dengan sebuah bank bersama, yaitu European Central Bank (ECB). Model mengabaikan interaksi eksternal dengan negara-negara non EMU, untuk penyederhanaan. Model memenuhi persamaan-persamaan

$$y(t) = \delta s(t) - \gamma r(t) + \rho y(t) + \eta f(t),$$

$$\dot{p}(t) = \xi y(t),$$

$$m_i(t) - p_i(t) = K_i y_i(t) - \lambda_i i_E(t),$$

$$\delta = \begin{pmatrix} -\sum_{i\in n/1}\delta_{1i} & \delta_{12} & \delta_{13} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & -\sum_{i\in n/2}\delta_{2i} & \delta_{23} & \cdots & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & -\sum_{i\in n/3}\delta_{3i} & \cdots & \delta_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} & \cdots & -\sum_{i\in n/n}\delta_{ni} \end{pmatrix},$$

$$s(t) = \begin{pmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & 0 & s_{23} & \cdots & s_{2n} \\ s_{31} & s_{32} & 0 & \cdots & s_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & s_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_n \end{pmatrix},$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 0 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2n} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 0 & \cdots & \rho_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$$

dengan $s_{ij}(t) = p_j(t) - p_i(t)$, $s_{ij} = -s_{ji}$, y_j adalah keluaran real negara j, s_{ij} menunjukkan tingkat persaingan negara j terhadap negara i, $r_j = i_E(t) - \dot{p}_j(t)$, merupakan rata-rata penanaman modal, p_j tingkat harga dan f_j merupakan defisit fiskal di negara $j \in \{1,2\}$, dan i_E nilai nominal modal bersama.

Diasumsikan badan fiskal masing-masing negara meminimalkan fungsi objektif berbentuk kuadrat dengan tujuan akan meregulasikan inflasi, keluaran real, dan defisit fiskal yang berbentuk

$$J_i = \int_0^T \left\{ \alpha_i \dot{p}_i^2(t) + \beta_i y_i^2(t) + \chi_i f_i^2(t) \right\} e^{-\theta t} dt, \quad i = 1,2 \ ,$$

(1)

dengan α_i, β_i, dan χ_i konstanta. Fungsi objektif diambil berbentuk kuadratis, sebagai bentuk pendekatan yang cukup baik untuk sembarang fungsi non linear. Sedangkan variabel inflasi, keluaran real dan defisit fiskal adalah faktor-faktor standard yang paling berpengaruh pada masalah stabilisasi ekonomi makro ([1], [2], dan [5]). Sedang bank pusat bersama bertujuan meminimalkan

$$J_E = \int_0^T \left\{ \left(\alpha_{1E} \dot{p}_1(t) + \alpha_{2E} \dot{p}_2(t) \right)^2 + (\beta_{1E} y_1(t) + \beta_{2E} y_2(t))^2 + \chi_E i_E^2(t) \right\} e^{-\theta t} dt \ ,$$

$i = 1,2$,

(2)

dengan α_{iE}, β_{iE}, dan χ_{iE} konstanta. Untuk penyederhanaan diambil $\theta = 0$.

Rata-rata inflasi dan keluaran dari kedua negara menggunakan ukuran relatif $\{\omega, 1-\omega\}$, yaitu

$$\dot{p}_A(t) = \omega \dot{p}_1 + (1-\omega)\dot{p}_2 \ \text{dan} \ y_A(t) = \omega y_1 + (1-\omega) y_2 .$$

Jika diambil vektor keadaan $x = s$ maka dengan menyusun dan mereduksi persamaan-persamaan di atas diperoleh persamaan $\dot{s} = \phi_1 s(t) + \phi_2 f_1(t) + \phi_3 f_2(t) + \phi_4 i_E(t)$, yang merupakan sistem biasa (lihat [1], [2], dan [5]).

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model dinamis masalah ekonomi di EMU tersebut merupakan sistem berskala besar yang subsistemnya saling berkaitan. Untuk penyederhanaan penulisan akan dibahas model 3 negara. Jika diambil vektor keadaan deskriptor $x = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & s_{12} & s_{13} & s_{23} & y_1 & y_2 & y_3 & m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^T$, vektor kontrol $u = \begin{pmatrix} i_E & f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix}^T$ dan keluaran $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}^T$, maka persamaan dinamik model ekonomi di EMU dibawa menjadi sistem deskriptor secara natural yang berbentuk

$$E\dot{x} = Ax + Bu ,$$

$$y = Cx ,$$

(3)

Dengan mengambil state x pada sistem deskriptor diperoleh fungsi cost untuk blok negara ke i berbertuk blok diagonal sebagai berikut:

$$\int_0^T \left(x^T Q_i x + R_{ii} f_i^2(t) \right) dt , \qquad \text{i=1,2,3}$$

Sedang fungsi cost untuk bank pusat menjadi berbentuk

$$\int_0^T \left(x^T Q_E x + R_{EE} i_E^2(t) \right) dt .$$

Terlihat bahwa model dinamis interaksi fiskal moneter *N* negara, dapat dibawa menjadi suatu permainan dinamis sistem deskriptor *N* pemain.

3.1 Penyelesaian optimal Nash

Untuk mencari penyelesaian optimal Nash [8] *N* pemain dibentuk masalah nilai eigen diperumum (dalam aplikasi tiga negara di EMU pada makalah ini berarti terdapat *4* pemain)

$$\tilde{A} z = \lambda \tilde{E} z .$$

Misalkan *U* adalah vektor eigen diperumum.yang berhubungan dengan nilai eigen stabil. Untuk masalah nilai eigen diperumum akan diperoleh persamaan

$$\tilde{A} U = \tilde{E} U W ,$$

Partisikan *U* sebagai $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_{N+1} & U_{N+2} & \cdots & U_{2N+1} \end{bmatrix}$.

Jika $rank E = r \le n$ maka *E* akan mempunyai *(n-r)* nilai eigen nol. Misalkan V_1 adalah vektor eigen yang berhubungan dengan nilai-nilai eigen nol. Maka

$$EV_1 = 0 .$$

(5)

Misalkan V_2 adalah matriks yang berhubungan dengan vektor-vektor eigen yang berhubungan dengan *(n-r)* nilai eigen nol dari E^T . Maka diperoleh

$$E^T V_2 = 0 .$$

(6)

Diasumsikan matriks $\begin{pmatrix} U_1 & V_1 \end{pmatrix}$ non singular. Dan diasumsikan matriks

$$\begin{pmatrix} A-\lambda E & B_1 & \cdots & B_N \\ Q_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ Q_N & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{NN} \end{pmatrix}.$$

Mempunyai rank penuh.

Maka kendali optimal Nash untuk N pemain memenuhi

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_N \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_{N+1} \end{pmatrix} \quad V_2 \begin{pmatrix} H_1 \\ h_2 H_1 \\ \vdots \\ h_{N+1} H_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} U_1 & V_1 \end{pmatrix}^{-1},$$

dengan $H_1, h_2, \cdots h_{N+1}$ bernilai sembarang.

Kesimpulan

Model persamaan dinamis masalah interaksi fiskal moneter N negara dapat dibawa secara natural menjadi sistem deskriptor. Fungsi objektif dapat dibawa menjadi bentuk kuadratis blok diagonal.

Ucapan Terimakasih

Tim penulis mengucapkan terimakasih sebesar-besarnya pada Program Insentif Riset Dasar Joint Research Internasional Kemmenristek tahun 2007 yang telah membiayai penelitian ini.

Daftar Pustaka

[1] Aarle, B.Van, Engwerda, J.C., and Plasmans, J.E.J., *Monetary and Fiscal Policy Interaction in EMU: A Dynamic Game Approach*, Annals of Operations Research, 109, 229-264, 2002.

[2] Engwerda, J.C., Aarle, B.Van and Plasmans, J.E.J., *The infinite horizon open-loop Nash LQ game: An application to the EMU*, Annals of Operations Research, 88, 251-273, 1999.

[3] Engwerda, J.C., *On the open-loop Nash Equilibrium in the LQ-games*, Journal of Economic Dynamics and Control, 22, 729-762, 1998.

[4] Katayama, T., dan Minamino, K., 1992, Linear Quadratic Regular and Spectral Factorization for Continous Time Descriptor Systems, *Proceedings of the 31st Conference on decision and Control*, Tucson, Arizona, 967-972.

[5] Plasmans, J.E.J., Engwerda, J.C., Aarle, B. van, Bartolomeo, G. di, & Michalak, T. ,*Dynamic Modelling of Monetary and Fiscal Cooperation among Nations.* New York: Springer-Verlag, 2006.

[6] Salmah, Bambang, S., Nababan, S.M., and Wahyuni, S., *Non-Zero-Sum Linear Quadratic Dynamic Game with Descryptor Systems*, Proceeding Asian Control Conference, Singapura, 1602-1607, 2002.

[7] Salmah, Bambang, S., Nababan, S.M., and Wahyuni, S., *Generalized Differential Riccati Equation For Two-Player Linear Quadratic Dynamic Game Descriptor System,* Prosiding ICAM05 (International Conference on Applied Mathematics 2005), ITB, Bandung, 245-253, 2005.

[8] Salmah, *N-Player Linear Quadratic Dynamic Game for Descriptor System*, SEAMS-GMU Conference, UGM, Yogyakarta, 2007 (dipresentasikan).

Appendix

Persamaan deskriptor untuk interaksi fiskal moneter 3 negara berbentuk seperti persamaan (3) dengan

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & a_{23} & -1 & \rho_{12} & \rho_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{12} & b_{13} & b_{23} & \rho_{21} & -1 & \rho_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{12} & c_{13} & c_{23} & \rho_{31} & \rho_{32} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$a_{12} = -2\delta_{12} - \delta_{13}$, $\quad a_{13} = -2\delta_{13} - \delta_{12}$, $\quad a_{23} = -\delta_{13} + \delta_{12}$,

$b_{12} = \delta_{21} + \delta_{23} + \delta_{21}$, $\quad b_{13} = -\delta_{23} + \delta_{21}$, $\quad b_{23} = -\delta_{23} - \delta_{21} - \delta_{23}$,

$c_{12} = -\delta_{32} - \delta_{31}$, $\quad c_{13} = \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{31}$, $\quad c_{23} = \delta_{31} + 2\delta_{32}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta_1 & 0 & 0 & -\gamma_1 \\ 0 & \eta_2 & 0 & -\gamma_2 \\ 0 & 0 & \eta_3 & -\gamma_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix}, \text{ dan } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T .$$