

## WAKILAN DIAGRAMATIK UNTUK TEORI USIKAN DALAM MEKANIKA KUANTUM

M Farchani Rosyid  
Dwi Satya Palupi

Jurusan Fisika , FMIPA , UGM

### Abstrak

Diperkenalkan metode diagramatik untuk menghitung koreksi derajat pertama swanilai tenaga pada teori usikan mekanika kuantum. Metode tersebut diterapkan untuk perhitungan koreksi tenaga osilator harmonis kuantum yang disebabkan oleh usikan tak gayut waktu. Telah ditunjukkan bahwa metode tersebut lebih efisien daripada metode konvensional (aljabar). Telah ditelaah pula kemungkinan penerapan metode tersebut untuk koreksi dalam derajat yang lebih tinggi.

### I. PENDAHULUAN

Telaah tentang osilator dirasakan sangat penting. Hal ini dikarenakan pengertian mengenai osilator telah diterapkan secara luas dalam ilmu fisika. Pengertian tersebut telah diterapkan pada penelaahan kristal dalam fisika zat padat, dalam menurunkan bahang jenis (mekanika statistik), pada penelaahan radiasi kuantum dan pada pembahasan teori kuantisasi kedua serta dalam bidang-bidang lain dari ilmu fisika.

Bentuk osilator yang paling sederhana adalah osilator harmonis, yaitu osilator yang dihindarkan dari pengaruh luar. Jika terdapat pengaruh dari luar, osilator yang bersangkutan tidak lagi harmonis melainkan anharmonis. Tentu saja, pengaruh (untuk selanjutnya disebut gangguan) tersebut menjadikan permasalahan lebih rumit. Bahkan, secara analitik, barangkali tidak terselesaikan. Untuk itu diperlukan metode pendekatan. Dalam hal ini metode pendekatan yang hendak digunakan adalah teori gangguan. Sesuai permasalahan yang ditinjau, teori gangguan yang digunakan adalah teori gangguan yang tak gayut waktu. Dalam menerapkan teori gangguan pada osilator ditemui banyak kerumitan. Kerumitan-kerumitan tersebut muncul terutama dalam perhitungan koreksi terhadap gangguan yang gayut terhadap  $\hat{p}^k$  dan atau  $\hat{q}^k$ , dengan  $\hat{q}$  dan  $\hat{p}$  berturut-turut merupakan operator koordinat dan momentum linear. Oleh karena itulah makalah ini menyajikan metode visual guna menyederhanakan perhitungan. Metode visual ini menggunakan diagram-diagram yang memiliki peranan seperti diagram Feynman.

### II. OSILATOR HARMONIS DAN GANGGUAN TAK GAYUT WAKTU

Osilator harmonis mempunyai Hamiltonian

$$\hat{H}_o = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega\hat{q} \quad (1)$$

dengan  $\hat{q}$  dan  $\hat{p}$  berturut-turut adalah operator koordinat dan operator momentum linear, serta  $\mu$  adalah massa tereduksi. Operator-operator  $\hat{q}$  dan  $\hat{p}$  memenuhi kaitan komutasi berikut  $[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar$ . Bila didefinisikan operator-operator

$$\hat{a} = \left(\frac{1}{2}\mu\hbar\omega\right)^{\frac{1}{2}} (\mu\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad \text{dan} \quad \hat{a}^\dagger = \left(\frac{1}{2}\mu\hbar\omega\right)^{\frac{1}{2}} (\mu\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (2)$$

maka  $\hat{q}$  dan  $\hat{p}$  dapat dinyatakan dalam  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  menurut

$$\hat{q} = \left( \frac{1}{2} \mu \hbar \omega \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad \text{dan} \quad \hat{p} = i \left( \frac{1}{2} \mu \hbar \omega \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (3).$$

Operator-operator  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  memenuhi kaitan komutasi  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{\mathbf{I}}$  sehingga  $\hat{H}_0$  dapat pula ditulis sebagai

$$\hat{H}_0 = \hbar \omega \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}} \right). \quad (4)$$

Persamaan swanilai  $\hat{H}_0 |\psi_n\rangle = E_0^n |\psi_n\rangle$  memberi penyelesaian

$$E_0^n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (5)$$

Swavektor-swavektor  $|\psi_n\rangle$  lebih baik bila ditulis sebagai  $|n\rangle$ , yang memenuhi kaitan

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{dan} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (6)$$

Dari pers.(6) dapat diperoleh ungkapan

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \quad (7)$$

dengan  $|n\rangle$  memenuhi syarat lengkap berikut  $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \hat{\mathbf{I}}$

### III. TEORI GANGGUAN TAK GAYUT WAKTU

Teori gangguan digunakan untuk menghitung koreksi-koreksi dengan berbekal pada penyelesaian eksak (analitik) dari persamaan swanilai tak terganggu ( yang relatif lebih muda untuk diselesaikan secara analitik), yaitu

$$\hat{H}_0 |\psi_m^i\rangle = E_m^0 |\psi_m^i\rangle \quad (8)$$

dengan  $|\psi_m^i\rangle$  merupakan vektor yang berkorespondensi dengan eigenilai observabel Hamiltonian  $E_m^0$  dan  $1 \leq i \leq g_m$ .

Dimisalkan Hamiltonian terganggu ditulis sebagai

$$\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \hat{W} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{w} \quad (9)$$

dengan  $\hat{W}$  atau  $\lambda \hat{w}$  merupakan bagian penggangu gangguannya. Bilangan  $\lambda$  disebut parameter gangguan yang menentukan besar kecilnya gangguan ( $\lambda \ll 1$ ). Jika  $E_n(\lambda)$  dan  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  berturut-turut adalah swanilai dan swavektor Hamiltonian terganggu, maka persamaan swanilainya diberikan oleh

$$\hat{H}(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle = E_n |\psi_n(\lambda)\rangle \quad (10)$$

Teori gangguan menyatakan bahwa vektor  $|\psi_n(\lambda)\rangle$  dan swanilai  $E_n(\lambda)$  diberikan oleh [Cohen dkk,1977,Merzbacher,1970]

$$E_n(\lambda) = E_n^0 + \langle \psi_n | \hat{W} | \psi_n \rangle + \sum_{i,m,m \neq n} \frac{\langle \psi_m^i | \hat{W} | \psi_n \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad \text{dan}$$

$$|\psi_n(\lambda)\rangle = |\psi_n\rangle + \sum_{i,m,m \neq n} \frac{\langle \psi_m^i | \hat{W} | \psi_n \rangle}{E_n^0 - E_m^0} |\psi_m^i\rangle$$

Secara umum, gangguan tak gayut waktu pada osilator merupakan fungsi  $\hat{q}$  dan  $\hat{p}$ , yaitu  $\hat{W} = f(\hat{p}, \hat{q})$ . Gangguan paling sederhana berbentuk  $\hat{W}_1 = \rho' \hat{q}$  dan  $\hat{W}_2 = \sigma \hat{p}$ . Gangguan  $\hat{W}_1$  dijumpai pada efek Stark [Merzbacher, 1970]. Dengan bantuan pers.(3) diperoleh gangguan tersebut dapat dinyatakan dengan  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{W}_1 = -Q\zeta \left( \frac{1}{2} \mu \hbar \omega \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (11)$$

.Gangguan  $\hat{W}_2$  dapat dinyatakan dengan  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  oleh

$$\hat{W}_2(\sigma) = i\sigma \left( \frac{\mu \hbar \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \quad (12)$$

Selanjutnya, gangguan yang lebih kompleks dibanding  $\hat{W}_1$  dan  $\hat{W}_2$  ialah

$$\hat{W}_3 = \frac{1}{2} \rho \mu \omega^2 \hat{q}^2 = \left( \frac{\rho \hbar \omega}{4} \right) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \quad (13)$$

Gangguan pada pers.(13) lazim disebut sebagai gangguan potensial kuadrat. Bilangan  $\rho$  adalah parameter gangguan real yang sangat kecil.

#### IV. PENAMPILAN DIAGRAM UNSUR UNSUR MATRIKS

Guna mendapatkan koreksi terhadap swanilai dan swavektor, diperlukan untuk menghitung harga harap gangguan (untuk koreksi orde pertama swanilai) dan unsur matriks gangguan (untuk koreksi orde dua swanilai dan orde pertama swavektor). Tegasnya, bilangan- harus dihitung bilangan

$$\langle n | \hat{W} | n \rangle = \langle \hat{W} \rangle_n \quad \text{dan} \quad \langle m | \hat{W} | n \rangle = W_{mn} \quad (14)$$

Kesulitan yang biasa muncul dalam perhitungan harga harap dan unsur matriks adalah kesulitan integrasi. Untuk itu, sedapat mungkin, cara-cara yang menghadirkan integrasi dihindari. Kiat yang digunakan ialah dengan menyatakan  $\hat{q}$  dan  $\hat{p}$  dalam operator  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$ . Untuk gangguan yang memuat  $\hat{q}^t$  dan atau  $\hat{p}^t$  dengan  $t$  bernilai 1 atau 2, tidaklah ditemui kerumitan yang berarti. Namun untuk nilai  $t$  yang melebihi 2, agak timbul kerumitan berhubung dengan meningkatnya jumlah (macam) kombinasi antara  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$ . Oleh sebab  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  tidak saling komut, maka aturan binomium Newton dan segitiga pascal (untuk menyederhanakan bentuk  $(x+y)^2$  tidak berlaku. Kerumitan ini bertambah dengan adanya penjumlahan yang bertumpu pada  $m$ . Semua itu menuntut adanya metode yang mudah untuk menghitung koreksi-koreksi, atau setidaknya menyederhanakan perhitungan.

Berikut ini adalah unsur matriks  $\hat{a}^\dagger$  dalam basis  $\{|n\rangle\}$

$$\langle m | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \quad (15)$$

Terlihat bahwa unsur yang tidak lenyap hanyalah

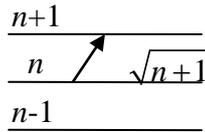
$$\langle n+1 | \hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n} \quad (16)$$

dengan cara yang sama diperoleh

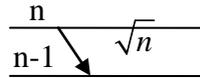
$$\langle n-1 | \hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} \quad (17)$$

yaitu unsur matriks dari  $\hat{a}$  yang tidak lenyap.

Setiap garis yang terlihat pada gbr.(1) menyatakan satu aras osilator harmonis, dua titik yang terletak pada garis yang sama mempunyai aras yang sama.



Gambar(1). Diagram transisi dari aras n ke n+1



Gambar(2). Diagram transisi dari aras n+1 ke n

Unsur matriks pers.(16), yang melukiskan transisi dari aras  $n$  ke aras  $n+1$ , diapadankan dengan anak panah yang berasal dari aras  $n$  menuju aras  $n+1$  dengan arah kekanan atas. Anak panah tersebut diberi label  $\sqrt{n+1}$  sesuai dengan besar unsur matriks yang dipadankan dengannya. Tiap unsur matriks (16) hanya

berpadanan dengan satu anak panah yang berasal dari aras awal ( $n$  misalnya) dan berakhir pada aras satu tingkat di atasnya ( $n+1$  misalnya). Ternyata, besar unsur matriks transisi (16) sama dengan akar nomor aras yang dituju, selalu satu tingkat diatas aras awal.

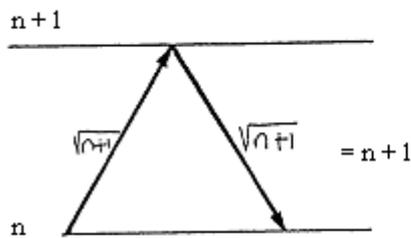
Unsur matriks (17) melukiskan transisi dari aras  $n$  ke aras  $n-1$ . Unsur transisi tersebut dipadankan dengan anak panah yang berasal dari aras  $n$  menuju ke aras  $n-1$  seperti terlihat pada gbr.(2). Anak panah tersebut diberi label  $\sqrt{n}$ , sesuai dengan nilai unsur matriks yang dipadankan dengannya. Nilai unsur matriks tersebut sama dengan akar nomor aras yang ditinggalkan anak panah. Tiap unsur matriks (17) hanya berpadanan dengan satu anak panah yang berasal dari aras awal (misalnya  $n$ ) dan berujung pada aras satu tingkat dibawahnya (mis.  $n-1$ )

Perpadanan unsur matriks (16) dengan anak panah pada gbr.(1) dan unsur matriks (17) dengan anak panah pada gbr.(2) disebut penampilan unsur matriks dengan diagram, yang berwujud anak panah.

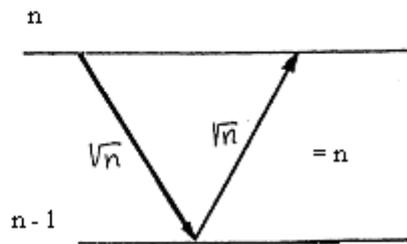
Unsur matriks kombinasi  $\hat{a}\hat{a}^\dagger$  dan  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$  yang tidak lenyap berturut-turut ialah

$$\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \langle n | \hat{a} | n+1 \rangle \langle n+1 | \hat{a}^\dagger | n \rangle = n+1 \quad \text{dan} \quad \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \langle n | \hat{a}^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{a} | n \rangle = n$$

Jadi unsur matriks  $(\hat{a}\hat{a}^\dagger)_{mn}$  dan  $(\hat{a}^\dagger\hat{a})_{mn}$  yang tidak lenyap dapat dinyatakan sebagai perkalian antara unsur matriks  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$ . Bentuk  $\langle n | \hat{a} | n+1 \rangle \langle n+1 | \hat{a}^\dagger | n \rangle$  melukiskan transisi dua kali, yaitu dari aras  $n$  ke aras  $n+1$  lalu kembali ke aras  $n$  lagi. Bentuk  $\langle n | \hat{a}^\dagger | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{a} | n \rangle$  juga melukiskan transisi dua kali, yaitu dari aras  $n$  menuju ke aras  $n-1$  kemudian kembali ke aras  $n$  lagi. Dengan demikian cukup beralasan apabila unsur matriks  $\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle$  dan  $\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle$  dipadankan dengan anak panah-panah yang bersambung (gbr 3)



(a). Padanan untuk  $\langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle$



(a). Padanan untuk  $\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle$

Gambar. (3). padanan untuk matriks kombinasi

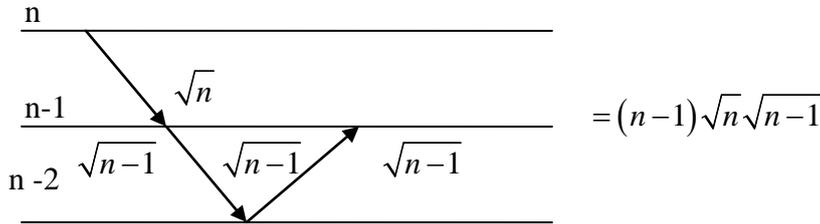
Sekarang hendak ditinjau unsur matriks  $(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger)_{mn}$  yaitu

$$\langle m | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \langle m | \hat{a} | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{a}^\dagger | n-2 \rangle \langle n-2 | \hat{a} | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{a} | n \rangle \quad (18)$$

Unsur matriks (18) tidak lenyap jika  $\langle m | = \langle n-2 |$ . Jadi, unsur matriks  $(\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger)_{mn}$  yang tidak lenyap diberikan oleh

$$\langle n-2 | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \langle n-2 | \hat{a} | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{a}^\dagger | n-2 \rangle \langle n-2 | \hat{a} | n-1 \rangle \langle n-1 | \hat{a} | n \rangle \quad (19)$$

Sehingga bentuk  $\langle n-2 | \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | n \rangle$  melukiskan transisi empat kali dari aras  $n$  ke aras  $n-1$ , lalu ke aras  $n-2$ , kemudian kembali ke aras  $n-1$  dan akhirnya ke aras  $n-2$  lagi. Transisi ini berpadanan dengan anak panah-anak panah yang disusun seperti dipelihatian pada gbr (4).



Gambar.(4). Padanan untuk  $\langle n-2 | \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} | n \rangle$

Terlihat, pada gbr.(3) dan (4) bahwa setiap anak panah dalam selang aras yang sama mempunyai label yang sama (hal ini menunjukan bahwa anak panah-anak panah yang di maksud berpadanan dengan unsur-unsur matriks yang nilainya sama), yaitu akar nomor aras yang atas dalam selang tersebut, tidak peduli arah anak panahnya (naik atau turun). Dengan membuang tanda panah tidak akan mengakibatkan sesuatupun terhadap makna diagram.

Dalam persamaan (19), vektor  $|n\rangle$  menunjukkan aras awal, yaitu aras tempat dimulainya transisi. Faktor  $\hat{a}$  yang berada paling kanan dalam kombinasi menentukan arah keberangkatan lintasa transisi yang akan ditempuh. Bentuk lintasan tersebut ditentukan leh kobinasi  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  serta oleh jumlah  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  dalam kombinasi. Secara umum, diperoleh bahwa [Fereell,1980]

1. Aras awal ditandai oleh swavektor  $|n\rangle$
2. Arah keberangkatan lintasan trasnsisi ditentukan oleh faktor paling kanan dalam kombinasi  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$
3. Bentuk lintasan transisi ditentukan oleh bentuk kombinasi  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$
4. Jumlah langkah dalam lintasan ditentukan oleh jumlah  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  dalam kombinasi.
5. Setiap faktor  $\hat{a}^\dagger$  dalam kombinsi berhubungan dengan transisi naik (garis condong ke kanan atas, bila tanda panah dihilangkan) dan setiap faktor  $\hat{a}$  dalam kombinasi berhubungan dengan transisi turun (garis condong ke kanan bawah)
6. Unsur matriks  $\langle m | (\text{kombinasi } \hat{a} \text{ dan } \hat{a}^\dagger) | n \rangle$  tidak lenyap jika  $\langle m |$  merupakan aras tempat berakhirnya transisi.
7. Bila sudah ditentukan aras awal dan aras akhir, bentuk lintasan yang mungkin berhubungan dengan bentuk dan jumlah kombinasi  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  yang mungkin unsur matriksnya tidak lenyap. Jadi, hanya linatasa yang berawal dan berakhir pada aras-aras yang telah ditentukanlah yang tidak lenyap unasur matriksnya.

## V. JARING-JARING $F_k$ DAN PERHITUNGAN KOREKSI –KOREKSI

### A. Koreksi orde pertama

Sesuai dengan pers.(17), menghitung koreksi orde pertama swanilai sama artinya dengan menghitung harga harap gangguan  $\hat{W}$  pada aras yang bersangkutan yaitu  $\langle \hat{W} \rangle_n = \langle n | \hat{W} | n \rangle$ .

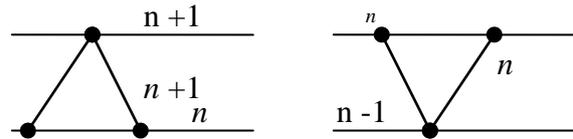
Sebagai contoh, ditinjau gangguan yang berbentuk

$$\hat{W}(\hat{q}) = \beta \hat{q}^k = \beta \left( \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \right)^k (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^k ; k > 0 \quad (20)$$

Operator  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  membentuk  $2^k$  macam kombinasi dengan jumlah faktor untuk masing-masing kombinasi  $k$  buah. Menurut poin 7 bagian III, dengan aras awal dan aras akhir sama, lintasan yang mungkin memberi kontribusi adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada aras yang sama tersebut. Hal ini tercapai bila jumlah faktor  $\hat{a}$  sama dengan jumlah faktor  $\hat{a}^\dagger$ , menurut point 3,4 dan 5. Agar jumlah faktor  $\hat{a}$  sama dengan jumlah faktor  $\hat{a}^\dagger$  dalam kombinasi, maka  $k$  harus genap. Jadi, gangguan-gangguan dengan  $k$  ganjil tidak memberi kontribusi pada oreksi orde pertama.

Selanjutnya ditinjau gangguan potensial kuadrat., Diagram untuk menghitung koreksi orde pertama diberikan oleh gbr.(5).

Diagram gbr.(5) menggambarkan lintasan-lintasan transisi yang mungkin memenuhi tuntutan pers.(20). Diagram di sebelah kiri memberi kontribusi  $\sqrt{n+1}\sqrt{n+1} = n+1$ , sedang di sebelah kanan memberi kontribusi  $\sqrt{n}\sqrt{n} = n$ . Jadi, koreksi orde pertama terhadap swanilai diberikan oleh



Gambar.(5). Diagram untuk menghitung gangguan

$$\Delta E_1 = \frac{\rho \hbar \omega}{4} [(n+1) + n] = \frac{\rho}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (21)$$

yang sesuai dengan hasil yang diperoleh secara konvensional [Cohen dkk, 1977]

Contoh kedua diberikan dengan meninjau gangguan berikut

$$\hat{W}(\hat{p}) = \alpha \hat{p}^l = i^l \alpha \left( \sqrt{\mu \hbar \omega / 2} \right)^l (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^l \quad (22)$$

Bila  $\hat{b}$  didefinisikan menurut  $\hat{b} = -\hat{a}$ , maka gangguan pada pers. (22) dapat ditulis sebagai

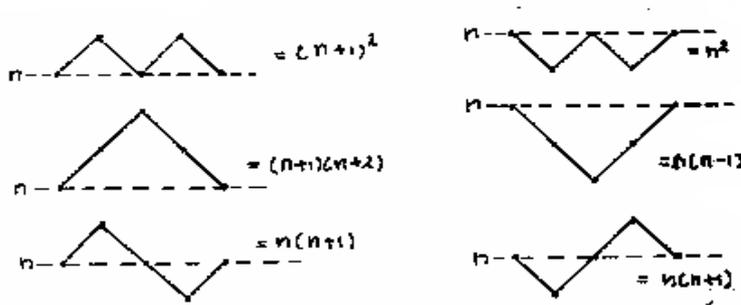
$$\hat{W}(\hat{p}) = \alpha \hat{p}^l = i^l \alpha \left( \sqrt{\mu \hbar \omega / 2} \right)^l (\hat{a}^\dagger + \hat{b})^l \quad (23)$$

Sekarang  $\hat{b}$  berhubungan dengan satu langkah transisi turun. Apabila jumlah  $\hat{b}$  dalam kombinasi ganjil, maka suku tersebut akan bertanda negatif dan sebaliknya untuk jumlah faktor  $\hat{b}$  yang genap. Jadi, tanda tiap suku ditentukan oleh ganjil genapnya jumlah garis yang mewakili transisi turun.

Diagram yang mungkin untuk gangguan pers.(22) diberikan oleh gbr.(6). Dalam gambar tersebut telah pula dicantumkan kontribusi masing-masing lintasan transisi yang mungkin pada koreksi. Maka nilai koreksi orde pertama ialah

$$\left( \frac{\alpha \mu^2 \hbar^2 \omega^2}{2} \right) 3(2n^2 + 2n + 1) \quad (24)$$

Tak satupun dari keenam macam lintasan pada gbr (6) memberi kontribusi negatif. Hal ini dikarenakan jumlah garis turun selalu genap, yaitu separo dari jumlah keseluruhan garis (langkah). Secara umum, negatif muncul bila  $(1/2)l$  merupakan bilangan ganjil, misalnya untuk  $l$  bernilai 2,6,10 dan seterusnya.



Gambar 6

### B. Koreksi nilai eigen orde kedua

Koreksi nilai eigen orde kedua diberikan oleh  $\Delta E_2 = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | \hat{W} | n \rangle|^2}{(n-m)\hbar\omega}$ . Jadi, unsur matriks

$W_{mm} = \langle m | \hat{W} | n \rangle$  perlu ditentukan. Seandainya  $\hat{W}$  sebanding dengan  $\hat{q}^k$  maka menghitung unsur matriks  $W_{mm} = \langle m | \hat{W} | n \rangle$  sama artinya menghitung unsur matriks

$\langle m | \hat{q}^k | n \rangle = \left( \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\omega}} \right) \langle m | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^k | n \rangle$ . Bentuk  $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^k$  mempunyai  $2^k$  macam suku yang

merupakan kombinasi dari  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$ . Tiap suku (atau macam kombinasi) mempunyai  $k$  faktor. Jika  $k$  berilai 2 maka  $(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 = \hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger$ . Misalkan  $K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  adalah salah

satu dari  $2^k$  macam kombinasi  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$ . Maka  $\langle m | K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) | n \rangle$  menyatakan transisi yang mengandung  $k$  langkah, berawal dari aras  $n$  dan berakhir pada aras  $m$ . Aras akhir  $m$  dan bentuk lintasan transisi tergantung dari bentuk  $K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ , yaitu bagaimana susunan  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  dalam

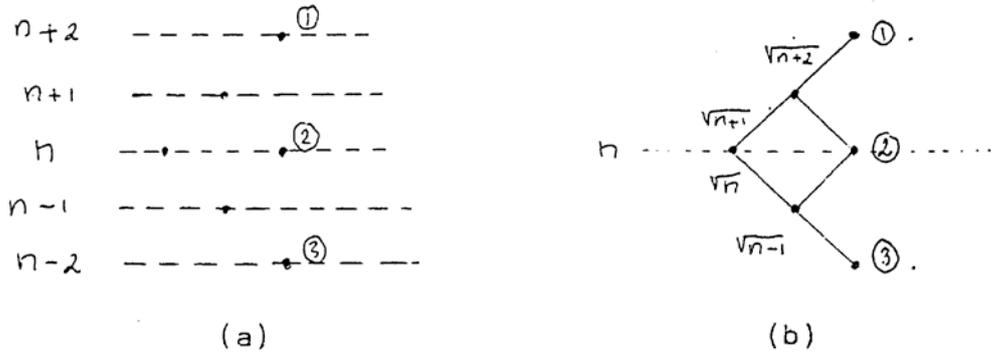
$K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ .  $2^k$  macam lintasan transisi yang mungkin dapat ditampilkan dalam bentuk jaring-jaring yang disebut jaring-jaring  $F_k$ . Jaring-jaring ini disusun, mula-mula dengan menyusun  $(k^2 + 3k + 2)/2$  buah titik menjadi sebuah kisi dua dimensi sedemikian rupa sehingga bila titik-titik terluar dihubungkan, akan tampak sebagai segitiga sama sisi yang tiap sisinya berisi  $k+1$  buah titik. Kisi ini diletakan sedemikian rupa sehingga salah satu sisinya terletak vertikal. Kemudian satu titik paling kiri (disebut titik pangkal) dibuat terletak pada aras  $n$ , demikian pula titik-titik yang terletak pada garis mendatar yang melauinya. Dari titik inilah lintasan-lintasan transisi yang mungkin (yang berpadanan dengan  $K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ ) berawal, sedangkan titik titik yang berada paling kanan (pada sisi vertikal) merupakan ujung-ujung tempat lintasan-lintasan berakhir. Ujung-ujung ini, yang jumlahnya  $k+1$ , berhubungan dengan aras  $m$ .

Untuk jelasnya, hendak ditinjau gangguan kuadrat yaitu

$$\hat{W} = \frac{1}{2} \rho \mu \omega^2 \hat{q}^2 = \rho \frac{\hbar \omega}{4} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 \quad (25)$$

Dalam hal ini  $k$  sama dengan 2. Gbr.(7.(a)) menunjukkan kisi segitiga yang diperlukan, sedang gbr 7(b) menunjukkan jaring-jaring  $F_2$  yang diperoleh dari gambar 7(a) dengan melukiskan lintasan-lintasan yang berpadanan dengan kombinasi-kombinasi  $K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ . Ujung 2 terletak pada aras awal ( $m = n$ ) sehingga tidak memberi kontribusi pada koreksi swanilai orde kedua.

Ujung 1 merupakan tempat berakhirnya sebuah lintasan yang panjangnya  $\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}$   
 Ujung ini terletak pada aras  $n+2$



Gambar 7

Oleh karena itu , ujung 1 meberikan kontribusi sebesar

$$\frac{|\langle m | \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger | n \rangle|^2}{E_n^0 - E_m^0} = \frac{(\sqrt{n+1}\sqrt{n+1})^2}{(n-n-2)\hbar\omega} \quad m \neq n = \frac{n^2 + 3n + 2}{-2\hbar\omega} \quad (26)$$

Ujung 3, tempat berakhirnya suatu lintasan yang panjangnya  $\sqrt{n}\sqrt{n-1}$  memberi kontribusi sebesar

$$\frac{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}{(n-n+2)\hbar\omega} = \frac{n^2 - n}{2\hbar\omega} \quad (27)$$

Secara keseluruhan koreksi energi orde kedua ditentukan oleh

$$\frac{n^2 - n}{2\hbar\omega} - \frac{n^2 + 3n + 2}{2\hbar\omega} = -\frac{2n + 1}{\hbar\omega} \quad (28)$$

akhirnya koreksi energi orde kedua diberikan oleh

$$\Delta E_2 = \left(\frac{\rho\hbar\omega}{4}\right)^4 \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle|^2}{(n-m)\hbar\omega} = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \frac{\rho^2}{8} \quad (29)$$

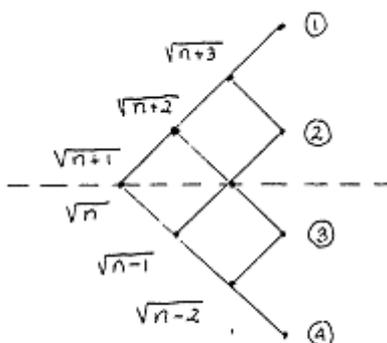
Hasil ini sesuai dengan yang diperoleh dengan cara konvesiaonal [Cohen dkk. 1977]

Dari sebuah contoh itu dapat dilihat bahwa penyebut yang berhubungan dengan satu ujung ditentukan oleh nomor aras tempat ujung itu berada dihitung dari aras awal  $n$ . Untuk ujung-ujung diatas aras  $n$  diberi tanda negatif, sedang untuk ujung-ujung yang berada di bawah aras  $n$  diberi tanda positif.

Contoh berikutnya berkenaan dengan gangguan berpangkat 3 dalam  $\hat{q}$ , yaitu

$$\hat{W} = \sigma \hat{q}^3 = \sigma \left(\frac{\hbar}{2\mu\omega}\right)^{\frac{3}{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^3$$

Diagram untuk gangguan ini disajikan oleh gbr.(8) yang didapat dengan cara seperti gbr.(7). Terlihat bahwa ujung-ujung yang memenuhi syarat ( $m \neq n$ ). ialah ujung 1,2,3 dan 4..



Gambar (8) Diagram untuk menghitung gangguan orde 3

Ujung (1) memberi kontribusi sebesar

$$\frac{(\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3})^2}{-3\hbar\omega} = \frac{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\sqrt{n+3}}{-3\hbar\omega} \quad (30)$$

Ujung (2) berada di aras  $n+1$  dan merupakan tempat berakhirnya tiga buah lintasan. Kontribusi ujung ini adalah

$$\frac{(n+1)(3n+3)^2}{-\hbar\omega} \quad (31)$$

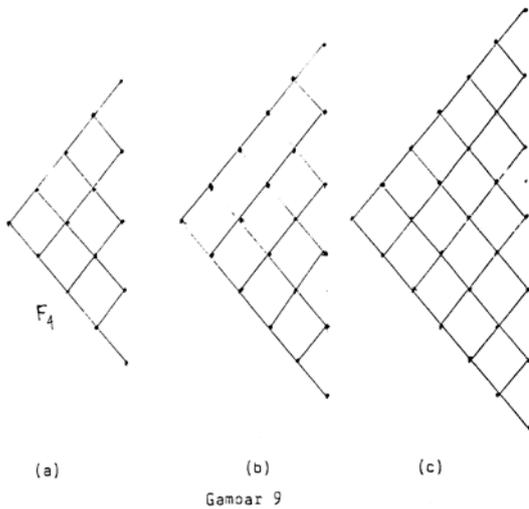
Ujung (3) berada pada aras  $n-1$  dan merupakan tempat berakhirnya tiga buah lintasan transisi yang semuanya melewati selang  $\sqrt{n}$ . Kontribusi ujung ini terhadap koreksi energi orde kedua adalah

$$\frac{n(3n)^2}{\hbar\omega} = \frac{9n^3}{\hbar\omega} \quad (32)$$

Ujung (4) memberi kontribusi sebesar  $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\hbar} = \frac{n^3 - 2n^2 - n^2 + n}{3\hbar\omega}$  jadi,

$$\Delta E_2 = -\frac{3}{8}\sigma^2 \frac{\hbar^2}{\mu^3\omega^4} (9n^2 + 10n + 3) \quad (33)$$

Gbr. (9) berikut menunjukkan diagram untuk mencari koreksi eigenilai orde kedua dengan adanya gangguan berpangkat 4,5 dan 6 dalam  $\hat{q}$



Koreksi swanilai orde kedua karena adanya gangguan yang berbentuk

$$\hat{W} = \xi \hat{p}^k = \xi \left( i\sqrt{\frac{\hbar\mu\omega}{2}} \right)^k (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^k \quad (34)$$

juga ditandai dengan menggunakan jaring-jaring  $F_k$ . Tanda negatif muncul pada kontribusi sebuah lintasan transisi jika lintasan transisi tersebut mengandung langkah-langkah transisi yang jumlahnya ganjil.

Ditinjau gangguan yang berbentuk  $\hat{W} = \eta \hat{p}^k \hat{q}^l$ . Dengan menggunakan syarat lengkap bagi basis, unsur matriks  $\langle m | \hat{p}^k \hat{q}^l | n \rangle$  dapat ditulis sebagai

$$\langle m | \hat{p}^k \hat{q}^l | n \rangle = \sum_i \langle m | \hat{p}^k | i \rangle \langle i | \hat{q}^l | n \rangle \quad (35)$$

Unsur matriks  $\langle i | \hat{q}^l | n \rangle$  dapat ditampilkan dengan jaring-jaring  $F_l$  dengan pangkal pada aras  $n$  dan berujung pada aras-aras  $i$ . Demikian pula unsur matriks  $\langle m | \hat{p}^k | i \rangle$  dapat ditampilkan dengan jaring-jaring  $F_k$  yang berpangkal dari ujung-ujung  $i$  dan berakhir pada ujung-ujung  $m$ .

Pers.(35) untuk  $K_l(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  dan  $K_k(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$  tertentu dapat diartikan sebagai transisi dari aras  $n$  dan berakhir di aras  $i$  melalui  $l$  langkah, kemudian dari aras  $i$  transisi dilanjutkan ke aras  $m$  dengan  $k$  buah langkah.

Jaring-jaring yang diperlukan untuk menghitung koreksi terhadap jenis ini dibuat, mula-mula, dengan membentuk jaring-jaring  $F_l$ . Kemudian, pada masing-masing ujung  $F_l$  dipasang (disambung) jaring-jaring  $F_k$ . Jaring-jaring yang terbentuk berupa jaring-jaring  $F_{l+k}$  dengan ujung sebanyak  $k+l+1$  buah.

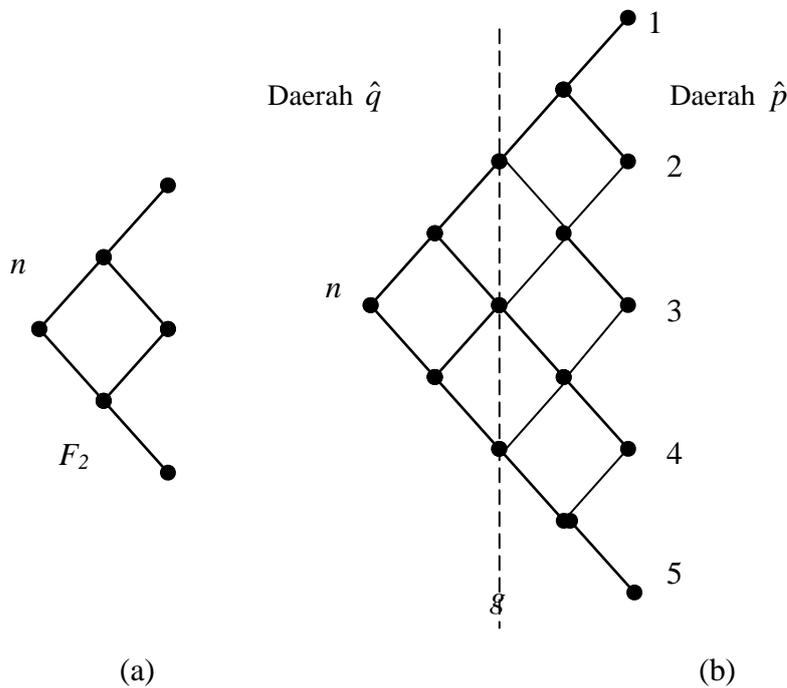
Perhitungan koreksi dilakukan sebagaimana perhitungan untuk gangguan  $\beta \hat{q}^l$  dan  $\xi \hat{p}^k$ . Ganjil genapnya langkah transisi turun pada  $F_k$  menentukan negatif positifnya suku yang

disumbangkan oleh sebuah linasan transisi. Jelasnya jaring-jaring  $F_{l+k}$  dibagi menjadi dua daerah, yaitu daerah  $\hat{p}$  dan daerah  $\hat{q}$ . Daerah  $\hat{p}$  ialah tempat  $F_k$  berada dan daerah  $\hat{q}$  ialah tempat  $F_l$  berada. Jadi, tanda sebuah suku (sumbangan sebuah lintasan) tergantung dari ganjil genapnya jumlah langkah turun didaerah  $\hat{p}$ .

Guna lebih jelasnya, ditinjau gangguan berpangkat dua dalam  $\hat{p}$  dan  $\hat{q}$ , yaitu

$$\hat{W} = \eta \hat{p}^2 \hat{q}^2 \tag{36}$$

Dalam hal ini  $l$  sama dengan 2 dan  $k$  sama dengan 2. Gbr.(10.a) menyatakan jaring-jaring  $F_2$ , sedang gbr.(10.b) menunjukkan jaring-jaring  $F_4$  hasil penyambungan antara dua buah jaring-jaring  $F_2$ . Ditunjukkan pula, dalam gambar tersebut, pembagian daerah menjadi daerah  $\hat{q}$  dan daerah  $\hat{p}$  oleh garis  $g$ . Perlu untuk diperhatikan tentang letak daerah  $\hat{q}$  dan daerah  $\hat{p}$  yang berkebalikan dengan letak faktor  $\hat{p}^k$  dan  $\hat{q}^l$  dalam gangguan.



Gambar.(10). (a). jaring-jaring untuk  $F_2$ .  
 (b). Gabungan untuk 2 buah  $F_2$  menjadi  $F_4$

Ujung 2 merupakan tempat berakhirnya empat macam lintasan transisi. Ujung ini memberi kontribusi pada koreksi sebesar

$$\frac{(n+2)(n+1)(-n-3-n-2+n+1+n)^2}{-\hbar\omega} = \frac{4(n^2+3n+1)}{-\hbar\omega}$$

Suku pertama dan kedua diberi tanda negatif karena berhubungan dengan lintasan transisi yang mengandung langkah turun berjumlah ganjil di daerah  $\hat{p}$ , yaitu satu langkah. Untuk ujung-ujung yang lain perhitungan dilakukan dengan cara yang sama. Tetapi ujung ketiga merupakan ujung terlarang untuk koreksi energi orde kedua sehingga tidak perlu untuk diperhitungkan.

Gangguan yang berwujud  $\hat{W} = \gamma \hat{q}^l \hat{p}^k$  ditangani seperti menangani gangguan  $\eta \hat{p}^k \hat{q}^l$ , yaitu dengan membuat jaring-jaring  $F_{k+l}$ , tetapi daerah  $\hat{p}$  dan  $\hat{q}$  ditukar letaknya.

Dari hasil-hasil yang telah diperoleh diharapkan gangguan yang mempunyai bentuk lebih umum lagi, yaitu

$$\hat{W} = \eta' \hat{p}^{k_1} \hat{q}^{l_1} \hat{p}^{k_2} \hat{q}^{l_2} \dots \hat{p}^{k_n} \hat{q}^{l_n} \quad (37)$$

dapat ditangani juga. Akhirnya, koreksi vektor eigen dengan mudah dapat diperoleh dengan menerapkan jaring-jaring  $F_k$ .

## V. KESIMPULAN

Penggunaan jaring-jaring  $F_k$  ternyata sangat membantu dalam menghitung koreksi-koreksi karena adanya gangguan pada osilator. Dengan menggunakan diagram-diagram tersebut, perhitungan lebih terarah dan kerumitan yang disebabkan integrasi dan jumlah suku yang membengkak dalam jumlahan dapat dihindari. Dalam perhitungan harga harap dan unsur matriks gangguan tidak lagi diperlukan untuk menuliskan semua kombinasi  $\hat{a}$  dan  $\hat{a}^\dagger$  yang jumlahnya meningkat menjadi dua kali untuk setiap penambahan pangkat dari  $\hat{p}$  dan  $\hat{q}$ .

Disamping itu penggunaan diagram semacam itu juga bersifat intuitif, artinya dapat dikembangkan untuk menghitung koreksi-koreksi orde yang lebih tinggi.

## VI. DAFTAR PUSTAKA

- Cohen, D., Laloe dan Tannoudji, 1977 *Quantum mechanics*, volume II, John Wiley & Sons New York
- Fereil, L.T., 1980, *Diagram for Quantum Oscillator*, Am.J.Phys, 48, 728.
- Levine, Ira N., 1975, *Molecular Spectroscopy*, edisi pertama, John Wiley & Sons, New York.