Karakteristik Invarian Translasional Subhimpunan Fuzzy Relatif terhadap Homomorfisma Ring

Oleh
K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
e-mail: yatiuny@yahoo.com

Abstrak

Diawali dengan pendefinisian invarian translasional suatu subhimpunan fuzzy pada sebarang himpunan yang di dalamnya dilengkapi dengan operasi biner, selanjutnya definisi ini secara khusus didefinisikan juga pada subhimpunan fuzzy pada ring. Dengan demikian definisi invarian translasional tersebut didefinisikan relatif terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan pada ring.

Berdasarkan definisi image $f(\mu)$ dan pre-image $f^{-1}(\varphi)$, dengan f adalah pemetaan dari ring R ke R', μ dan φ masing-masing adalah subhimpunan fuzzy pada R dan R', maka dalam tulisan ini akan dikaji karakteristik invarian translasional suatu subhimpunan fuzzy relatif terhadap homomorfisma ring, yaitu dengan menambah syarat khusus untuk f bukan hanya suatu pemetaan akan tetapi f merupakan suatu homomorfisma.

Diperoleh hasil bahwa: jika f homomorfisma dari ring R ke R' dan λ subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R', maka $f^{-1}(\lambda)$ subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R. Misalkan f adalah homomorfisma surjektif dari ring R ke R' dan λ subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R. Jika λ adalah f-invarian, maka $f(\lambda)$ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R'. Akibat lain adalah $f(I(a,\lambda)) = I(f(a), f(\lambda))$, untuk setiap $a \in R$. Untuk suatu $a' \in R'$, maka untuk setiap $a,b \in f^{-1}(a')$, $I(a, f^{-1}(\lambda)) = I(b, f^{-1}(\lambda))$

Kata Kunci : subhimpunan fuzzy, invarian translasional, homomorfisma ring

A. Pendahuluan

Subhimpunan *fuzzy* μ pada himpunan X adalah suatu pemetaan dari X ke interval $[0,1]$ (Ajmal, Aktas, Asaad, Kandasami, Mordeson & Malik, Shabir.). Misalkan pada himpunan X didefinisikan suatu operasi biner '$*$', maka selanjutnya didefinisikan bilamana suatu subhimpunan fuzzy μ dikatakan invarian translasional kiri maupun kanan. Subhimpunan *fuzzy* μ dikatakan invarian translasional kiri relatif terhadap operasi '*' apabila dipenuhi $\mu(x) = \mu(y) \Rightarrow \mu(a * x) = \mu(a * y), \quad \forall x, y, a \in X$, dan dikatakan invarian translasional kanan apabila berlaku $\mu(x) = \mu(y) \Rightarrow \mu(x * a) = \mu(y * a), \quad \forall x, y, a \in X$. Subhimpunan *fuzzy* μ dikatakan invarian translasional relatif terhadap operasi '*' jika μ invarian translasional kiri sekaligus invarian translasional kanan. (Ray, A.K & Ali, T; 67). Jika μ komutatif,

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **"Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

yaitu $\mu(x*y)=\mu(y*x)$, untuk setiap $x,y\in X$ maka μ merupakan invarian translasional kiri jika dan hanya jika invarian translasional kanan.

Jika pada X tidak hanya didefinisikan satu operasi biner, akan tetapi dua operasi biner, sehingga membentuk struktur ring, maka dinotasikan dengan R. Selanjutnya dapat didefinisikan pemetaan μ dari R ke interval $[0,1]$, dan pemetaan ini juga membentuk subhimpunan fuzzy. Dalam pembicaraan ini, maka subhimpunan fuzzy memenuhi $\mu(x)=\mu(-x)$ untuk setiap $x\in R$. Karena ring R melibatkan dua operasi biner yan disebut dengan penjumlahan dan pergandaan, maka definisi invarian translasional kiri maupun kanan dapat didefinisikan relatif terhadap kedua operasi tersebut.

Teorema 1.1.(Ray,A.K, & Ali, T: 68). *Misalkan μ adalah invarian translasional kiri relatif terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan pada ring R, untuk suatu $a\in R$, himpunan $L(a,\mu)=\{r\in R \mid \mu(r)=\mu(xa), \text{untuk suatu } x\in R\}$ adalah ideal kiri dari R*

Selanjutnya dibentuk suatu subhimpunan dari ring R, dengan sifat $\mu(r)=\mu(ax)$ dan mempunyai struktur seperti dalam teorema berikut:

Teorema 1.2. (Ray,A.K, & Ali, T: 68). *Misalkan μ adalah invarian translasional kanan relatif terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan pada ring R, untuk suatu $a\in R$, himpunan $R(a,\mu)=\{r\in R \mid \mu(r)=\mu(ax), \text{untuk suatu } x\in R\}$ adalah ideal kanan dari R*

Jika μ komutatif, maka $L(a,\mu)=R(a,\mu)$ untuk setiap $a\in R$. Jika R adalah ring komutatif dengan elemen satuan, maka ideal utama $\langle a\rangle = aR = Ra$ adalah subhimpunan dari $L(a,\mu)=R(a,\mu)$. Selanjutnya himpunan $L(a,\mu)$ disebut μ-ideal utama kiri dari R yang dibangun oleh a dan μ. Sedangkan $R(a,\mu)$ disebut μ-ideal utama kanan dari R yang dibangun oleh a dan μ. Jika $L(a,\mu)=R(a,\mu)$, selanjutnya dinotasikan dengan $I(a,\mu)$, disebut μ-ideal utama yang dibangun oleh a dan μ.

Teorema 1.3. . (Ray,A.K, & Ali, T: 69). *Misalkan* $a,b \in R$, *sehingga berlaku:*

a. $a \in L(b,\mu) \Rightarrow L(a,\mu) \subseteq L(b,\mu)$

b. $a \in R(b,\mu) \Rightarrow R(a,\mu) \subseteq R(b,\mu)$

Teorema 1.4. . (Ray,A.K, & Ali, T: 70). *Misalkan* $a,b \in R$. *Jika* $\mu(a) = \mu(b)$ *maka* $L(a,\mu) = L(b,\mu)$ *dan* $R(a,\mu) = R(b,\mu)$

Perlu diingat kembali bahwa suatu pemetaan f dari ring R ke R' disebut homomorfisma jika: untuk setiap $x, y \in R$, maka berlaku $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dan $f(xy) = f(x)f(y)$ (Adkin : 58).

Misalkan f adalah pemetaan dari ring R ke R', μ dan φ masing-masing adalah subhimpunan fuzzy pada R dan R' selanjutnya didefinisikan image $f(\mu)$ dan pre-image $f^{-1}(\varphi)$ sebagai berikut:

a. $$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x), \text{ jika } f^{-1}(y) \neq \phi \\ \\ 0, \text{ jika } f^{-1}(\text{y}) = \phi \end{cases}$$

b. $f^{-1}(\varphi)(x) = \varphi\big(f(x)\big),\ x \in R$

(Ajmal : 329, Aktas : 75, Kandasamy: 43)

Dalam tulisan ini akan dikaji sifat subhimpunan fuzzy dari suatu ring yang merupakan invarian translasional terkait dengan image dan pre-image dari suatu hoomorfisma ring.

B. **Pembahasan**

Misalkan f adalah pemetaan dari ring R ke R' dan μ subhimpunan fuzzy . Subhimpunan fuzzy μ disebut f -invarian jika $f(x) = f(y) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$

Teorema 2.1. *Misalkan* f *adalah homomorfisma dari ring* R *ke* R'. *Jika subhimpunan fuzzy* λ *adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada* R', *maka* $f^{-1}(\lambda)$ *adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada* R.

Bukti:

Dalam hal ini dibuktikan jika $f^{-1}(\lambda)\ (a) = f^{-1}(\lambda)\ (b)$ maka

1. $f^{-1}(\lambda)\ (a+x) = f^{-1}(\lambda)\ (b+x)$,
2. $f^{-1}(\lambda)\ (xa) = f^{-1}(\lambda)\ (xb)\ \ f^{-1}(\lambda)\ (ax) = f^{-1}(\lambda)\ (bx)$.

Misalkan $f^{-1}(\lambda)\ (a) = f^{-1}(\lambda)\ (b)$, untuk $a, b \in R$, sehingga $\lambda(f(a)) = \lambda(f(b))$. Misalkan $x \in R$ dan $f(x) = y \in R'$. Diketahui bahwa λ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R' dan $\lambda(f(a)) = \lambda(f(b))$, maka berlaku: $\lambda(f(a)+y) = \lambda(f(b)+y)$ dan $\lambda(f(a)y) = \lambda(f(b)y)$ serta $\lambda(yf(a)) = \lambda(yf(b))$. Dari kondisi $\lambda(f(a)+y) = \lambda(f(b)+y)$ berakibat $\lambda(f(a)+f(x)) = \lambda(f(b)+f(x))$. Diketahui f homomorfisma ring, sehingga berlaku $\lambda(f(a+x) = \lambda(f(b+x))$ dan akibatnya $f^{-1}(\lambda)\ (a+x) = f^{-1}(\lambda)\ (b+x)$.
(2.1)

Di lain pihak, $\lambda(f(a)y) = \lambda(f(b)y)$ sehingga diperoleh $\lambda(f(a)f(x)) = \lambda(f(b)f(x))$. Diketahui f homomorfisma ring, sehingga berlaku $\lambda(f(ax)) = \lambda(f(bx))$ atau $f^{-1}(\lambda)(ax) = f^{-1}(\lambda)(bx)$
(2.2)

Secara analog dipenuhi juga $\lambda(yf(a)) = \lambda(yf(b))$, yang juga berakibat $\lambda(f(x)f(a)) = \lambda(f(x)f(b))$ akibatnya $\lambda(f(xa)) = \lambda(f(xb))$. Hal ini dipenuhi juga $f^{-1}(\lambda)(xa) = f^{-1}(\lambda)(xb)$
(2.3)

Dari persamaan (2.1), (2.2) dan (2.3) terbukti bahwa $f^{-1}(\lambda)$ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R.

■

Teorema 2.2. *Misalkan f adalah homomorfisma surjektif dari ring R ke R' dan subhimpunan fuzzy λ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R.*

Jika λ adalah f-invarian, maka $f(\lambda)$ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R'.

Bukti:

Misalkan λ adalah f-invarian, sehingga berlaku untuk setiap $x, y \in R$ dengan $f(x) = f(y)$ maka $\lambda(x) = \lambda(y)$. Karena f surjektif, maka untuk suatu $a \in R'$, $f(\lambda)(a) = \sup\{\lambda(x) | x \in R, f(x) = a\}$. Misalkan $x, y \in R$ dan $f(x) = a$, $f(y) = a$ maka $f(x) = f(y)$ dan karena λ adalah f-invarian, maka $\lambda(x) = \lambda(y)$. Sehinga $f(\lambda)(a) = \lambda(x)$ dengan $x \in R$ dan $f(x) = a$. Sehingga berlaku untuk setiap $a \in R'$, $f(\lambda)(a) = \lambda(x)$ dengan $x \in R$ dan $f(x) = a$.

Misalkan $a, b \in R'$ dan $f(\lambda)(a) = f(\lambda)(b)$, sehingga $\lambda(x) = \lambda(y)$ dengan $x, y \in R$ dan $f(x) = a$, $f(y) = b$. Misalkan $c \in R'$, dengan $f(z) = c$ untuk suatu $z \in R$ (hal ini dijamin ada, sebab f surjektif), sehingga $a + c = f(x) + f(z) = f(x + z)$ dan $b + c = f(y) + f(z) = f(y + z)$. Sehingga $f(\lambda)(a + c) = \lambda(x + z)$ dan $f(\lambda)(b + c) = \lambda(y + z)$. Berikutnya, secara analog diperoleh:

$ac = f(x)f(z) = f(xz)$, $ca = f(z)f(x) = f(zx)$, $bc = f(y)f(z) = f(yz)$, $cb = f(z)f(y) = f(zy)$.

Selanjutnya diperoleh: $f(\lambda)(ac) = \lambda(xz)$, $f(\lambda)(ca) = \lambda(zx)$, $f(\lambda)(bc) = \lambda(yz)$, $f(\lambda)(cb) = \lambda(zy)$. Diketahui bahwa λ adalah invarian translasional dan $\lambda(x) = \lambda(y)$ sehingga $\lambda(x + z) = \lambda(y + z)$, $\lambda(xz) = \lambda(zx)$, $\lambda(yz) = \lambda(zy)$. Sehingga dipenuhi: $f(\lambda)(a + c) = f(\lambda)(b + c)$, $f(\lambda)(ac) = f(\lambda)(bc)$ dan $f(\lambda)(ca) = f(\lambda)(cb)$.

Jadi terbukti jika $a, b \in R'$ dan $f(\lambda)(a) = f(\lambda)(b)$ maka, $f(\lambda)(ac) = f(\lambda)(bc)$, $f(\lambda)(ca) = f(\lambda)(cb)$ untuk setiap $c \in R'$. Atau dengan kata lain $f(\lambda)$ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R'.

■

Teorema 2.3. *Misalkan* f *adalah homomorfisma surjektif dari ring* R *ke* R' *dan subhimpunan fuzzy* λ *adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada* R. *Jika* λ *adalah* f *-invarian, maka* $f(I(a,\lambda)) = I(f(a), f(\lambda))$, *untuk setiap* $a \in R$.

Bukti:

Misalkan λ adalah f-invarian dan $y \in I(f(a), f(\lambda))$, maka $f(\lambda)(y) = f(\lambda)(sf(a))$ untuk suatu $s \in R'$. Karena $y, s \in R'$ dan f surjektif, maka terdapat $x, r \in R$ sedemikian sehingga $f(x) = y$ dan $f(r) = s$. Sehingga $f(\lambda)(f(x)) = f(\lambda)(f(r)f(a)) = f(\lambda)(f(ra))$. Karena λ invarian translasional dan menurut Teorema 2.1, maka diperoleh $f(\lambda)(f(x)) = \lambda(x)$ dan $f(\lambda)(f(ra)) = \lambda(ra)$ yang akhirnya dipenuhi $\lambda(x) = \lambda(ra)$. Sebagai akibatnya $x \in I(a,\lambda)$ dan $f(x) \in f(I(a,\lambda))$, yaitu $y \in f(I(a,\lambda))$. Sebagai konsekuensinya, $I(f(a), f(\lambda)) \subseteq f(I(a,\lambda))$.

(2.4)

Misalkan $y \in f(I(a,\lambda))$, maka terdapat $x \in I(a,\lambda)$ sedemikian sehingga $f(x) = y$. Selain itu juga berakibat $\lambda(x) = \lambda(ra)$ untuk suatu $r \in R$. Sehingga:

$$f(\lambda)(y) = \sup\{\lambda(x) \mid x \in f^{-1}(y)\} = \lambda(x) = \lambda(ar)$$

Juga dipenuhi, jika $f(r) = s$, maka

$$f(\lambda)(f(a)s) = f(\lambda)(f(a)f(r)) = f(f(ar)) = \sup\{\lambda(x'), x' \in f^{-1}(f(ar))\} = \lambda(ar),$$

karena λ adalah f-invarian.

Sehingga $f(\lambda)(y) = f(\lambda)(f(a)s)$ yang berakibat $y \in I(f(a), f(\lambda))$. Dengan demikian diperoleh $f(I(a,\lambda)) \subseteq I(f(a), f(\lambda))$ (2.5)

Dari persamaan (2.4) dan (2.5), maka diperoleh $f(I(a,\lambda)) = I(f(a), f(\lambda))$ untuk setiap $a \in R$.

■

Teorema 2.4. *Misalkan* f *adalah homomorfisma surjektif dari ring* R *ke* R' *dan subhimpunan fuzzy* λ *adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada* R. *Untuk suatu* $a' \in R'$, *maka untuk setiap* $a, b \in f^{-1}(a')$, $I(a, f^{-1}(\lambda)) = I(b, f^{-1}(\lambda))$

Bukti:

Ambil $x \in I(a, f^{-1}(\lambda))$, maka $f^{-1}(\lambda)(x) = f^{-1}(\lambda)(ra)$ untuk suatu $r \in R$. Sehingga diperoleh $f^{-1}(\lambda)(x) = \lambda\big(f(ra)\big) = \lambda\big(f(r)f(a)\big)$. Karena $a, b \in f^{-1}(a')$, maka $f(a) = f(b) = a'$. Dengan demikian diperoleh:

$f^{-1}(\lambda)(x) = \lambda\big(f(b)f(r)\big) = \lambda\big(f(br)\big) = f^{-1}(\lambda)(br)$ atau $x \in I(b, f^{-1}(\lambda))$.

Sehingga terbukti $I(a, f^{-1}(\lambda)) \subseteq I(b, f^{-1}(\lambda))$ (2.6)

Selanjutnya ambil $y \in I(b, f^{-1}(\lambda))$, maka $f^{-1}(\lambda)(y) = f^{-1}(\lambda)(br')$ untuk suatu $r' \in R'$. Sehingga diperoleh $f^{-1}(\lambda)(y) = \lambda\big(f(br')\big) = \lambda\big(f(b)f(r')\big)$. Karena $a, b \in f^{-1}(a')$, maka $f(a) = f(b) = a'$, sehingga diperoleh

$f^{-1}(\lambda)(y) = \lambda\big(f(a)f(r')\big) = \lambda\big(f(ar')\big) = f^{-1}(\lambda)(ar')$ atau $y \in I(a, f^{-1}(\lambda))$.

Sehinga terbukti $I(b, f^{-1}(\lambda)) \subseteq I(a, f^{-1}(\lambda))$ (2.7)

Dari persamaan (2.6) dan (2.7) maka terbukti bahwa $I(a, f^{-1}(\lambda)) = I(b, f^{-1}(\lambda))$

C. Penutup

C.1. Simpulan

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Misalkan f adalah homomorfisma dari ring R ke R'. Jika subhimpunan fuzzy λ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R', maka $f^{-1}(\lambda)$ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R.
2. Misalkan f adalah homomorfisma surjektif dari ring R ke R' dan subhimpunan fuzzy λ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R. Jika λ adalah f-invarian, maka $f(\lambda)$ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R'.
3. Misalkan f adalah homomorfisma surjektif dari ring R ke R' dan subhimpunan fuzzy λ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R. Jika λ adalah f-invarian, maka $f\big(I(a, \lambda)\big) = I\big(f(a), f(\lambda)\big)$, untuk setiap $a \in R$.

4. Misalkan f adalah homomorfisma surjektif dari ring R ke R' dan subhimpunan fuzzy λ adalah subhimpunan fuzzy invarian translasional pada R. Untuk suatu $a' \in R'$, maka untuk setiap $a, b \in f^{-1}(a')$, $I(a, f^{-1}(\lambda)) = I(b, f^{-1}(\lambda))$

C.2. Saran

Dalam tulisan ini baru dikaji pada homorfisma ring, sehingga dapat diduga dapat dikerjakan pada struktur aljabar yang melibatkan satu operasi biner, misalnya pada grup, monoid, semigrup maupun grupoid terkait dengan homomorphisma yang didefinisikan kepadanya.

D. Daftar Pustaka

Adkins , Weintraub. 1992. *Algebra : An Approach Via Module Theory*. New York: Springer –Verlag.

Ajmal, Naseem. 1994. Homomorphism of Fuzzy groups, Corrrespondence Theorm and Fuzzy Quotient Groups. *Fuzzy Sets and Systems 61, p:329-339*. North-Holland

Aktaş, Haci. 2004. On Fuzzy Relation and Fuzzy Quotient Groups. *International Journal of Computational Cognition Vol 2 ,No 2, p: 71-79*

Asaad, Mohamed.1991. Group and Fuzzy Subgroup. *Fuzzy Sets and Systems 39, p:323-328*. North-Holland

Kandasamy, W.B.V. 2003. *Smarandache Fuzzy Algebra*. American Research Press and W.B. Vasantha Kandasamy Rehoboth. USA

Mordeson, J.N, Malik, D.S. 1998. *Fuzzy Commutative Algebra.* World Scientifics Publishing Co. Pte. Ltd. Singapore

Shabir, M. 2005. Fully Fuzzy Prime Semigroups. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences:1 p:163-168*

Ray, A.K, Ali, T. 2002. Ideals and Divisibility in A ring with Respect to A Fuzzy Subset. *Novi Sad J Math, Vol 32, No. 2, p: 67-75*

Zimmermann, H.J, 1991. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Kluwer Academic Publishers. USA.