Beberapa Sifat Operator Hilbert-Schmidt Pada Ruang $L_2(M)$

Muslim Ansori

Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Lampung
Email : ansomath@yahoo.com

Abstract

Let $M_1 \subset \Re^m$ and $M_2 \subset \Re^n$ be measurable sets, respectively. A continuous linear operator $K : L_2(M_1) \to L_2(M_2)$ is a Hilbert-Schmidt operator if and only if there is a function $k \in L_2(M_2 \times M_1)$ such that

$$(Kf)(x) = \int_{M_1} k(x,y) f(y) dy$$

almost everywhere for every $f \in L_2(M_2)$; the function k is called kernel of K. If $|||K|||$ is the norm of K, then

$$|||K||| = \left(\int_{M_2} \int_{M_1} |k(x,y)|^2 \, dydx \right)^{\frac{1}{2}} = \|k\|$$

The collection of the Hilbert-Schmidt operator from $L_2(M_1)$ into $L_2(M_2)$ is denoted by $K(M_1, M_2)$. Further, we shal show that $K(M,M), M \subset \Re^n$, is $*$-algebra in $L_c(M,M)$.

Keywords : *involution, adjoint, $*$-algebra*

Abstrak

Diberikan himpunan-himpunan terukur $M_1 \subset \Re^m$ dan $M_2 \subset \Re^n$. Suatu operator linear kontinu $K : L_2(M_1) \to L_2(M_2)$ merupakan operator Hilbert-Schmidt jika dan hanya jika terdapat suatu fungsi $k \in L_2(M_2 \times M_1)$ sehingga

$$(Kf)(x) = \int_{M_1} k(x,y) f(y) dy$$

hampir di mana-mana, untuk setiap $f \in L_2(M_2)$; fungsi k tersebut dinamakan kernel atau pembangkit operator K. Jika $|||K|||$ menyatakan norm operator K, maka

$$|||K||| = \left(\int_{M_2} \int_{M_1} |k(x,y)|^2 \, dydx \right)^{\frac{1}{2}} = \|k\|.$$

$K(M_1, M_2)$oleksi seluruh operator Hilbert-Schmidt dari $L_2(M_1)$ ke $L_2(M_2)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa , $K(M,M), M \subset \Re^n$, dengan $K(M_1, M_2)$ menyatakan koleksi seluruh operator Hilbert-Schmidt dari $L_2(M_1)$ ke $L_2(M_2)$, merupakan aljabar-$*$ di dalam $L_c(M,M)$.

Kata kunci : *involusi, adjoin, aljabar- $*$*

1. PENDAHULUAN

Salah satu klas operator kompak yang penting dan banyak dikaji hingga saat ini, yaitu klas operator Hilbert-Schmidt. Penggunaan operator ini pada berbagai bidang, baik matematika sendiri maupun bidang aplikasi, lihat [3],[4] dan [5], merupakan pendorong

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **"Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

munculnya kajian-kajian baru sebagai pengembangan, yang disesuaikan dengan tantangan terkini. Pada paper ini, akan disajikan beberapa karakteristik operator Hilbert-Schmidt dalam bentuk integral. Misal H_1 dan H_2 merupakan ruang Hilbert separabel. Suatu operator terbatas $K : H_1 \to H_2$ dinamakan operator Hilbert-Schmidt , $K \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$ dengan $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$ menyatakan koleksi semua operator Hilbert-Schmidt dari H_1 ke H_2, jika terdapat basis ortonormal $\{e_n\} \subset H_1$ sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty .$$

Norm Hilbert-Schmidt-nya $|||K|||$, didefinisikan sebagai

$$|||K||| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

dengan $Ae_n = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ae_n, d_k \rangle d_k$, $\{d_k\}$ merupakan basis ortonormal pada H_2, dan

$$\|Ae_n\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle Ae_n, d_k \rangle \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle e_n, A^* d_k \rangle \right|^2 = \|A^*\|^2 .$$

Berdasarkan pernyataan terakhir, diperoleh sifat berikut.

Teorema 1.1. Suatu operator terbatas $K \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$ jika dan hanya jika operator adjoin $K^* \in \mathrm{HS}(H_2, H_1)$ merupakan operator Hilbert-Schmidt, yaitu

$$|||K||| = |||K^*|||.$$

Sifat-sifat lain yang dapat diturunkan, antara lain:

(i) $\|K\| \le |||K|||$

(ii) $|||\alpha K||| = |\alpha| \, |||K|||$,

(iii) $|||K_1 + K_2||| \le |||K_1||| + |||K_2|||$, dengan $K_1, K_2 \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$.

Berdasarkan sifat (i), (ii) dan (iii) dapat disimpulkan bahwa $\mathrm{HS}(H_1, H_2)$ merupakan ruang Hilbert, dengan perkalian dalamnya, $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ didefinisikan sebagai

$$\langle\langle K_1, K_2 \rangle\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle K_1 e_n, K_2 e_n \rangle ,$$

untuk setiap $K_1, K_2 \in \mathrm{HS}(H_1, H_2)$.

Pada paper ini, akan dikaji operator Hilbert-Schmidt dari $H_1 = L_2(M_1)$ ke $H_2 = L_2(M_2)$, dengan $M_1 \subset \Re^m$ dan $M_2 \subset \Re^n$ merupakan himpunan terukur, $L_2(M), M \subset \Re^n$ merupakan ruang Lebesgue. Ditinjau sifat aljabar-$*$ pada ruang koleksi seluruh operator Hilbert-Schmidt dari $L_2(M)$ ke $L_2(M)$, $M \subset \Re^n$ dan kekompakannya.

2. OPERATOR HILBERT-SCHMIDT DARI $L_2(M_1)$ KE $L_2(M_2)$

Diberikan himpunan-himpunan terukur $M_1 \subset \Re^m$ and $M_2 \subset \Re^n$. Maka $M_2 \times M_1$ merupakan himpunan terukur di dalam $\Re^n \times \Re^m$. Jika $k \in L_2(M_2 \times M_1)$, maka berdasarkan teorema Fubini,

$$\int_{M_1} |k(x,y)|^2 dy < \infty$$

hampir di mana-mana pada M_2, yaitu $k(x,.) \in L_2(M_1)$ hampir di mana-mana pada M_2. Didefinisikan operator $K : L_2(M_1) \to L_2(M_2)$ dengan rumus

$$(Kf)(x) = \int_{M_1} k(x,y) f(y) dy$$

h.d pada M_2. Maka

$$|(Kf)(x)| \leq \| f \| \left\{ \int_{M_1} |k(x,y)|^2 dy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

dengan $Kf \in L_2(M_2)$. Sehingga

$$\|Kf\| \leq \| f \| \left\{ \int_{M_2} \int_{M_1} |k(x,y)|^2 dydx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Karena pemetaan $f \to Kf$ linear, maka K merupakan operator linear kontinu dari $L_2(M_1)$ ke $L_2(M_2)$ yang dibangkitkan oleh kernel k. Selanjutnya, K merupakan operator Hilbert-Schmidt, dengan norm

$$|||K||| = \left\{ \int_{M_2} \int_{M_1} |k(x,y)|^2 dydx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

seperti tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 2.1. *Diberikan himpunan-himpunan terukur* $M_1 \subset \Re^m$ and $M_2 \subset \Re^n$. *Operator* $K \in L_c\left(L_2\left(M_1\right), L_2\left(M_2\right)\right)$ *merupakan operator Hilbert-Schmidt jika dan hanya jika terdapat suatu kernel* $k \in L_2\left(M_2 \times M_1\right)$ *sehingga*

$$(Kf)(x) = \int_{M_1} k(x,y) f(y)\, dy$$

h.d pada M_2, *untuk setiap* $f \in L_2\left(M_2\right)$

Bukti: Berdasarkan uraian sebelumnya, jika K memiliki sifat seperti di atas maka $K \in L_c\left(L_2\left(M_1\right), L_2\left(M_2\right)\right)$ dan merupakan operator Hilbert-Schmidt yang dibangkitkan oleh k. Sebaliknya, diberikan basis ortonormal $\{e_n\} \subset L_2\left(M_1\right)$ dan $\{f_m\} \subset L_2\left(M_2\right)$, maka $\{g_{nm}\}$ dengan $g_{nm}(x,y) = f_m(x)\overline{e_n(y)}$ merupakan basis ortonormal pada $L_2\left(M_2 \times M_1\right)$, lihat [1]. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\langle Ke_n, f_m\rangle\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\int_{M_2}\int_{M_1} \overline{k(x,y)\overline{e_n(y)}}\, dy\, f_m(x)\, dx\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\int_{M_2}\int_{M_1} \overline{k(x,y)\overline{e_n(y)}} f_m(x)\, dy\, dx\right|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\langle k, g_{nm}\rangle\right|^2 \\
&= \|k\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Selanjutnya, koleksi operator Hilbert-Schmidt dari $L_2\left(M_1\right)$ ke $L_2\left(M_2\right)$ dinyatakan dengan $K\left(M_1, M_2\right)$.

Teorema 2.2. $K\left(M_1, M_2\right)$ *merupakan ruang Banach.*

Bukti: Jelas bahwa $K\left(M_1, M_2\right)$ merupakan ruang linear bagian dari $L_c\left(M_1, M_2\right)$. Selanjutnya, cukup ditunjukkan bahwa $K\left(M_1, M_2\right)$ lengkap. Karena $K\left(M_1, M_2\right) \subset L_c\left(M_1, M_2\right)$ dan $\|K\| \le \|\|K\|\|$, untuk setiap $K \in K\left(M_1, M_2\right)$, maka untuk setiap barisan cauchy $\{K_n\} \subset K\left(M_1, M_2\right)$, juga merupakan barisan cauchy di dalam

$L_c\left(M_1, M_2\right)$. Karena kelengkapan $L_c\left(M_1, M_2\right)$, maka terdapat $K \in L_c\left(M_1, M_2\right)$, sehingga

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K_n - K\right\| = 0.$$

Akan ditunjukkan bahwa $K \in K\left(M_1, M_2\right)$ dan

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left\|K_n - K\right\|\right| = 0.$$

Diberikan sebarang bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan positip n_0, sedemikian hingga untuk $m, n \geq n_0$,

$$\left|\left\|K_n - K\right\|\right| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Oleh karena itu,

$$\sum_{k=1}^{s}\left\|\left(K_n - K_m\right)e_k\right\|^2 \leq \left|\left\|K_n - K_m\right\|\right|^2 < \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

untuk setiap $m, n \geq n_0$, dan sebarang bilangan positip s. Selanjutnya, jika $m \to \infty$ dan mengingat $\lim_{n\to\infty}\left\|K_n - K\right\| = 0$, maka

$$\sum_{k=1}^{s}\left\|\left(K_n - K\right)e_k\right\|^2 \leq \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan untuk $s \to \infty$ diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\left(K_n - K\right)e_k\right\|^2 = \left|\left\|K_n - K\right\|\right| \leq \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2$$

untuk setiap $n \geq n_0$ dan $K_n - K \in K\left(M_1, M_2\right)$. Karena $K = K_n - \left(K_n - K\right)$ anggota $K\left(M_1, M_2\right)$. Dengan kata lain, $\lim_{n\to\infty}\left|\left\|K_n - K\right\|\right| = 0$.

Selanjutnya juga dapat ditunjukkan bahwa jika k_1, k_1 masing-masing kernel dari $K_1, K_2 \in K\left(M, M\right)$, dengan $M \subset \Re^n$, maka fungsi $k \in L_2\left(M \times M\right)$ dengan

$$k\left(x, y\right) = \int_M k_1\left(x, z\right)k_2\left(z, y\right)dz$$

merupakan kernel dari $K = K_1K_2 \in K\left(M \times M\right)$, lihat[2, exercise 4.5].

Akibat 2.3. $K\left(M\right)$ merupakan alabar Banach dan tertutup didalam $L_c\left(M\right)$.

Teorema 2.4. $K(M)$ merupakan suatu aljabar-$*$ terhadap involusi $K \mapsto K^*$ dengan K^* merupakan adjoin dari K.

Bukti: Untuk setiap $H, K \in K(M)$ dan skalar α

(i) $(H+K)^* = H^* + K^*$, sebab, untuk sebarang basis ortonormal $\{f_n\} \subset L_2(M)$

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle (H+K)^*, L^* \right\rangle\right\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle (H+K)^* f_n, L^* f_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f_n, (H+K) L^* f_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f_n, (HL^* + KL^*) f_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f_n, HL^* f_n \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f_n, KL^* f_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle H^* f_n, L^* f_n \right\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle K^* f_n, L^* f_n \right\rangle \\
&= \left\langle\left\langle H^*, L^* \right\rangle\right\rangle + \left\langle\left\langle K^*, L^* \right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle\left\langle H^* + K^*, L^* \right\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

(ii) $(HK)^* = K^* H^*$, sebab, untuk sebarang basis ortonormal $\{f_n\} \subset L_2(M)$

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle (HK)^*, L^* \right\rangle\right\rangle &= \sum \left\langle (HK)^* f_n, L^* f_n \right\rangle \\
&= \sum \left\langle f_n, (HK) L^* f_n \right\rangle \\
&= \sum \left\langle H^* f_n, KL^* f_n \right\rangle \\
&= \sum \left\langle K^* H^* f_n, L^* f_n \right\rangle \\
&= \left\langle\left\langle K^* H^*, L^* \right\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

(iii) $(K^*)^* = K$, sebab, untuk sebarang basis ortonormal $\{f_n\} \subset L_2(M)$

$$\begin{aligned}
\left\langle\left\langle (K^*)^*, L \right\rangle\right\rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle (K^*)^* f_n, Lf_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f_n, K^* Lf_n \right\rangle \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle Kf_n, Lf_n \right\rangle \\
&= \left\langle\left\langle K, L \right\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

(iv) $(\alpha K)^* = \bar{\alpha} K^*$, sebab, untuk sebarang basis ortonormal $\{f_n\} \subset L_2(M)$

$$\begin{aligned}
\langle\langle (\alpha K)^*, L^* \rangle\rangle &= \sum \langle (\alpha K)^* f_n, L^* f_n \rangle \\
&= \sum \langle f_n, (\alpha K) L^* f_n \rangle \\
&= \sum \bar{\alpha} \langle f_n, K L^* f_n \rangle \\
&= \bar{\alpha} \sum \langle K^* f_n, L^* f_n \rangle \\
&= \sum \langle \bar{\alpha} K^* f_n, L^* f_n \rangle \\
&= \langle\langle \bar{\alpha} K^*, L^* \rangle\rangle
\end{aligned}$$

Teorema 2.5. *Setiap operator* $K \in K(M)$

Bukti: Akan digunakan pengertian: K kompak jika dan hanya jika terdapat suatu barisan operator dengan rank hingga $\{K_n\} \subset L_c(M)$ sehingga $\|K_n - K\| \to 0$. Untuk setiap $k \in L_2(M \times M)$ terdapat skalar (α_{ij}) sehingga

$$k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \rho_i(x) \bar{\psi}_j(y)$$

dan

$$k_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \rho_i(x) \bar{\psi}_j(y)$$

dengan $\{\rho_i\}, \{\psi_j\}$ basis ortonormal pada $L_2(M \times M)$. Diperoleh

$$(K_n f)(x) = \int_M k_n(x, y) f(y) dy ,$$

dengan $\dim R(K_n) < \infty$. Karena $f \mapsto K_n f$ linear dan kontinu, maka $R(B)$ tertutup dan terbatas, dengan $B \subset L_2(M)$ dan $\|B\| \le 1$. Oleh karena itu, $R(B)$ relatif kompak dan berakibat K_n kompak. Jelas bahwa K_n juga merupakan operator Hilbert-Schmidt. Karena $K \in K(M)$, maka

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|K \rho_i\|^2 < \infty .$$

Oleh karena itu, untuk setiap bilangan real $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat positip n_0, sehingga

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \|K\rho_i\|^2 < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $K_n f \to Kf$, maka

$$\begin{aligned}\|Kf - K_i f\|^2 &= \left\|\sum_{i \ge n_0} \langle f, \rho_i \rangle K\rho_i\right\|^2 \\ &\le \sum_{i \ge n_0} \left|\langle f, \rho_i \rangle\right|^2 \|K\rho_i\|^2 \\ &\le \sum_{i \ge n_0} \left|\langle f, \rho_i \rangle\right|^2 \sum_{i \ge n_0} \|K\rho_i\|^2 \\ &\le \|f\|^2 \sum_{i \ge n_0} \|K\rho_i\|^2\end{aligned}$$

dan

$$\|K - K_i\| \le \sum_{i \ge n_0} \|K\rho_i\|^2 < \varepsilon$$

Terbukti.

3. PENUTUP

Berdasarkan kenyataan di atas, banyak hal yang dapat dikembangkan antara lain: pengembangan struktur aljabar-$*$ pada $K(M)$ jika dipandang dari segi modul dan pengembangan konsep operator Hilbert-Schmidt dari ruang Hilbert ke ruang Banach dengan memperhatikan sifat-sifat mendasar pada operator Hilbert-Schmidt.

DAFTAR PUSTAKA

[1].Conway, J.B.,1990. *A Course in Functional Analysis*, Springer Verlag, New York.

[2].Weidmann, J., 1980. *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer Verlag, New York.

[3].Beukema, R.,2003. *Positive Operator-Valued Measures and Phase Space Representations*,Proeschrift,Technische Univ. Eindhoven.

[4].Cirnu, M., 2004. *Contribution to The Mathematical Theory of Physical System*, Proceedings of The 3-rd International Colloquium, Math. in Engineering and Numerical Physics, Bucharest.

[5].De Vito, E., Rosaco, L., 2005. *Learning From Examples As An Inverse Problems*, journal of Machine Learning Research.