrt{(f+m_f+1)} Y_{f+\frac{1}{2},m_f+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f+3)}} + \frac{\sqrt{3(f+m_f)(f-m_f)(f-m_f-1)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2f(2f-1)(2f-2)}} \right) |lh^- \rangle \\ \left( \frac{i\sqrt{3(f-m_f)(f+m_f+1)(f+m_f+2)} Y_{f+\frac{1}{2},m_f+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f+3)}} + \frac{-i\sqrt{(f-m_f)(f-m_f-1)(f-m_f-2)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(2f-1)(2f-2)}} \right) |hh^- \rangle \\ \left( \sqrt{\frac{f-m_f+1}{2(f+1)}} Y_{f+\frac{1}{2},m_f-\frac{1}{2}} \right) |so^+ \rangle \\ \left( -i\sqrt{\frac{f+m_f+1}{2(f+1)}} Y_{f+\frac{1}{2},m_f+\frac{1}{2}} \right) |so^- \rangle \end{array} \right) \quad (37)$$

and

$$\psi_{f,m_f}^{II(h)} = \sum_n \sum_{l < |m_l|} \sqrt{\frac{2}{a^3}} \frac{1}{\mathfrak{S}_{l+1}(\beta_n^l)} \mathfrak{S}_l \left( \beta_n^l \frac{r}{a} \right) \left( \begin{array}{c} \left( \frac{\sqrt{3(f+m_f)(f-m_f+1)(f+m_f-1)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f-1)}} - \frac{\sqrt{(f-m_f+1)(f-m_f+2)(f-m_f+3)} Y_{f+\frac{3}{2},m_f-\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(f+1)(2f+3)(2f+4)}} \right) |hh^+ \rangle \\ \left( \frac{-i(j-3m_f+1)\sqrt{(f+m_f)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f-1)}} - \frac{i\sqrt{3(f+m_f+1)(f-m_f+2)(f-m_f+1)} Y_{f+\frac{3}{2},m_f-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(f+1)(2f+3)(2f+4)}} \right) |lh^+ \rangle \\ \left( \frac{(f+3m_f+1)\sqrt{(f-m_f)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f-1)}} + \frac{\sqrt{3(f-m_f+1)(f+m_f+1)(f+m_f+2)} Y_{f+\frac{3}{2},m_f+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(f+1)(2f+3)(2f+4)}} \right) |lh^- \rangle \\ \left( \frac{-i\sqrt{3(f+m_f+1)(f-m_f)(f-m_f-1)} Y_{f-\frac{3}{2},m_f+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2f(2f+2)(2f-1)}} + \frac{i\sqrt{(f+m_f+1)(f+m_f+2)(f+m_f+3)} Y_{f+\frac{3}{2},m_f+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(f+1)(2f+3)(2f+4)}} \right) |hh^- \rangle \\ \left( \sqrt{\frac{f+m_f}{2f}} Y_{f-\frac{3}{2},m_f-\frac{1}{2}} \right) |so^+ \rangle \\ \left( i\sqrt{\frac{f-m_f}{2f}} Y_{f-\frac{3}{2},m_f+\frac{1}{2}} \right) |so^- \rangle \end{array} \right) \quad (38)$$

Pada Pers.(35-38), keadaan-keadaan  $\Psi_{f,m_f}^{I,II,e,h}$  adalah keadaan genap dengan indeks (I) dan keadaan ganjil dengan indeks (II). Terkait dengan model yang kami buat, keadaan-keadaan  $\Psi_{f,m_f}^{I,II,e,h}$  harus memenuhi syarat batas  $\Psi_{f,m_f}^{I,II,e,h}(a) = 0$ , sehingga angka gelombang yang terjadi di setiap komponen  $\Psi_{f,m_f}^{I,II,e,h}$  adalah  $k = \beta_n^L / a$ .

Untuk menunjukkan ketergantungan energi dari elektron dan hole pada ukuran QD CdTe, dapat dilihat pada grafik 1a dan b yang dihitung berdasarkan model multi-pita. Nampak dari grafik tersebut bahwa energi elektron maupun hole sangat bergantung pada ukuran dot. Semakin kecil ukuran dot, semakin besar energi yang dimiliki oleh elektron maupun hole tersebut.



Figur 1 Ketergantungan Energi terhadap ukuran: a) electron, b) hole

Nampak pula bahwa energi elektron-hole meningkat dengan orde bilangan  $l$  dan  $n$ , ini dengan mudah dijelaskan karena peningkatan  $l$  dan  $m$  adalah setara dengan peningkatan kerapatan energi (kerapatan fungsi gelombang) sementara itu bilangan  $n$  berkaitan dengan jarak yang berbanding terbalik dengan energi interaksi. Selain itu diperoleh pula bahwa energi sistem menurun dengan peningkatan ukuran sistem. ini dapat dijelaskan karena semakin besar ukuran maka semakin besar bilangan kuantum  $n$  sistem yang menentukan jarak interaksi.

#### IV. Pembahasan dan Simpulan

Seperti yang telah dijabarkan sebelumnya bahwa penggunaan model multi-pita berbasis pendekatan massa efektif  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  dapat digunakan sebagai salah satu pendekatan yang handal dalam perhitungan struktur elektronik material. Dalam sistem material kristal dengan sifat keperiodikannya yang sangat dominan maka pendekatan multi-pita berbasis pendekatan massa efektif  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  semakin representatif terutama untuk material semikonduktor. Dengan menganggap bahwa sifat yang paling dominant dimiliki oleh material baik itu elektronik, optik maupun magnetik adalah disekitar tepi-pita maka penggunaan metode ini valid [6,7,10].

Dari hasil penjabaran untuk mendapatkan model multi-pita digunakan teori gangguan berbasis gangguan yang terdegenerasi, hal ini bisa difahami karena sifat simetri dari basis Bloch yang terjadi serta tafsiran dari fungsi Bloch yang menganggap bahwa fungsi Bloch dalam material baik itu pita konduksi maupun valensi adalah memiliki simetri sebagaimana fungsi-fungsi gelombang atomik (simetri  $s, p, dst$ ) yang masing-masing terdegenerasi [11,12]. Hasil perhitungan untuk mendapatkan Hamiltonian multi-pita juga menunjukkan adanya perbedaan yang sangat signifikan dengan pendekatan pita parabolik yang mana dapat dilihat pada pita valensi dengan munculnya memunculkan keadaan-keadaan baru yaitu yang disebut sebagai keadaan HH, LH, SO yang mewakili ketidak parabolikan dari pita valensi. Sementara untuk pita konduksi didominasi oleh parameter massa efektif pita konduksi yang ternyata sifat parabolisitasnya tetap muncul meskipun didefinisikan parameter massa efektif pita konduksi.

Dengan mengingat bahwa metode massa efektif  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  diawali dengan asumsi bahwa perlakuan eksternal yang diberikan pada sistem untuk memperoleh informasi komplementer tentang struktur elektronik diperlakukan sebagai gangguan. Oleh karenanya ketepatan metode ini akan ditentukan oleh seberapa tepat perlakuan eksternal (misalnya aplikasi medan listrik dan magnet) relatif terhadap stabilitas sistem dapat dipandang hanya sebagai gangguan. Kemudian dalam metode  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  fungsi periodik dalam persamaan Bloch diasumsikan tidak bergantung pada vektor gelombang, ini berarti semua elektron yang terlokalisasi (dalam keadaan terikat) diasumsikan mendapat pengaruh yang sama oleh pergerakan translasi elektron konduksi. Ini memberikan konsekuensi kalau penggambaran metode  $\mathbf{k}, \mathbf{p}$  sangat representatif untuk pendekatan

partikel tunggal. Hal terpenting juga dari pendekatan metode **k.p** adalah tentang asumsi tentang perioditas medan kisi kristal.

Dalam kasus sistem nanostuktur yaitu dengan menurunnya dimensi dan ukuran sistem akan menyebabkan berkurangnya sifat perioditas potensial kisi yang menyebabkan pendekatan-pendekatan yang dipakai pada sistem *bulk* perlu dilakukan modifikasi [6,7,10,11,13]. Hal ini yang menjadi perbedaan sangat signifikan antara sistem nanostruktur dan sistem *bulk* dimana pada sistem nanostruktur akan memunculkan kuantisasi baru yang tentunya akan mempengaruhi sistem fisis yang ada didalamnya yang berperilaku sangat berbeda dengan sistem *bulk*.

Simpulan yang dapat diambil dari paper ini adalah cukup validnya penggunaan model multi-pita dalam perhitungan struktur elektronik material semikonduktor dan dapat diaplikasikan dalam sistem quantum dot. Pada model ini efek ketidakparabolikan muncul dipita valensi sebagai akibat dari penggunaan teori massa efektif **k.p** berbasis teori gangguan terdegenerasi.

## Daftar Pustaka

- [1]Arfken, G. B., dan Weber, H. J., 2001, *Mathematical Methods For Physicists: Fifth Edition*, A Harcourt Science and Technology Company, USA.
- [2]Baraff, G. A dan Gershoni, D, 1991, *Eigenfunction-expansion method for solving the quantum-wire problem: Formulasi*, Phys. Rev. B . **43**, 4011.
- [3]Cowan, R.D., 1981, *The Theory of Atomic tructure and Spectra*, Edisi keempat, Oxford at The Clarendon Press, Oxford.
- [4]Chang, L. L., Esaki, L., Howard, W. E., dan Ludeke R., 1970, *Structures Grown by Molecular Beam Epitaxy* , J. Vac. Sci. Technol. **10**, 11.
- [5]Damilano, B., Grandjean, N., Semond, F., Massies, J., dan Leroux, M., 1999, *From visible to white light emission by GaN quantum dots on Si(111) substrate*, Appl. Phys. Lett. **75**, 962.
- [6]Efros, Al. L dan Rosen, M.,1998 *Quantum Size Level Structure od Narrow-gap Semiconductor nanocrystal: Effect of Band Coupling*, Phys. Rev. B **58**, 7120.
- [7]Fonoberov. V., 2002, *Electronic and Optical Properties of Semiconductor Quantum Wires and Dots*, PhD dissertation, University of Moldova, Moldova.
- [8]Gasiorowicz, S., 1974, , *Quantum Physics*, John Wiley and Sons, New York.
- [9]Griffiths, D. J., 1995, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, Inc. Upper Saddle River, New-Jersey.
- [10]Grigoryan, G. B, Kazaryan, E, Efros, Al. L, Yazeva, T. V.,1990, *Quantitation of Hole and absorption edge in spherical microcrystal of semiconductor with complex structure of valence Band*, Sov. Phys. Solid State **32**, 1031
- [11]Jena, D., 2004, **k.p** *Theory of Semiconductors*, Department of Electrical Engineering, University of Notre Dame.
- [12]Kemerink, M., 1998, *Many-body effects in the valence bands of two-dimensional heterostructures based on III/V semiconductors*, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven
- [13]Lee, J., Chou, W-C., Yang, C-S, dan Jan, G. J., 2004, *Eigen-Energies and Eigen-Functions of Symmetroidal Quantum Dots*, Chinese Journal of Physics, Vol. **42**, No. 1.
- [13]Löwdin, P., 1955, *A Note on the Quantum-Mechanical Peturbation Theory*, J. Phys. Chem. **19**, 1396
- [14]Luttinger, J. M., dan Kohn, W.,1955, *Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields*, Phys. Rev. **97**, 8690
- [14]Luttinger, J. M., 1956, *Quantum Theory of Cyclotron Resonance in Semiconductors: General Theory*, Phys. Rev. **102**, 1030
- [15]North, S. M.,2001, *Electronic Structure of GaSb/GaAs and Si/Ge*, PhD dissertation, University of Newcastle, England.
- [16]Prado, S. J., Marques, G. E., dan Trallero-Giner, C., 1999, *Electronic Structure in Narrow-Gap Quantum Dots*, Brazilian Journal of Physics, Vol. **29**, no 4