Aproksimasi Terbaik dalam Ruang Metrik Konveks

Oleh :
Suharsono S
Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

Abstrak

Masalah *eksistens*i dan *ketunggalan* aproksimasi terbaik suatu titik dalam ruang bernorm telah dipelajari oleh Kreyszig (1978), Masalah selanjutnya adalah kaitan antara *aproksimasi terbaik* dengan *titik tetap* dalam ruang metrik konveks.
Diperoleh hasil bahwai *aproksimasi terbaik* untuk suatu titik dalam *ruang metrik konveks sempurna* merupakan *titik tetap* dari pemetaan *kompak*.

Kata Kunci: aproksimasi terbaik, titik tetap, ruang metrik konveks (Menger)

Latar Belakang

Kreyszig (1978) telah memberi pengantar teori dasar tentang aproksimasi terbaik dalam ruang bernorm. *Ketunggalan* aproksimasi terbaik dipenuhi pada ruang bernorm yang konveks sempurna, juga pada ruang Hilbert. Untuk ruang bernorm umum diperlukan syarat tambahan, misalnya syarat *Haar* di *C[a,b]*. Juga telah dipelajari bahwa himpunan semua aproksimasi terbaik adalah himpunan konveks.

Permasalahan

Berkaitan dengan titik tetap, kondisi apa yang diperlukan agar aproksimasi terbaik untuk suatu titik merupakan titik tetap?

Urgensi masalah

Masalah ini lebih difokuskan pada ruang metrik konveks Menger, yang didefinisikan menggunakan konsep bola tertutup, berbeda dengan definisi himpunan konveks yang sudah dikenal pada Kreyszig (1978)..

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan disajikan aplikasi titik tetap untuk teori aproksimasi dalam ruang metrik konveks.

Definisi 1 *(Ruang Metrik konveks Menger)*

Dipresentasikan dalam Seminar Nasional MIPA 2006 dengan tema **"Penelitian, Pendidikan, dan Penerapan MIPA serta Peranannya dalam Peningkatan Keprofesionalan Pendidik dan Tenaga Kependidikan"** yang diselenggarakan oleh Fakultas MIPA UNY, Yogyakarta pada tanggal 1 Agustus 2006

Misal *(X,d)* adalah ruang metrik. *(X,d)* disebut *ruang metrik konveks (Menger)* jika untuk setiap *x,y* di *X*, x ≠y, $0 \le r \le d(x,y)$, berlaku

$B[x,r] \cap B[y,d(x,y) - r] \neq \emptyset$,

di mana $B[x,r] = \{ y \in X:, d(x,y) \le r \}$.

Sebuah subset *E* pada ruang metrik konveks *X* disebut *konveks* jika

$B[x,r] \cap B[y,d(x,y) - r] \subseteq E,\ 0 \le r \le d(x,y)\ \forall x,y \in E$

Definisi 2

Misal *X* adalah ruang metrik dan $T : X \to X$. Sebuah titik $x \in X$ *disebut titik tetap T, jika* $T(x) = x$.

Definisi 3

Ruang metrik konveks X disebut memiliki *sifat (A)* jika

$\forall x,y \in X$ berlaku

$B[x, (1-t)\, d(x,y)] \cap B[y ,td(x,y)] = m(x,y,t)$ untuk $t \in [0, 1]$.

di mana m(x,y,t) adalah *himpunan singleton.*

Bila $x = y$, maka $m(x,y,t) = x$.

Dalam ruang metrik konveks yang memiliki sifat (A), *B[x, r}* adalah himpunan konveks.

Definisi 4

Misal *X* adalah ruang metrik konveks**.** X disebut konveks seragam jika memenuhi sifat (A) dan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sehingga untuk tiap $r > 0$ dan $x,y,z \in X$ dengan $d(z,x) \le r$, $d(z,y) \le r$ dan $d(x,y) \ge r\varepsilon$, mengakibatkan

$$d\left(z, m\left(x, y, \frac{1}{2}\right)\right) \le r(1 - \delta(\varepsilon)) < r$$

Definisi 5

Suatu ruang metrik konveks *X* disebut *konveks sempurna*, jika $x,y \in B[x,r]$ dengan $x \neq y$ maka $B[x,(1-t)d(x,y)] \cap B[y,td(x,y)] \subseteq B(z,r)$ untuk tiap $t \in (0,1)$ dan semua $z \in X$, $r > 0$, di mana $B(z,r) = \{x \in X : d(x,z) < r\}$

Definisi 6

Sebuah subset F dari ruang metrik konveks X disebut himpunan T-regular jika dan hanya jika $T : F \to X$ dan $m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right) \in F$, untuk tiap $x \in F$

Definisi 7

Misal *(X,d)* adalah ruang metrik dan $M \subseteq X$. Untuk $x \in X$, definisikan

$P_M(x) = \{z \in M : d(x,z) = d(x,M)\}$,

di mana $d(x, M) = \inf\{d(x,y), y \in M\}$

Sebarang $z \in P_M(x)$ disebut *titik aproksimasi terbaik* untuk *x* dari *M*

TEOREMA 1. *Misal M adalah subset konveks tertutup dari ruang metrik konveks lengkap seragam X. Jika* $P_M(x)$ *adalah singleton untuk tiap* $x \in X$ *, maka proyeksi titik terdekat* $P : X \to M$ *adalah kontinu.*

Bukti

Misal barisan $\{x_n\}$ konvergen ke x di X dan $P_M(x) = \{z\}$. Untuk menyederhanakan, tulis $P(x_n) = u_n$. Sekarang $\{u_n\}$ adalah barisan Cauchy di M, sebab jika tidak, maka terdapat bilangan real positif ε dan barisan bagian $\{u_{nk}\}$ dan $\{u_{mk}\}$ sehingga untuk $m_k > n_k$ berlaku $d(u_{mk}, u_{nk}) \geq \varepsilon$ untuk tiap *k*. Ambil $a_k = u_{nk}, b_k = u_{mk}$ dan $M_k = \max\{d(x,a_k), d(x,b_k)\}$, sehingga diperoleh

$$d\left(x, m\left(a_k, b_k, \frac{1}{2}\right)\right) \leq M_k\left(1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{M_k}\right)\right) \leq M_k\left(1 - \delta\left(\frac{d(a_k,b_k)}{M_k}\right)\right).$$

Juga $\delta\left(\frac{\varepsilon}{M_k}\right) \leq 1 - \frac{d(x,M)}{M_k}$. Bila $k \to \infty, \delta\left(\frac{\varepsilon}{M_k}\right) \to 0$ dan ε tidak dapat positif. Dengan demikian $\{P(x_n)\}$ adalah barisan Cauchy di *M*, karena itu konvergen ke suatu titik *z* di *M*, yaitu $d(x,z) = d(x,M)$, dan *z = P(x)*.. □

TEOREMA 2 Misal *F* adalah subset *T-regular* terbatas dari ruang metrik konveks lengkap seragam *X*. Maka berlaku salah satu dari *T(x) = x* untuk tiap *x* di *F* atau terdapat x_0 di *F* sehingga $d(x_0, F) < diam(F)$.

Bukti

Andaikan untuk suatu $x \in F$, $x \neq T(x)$, misal $d(x, T(x)) = \varepsilon$. Sekarang untuk sebarang *y* di *F*, $d(y, T(x)) \leq diam(F)$ dan $d(y, x) \leq diam(F)$

Karena F adalah himpunan *T*-regular, maka $m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right) \in F$. Selanjutnya dengan kekonveksan seragam X, terdapat bilangan real positif $\delta(\varepsilon)$ sehingga

$$d\left(y, m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right)\right) \leq (1-\delta(\varepsilon))\, diam(F),$$

yang mengakibatkan

$$d\left(F, m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right)\right) \leq (1-\delta(\varepsilon))\, diam(F), \text{ sebab } y \in F \text{ sebarang.}$$

Pilih $x_0 = m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right)$, maka berlaku $d(F, x_0) \leq diam(F)$. □

Untuk membuktikan teorema 5, diperlukan proposisi-proposisi berikut.

PROPOSISI 3 Misal *X* adalah ruang metrik konveks sempurna, $u \in X$ dan *M* adalah subset *X*. Jika $x, y \in P_M(u)$ dengan $x \neq y$, maka $m(x, y, t) \notin M$, di mana $t \in (0,1)$.

Bukti

Jika $m(x, y, t) \in M$, maka $x, y \in P_M(u)$ mengakibatkan $d(x, u) \leq d(u, m(x, y, t))$, dan $d(y, u) \leq d(u, m(x, y, t))$. Karena X adalah ruang metrik konveks sempurna, maka kita peroleh kontradiksi. Karena itu $d(x, u) \leq d(u, m(x, y, t))$, $t \in (0,1)$. □

PROPOSISI 4 Misal *M* adalah sebarang subset dari ruang metrik konveks sempurna *X* dan $T: M \to M$ .Jika $P_M(u)$ adalah himpunan *T*-regular takhampa untuk sebarang $u \in X$, maka tiap titik dari $P_M(u)$ adalah titik tetap *T*.

Bukti

Andaikan untuk suatu x di $P_M(u)$, berlaku $T(x) \neq x$. Dengan proposisi 3, $m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right) \notin M$. Karena itu $m\left(x, T(x), \frac{1}{2}\right) \notin P_M(u)$. Karena $P_M(u)$ adalah himpunan *T*-regular, haruslah *T(x)* = *x*. Dengan demikian *M*-aproksimasi terbaik dari u adalah titik tetap *T*. □

TEOREMA 5 Misal *M* adalah subset *T*-regular tertutup dan takhampa dari ruang metrik konveks sempurna *X*, di mana *T* adalah pemetaan kompak dan $u \in M$. Andaikan bahwa $d(T(x), u) \leq d(x, u)$ untuk tiap *u* di *M*. Maka tiap *x* di *M* yang merupakan aproksimasi terbaik untuk *u* adalah titik tetap *T*.

Bukti

Misal *r* = *d(u,M)*, maka terdapat barisan $\{y_n\}$ di *M* sehingga $\lim_{n\to\infty} d(u, y_n) = r$. Jelaslah bahwa $\{y_n\}$ adalah barisan terbatas.. Karena *T* kompak, $cl(T\{y_n\})$ adalah subset kompak dari *M*. Jadi $(T\{y_n\})$ mempunyai barisan konvergen $(T\{y_{nk}\})$ dengan $\lim_{n\to\infty} T(y_{nk}) = x$ di *M*. Sekarang

$$r \leq d(u, x) = \lim_{n_k} d(u, T(y_{nk})) \leq \lim_{n_k} d(u, y_{nk}) = \lim d(u, y_n) = r$$

Dengan demikian $x \in P_M(u)$. Juga jika $y \in P_M(u)$ dan $r \leq d(T(y), u) \leq d(y, u) = r$ mengakibatkan $T(y) \in P_M(u)$. Karena itu $y \in P_M(u)$ mengakibatkan $d(T(y), u) = r$. Dengan kekonveksan sempurna *X* berlaku $r \leq d\left(m(y, T(y), \frac{1}{2}), u\right) < r$. Dengan demikian $m\left(y, T(y), \frac{1}{2}\right) \in P_M(u) \in M$. Dengan proposisi **3** haruslah berlaku *y* =*T(y).* □

TEOREMA 6 Misal *M* adalah subset *T*-regular tertutup dan takhampa dari ruang metrik konveks sempurna *X*, di mana $T : X \to X$ adalah pemetaan kompak. Jika *u* adalah titik tetap *T* di *X* \ *M,* dan

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, T(x)) + d(y, T(y))) + \gamma(d(x, T(y)) + d(y, T(x))),$$

untuk semua $x, y \in X$, di mana α, β, γ adalah bilangan real dengan $\alpha + 2\beta + \gamma \leq 1$, maka tiap aproksimasi terbaik di *M* untuk *u* adalah titik tetap *T*.

Bukti

Untuk $x \in X$ pandang

$$\begin{aligned} d\big(T(x), T(u)\big) &\leq \alpha d(x,u) + \beta\big(d(x,T(x)) + d(u,T(u))\big) + \gamma\big(d(x,T(u)) + d(u,T(x))\big) \\ &= \alpha d(x,u) + \beta\big(d(x,T(x))\big) + \gamma\big(d(x,u) + d(T(u),T(x))\big) \\ &\leq \alpha d(x,u) + \beta\big(d(x,u) + d(T(u),T(x))\big) + \gamma\big(d(x,u) + d(T(u),T(x))\big) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) d(x,u) + (\beta + \gamma) d\big(T(u), T(x)\big) \end{aligned}$$

Dengan demikian $d\big(T(x), T(y)\big) \leq \left(\dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{1 - \beta - \gamma}\right) d(x,u)$.

Jadi $d(T(x), T(u)) \leq d(x,u)$. Dengan teorema 5, maka tiap aproksimasi terbaik di *M* untuk *u* adalah titik tetap*T*. □

PENUTUP

Simpulan

Dalam ruang metrik konveks sempurna yang memiliki subset tertutup *T*-regular di mana *T* pemetaan kompak berlaku

$d\big(T(x), u\big) \leq d(x,u)$, $x, u \in M$

atau $d\big(T(x), T(y)\big) \leq \alpha d(x,y) + \beta\big(d(x,T(x)) + d(y,T(y))\big) + \gamma\big(d(x,T(y)) + d(y,T(x))\big)$

$x, y \in X$, di mana α, β, γ adalah bilangan real dengan $\alpha + 2\beta + \gamma \leq 1$, $u \in X/M$,

tiap aproksimasi terbaik *u* di *M* adalah titik tetap *T*

Saran

Kaitan antara aproksimasi terbaik dengan teori lain misalnya teori proyeksi diharapkan dapat dibahas pada kajian berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Beg Ismat & Abbas Mujahid. *Fixed Points and Best Approximation in Menger Konveks Metrik Spaces.* Archivum Mathematicum, Tomus 41 (2005), 389 – 397**.**

Browder, F. E. *Nonexpansive nonlinear operators in Banach Spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **54** (1965) 1041 – 1044.

Goffman C & Pedrick G, *First Course in Functional Analysis*, Prentice Hall, India, 1974.

Khalil, R., *Best approximation in metric spaces*, Proc. Amer. Math Soc. **103** (1988), 579 – 586.

Kirk, W. A., *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly **72** (1965), 1004 – 1006.

Kreyzig E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons. 1978.

Veeramani, P., *On some fixed point theorems on uniformly konveks Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **167** (1992), 160 - 166.