Menuju Mekanika Kuantum Relativistik Melalui Aljabar Clifford

Romy Hanang Setya Budhi

Astrophysics, Cosmology and Mathematical Physics Research Group
Department of Physics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Gadjah Mada University, Yogyakarta, Indonesia.
E-mail: rhsbudhi@yahoo.com

Intisari

Telah dilakukan upaya perluasan mekanika kuantum non-relativistik menuju mekanika kuantum relativistik melalui pendekatan aljabar Clifford. Dengan menganggap parameter waktu pada mekanika kuantum nonrelativistik merupakan swa-waktu pengamat inersial-γ_0, maka ruang spasial tempat hidup sistem kuantum tersebut setara dengan ruang relatif pengamat-γ_0. Dengan demikian, penentuan struktur tambahan untuk mendapatkan versi relativistik untuk sistem kuantum tersebut dapat diekplorasi menggunakan aljabar ruang-waktu. Pada kasus perluasan spinor pauli ke spinor Dirac untuk partikel bebas, perluasan ini dilakukan dengan cara menentukan multivektor *i*φ' setelah spinor Pauli φ telah dapat ditentukan.

1. Pendahuluan.

Aljabar ruang-waktu merupakan tipe aljabar Clifford yang pertama kali dikembangkan oleh Hestenes pada tahun 1966 untuk menyederhanakan masalah-masalah dalam relativitas khusus. Tipe aljabar Clifford yang dikembangkannya kemudian banyak dikenal sebagai aljabar geometrik. Salah satu ide pokok aljabar ruang-waktu adalah konsep pemecahan ruang-waktu relatif terhadap seorang pengamat menjadi porsi waktu pengamat dan porsi ruang relatif. Setiap pengamat akan mengamati porsi yang berbeda besarnya. Untuk pengamat inersial, porsi waktu yang terlihat merupakan swa-waktu pengamat, sehingga ini dapat dipadankan dengan parameter waktu sistem kuantum yang diamati oleh pengamat tersebut. Karena sistem kuantum tersebut terletak pada ruang relatif pengamat, dan model kuantum relativistik hidup dalam aljabar ruang-waktu, maka akan terdapat kemungkinan perluasan model kuantum nonrelativistik ke versi relativistiknya. Untuk perluasan, akan terdapat tidak-berhingga banyaknya model perluasan yang dapat diusulkan. Cara yang akan ditempuh di sini adalah perluasan jika spinor nonrelativistik dan spinor relativistik ditentukan terlebih dahulu. Tulisan ini banyak menghimpun karya-karya dalam [1], [4], [7] dan [8].

2. Aljabar Clifford Ruang Minkowski.

Teori relativitas khusus biasa dimodelkan dalam ruang vektor riil berdimensi empat yang dilengkapi dengan produk skalar Lorentzian. Katakanlah $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ adalah basis bagi ruang vektor tersebut, sifat ortonormalitas anggota basis tersebut dinyatakan dengan $\gamma_0 \bullet \gamma_0 = 1$, $\gamma_i \bullet \gamma_j = -\delta_{ij}$, $\gamma_0 \bullet \gamma_i = 0$ untuk i,j = 1,2,3. Ortogonalitas ini biasa disingkat dalam notasi

$$\gamma_\mu \bullet \gamma_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{1}$$

dengan μ,ν=0,1,2,3. Ruang vektor semacam ini kemudian disebut sebagai ruang Minkowski M^4. Antar sembarang dua basis vektor $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ dan $\{\gamma'_0, \gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3\}$ juga perlu memenuhi transformasi $\gamma_\mu = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma_\nu$ dengan sifat-sifat transformasi $\Lambda^\nu{}_\mu$ yakni:

1. $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$
2. $\Lambda^0{}_0 \geq 1$

3. Det $(\Lambda) = +1$

Himpunan transformasi $\{\Lambda\}$ yang memenuhi sifat-sifat di atas disebut sebagai grup Poincare.

Untuk membangun aljabar Clifford di atas M^4 akan diikuti prosedur dalam [1]. Sebagai ruang vektor, pada M^4 dapat disusun produk luar (produk eksterior)[1] $\wedge$ dengan sifat-sifat

1. Asosiatif: $u \wedge (v \wedge w) = (u \wedge v) \wedge w$
2. Antisimetris: $u \wedge v = - v \wedge u$
3. Distributif terhadap penjumlahan vektor: $u \wedge (v + w) = u \wedge v + u \wedge w$

untuk semua $u,v,w \in M^4$. Hasil produk luar antara r-buah vektor selanjutnya disebut sebagai *blade-r*. Dengan menggunakan produk skalar dan produk luar di atas, dikenalkan perkalian yang selanjutnya disebut produk Clifford sebagai berikut

$$u\, v = u \bullet v + u \wedge v \tag{2}$$

Perkalian ini bersifat asosiatif dan distributif terhadap penjumlahan vektor. Menggunakan produk Clifford di atas, dapat dilakukan klasifikasi vektor pada ruang Minkowski: Vektor v dikatakan **bakwaktu** jika $v^2 > 0$, **bakruang** jika $v^2 < 0$ dan **bakcahaya** jika $v^2 = 0$. Hasil produk Clifford sebanyak r-buah vektor disebut **r-vektor**, atau secara umum disebut **multivektor**. Himpunan semua multivektor yang diperoleh dari ruang Minkowski membentuk suatu aljabar yang kemudian disebut **aljabar ruang-waktu** $Cl(M^4)$.

Basis ortonormal $\{\gamma_\mu \mid \mu = 0, 1, 2, 3\}$ memenuhi produk Clifford

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\, \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu] \tag{3}$$

Dari γ_μ, dapat dibentuk pseudoskalar $I= \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ yang mempunyai besar satu satuan dan antikomutatif dengan vektor

$$I^2 = -1, \qquad \gamma_\mu I = -I\, \gamma_\mu \tag{4}$$

Basis multivektor pada $Cl(M^4)$ dapat diperoleh dari γ_μ dengan cara membuat produk Clifford dari basis tersebut

$$\{ 1, \quad \gamma_\mu , \quad \gamma_\mu \wedge \gamma_\mu , \quad \gamma_\mu I, \quad I\} \tag{5}$$

yang kesemuanya sebanyak $2^4 = 16$ buah. Dengan basis di atas, setiap multivektor Ψ pada aljabar ruang-waktu dapat dinyatakan dalam jumlahan linier

$$\Psi = \sum_{k=0}^{4} \Psi_{(k)} = \alpha + a + F + b\, I + \beta\, I \tag{6}$$

Dengan α dan β skalar, a dan b vektor dan F suatu bivektor. Ungkapan di atas merupakan dekomposisi multivektor menjadi bagian-bagian k-vektornya. Jadi $\Psi_{(0)} = \alpha$, $\Psi_{(1)} = a$, $\Psi_{(2)}= F$, $\Psi_{(3)} = b\, I$ dan $\Psi_{(4)}= \beta I$. Pada sembarang multivektor $\Phi = a_1a_2...a_n$ dapat dibuat operasi pembalikan produk Clifford yang disebut *reverse*, yaitu $\Phi^{\sim} = a_n...a_2a_1$. Dapat dibuktikan multivektor Ψ di atas memiliki *reverse*

$$\Psi^{\sim} = \alpha +$$

[1] Sesuai pendekatan yang dikenalkan Flanders dalam [3].

$$a - F - b\,I + \beta I.$$

Multivektor Ψ dapat dipecah menjadi bagian genap Ψ_+ dan bagian ganjil Ψ_- yang masing-masing mengambil *blade* bagian genap dan bagian ganjil pada Ψ,

$$\Psi_+ := \alpha + F + \beta I, \qquad \Psi_- := a + bI$$

Himpunan seluruh multivektor genap $\{\Psi_+\}$ dalam $Cl(M^4)$ membentuk suatu subaljabar yang memegang peranan penting. Subaljabar tersebut dinamakan **subaljabar genap**, sedangkan $\{\Psi_-\}$ sendiri kemudian disebut **subaljabar ganjil.**

3. **Pemecahan Ruang-Waktu.**

Aljabar ruang-waktu memungkinkan analisa fisika relativistik dalam bentuk invarian tanpa tergantung pada sistem koordinat tertentu. Caranya dengan menterjemahkan kuantitas-kuantitas fisis kejadian kedalam swa-kuantitas bagi kejadian tersebut sendiri. Sebagai contoh, keadaan gerak suatu partikel dapat dicirikan melalui swa-waktu, swa-kecepatan dan lain sebagainya. Metode ini disebut dengan **formulasi swa-fisik** (*proper physics formulation*). Kondisi gerak partikel (atau kejadian secara umum) terlihat relatif berbeda pada setiap kerangka inersial, baik bagian waktunya ataupun bagian ruangnya. Perbedaan pengamatan sebuah kejadian menunjukkan bahwa bagian waktu dan ruang kejadian tersebut terlihat "terpecah" dengan porsi yang berbeda menurut masing-masing pengamat. Oleh karena itu, pengamatan sebuah kejadian relatif terhadap seorang pengamat disebut **pemecahan ruang-waktu**. Setiap pengamat **S** berpadanan dengan suatu vektor basis $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, dengan γ_0 menyinggung kurva riwayat pengamat yang berarti pula menyatakan kecepatan pengamat. Oleh pengamat **S**, sebuah kejadian x terlihat mempunyai komponen sejajar γ_0

$$x_{\parallel} = (x \bullet \gamma_0)\,\gamma_0 = t\,\gamma_0$$

sehingga komponen ruangnya adalah

$$x_{\perp} = x - x_{\parallel} = x - (x \bullet \gamma_0)\,\gamma_0 = (x \wedge \gamma_0)\,\gamma_0$$

Bivektor $x\wedge\gamma_0$ menunjukkan proyeksi x tegak lurus terhadap γ_0 sehingga berkelakuan seperti vektor posisi (ruang) yang menghubungkan pengamat γ_0 kejadian x. Vektor seperti ini disebut **vektor relatif** $\mathbf{x} = x\wedge\gamma_0$. Vektor relatif tersebut terletak pada ruang spasial relatif yang dibentang oleh basis $\{\sigma_i \mid \gamma_i\,\gamma_0,\ i = 1, 2, 3\}$. Didapatkan,

$$x\,\gamma_0 = t + \mathbf{x}. \qquad (7)$$

Dengan demikian, menurut pengamat-γ_0, setiap kejadian x teramati mempunyai waktu t dan vektor posisi $\mathbf{x}$ yang disebut **pemecahan-γ_0**. *Reverse* dari persamaan di atas adalah

$$\gamma_0\,x = t - \mathbf{x}$$

sehingga

$$x^2 = (x\gamma_0)(\gamma_0 x) = t^2 - \mathbf{x}^2 \qquad (8)$$

Pengamat inersial yang lain γ_0' akan mengamati pemecahan ruang-waktu yang berbeda, $x\,\gamma_0' = t' + \mathbf{x'}$ tetapi $x^2 = (x\,\gamma_0')(\gamma_0' x) = t'^2 - \mathbf{x}'^2$. Dengan demikian, meskipun belum mengenalkan transformasi Lorentz, telah dapat ditunjukkan bahwa x^2 adalah kuantitas yang invarian Lorentz.

Pemecahan-γ_0 pada swa-kecepatan partikel $v = dx/d\tau$ dapat dituliskan sebagai

$$v\,\gamma_0 = (dx/d\tau)\,\gamma_0 = \Gamma\,(1 + \mathbf{v}) \qquad (9)$$

dengan $\Gamma = dt/d\tau$ dan $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ menyatakan **kecepatan relatif** partikel terhadap pengamat. Tetapi karena $v\,\gamma_0 = v \bullet \gamma_0 + v \wedge \gamma_0$, maka dapat disimpulkan bahwa $\Gamma = v \bullet \gamma_0$ dan $\Gamma\mathbf{v} = v \wedge \gamma_0$ atau $\mathbf{v} = (v \wedge \gamma_0) / \Gamma$. Untuk mengetahui interpretasi Γ, dapat ditentukan dengan mencari panjang kecepatan relatif **v.**

$$\mathbf{v}^2 = (v \wedge \gamma_0)^2 / \Gamma^2 = 1 - (1/\Gamma^2) \qquad (10)$$

Oleh karena itu, $\Gamma = 1 / (1- \mathbf{v}^2)$ yang biasa dikenal dengan faktor Lorentz. Oleh karena itu, swa-kecepatan v terdekomposisi menjadi

$$v = v\,\gamma_0\gamma_0 = \Gamma\ (1 + \mathbf{v})\,\gamma_0 . \qquad (11)$$

Yaitu, bagian $\Gamma\,\gamma_0$ yang searah dengan γ_0 dan $\Gamma\,\mathbf{v}\,\gamma_0$ yang berada di ruang rehat γ_0.

Misalkan p = m v adalah swa-momentum partikel (vektor energi-momentum), pemecahan ruang-waktu swa-momentum menjadi energi E dan momentum relatif **p** diberikan oleh

$$p\,\gamma_0 = E + \mathbf{p}, \qquad (12)$$

dengan $E = p \bullet \gamma_0$ dan $\mathbf{p} = p \wedge \gamma_0$. Oleh karena itu dipenuhi

$$p^2 = (E + \mathbf{p})(E - \mathbf{p}) = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \qquad (13)$$

dengan m menyatakan swa-massa partikel.

Untuk membangun konsep turunan vektor, dalam ruang Minkowski, dikenalkan operator derivatif

$$\nabla = \gamma^\mu\, \partial_\mu = \gamma^0\,\partial_t + \gamma^i\,\partial_i , \qquad (14)$$

dengan yang $\gamma^\mu = \eta^{\mu\nu}\gamma_\nu$, $\partial_t = (\partial / \partial t)$ dan $\partial_i = (\partial / \partial x^i)$ dan i = 1, 2, 3. Jika ∇ dikenakan γ_0 menjadi

$$\nabla\,\gamma_0 = \partial_t + \gamma^i\,\gamma_0\ \partial_i = \partial_t - \boldsymbol{\nabla} \qquad (15)$$

dengan $\boldsymbol{\nabla} = \sigma_i\,\partial_i$ merupakan operator derivatif di ruang spasial relatif pengamat γ_0. Derivatif di atas memenuhi

$$\nabla^2 = \partial_t^2 - \boldsymbol{\nabla}^2. \qquad (16)$$

4. Spinor Pauli dan Spinor Dirac.

Aljabar operator Pauli dibangkitkan oleh matriks-matriks Pauli $\{\hat{\sigma}_i\}$ yang bekerja pada spinor-2 kompleks $|\psi\rangle$. Matriks-matriks Pauli tersebut memenuhi ortogonalitas yang tepat serupa dengan basis ruang relatif $\{\sigma_i\}$. Basis ruang tersebut membangkitkan aljabar Clifford Cl (R^3) yang dibentang oleh basis-basis $\{ 1, \sigma_k , i\ \sigma_k , i \}$. Dalam [2], [5] dan [6], ditunjukkan adanya korespondensi 1-1 spinor $|\psi\rangle$ dengan multivektor genap ψ melalui identifikasi

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a^0 & + \ j\ a^3 \\ -a^2 & + \ j\ a^1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \psi = a^0 + a^k\, i\ \sigma_k \qquad (17)$$

dengan j menyatakan bilangan imajiner konvensional. Aksi operator-operator $\{\hat{\sigma}_i , j\}$ dapat digantikan oleh operasi

$$\hat{\sigma}_i|\psi\rangle \longleftrightarrow \sigma_k\,\psi\,\sigma_3 \qquad (18)$$

$$j\,|\psi\rangle \longleftrightarrow \psi\, i\,\sigma_3 \qquad (19)$$

sehingga persamaan Pauli

$$j\partial_t|\psi\rangle = \frac{1}{2m}\left[(-j\nabla - eA)^2 - eB\right]\,|\psi\rangle + eV|\psi\rangle$$

dapat dirubah menjadi

$$\partial_t\,\psi i\sigma_3 = \frac{1}{2m}[\,-\nabla^2\,\psi\; + 2\,e\,\mathbf{A}\bullet\nabla\psi i\sigma_3 + e^2\mathbf{A}^2\psi]\; - \frac{e}{2m}\,\mathbf{B}\psi\sigma_3\; + e\mathbf{V}\psi \qquad (20)$$

Spinor Dirac dapat dihubungkan dengan multivektor genap dalam Cl (M^4) melalui korespondensi

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a^0 & +\ j\,a^3 \\ -a^2 & +\ j\,a^1 \\ -b^3 & +\ j\,b^0 \\ -b^1 & -\ j\,b^2 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \psi = a^0 + a^k i\,\sigma_k + i[b^0 + b^k i\,\sigma_k\,] \qquad (21)$$

dan aksi matriks-γ dan j pada spinor Dirac

$$\hat{\gamma}_\mu|\psi\rangle \longleftrightarrow \gamma_\mu\,\psi\,\gamma_0 \qquad (22)$$

$$j\,|\psi\rangle \longleftrightarrow \psi i\,\sigma_3 \qquad (23)$$

sehingga persamaan Dirac dapat dituliskan ulang menjadi

$$\nabla\psi i\sigma_3 - e\,A\,\psi = m\,\psi\gamma_0 \qquad (24)$$

5. Menuju Mekanika Kuantum Relativistik.

Pada bagian ini, akan dicoba upaya perluasan mekanika kuantum nonrelativistik menjadi versi relativistik. Hal ini dimungkinkan karena spinor Pauli dan persamaan dinamikanya hidup dalam aljabar Clifford ruang relatif pengamat-γ_0 , yakni Cl (R^3), sedangkan spinor Dirac hidup dalam Cl (M^4). Karena seluruh unsur dalam Cl (R^3) dapat dinyatakan sebagai unsur dalam Cl (M^4), maka jelas Cl $(R^3) \subseteq$ Cl (M^4), sehingga perluasan ini dimungkinkan ada. Untuk tahap awal penelitian ini, akan diujicobakan persamaan Pauli tanpa **A, B** dan **V** (persamaan Schodinger partikel bebas) serta perluasanya menjadi persamaan Dirac tanpa medan A.

Katakanlah ψ menyatakan spinor Dirac dan φ menyatakan spinor pauli, maka kondisi yang dinyatakan dalam persamaan (21) berdasarkan persamaan (17) dapat dinyatakan sebagai

$$\psi = \varphi + i\varphi' \qquad (25)$$

dengan φ' menyatakan spinor Pauli tambahan untuk memperluas φ menjadi ψ. Untuk kebutuhan perluasan, φ' hendak ditentukan.

Spinor φ dan ψ memenuhi persamaan Schrodinger $\partial_t\,\varphi i\sigma_3 = -\frac{1}{2m}\nabla^2\,\varphi$ dan Dirac $\nabla\psi i\sigma_3 = m\,\psi\gamma_0$ yang dapat dirubah menjadi persamaan $\partial_t\psi i\sigma_3 = -\nabla\psi i\sigma_3 + m\,\gamma_0\,\psi\gamma_0$. Tetapi karena $\psi = \varphi + i\varphi'$, maka akan dipenuhi persamaan

$$\partial_t\,\varphi i\sigma_3 = [\,-\nabla\varphi i\sigma_3 + m\,\gamma_0\varphi\gamma_0] - [\,\gamma_0\nabla i\,\varphi' i\,\sigma_3 + m\,i\,\gamma_0\varphi'\gamma_0] \qquad (26)$$

Sekarang, ∂_t pada persamaan Schrodinger dan persamaan terakhir ini memiliki makna yang sama sehingga jika φ merupakan spinor yang dihasilkan melalui persamaan Schrodinger, maka dapat φ' ditentukan melalui persamaan

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2 \varphi = [-\nabla\varphi i\sigma_3 + m\,\gamma_0\varphi\gamma_0] - [\gamma_0\nabla i\,\varphi' i\,\sigma_3 - m\,i\,\gamma_0\varphi'\gamma_0],$$

atau

$$\frac{1}{2m}\nabla^2 \varphi - \nabla\varphi i\sigma_3 + m\,\gamma_0\varphi\gamma_0 = \gamma_0\nabla i\,\varphi' i\,\sigma_3 - m\,i\,\gamma_0\varphi'\gamma_0. \qquad (27)$$

Dengan menggunakan beberapa identitas berikut: $\gamma_0\sigma_k = -\sigma_k\gamma_0$, $i\,\gamma_0 = -\gamma_0\, i$, $\varphi\gamma_0 = \gamma_0\varphi$, $i\sigma_k = i\sigma_k$, dan $\gamma_0\nabla i = i\,\gamma_0\nabla$, dapat diperoleh persamaan yang lebih sederhana

$$\frac{1}{2m}\nabla^2 \varphi - \nabla\varphi\, i\,\sigma_3 + m\,\varphi = i\,\gamma_0\nabla\,\varphi' i\,\sigma_3 + m\,i\,\varphi'. \qquad (28)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (28), berbekal spinor Pauli yang diselesaikan melalui Schrodinger $\partial_t \varphi\, i\sigma_3 = -\frac{1}{2m}\nabla^2 \varphi$, akan dapat spinor Pauli φ' sehingga spinor Dirac $\psi = \varphi + i\varphi'$ yang menjadi perluasannya dapat ditentukan.

6. Kesimpulan dan Saran.

Model yang diajukan ini dapat digunakan untuk menentukan spinor Dirac yang bersesuaian dengan spinor Pauli yang berkaitan dengannya. Dengan demikian, kemungkinan untuk mendapatkan perluasan model mekanika kuantum nonrelativistik ke relativistik telah ditunjukkan kemungkinan keberadaanya, tanpa melibatkan pendefinisian operator kuantum tambahan untuk mengakomodasi ide tersebut. Meski demikian, perluasan model ini dibayar mahal dengan sejumlah persamaan differensial yang mesti diselesaikan. Perluasan teori berdasarkan model ini yang melibatkan persamaan Pauli dan persamaan Dirac dalam bentuk komplit masih perlu diteliti lebih lanjut.

Referensi

[1] Doran, C. & A. Lasenby., 2005, *Geometric Algebra for Physicists*, Chambridge university press.

[2] Doran, C., 1994, Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics, *Dissertation*, Sidney Sussex College.

[3] Flanders, H., 1963, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Academic Press.

[4] Hestenes, D., Geometry of the Dirac Theory, In: *A Symposium on the Mathematics of Physical Space-Time*, Facultad de Quimica,Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Mexico City, 67-96, (1981).

[5] Hestenes, D., Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory In: *Journal of Mathematical Physics*, **16** 556–572 (1975).

[6] Hestenes, D. & R. Gurtler, Local Observables in Quantum Theory, In: *Am. J. Phys.*, **39** 1028–1038 (1971).

[7] Lounesto, P., 2001, *Clifford Algebras and Spinors*, London Mathematical Society Lecture Note Series. 286, Chambridge university press.

[8] da Rocha, R. & J. Vaz, Jr, 2006, On Clifford Subalgebras, Spacetime Splittings and Applications, *arXiv:math-ph/0605009v1*.