Model Persediaan dengan Batasan Kapasitas Gudang dan Modal pada Kasus Backorder dan Lost Sales

Valeriana Lukitosari
Jurusan Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

Abstrak

Pada model persediaan terdapat serangkaian kebijakan memonitor tingkat persediaan, menentukan persediaan pengaman, kapan persediaan harus diisi, dan berapa besar pesanan harus dilakukan, kebijakan-kebijakan tersebut dipengaruhi oleh beberapa kendala antara lain kapasitas gudang dan modal, adanya unsur ketidakpastian (probabilistik) dalam permintaan (demand) atau waktu tunggu (lead time), serta akibat dari barang pesanan konsumen yang tidak tersedia (out of stock) yaitu terjadinya kasus backorder dan lost sales.

Untuk mendapatkan kuantitas pemesanan dan titik pesan kembali yang optimal dengan kendala batasan kapasitas gudang dan modal pada kasus backorder dan lost sales adalah dengan menggunakan metode pengali Lagrange dan metode Newton-Raphson.

Hasil penelitian adalah suatu rumus untuk menentukan kuantitas pemesanan barang yang optimal dan rumus untuk menentukan titik pesan kembali dengan batasan kapasitas gudang dan modal pada kasus backorder dan lost sales.

Kata kunci*: backorder, lost sales, metode pengali Lagrange, metode Newton-Raphson*

1. Pendahuluan

Persediaan memegang peranan penting untuk menjamin kelancaran mekanisme pemenuhan kebutuhan sehingga perusahaan yang dikelola mencapai kinerja yang optimal. Pada umumnya, permasalahan yang dihadapi dalam model atau sistem pengendalian persediaan adalah penentuan kuantitas barang yang akan dibuat atau dipesan (order quantity), saat pembuatan / pemesanan (reorder point), serta jumlah persediaan pengamannya (safety stock) yang dikaitkan dengan biaya pembelian (purchase cost), biaya pembuatan/pemesanan (order cost), biaya penyimpanan (holding cost) dan biaya kekurangan barang (stockout cost). Selain itu masalah penting yang muncul dalam sistem pengendalian persediaan adalah apa yang terjadi pada pesanan konsumen (customer’s order) ketika barang yang dipesan untuk sementara waktu tidak tersedia (out of stock). Hal ini menyebabkan terjadinya kasus backorder dan lost sales**.** Masalah lain yang muncul dalam pengendalian persediaan adalah jika terjadi perubahan permintaan dan waktu tunggu (lead time) atau mengikuti distribusi tertentu.

Dalam penelitian ini, model persediaan dengan batasan kapasitas gudang dan modal pada kasus backorder dan lost sales dengan menggunakan model Q dan diselesaikan dengan Metode Pengali Lagrange dan Metode Newton-Raphson.

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2007 dengan tema **“Peningkatan Keprofesionalan Peneliti, Pendidik & Praktisi MIPA”** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY Yogyakarta pada tanggal 25 Agustus 2007

2. Model Persediaan Probabilistik

Dalam model persediaan probabilistik diasumsikan tingkat kebutuhan dimasa mendatang dan waktu tunggu tidak diketahui dengan pasti (*variable*), tetapi dapat diketahui melalui distribusi dari data masa lalu. Pada model ini juga memperhitungkan adanya resiko dan ketidakpastian dalam perumusannya. Keuntungan menggunakan model pengendalian persediaan probabilistik adalah sebagai berikut:

1. Pada kenyataannya, permintaan suatu barang selalu berfluktuasi (tidak diketahui dengan pasti), sehingga pengendalian persediaan probabilistik lebih menguntungkan.
2. Model ini dapat dipakai untuk waktu tunggu yang tidak konstan (*variable*)
3. Kekurangan barang (*stockout*) diperbolehkan karena ada persediaan pengamannya (*safety stock*).

Berdasarkan pada bagaimana cara penanganan kekurangan yang terjadi, terdapat 2 kasus utama dalam permasalahan persediaan sebagai berikut [4] :

1. ***Backorder,*** terjadi saat item tidak tersedia lagi. Dan permintaan yang terjadi selama waktu ini akan dipenuhi dengan pemesanan yang dilakukan khusus. Biaya kekurangan terjadi karena adanya penambahan biaya proses, yaitu biaya pemesanan darurat untuk memenuhi kepuasan konsumen.
2. ***Lost sales***, timbul dari sebarang permintaan yang terjadi ketika item tidak tersedia lagi. Biaya kekurangan mencakup kehilangan keuntungan pada penjualan untuk beberapa kerugian yang tak tentu dan kehilangan kepercayaan konsumen, karena kemungkinan konsumen tidak akan kembali untuk mendapatkan barang yang lain dimasa mendatang.

Biaya total persediaan pertahun untuk model persediaan probabilistik adalah sebagai berikut[5]: $TC = Pc + Oc + Hc + Sc$ (1)

Total annual cost = purchase cost+ order cost + holding cost+ stockout cost

Beberapa hal yang perlu diperhatikan dalam model persediaan probabilistik pada kasus *backorder* dan *lost sales* adalah sebagai berikut:

1. Distribusi permintaan

Jika permintaan (*demand*) bersifat probabilistik maka diperlukan minimasi ekspektasi biaya persediaan. Jika distribusi permintaan kontinu maka minimasi ekspektasi biaya diperoleh dengan menurunkan ekspektasi biaya terhadap variabel tertentu dan kemudian diberi harga nol.

Untuk mendeskripsikan permintaan yang probabilistik digunakan dua parameter yaitu rata-rata (*mean*) dan standar deviasi. Perhitungan mean dan standar deviasi untuk distribusi kontinu adalah sebagai berikut:

$$\overline{M} = \int_0^{\infty} Mf(M)dM$$

dan

$$\sigma^2 = \int_0^{\infty} \left(M - \overline{M}\right)^2 f(M)dM$$

2. Safety stock / persediaan pengaman

Persediaan pengaman adalah suatu persediaan yang diadakan untuk menjaga kemungkinan terjadinya tingkat kebutuhan yang lebih tinggi dari pada perhitungan dan kemungkinan terjadinya keterlambatan pengiriman barang. Semakin besar tingkat safety stock suatu perusahaan maka mengurangi resiko kehabisan persediaan semakin kecil, tetapi biaya penyimpanan semakin besar karena jumlah total persediaan meningkat. Oleh karena itu perlu ditentukan besarnya persediaan pengaman yang dapat meminimasi biaya total persediaan.

2.1 Backorder

Dalam kasus *backorder* tidak terjadi kehilangan penjualan, tetapi konsumen menunggu pesanan mendatang karena persediaan tidak tersedia. Sehingga ekspetasi persediaan pengaman didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\infty} (B-M) f(M)dM \\ &= \int_0^{\infty} B\, f(M)dM - \int_0^{\infty} Mf(M)DM \\ &= B - \overline{M} \end{aligned} \tag{2}$$

dan ekspektasi jumlah *backorder* per waktu tunggu didefinisikan

$$E(M > B) = \int_B^{\infty} (M - B) f(M)dM \tag{3}$$

2.2 Lost Sales

Pada kasus *lost sales*, semua kekurangan persediaan hilang dan tidak terpenuhi. Sehingga ekspetasi persediaan pengaman dapat dituliskan sebagai berikut:

$$S = \int_0^B (B-M) f(M) dM$$
$$= \int_0^\infty (B-M) f(M) dM - \int_B^\infty (B-M) f(M) dM \quad (4)$$
$$= B\int_0^\infty f(M) dM - \int_0^\infty Mf(M) dM - \int_B^\infty (B-M) f(M) dM$$
$$= B - \overline{M} - \int_B^\infty (B-M) f(M) dM$$

Ekspektasi jumlah *lost sales* per waktu tunggu didefinisikan

$$E(M > B) = \int_B^\infty (M - B) f(M) dM$$

2.3. Biaya Total Pada Kasus Backorder dan Lost Sales

Pada model persediaan probabilistik diketahui bahwa biaya total persediaan pertahun persamaan (1), maka akan diperoleh ekspektasi biaya total persediaan pada kasus backorder untuk beberapa jenis barang, yaitu sebagai berikut:

$$TC(Q_1,...,Q_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i R_i + \frac{R_i}{Q_i}\left(C_i + A_i E(M_i > B_i)\right) + H_i\left(\frac{Q_i}{2} + B_i - \overline{M}_i\right)\right] \quad (5)$$

Pada kasus lost sales, biaya penyimpanan barang adalah sebagai berikut:

$$Hc = \left(H \;x\; \frac{Q}{2}\right) + \left(H \;x\left(B - \overline{M} - \int_B^\infty (B - M) f(M) dM\right)\right)$$
$$= H\left(\frac{Q}{2} + B - \overline{M} - \int_B^\infty (B - M) f(M) dM\right)$$

Jadi ekspektasi biaya total persediaan untuk kasus *lost sales* untuk beberapa jenis barang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$TC(Q_1,...,Q_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i R_i + \frac{R_i}{Q_i}\left(C_i + G_i E(M_i > B_i)\right) + H_i\left(\frac{Q_i}{2} + B_i - \overline{M}_i + E(M_i > B_i)\right)\right] \quad (6)$$

3. Batasan Kapasitas Gudang dan Modal

Diasumsikan W adalah luas ruang penyimpanan maksimum yang tersedia (kapasitas gudang), sedangkan luas penyimpanan per unit barang ke-i adalah w_i dan kuantitas pemesanan barang ke-i adalah Q_i, maka batasan kebutuhan ruang penyimpanan adalah sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i Q_i \le W$$

dan jika diasumsikan J adalah modal yang diinvestasikan dalam persediaan, sedangkan biaya pembelian barang ke-i adalah P_i dengan tingkat persediaan rata-rata pertahun adalah $Q_i/2$, maka batasan modal yang diinvestasikan dalam persediaan adalah sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{Q_i}{2} \le J$$

Jika kedua batasan tersebut di perhitungkan maka persamaan (5) menjadi fungsi obyektif dengan 2 kendala untuk kasus backorder, yaitu sebagai berikut:

Minimumkan:

$$TC(Q_1,...,Q_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i R_i + \frac{R_i}{Q_i}\left(C_i + A_i E(M_i > B_i)\right) + H_i\left(\frac{Q_i}{2} + B_i - \overline{M}_i\right)\right]$$

dengan kendala: (7)

$$(g_1) \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i Q_i}{2} \le J$$

$$(g_2) \quad \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i \le W$$

Untuk menyelesaikan persamaan (7) digunakan metode pengali *Lagrange* dan metode *Newton-Raphson*. Sehingga persamaan (7) menjadi fungsi pengali *Lagrange* sebagai berikut:

$$L(Q_1,...,Q_n,\lambda_{(1)},\lambda_{(2)}) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i R_i + \frac{R_i}{Q_i}\left(C_i + A_i E(M_i > B_i)\right) + H_i\left(\frac{Q_i}{2} + B_i - \overline{M}_i\right)\right] + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i Q_i}{2} - J\right) + \gamma\left(\sum_{i=1}^{2} w_i Q_i - W\right) \quad (8)$$

dengan λ dan γ sebagai faktor pengali *Lagrange* nonnegatif.

Persamaan (8) diturunkan masing-masing terhadap Q_i, B_i, λ dan γ, sehingga diperoleh:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{R_i}{Q_i^2}\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right) + \frac{H_i}{2} + \lambda\frac{P_i}{2} + \gamma\, w_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{R_i}{Q_i^2}\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right) + \frac{H_i}{2} + \lambda\frac{P_i}{2} + \gamma\, w_i = 0$$

$$\frac{R_i}{Q_i^2}\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right) = \frac{H_i}{2} + \lambda\frac{P_i}{2} + \gamma\, w_i$$

$$Q_i^*(\lambda,\gamma) = \left\{\frac{2R_i\left[C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right]}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i}\right\}^{1/2} \tag{9}$$

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial B_i} = \frac{A_i R_i}{Q_i}\frac{\partial}{\partial B_i}E\left(M_i > B_i\right) + H_i$$

$$= \frac{A_i R_i}{Q_i}\frac{\partial}{\partial B_i}\left(\int_{B_i}^{\infty}\left(M_i - B_i\right) f\left(M_i\right) dM_i\right) + H_i$$

$$= \frac{A_i R_i}{Q_i}\left(-\int_{B_i}^{\infty} f\left(M_i\right) dM_i\right) + H_i$$

$$= -\frac{A_i R_i}{Q_i}P\left(M_i > B_i\right) + H_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{A_i R_i}{Q_i}P\left(M_i > B_i\right) + H_i = 0$$

$$P\left(M_i > B_i\right) = \frac{H_i Q_i}{A_i R_i} \tag{10}$$

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i Q_i}{2} - J = 0 \tag{11}$$

$$(4)\ \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i Q_i - W = 0 \tag{12}$$

Jadi kuantitas pemesanan yang optimal untuk barang ke-i pada kasus *backorder* dengan kendala batasan kapasitas gudang dan modal diperoleh dari persamaan (9) dan titik pemesanan kembali dapat diperoleh dari persamaan (10) serta dengan menggunakan tabel distribusi normal standar yaitu:

$$B_i = \overline{M}_i + Z_i\sigma_i$$

Pada persamaan (9) masih memuat faktor pengali *Lagrange* nonnegatif λ dan γ yang merupakan variabel yang belum diketahui. Nilai λ dan γ dapat dicari dengan metode *Newton-Raphson*, yaitu dengan memisalkan persamaan (11) dan (12) masing-masing menjadi $f(\lambda)$ dan $f(\gamma)$ sehingga diperoleh:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{P_i}{2} \left[\frac{2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i} \right]^{1/2} \right\} - J = 0$$

$$\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{P_i}{2} \left[\frac{2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i} \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{2} \left[2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)\right]^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i\right)^{-3/2} \left(P_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\frac{P_i^2}{4} \frac{\left[2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)\right]^{1/2}}{\left(H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i\right)^{3/2}}$$

$$f'(\lambda) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2 Q_i^*(\lambda,\gamma)}{4\left(H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i\right)}$$

Jadi faktor pengali *Lagrange* λ dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Newton-Raphson* sebagai berikut:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{f(\lambda_k)}{f'(\lambda_k)} \qquad ; k = 0,1,2,...$$

$$= \lambda_k + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_i Q_i^*(\lambda_k,\gamma_k)}{2} \right) - J}{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2 Q_i^*(\lambda_k,\gamma_k)}{4\left(H_i + \lambda_k P_i + 2\gamma_k\, w_i\right)}} \qquad (13)$$

Sedangkan untuk faktor pengali *Lagrange* γ adalah sebagai berikut:

$$f(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ w_i \left[\frac{2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i} \right]^{1/2} \right\} - W = 0$$

$$\frac{\partial f(\gamma)}{\partial \gamma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ w_i \left[\frac{2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i} \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \left[2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)\right]^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i\right)^{-3/2} \left(2w_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} - w_i^2 \frac{\left[2R_i\left(C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right)\right]^{1/2}}{\left(H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i\right)^{3/2}}$$

$$f(\gamma) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2 Q_i^*(\lambda,\gamma)}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma w_i}$$

Jadi faktor pengali *Lagrange* γ dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Newton-Raphson* sebagai berikut:

$$\gamma_{k+1} = \gamma_k - \frac{f(\gamma_k)}{f'(\gamma_k)} \qquad ; k = 0,1,2,...$$

$$= \gamma_k + \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[w_i\ Q_i^*(\lambda_k,\gamma_k)\right] - W}{\sum_{i=1}^{n}\frac{w_i^2\ Q_i^*(\lambda_k,\gamma_k)}{H_i + \lambda_k P_i + 2\gamma_k w_i}} \qquad (14)$$

Jika kendala batasan kapasitas gudang dan modal diperhitungkan pada kasus *lost sales* yaitu pada persamaan (6) menjadi fungsi obyektif dengan 2 kendala yaitu sebagai berikut:

Minimumkan:

$$TC(Q_1,...,Q_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i R_i + \frac{R_i}{Q_i}\left(C_i + G_i E(M_i > B_i)\right) + H_i\left(\frac{Q_i}{2} + B_i - \overline{M}_i + E(M_i > B_i)\right)\right]$$

dengan kendala: (15)

$$(g_1) \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i Q_i}{2} \le J$$

$$(g_2) \quad \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i \le W$$

Untuk menyelesaikan persamaan (15) digunakan metode pengali *Lagrange* dan metode *Newton-Raphson*. Sehingga persamaan (15) menjadi fungsi pengali *Lagrange* sebagai berikut:

$$L(Q_1,...,Q_n,\lambda_{(1)},\lambda_{(2)}) = \sum_{i=1}^{n}\left[P_i R_i + \frac{R_i}{Q_i}\left(C_i + G_i E(M_i > B_i)\right) + H_i\left(\frac{Q_i}{2} + B_i - \overline{M}_i + E(M_i > B_i)\right)\right] +$$

$$\alpha\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i Q_i}{2} - J\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^{2} w_i Q_i - W\right) \qquad (16)$$

dengan α dan β sebagai faktor pengali *Lagrange* nonnegatif.

Persamaan (16) diturunkan masing-masing terhadap Q_i, B_i, α dan β, sehingga diperoleh:

$$(1)\ \frac{\partial L}{\partial Q_i} = -\frac{R_i}{Q_i^2}\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right) + \frac{H_i}{2} + \alpha\frac{P_i}{2} + \beta w_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial Q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{R_i}{Q_i^2}\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right) + \frac{H_i}{2} + \alpha\frac{P_i}{2} + \beta w_i = 0$$

$$\frac{R_i}{Q_i^2}\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right) = \frac{H_i}{2} + \alpha\frac{P_i}{2} + \beta w_i$$

$$Q_i^*(\alpha,\beta) = \left\{\frac{2R_i\left[C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right]}{H_i + \alpha P_i + 2\beta w_i}\right\}^{1/2} \tag{17}$$

$$(2)\ \frac{\partial L}{\partial B_i} = \frac{G_i R_i}{Q_i}\frac{\partial}{\partial B_i}E\left(M_i > B_i\right) + H_i + H_i\frac{\partial}{\partial B_i}E\left(M_i > B_i\right)$$

karena

$$\frac{\partial}{\partial B_i}E\left(M_i > B_i\right) = \frac{\partial}{\partial B_i}\left(\int_{B_i}^{\infty}\left(M_i - B_i\right)f\left(M_i\right)dM_i\right)$$

$$= -\int_{B_i}^{\infty} f\left(M_i\right)dM_i$$

$$= -P\left(M_i > B_i\right)$$

akibatnya:

$$\frac{\partial L}{\partial B_i} = \frac{G_i R_i}{Q_i}\left(-\int_{B_i}^{\infty} f\left(M_i\right)dM_i\right) + H_i + H_i\left(-\int_{B_i}^{\infty} f\left(M_i\right)dM_i\right)$$

$$= -\frac{G_i R_i}{Q_i}P\left(M_i > B_i\right) + H_i - H_i P\left(M_i > B_i\right)$$

$$= H_i - \left(\frac{G_i R_i}{Q_i} + H_i\right)P\left(M_i > B_i\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial B_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad H_i - \left(\frac{G_i R_i}{Q_i} + Hi\right)P\left(M_i > B_i\right) = 0$$

$$P\left(M_i > B_i\right) = \frac{H_i Q_i}{G_i R_i + H_i Q_i} \tag{18}$$

$$(3)\ \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{P_i Q_i}{2} - J = 0 \tag{19}$$

$$(4)\ \frac{\partial L}{\partial \beta} = \sum_{i=0}^{\infty} w_i Q_i - W = 0 \tag{20}$$

Jadi kuantitas pemesanan yang optimal untuk barang ke-i pada kasus *lost sales* dengan kendala batasan kapasitas gudang dan modal diperoleh dari persamaan (17) dan titik pemesanan kembali dapat diperoleh dari persamaan (18) serta dengan menggunakan tabel distribusi normal standar yaitu:

$$B_i = \overline{M}_i + Z_i \sigma_i$$

Pada persamaan (17) masih memuat faktor pengali *Lagrange* nonnegatif α dan β yang merupakan variabel yang belum diketahui. Nilai α dan β dapat dicari dengan metode *Newton-Raphson*, yaitu dengan memisalkan persamaan (19) dan (20) masing-masing menjadi $f(\alpha)$ dan $f(\beta)$ sehingga diperoleh:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{P_i}{2} \left[\frac{2R_i (C_i + A_i E(M_i > B_i))}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma\, w_i} \right]^{1/2} \right\} - J = 0$$

$$\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{P_i}{2} \left[\frac{2R_i (C_i + G_i E(M_i > B_i))}{H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i} \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i}{2} [2R_i (C_i + G_i E(M_i > B_i))]^{1/2} \left(-\frac{1}{2} \right) (H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i)^{-3/2} (P_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\frac{P_i^2}{4} \frac{[2R_i (C_i + G_i E(M_i > B_i))]^{1/2}}{(H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i)^{3/2}}$$

$$f'(\alpha) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2 Q_i^*(\alpha, \beta)}{4(H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i)}$$

Jadi faktor pengali *Lagrange* α dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Newton-Raphson* sebagai berikut:

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{f(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)} \qquad ; k = 0,1,2,...$$

$$= \alpha_k + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{P_i Q_i^*(\alpha_k, \beta_k)}{2} \right) - J}{\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i^2 Q_i^*(\alpha_k, \beta_k)}{4(H_i + \alpha_k P_i + 2\beta_k\, w_i)}} \qquad (21)$$

Sedangkan untuk faktor pengali *Lagrange* β adalah sebagai berikut: $f(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ w_i \left[\frac{2R_i\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right)}{H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i} \right]^{1/2} \right\} - W = 0$

$$\frac{\partial f(\beta)}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ w_i \left[\frac{2R_i\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right)}{H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i} \right]^{1/2} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} w_i \left[2R_i\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right)\right]^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i\right)^{-3/2} \left(2w_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} - w_i^2 \; \frac{\left[2R_i\left(C_i + G_i E\left(M_i > B_i\right)\right)\right]^{1/2}}{\left(H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i\right)^{3/2}}$$

$$f'(\beta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2 Q_i^*(\alpha, \beta)}{H_i + \alpha P_i + 2\beta\, w_i}$$

Jadi faktor pengali *Lagrange* β dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Newton-Raphson* sebagai berikut:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \frac{f(\beta_k)}{f'(\beta_k)} \qquad ; k = 0,1,2,...$$

$$= \beta_k + \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[w_i\; Q_i^*\left(\alpha_k, \beta_k\right)\right] - W}{\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i^2\; Q_i^*\left(\alpha_k, \beta_k\right)}{H_i + \alpha_k P_i + 2\beta_k w_i}} \tag{22}$$

Dari persamaan-persamaan diatas terlihat saling bergantung satu sama lain. Sehingga untuk mencari kuantitas pemesanan optimal dan titik pemesanan kembali dengan kasus backorder dan lost sales diperlukan beberapa iterasi.

4. Penutup

Dari pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa rumus untuk mencari kuantitas pemesanan optimal barang ke-i dalam model persediaan dengan batasan kapasitas gudang dan modal pada kasus *backorder* dan *lost sales* adalah sebagai berikut:

$$Q_i^* = \left\{ \frac{2R_i\left[C_i + A_i E\left(M_i > B_i\right)\right]}{H_i + \lambda P_i + 2\gamma w_i} \right\}^{1/2}$$

Titik pesan kembali untuk permintaan dalam waktu tunggu yang berdistribusi normal adalah sebagai berikut:

$$B_i = \overline{M}_i + S_i$$
$$= \overline{M}_i + Z_i \sigma_i$$

dengan probabilitas *stockout* sebagai berikut:

Kasus *backorder*: $$P(M_i > B_i) = \frac{H_i Q_i}{A_i R_i}$$

Kasus *lost sales*: $$P(M_i > B_i) = \frac{H_i Q_i}{A_i R_i + H_i Q_i}$$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Arman Hakim Nasution, *Perencanaan Dan Pengendalian Produksi*, Guna Widya, Jakarta,1999.

[2] Chapra, S.C., dan Canale, R.P., *Metode Numerik,* Alih bahasa: I Nyoman Susila, Edisi Kedua, Erlangga, Jakarta, 1988.

[3] Erwina Chendra, Penentuan Kuantitas Pemesanan yang Optimal dan Titik Pemesanan Kembali dalam Sistem Persediaan Probabilistik untuk Berbagai Jenis Barang dengan Batasan Kapasitas Gudang, *Integral,* No. 2 Vol. 8, 65-72, 2003.

[4] Hicks, Philip E, *Industrial Engineering and Management: A New Perspective*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc., New York, 1994.

[5] Silver, Edward A., Peterson,Rein, *Decision System for Inventory Management and Production Planning,* Second Edition, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[5] Taha, Hamdy, *Riset Operasi, Suatu Pengantar,* jilid 2, Binarupa Aksara, 1997.

DAFTAR NOTASI

Pc = biaya pembelian

Oc = biaya pemesanan

Hc = biaya penyimpanan

Sc = biaya kekurangan persediaan

M = permintaan selama waktu tunggu dalam unit

σ = standar deviasi dari permintaan selama waktu tunggu

$f(M)$ = fungsi kepadatan probabilitas dari permintaan selama waktu tunggu

B = titik pemesanan kembali

$P(M > B)$ = probabilitas kekurangan persediaan

$E(M > B)$ = ekspektasi kekurangan persediaan selama waktu tunggu dalam unit

H = biaya penyimpanan barang per unit per tahun

Q/2 = rata-rata persediaan barang per tahun

$\overline{M}$ = rata-rata permintaan dalam waktu tunggu dalam unit

n = jumlah barang $(n > 1)$

$TC(Q_1,...,Q_n)$ = total biaya untuk beberapa jenis barang per tahun

P_i = biaya pembelian barang ke-i per unit

R_i = permintaan per tahun barang ke-i dalam unit

Q_i = kuantitas pemesanan barang ke-i dalam unit

C_i = biaya pemesanan barang ke-i per sekali pesan

H_i = biaya penyimpanan barang ke-i per unit per tahun

A_i = biaya backorder barang ke-i per unit

M_i = permintaan dalam waktu tunggu barang ke-i dalam unit

$\overline{M}_i$ = rata-rata permintaan dalam waktu tunggu barang ke-i dalam unit

B_i = titik pemesanan kembali barang ke-i

$E(M_i > B_i)$ = ekspetasi jumlah backorder barang ke-i per waktu tunggu

G_i = biaya *lost sales* barang ke-i per unit

J = investasi persediaan maksimum (modal)

w_i = luas permukaan barang ke-i per unit

W = luas ruang penyimpanan maksimum (kapasitas gudang)