

Sifat Pasangan *Adjoin* Relatif Terhadap Bentuk Bilinear

Oleh :

K a r y a t i

Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA, Universitas Negeri Yogyakarta
Email: yatiuny@yahoo.com

Abstract

Let X and Y be vector spaces over a field K , then be constructed a bilinear form $B : X \times Y \longrightarrow K$. This paper discuss the properties of adjoin pairs with respect to the bilinear form B .

The result show that : (f, g) is an Adjoin pairs if and only if $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, $g^* \in L(Y^*)$ defined as $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$; (f, g) is Adjoin pairs if and only if $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, $f^* \in L(X^*)$ defined as $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$; If $B : X \times Y \rightarrow K$ is a non degenerate bilinear form and the dimension of X and Y are finite, then for every $f \in L(X)$ there is $g \in L(Y)$ such that (f, g) is Adjoin pairs, $N(g) = \widehat{R(f)}$ and $\widehat{R(g)} = N(f)$. As the corollary, for every $g \in L(Y)$ there is $f \in L(X)$ such that (f, g) is Adjoin pairs, $N(g) = \widehat{R(f)}$ and $\widehat{R(g)} = N(f)$.

Keywords: *Bilinear form, non degenerate, adjoin pairs*

1. Pendahuluan

Dari Aljabar Linear diperoleh beberapa pengertian dan sifat-sifat sebagai berikut (Lang :1970): Misalkan X dan Y ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan K . Himpunan $X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ membentuk ruang vektor atas lapangan K terhadap operasi jumlah dan pergandaan biasa.

Pemetaan $B : X \times Y \longrightarrow K$ disebut bentuk bilinear apabila linear terhadap setiap variabelnya. Pemetaan ini menentukan dua pemetaan linear, yaitu: $B_* : X \rightarrow Y^*$ dan $B^* : Y \rightarrow X^*$ yang masing-masing didefinisikan oleh $(x)B_* = (x, -)B$ dan $(y)B^* = (-, y)B$. Dalam tulisan ini fungsi dianggap sebagai operator kanan.

Selanjutnya yang dimaksud dengan $L(X)$ adalah himpunan transformasi linear dari ruang vektor X ke dirinya sendiri. Transformasi $f \in L(X)$ dikatakan *Adjoin* dengan

$g \in L(Y)$ relatif terhadap bentuk bilinear B jika $((x)f, y)B = (x, (y)g)B$ untuk semua $x \in X$ dan $y \in Y$. Dalam hal demikian dikatakan juga $g \in L(Y)$ *Adjoin* dengan $f \in L(X)$ relatif terhadap B . Selanjutnya pasangan (f, g) disebut pasangan *Adjoin*.

Dalam penulisan ini akan diselidiki beberapa sifat pasangan adjoin relatif terhadap bentuk bilinear B .

2. Ruang Dual

Misalkan X ruang vektor atas lapangan K ; himpunan $X^* = \{f : X \rightarrow K \mid f \text{ transformasi linear}\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan K terhadap operasi jumlah dua fungsional biasa dan pergandaan skalar. Selanjutnya ruang vektor X^* ini disebut ruang dual dari ruang vektor X . Salah satu sifat ruang dual X^* adalah mempunyai dimensi yang sama dengan ruang vektor X .

3. Sifat Bentuk Bilinear

Bentuk bilinear $B : X \times Y \rightarrow K$ menentukan dua pemetaan linear yaitu $B_* : X \rightarrow Y^*$ dan $B^* : Y \rightarrow X^*$ yang didefinisikan oleh: $(x)B_* = (x, -)B$ dan $(y)B^* = (-, y)B$. *Kernel* dari $B_* : X \rightarrow Y^*$ adalah $N(B_*) = \{x \in X \mid (x)B_* = \theta_*\}$, dengan θ_* adalah fungsi nol dari Y ke K . Hal yang sama $N(B^*) = \{y \in Y \mid (y)B^* = \theta^*\}$ dan θ^* adalah fungsi nol dari X ke K . Bentuk bilinear B dikatakan *non-degenerate* jika $N(B_*) = N(B^*) = \{0\}$.

Annihilator dari U (relatif terhadap B), dengan U suatu ruang bagian dari X , adalah $\hat{U} = \{y \in Y \mid (u, y)B = 0, \forall u \in U\}$. Dengan mudah dapat ditunjukkan bahwa \hat{U} adalah ruang bagian ruang vektor Y , yaitu: untuk setiap $a, b \in \hat{U}$, maka $(u, a + b)B = (u, a)B + (u, b)B = 0 + 0 = 0$ untuk setiap $u \in U$. Sehingga $a + b \in \hat{U}$. Untuk setiap $\alpha \in K$ dan untuk setiap $a \in \hat{U}$, maka $(u, \alpha a)B = \alpha (u, a)B = \alpha 0 = 0$. Sehingga $\alpha a \in \hat{U}$.

Hal yang sama didefinisikan *annihilator* ruang bagian V , dengan V ruang bagian dari ruang Y , yaitu : $\hat{V} = \{x \in X \mid (x, v)B = 0, \forall v \in V\}$. Secara analog, dapat ditunjukkan bahwa \hat{V} adalah ruang bagian ruang vektor X . Jika ruang vektor X dan Y berdimensi hingga dan bentuk bilinear $B: X \times Y \rightarrow K$ merupakan bentuk bilinear yang *non degenerate*, maka dimensi X sama dengan dimensi Y (Karyati: 2002).

Dalam bagian berikut akan dibicarakan syarat perlu dan cukup Pasangan Adjoin yang penulis kembangkan dari tulisan Rajendran dan Nambooripad (2000).

4. Sifat Pasangan Adjoin relatif terhadap Bentuk Bilinear

Lemma dan akibat berikut memberikan syarat perlu dan cukup agar (f, g) merupakan pasangan Adjoin:

Lemma 1. Jika $(f, g) \in L(X) \times L(Y)$ maka kondisi berikut ekuivalen:

a. (f, g) adalah pasangan adjoin

b. $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, dengan $g^* \in L(Y^*)$ yang didefinisikan $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$

Bukti:

(\Rightarrow)

Dari yang diketahui dipenuhi : $(B_*)g^* = g \circ B_*$.

(f, g) pasangan adjoin $\Rightarrow ((x)f, y)B = (x, (y)g)B$ (definisi padangan adjoin)

$$\Rightarrow (y)B_{(x)f} = ((y)g)B_x \quad (\forall y \in Y, B \text{ menentukan dua pemetaan linear})$$

$$\Rightarrow (y)B_{(x)f} = (y)(g \circ B_x) \quad (\forall y \in Y)$$

$$\Rightarrow B_{(x)f} = g \circ B_x \quad (\forall x \in X)$$

$$\Rightarrow ((x)f)B_* = g \circ (x)B_* \quad (\text{definisi } B_*)$$

$$\Rightarrow ((x)f)B_* = ((x)B_*)g^* \quad (\text{definisi } g^*)$$

$$\Rightarrow (x)(f \circ B_*) = (x)(B_* \circ g^*) \quad (\text{definisi komposisi fungsi})$$

$$\Rightarrow f \circ B_* = B_* \circ g^*.$$

(\Leftarrow)

Dipenuhi $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, dengan $g^* \in L(Y^*)$ yang didefinisikan $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$, sehingga:

$$\begin{aligned}
 f \circ B_* = B_* \circ g^* &\Rightarrow (x)(f \circ B_*) = (x)(B_* \circ g^*) && (\forall x \in X) \\
 &\Rightarrow ((x)f)B_* = ((x)B_*)g^* && (\text{definisi komposisi fungsi}) \\
 &\Rightarrow ((x)f)B_* = g \circ (x)B_* && (\text{definisi } g^*) \\
 &\Rightarrow B_{(x)f} = g \circ B_x && (\text{definisi } B_*) \\
 &\Rightarrow (y)B_{(x)f} = (y)(g \circ B_x) && (\forall y \in Y) \\
 &\Rightarrow (y)B_{(x)f} = ((y)g)B_x && (\text{definisi komposisi fungsi}) \\
 &\Rightarrow ((x)f, y)B = (x, (y)g)B \\
 &\Rightarrow (f, g) \text{ pasangan adjoin}
 \end{aligned}$$

■

Akibat 2. Lemma di atas berakibat pernyataan berikut juga ekuivalen:

a. (f, g) adalah pasangan adjoin

b. $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, dengan $f^* \in L(X^*)$ didefinisikan oleh: $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$

Bukti:

(\Rightarrow)

$$\begin{aligned}
 (f, g) \text{ pasangan adjoin} &\Rightarrow ((x)f, y)B = (x, (y)g)B && (\text{definisi padangan adjoin}) \\
 &\Rightarrow ((x)f)B_y = (x)B_{(y)g} \\
 &\Rightarrow (x)(f \circ B_y) = (x)B_{(y)g} \\
 &\Rightarrow f \circ B_y = B_{(y)g} \\
 &\Rightarrow f \circ (y)B^* = ((y)g)B^* \\
 &\Rightarrow ((y)B^*)f^* = (y)(g \circ B^*) \\
 &\Rightarrow (y)(B^* \circ f^*) = (y)(g \circ B^*) \\
 &\Rightarrow B^* \circ f^* = g \circ B^*
 \end{aligned}$$

Dengan membalik arah bukti tersebut dapat dibuktikan jika $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, dengan $f^* \in L(X^*)$ didefinisikan oleh: $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$, maka (f, g) pasangan *adjoin*.

■

Teorema dan akibat berikut merupakan konsekuensi dari **Lemma 1**, **Akibat 2** dan salah satu sifat ruang dual.

Teorema 3. Misalkan X dan Y ruang-ruang vektor berdimensi hingga. Jika $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, maka untuk setiap $f \in L(X)$ terdapat $g \in L(Y)$ sedemikian sehingga g *adjoin* dengan f dan $N(g) = \widehat{R(f)}$ serta $\widehat{R(g)} = N(f)$.

Bukti:

Bentuk bilinear $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, sehingga berlaku $\dim X = \dim Y$. Sementara itu berlaku juga $\dim X = \dim X^*$, sehingga $\dim Y = \dim X^*$. Diketahui $N(B^*) = \{0\}$, sehingga B^* injektif. Berlaku juga $\dim Y = \dim(N(B^*)) + \dim(R(B^*))$, sehingga $\dim R(B^*) = \dim X^*$. Akibatnya B^* surjektif. Jadi B^* isomorfisma.

Ambil sebarang $f \in L(X)$. Selanjutnya dibentuk $g = B^* \circ f^* \circ (B^*)^{-1}$, $f^* \in L(X^*)$ yang didefinisikan oleh: $(t)f^* = f \circ t$ untuk semua $t \in X^*$, suatu ruang dual dari ruang X . Jelas bahwa $g \in L(Y)$ dan $g \circ B^* = B^* \circ f^* \circ (B^*)^{-1} \circ B^* = B^* \circ f^*$. Menurut **Akibat 2** diperoleh g *Adjoin* dengan f .

Ambil $x \in N(f)$, sehingga $(x)f = 0$ dan $((x)f, y)B = (0, y)B = 0$, untuk semua $y \in Y$.

Diketahui g *Adjoin* dengan f , sehingga: $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$, sehingga $x \in \widehat{R(g)}$. Jadi

$$N(f) \subseteq \widehat{R(g)} \quad (1)$$

K a r y a t i

Ambil $x \in \widehat{R(g)}$ sehingga $(x, (y)g)B = 0$ untuk semua $y \in Y$. Diketahui g Adjoin dengan f , sehingga $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$, untuk semua $y \in Y$. Diketahui B non degenerate, sehingga $(x)f = 0$ atau $x \in N(f)$.

$$\text{Jadi } \widehat{R(g)} \subseteq N(f) \quad (2)$$

Dari persamaan (1) dan (2) terbukti bahwa $\widehat{R(g)} = N(f)$.

Ambil $y \in N(g)$, sehingga $(y)g = 0$ dan $(x, (y)g)B = (x, 0)B = 0$, diketahui g Adjoin dengan f , sehingga $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$, untuk semua $x \in X$, sehingga $y \in \widehat{R(f)}$. Jadi $N(g) \subseteq \widehat{R(f)}$ (3)

Ambil $y \in \widehat{R(f)}$ maka $((x)f, y)B = 0$, untuk semua $x \in X$. Diketahui g Adjoin dengan f , sehingga $((x)f, y)B = (x, (y)g)B = 0$ untuk semua $x \in X$. Diketahui B non degenerate, sehingga $(y)g = 0$ atau $y \in N(g)$.

$$\text{Jadi } \widehat{R(f)} \subseteq N(g) \quad (4)$$

Dari persamaan (3) dan (4) terbukti bahwa $N(g) = \widehat{R(f)}$.

■

Akibat 4 . Misalkan X dan Y ruang-ruang vektor berdimensi hingga. Jika $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, maka untuk setiap $B: X \times Y \rightarrow K$ terdapat $f \in L(X)$ sedemikian sehingga f Adjoin dengan g dan $N(g) = \widehat{R(f)}$ serta $\widehat{R(g)} = N(f)$.

Bukti:

Bukti analog dengan lemma sebelumnya. Pemetaan B_* juga isomorfisma, sehingga dapat dibentuk $f = B_* \circ g^* \circ (B_*)^{-1}$. Bukti selanjutnya analog.

5. Kesimpulan

Dari uraian di atas diperoleh beberapa sifat pasangan adjoin sebagai berikut:

Jika $(f, g) \in L(X) \times L(Y)$ maka kondisi berikut ekuivalen berlaku: (f, g) pasangan adjoin jika dan hanya jika $f \circ B_* = B_* \circ g^*$, dengan $g^* \in L(Y^*)$ yang didefinisikan $(t)g^* = g \circ t$, $\forall t \in Y^*$, sebagai akibatnya berlaku juga: (f, g) pasangan adjoin jika dan hanya jika $g \circ B^* = B^* \circ f^*$, dengan $f^* \in L(X^*)$ didefinisikan oleh: $(t)f^* = f \circ t$, $\forall t \in X^*$. Sifat lain diperoleh : Jika $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, maka untuk setiap $f \in L(X)$ terdapat $g \in L(Y)$ sedemikian sehingga g adjoin dengan f dan $N(g) = \widehat{R(f)}$ serta $\widehat{R(g)} = N(f)$. Sebagai akibatnya dipenuhi sifat: Jika $B: X \times Y \rightarrow K$ non degenerate, maka untuk setiap $f \in L(X)$ terdapat $g \in L(Y)$ sedemikian sehingga g adjoin dengan f dan $N(g) = \widehat{R(f)}$ serta $\widehat{R(g)} = N(f)$.

Kepustakaan

- Karyati, 2002. *Semigrup yang dikonstruksikan dari Bentuk Bilinear*. Tesis. Program Pasca Sarjana, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta
- Lang, S. 1970. *Linear Algebra*. Addison –Wesley Publishing Company, Inc, New York.
- Rajendran, D., Nambooripad, K.S.S., 2000. Bilinear Forms and a Semigrup of Linear Transformations. *Shoutheast Asian Bulletin of Mathematics* 24:609-616.