Kode Makalah M-10

# KESTABILAN ASIMTOTIK PENYELESAIAN TRIVIAL PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN PELINEARAN

# ASYMTOTIC STABILITY OF TRIVIAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY LINEARIZATION

Sudi Mungkasi, Prodi Matematika FMIPA Universitas Sanata Dharma

**Intisari**

Penyelesaian suatu persamaan diferensial dijamin oleh Teorema Eksistensi dan Ketunggalan. Namun demikian, penyelesaian ini belum tentu mudah untuk dicari. Agar ditemukan suatu koherensi pembelajaran masalah yang dihadapi, perlu dipelajari sifat-sifat penyelesaian persamaan diferensial yang berkaitan. Salah satu sifatnya yaitu kestabilan, yang dibahas dalam makalah ini.

Kata kunci: stabil asimtotik, penyelesaian trivial, pelinearan

**Abstract**

Solution of a differential equation is guaranted by Existence and Uniqeness of Solutions Theorem. However, it is not always easy to find the solutions. In order to make a coherency of the problem, studying about the behavior of solutions is needed. One of the behavior is stability, that discussed in this paper.

Key words: asymtotically stable, trivial solution, linearization

## PENDAHULUAN

Metode yang sesuai untuk menyelesaikan suatu bentuk persamaan diferensial tertentu belum tentu dapat diterapkan untuk bentuk persamaan yang lain. Oleh sebab itu, pembelajaran persamaan diferensial yang lebih lanjut berisi perbaikan metode pencarian penyelesaian persamaan diferensial yang sudah biasa digunakan.

Jika penyelesaian suatu persamaan diferensial dapat dijamin keberadaannya oleh Teorema Eksistensi dan Ketunggalan tetapi belum dapat dinyatakan secara eksplisit karena penyelesaian ini belum tentu mudah untuk dicari maka agar ditemukan suatu koherensi pembelajaran masalah yang dihadapi, perlu dipelajari sifat-sifat penyelesaian persamaan diferensial yang berkaitan. Lebih lanjut lagi, dicari penyelesaian pendekatannya.

## BATASAN MASALAH

Yang akan dirumuskan penulis terbatas pada permasalahan penyelesaian trivial dari suatu persamaan diferensial yang stabil asimtotik.

## KAJIAN PUSTAKA

Berikut ini diberikan beberapa definisi serta teorema yang berguna dalam pembahasan permasalahan ini.

**Teorema 1**
**(Eksistensi Dan Ketunggalan)**

Dipandang masalah nilai awal : $\dot{x} = f(t, x), x(t_o) = x_o$

dengan $|t - t_o| \le a, x \in D \subset \mathbb{R}^n$; $D = \{x \| x - x_o \| \le d\}$, $a$ dan $d$ adalah konstanta positif.

Jika fungsi vektor $f(t,x)$ memenuhi kondisi:

a. $f(t,x)$ kontinu dalam $G = [t_o - a, t_o + a] \mathrm{x} D$,

b. $f(t,x)$ kontinu Lipschitz terhadap $x$

maka masalah nilai awal tersebut mempunyai penyelesaian tunggal $x(t; t_o, x_o)$, yaitu fungsi $x(t)$ dengan nilai awal $x(t_o) = x_o$ dan memenuhi $\dot{x} = f(t, x)$ pada $(t_o - a, t_o + a)$ dengan $a = \inf(a, \frac{d}{M})$, $M = \sup_{(t,x) \in G} \| f(t, x) \|$.

**Teorema 2**
**(Pertidaksamaan Gronwall I)**

Diasumsikan bahwa untuk $t_o \le t \le t_o + a$, dengan $a$ suatu konstanta positif berlaku estimasi

$$f(t) \le d_1 \int_{t_o}^{t} j(s) f(s) ds + d_2 ,$$

dimana untuk $t_o \le t \le t_o + a$, $f(t)$ dan $j(t)$ keduanya merupakan fungsi kontinu, $f(t) \ge 0$ dan $j(t) \ge 0$; $d_1$ dan $d_2$ keduanya merupakan konstanta positif

maka untuk $t_o \le t \le t_o + a$ berlaku

$$f(t) \le d_2 e^{d_1 \int_{t_o}^{t} j(s) ds} .$$

**Teorema 3**
**(Pertidaksamaan Gronwall II)**
Diasumsikan bahwa untuk $t_o \le t \le t_o + a$, dengan $a$ suatu konstanta positif berlaku estimasi

$$f(t) \le d_2(t - t_o) + d_1 \int_{t_o}^{t} f(s)ds + d_3 ,$$

dimana untuk $t_o \le t \le t_o + a$, $f(t)$ merupakan fungsi kontinu, $f(t) \ge 0$; konstanta-konstanta $d_1 > 0$, $d_2 \ge 0$ dan $d_3 \ge 0$
maka untuk $t_o \le t \le t_o + a$ berlaku

$$f(t) \le \left( \frac{d_2}{d_1} + d_3 \right) e^{d_1(t - t_o)} - \frac{d_2}{d_1}.$$

**Kestabilan Penyelesaian Ekuilibrium**
Diberikan persamaan
$\dot{x} = f(t,x)$ , $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$
dengan $\dot{x} = f(t,x)$ kontinu terhadap *t* dan *x*. Diasumsikan bahwa $x = 0$ adalah suatu titik kritis dari fungsi vektor $\dot{x} = f(t,x)$, artinya $f(t,0) = 0$ , $t \in \mathbb{R}$.

**Definisi 1**
**(Kestabilan Lyapunov)**
Diberikan persamaan $\dot{x} = f(t,x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ dan suatu persekitaran $D \subset \mathbb{R}^n$ dari $x = 0$; penyelesaian mulai dari $t = t_o$ dengan $x = x_o \in D$ dinyatakan dengan $x(t; t_o, x_o)$.
Penyelesaian $x = 0$ disebut stabil (stabil-Lyapunov) jika untuk setiap $e > 0$ dan $t_o$ terdapat $d > 0$ sehingga jika $\|x_o\| \le d$ berakibat $\|x(t; t_o, x_o)\| \le e$ untuk $t \ge t_o$.
Jika penyelesaian ekuilibrium $x = 0$ tidak stabil-Lyapunov maka $x = 0$ dikatakan tak-stabil.

**Definisi 2**
Penyelesaian ekuilibrium $x = 0$ dari persamaan $\dot{x} = f(t,x)$ , $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ dikatakan stabil asimtotik jika $x = 0$ stabil dan jika terdapat suatu $d > 0$ sehingga
$\|x_o\| \le d \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t; t_o, x_o)\| = 0$

**PERSAMAAN LINEAR DENGAN KOEFISIEN KONSTAN**

Diberikan persamaan $\dot{x} = Ax$ , dengan matriks $A_{nxn}$ non-singular.

Dibentuk matriks $\Phi(t) = (x_1(t)x_2(t)...x_n(t))$, dengan $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$ adalah $n$ buah penyelesaian yang bebas linear dari persamaan $\dot{x} = Ax$ .

Selanjutnya $\Phi(t)$ disebut *matriks fundamental.*

**Teorema 4**

Jika $\Phi_1(t)$ dan $\Phi_2(t)$ masing-masing adalah matriks fundamental maka $\Phi_1(t)$ dan $\Phi_2(t)$ tidak bebas linear.

**Teorema 5**

Matriks $e^{A(t-t_o)}$ adalah matriks fundamental persamaan $\dot{x} = Ax$ ,

dengan
$$\begin{aligned} e^{A(t-t_o)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(A(t-t_o))^n \\ &= I + A(t-t_o) + \frac{1}{2!}A^2(t-t_o)^2 + ..., \end{aligned}$$
untuk sebarang $t_o \in \mathbb{R}$.

**Teorema 6**

Fungsi-fungsi vektor

$$\Phi_k(t) = \begin{pmatrix} f_{1k}(t) \\ f_{2k}(t) \\ \vdots \\ f_{nk}(t) \end{pmatrix},\ k = 1,2,3,...,n$$

memenuhi persamaan $\dot{x} = A_{nxn}(t)x$ pada interval bilangan real $[a,b]$ jika dan hanya jika matriks

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t) & \cdots & f_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

memenuhi $\dot{\Phi}(t) = A_{nxn}(t)\Phi(t)$ untuk setiap $t \in [a,b]$.

Khususnya jika $\Phi$ matriks fundamental untuk persamaan $\dot{x} = A_{nxn}(t)x$ pada $[a,b]$ maka $\Phi$ memenuhi $\dot{\Phi}(t) = A_{nxn}(t)\Phi(t)$ pada $[a,b]$.

**Teorema 7**

Diberikan persamaan $\dot{x} = Ax$ dengan $A$ matriks konstan nxn yang non-singular dan mempunyai nilai eigen $l_1, l_2, ..., l_n$.

Jika $\operatorname{Re} l_k < 0, k = 1, ..., n$ maka untuk setiap $x(t_o) = x_o \in \mathrm{R}^n$ terdapat konstanta positif $C$ dan $m$ sehingga berlaku

$$\|x(t)\| \le C\|x_o\|e^{-m.t} \text{ dan } \lim_{t \to \infty} x(t) = 0\,.$$

Dengan kata lain, penyelesaian $x = 0$ adalah stabil asimtotik.

**Bukti:**

Misal matriks $A$ mempunyai m nilai eigen yang berbeda.

Diambil matriks $P_{\mathrm{nxn}}$ non-singular sehingga $P^{-1}AP = J$ dengan matriks $J$ adalah bentuk Jordan, yaitu

$$J = diag(J_1, ..., J_m) = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & & : \\ : & & . & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_m \end{pmatrix};$$

$$J_p = diag(J_{p1}, ..., J_{pl}) = \begin{pmatrix} J_{p1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & & : \\ : & & . & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_{pl} \end{pmatrix}$$

p=1,...,m dan suatu bilangan bulat $l \ge 1$;

$$J_{pj} = \begin{pmatrix} l_p & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & . & & \\ 0 & & & & : \\ & & & . & : \\ : & & . & & 0 \\ & & & . & \\ : & & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & l_p \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya $e^{J_{pj}t} = I + J_{pj}t + \frac{1}{2!}J_{pj}{}^2t^2 + \frac{1}{3!}J_{pj}{}^3t^3 + \dots$

$$e^{J_{pj}t} = e^{l_p t}\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{(d_{pj}-1)}}{(d_{pj}-1)!} \\ 0 & & . & & \vdots \\ & & & & \frac{t^2}{2!} \\ \vdots & & & . & t \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$d_{pj}$ adalah dimensi dari $J_{pj}$ .

$l_p = -a_p + b_p i$ , $p$=1,...,k , dengan $a_p > 0$ maka

$e^{l_p} = e^{-a_p + b_p i}$

$= e^{-a_p} e^{b_p i}$

$= e^{-a_p}(\cos b_p + i \sin b_p)$.

Diperoleh $\left\| e^{l_p} \right\| = e^{-a_p}$ , $p$=1,...,k.

Misalkan matriks fundamental dari persamaan $\dot{x} = Ax$ adalah $\Phi(t)$, $\Phi(t) = e^{At}$ .

Penyelesaian $x(t)$ dapat dinyatakan dengan $x(t) = e^{At}\mathbf{c}$, untuk sebarang vektor **c**.

Diambil sebarang nilai awal, yaitu $x(t_o) = x_o \in \mathbb{R}^n$ maka $x(t) = e^{At}\mathbf{c}_o$, untuk suatu $\mathbf{c}_o$.

Karena, $e^{At} = Pe^{(P^{-1}AP)t}P^{-1}$ dan karena $P^{-1}AP = J$ maka

$\left\| e^{At} \right\| \le \|P\|.\left\| e^{Jt} \right\|.\left\| P^{-1} \right\|$.

Diambil

$$\begin{aligned} m &= \min\{|\mathrm{Re}\, l_p| : p = 1,...,k\} \\ &= \min\{a_p : p = 1,...,k\} \end{aligned}$$ , diperoleh

$\|x(t)\| \le \|P\|.\left\| e^{Jt} \right\|.\left\| P^{-1} \right\|.\|\mathbf{c}_o\|$

$\le \|P\|.K\left\| e^{-mt} \right\|.\left\| P^{-1} \right\|.\|\mathbf{c}_o\|$

untuk suatu $K > 0$ .

Jadi, $\|x(t)\| \le C\|x_o\|.e^{-m.t}$ , untuk suatu $C$ dan $m$ . ف

**Teorema 8**

Diberikan persamaan $\dot{x} = Ax$ dengan $A$ matriks konstan nxn yang non-singular dan mempunyai nilai eigen $l_1, l_2, ..., l_n$ .

Jika terdapat suatu nilai eigen $l_k$ dengan $\operatorname{Re} l_k > 0$ maka untuk setiap persekitaran $x = 0$, terdapat nilai awal sedemikian sehingga penyelesaian $x(t)$ yang berkorespondensi dengan nilai awal tersebut berlaku

$$\lim_{t \to \infty} \left\| x(t) \right\| = \infty .$$

Dengan kata lain, penyelesaian $x = 0$ adalah tak stabil.

**PERSAMAAN DENGAN KOEFISIEN PERIODIK**

Diberikan persamaan

(1) $\dot{x} = A(t)x$ , $t \in \mathbb{R}$

dengan $A(t)$ matriks nxn periodik-*T* yang kontinu; jadi, $A(t+T) = A(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

**Teorema 9**
**(Flocquet)**

Dipandang persamaan (1) dengan $A(t)$ matriks nxn periodik-*T* yang kontinu. Setiap matriks fundamental $\Phi(t)$ dari persamaan (1), dapat dinyatakan sebagai perkalian dua matriks berukuran nxn

$$\Phi(t) = P(t).e^{B.t}$$

dengan $P(t)$ periodik-*T* dan *B* matriks konstan nxn.

**Bukti:**

Komponen dari matriks fundamental $\Phi(t)$ terdiri atas *n* buah penyelesaian yang independen.

Akan ditunjukkan bahwa $\Phi(t+T)$ adalah juga merupakan matriks fundamental.

Misalkan $t = t + T$, maka

$$\frac{dx}{dt} = A(t - T)x$$
$$= A(t)x .$$

Diperoleh, $\Phi(t)$ adalah juga matriks fundamental.

Matriks fundamental $\Phi(t)$ dan $\Phi(t) = \Phi(t+T)$ tidak bebas linear, artinya terdapat matriks konstan non-singular $C_{nxn}$ sedemikian sehingga

$$\Phi(t+T) = \Phi(t).C ,$$

dengan $C = e^{B.T}$, untuk suatu matriks konstan $B_{nxn}$.

Akan dibuktikan $\Phi(t).e^{-B.t}$ adalah periodik-*T*.

Namakan $\Phi(t).e^{-B.t} = P(t)$, maka

$$P(t+T) = \Phi(t+T).e^{-B(t+T)}$$
$$= \Phi(t)C.e^{-B.T}e^{-B.t}$$
$$= \Phi(t)e^{-B.t}$$
$$= P(t)$$ ف

Matriks $C$ sebagaimana dimaksud pada pembuktian teorema di muka biasa disebut matriks-*monodromy* dari persamaan (1). Selanjutnya nilai eigen $r$ dari matriks $C$ disebut *pelipat karakteristik*(*pelipat Flocquet*), dan setiap bilangan kompleks $l$ sedemikian sehingga

$$r = e^{lT}$$

disebut *eksponen karakteristik* (*eksponen Flocquet*).

**KESTABILAN DENGAN PELINEARAN**

**Teorema 10**
**(Poincare-Lyapunov)**

Dipandang persamaan dalam $\mathsf{R}^n$

(2) $\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t,x)$, $x(t_o)=x_o$ , $t \in \mathsf{R}$ **.**

Jika $A$ adalah matriks konstan nxn dengan semua nilai eigennya mempunyai bagian real negatif; $B(t)$ adalah matriks kontinu nxn dengan sifat

$$\lim_{t\to\infty}\|B(t)\| = 0\,;$$

fungsi vektor $f(t,x)$ kontinu terhadap $t$ dan $x$ serta kontinu Lipschitz terhadap $x$ dalam suatu persekitaran-$d_o$ dari $x = 0$; lebih lanjut jika

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$$

secara seragam terhadap $t$

maka terdapat konstanta positif $c, t_o, d_o, m$ sedemikian sehingga jika $\|x_o\| \le d_o$ berlaku

$$\|x(t)\| \le c\|x_o\|e^{-m(t-t_o)}\ ,\ t \ge t_o.$$

Selanjutnya penyelesaian $x = 0$ adalah stabil asimtotik .

**Bukti:**

Misalkan persamaan (2) mempunyai matrik fundamental $\Phi(t)$.

Untuk persamaan

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)\ ,\ \Phi(t_o) = I$$

karena semua nilai eigen dari matrik $A$ mempunyai bagian real negatif maka terdapat konstanta positif $c$ dan $m_o$ sedemikian sehingga

$$\|\Phi(t)\| \le ce^{-m_o(t-t_o)}\ ,\ t \ge t_o.$$

Dari asumsi $f$ dan $B$, untuk setiap $d > 0$, terdapat suatu konstanta $b(d)$ sedemikian sehingga jika $\|x\| \le b(d)$ berlaku

$$\|f(t,x)\| \le d\|x\|\ ,\ t \ge t_o$$

dan jika $t_o$ cukup besar

$\|B(t)\| \le d$ , $t \ge t_o$.

Dalam suatu persekitaran $x = 0$,

penyelesaian masalah nilai awal (2) ada untuk $t_o \le t \le t_1$, dan penyelesaian ini dapat diteruskan untuk semua $t \ge t_o$.

Diambil sebarang $d > 0$ yang cukup kecil.

Masalah nilai awal (2) ekuivalen dengan persamaan integral:

$$x(t) = \Phi(t)x_o + \int_{t_o}^{t} \Phi(t - s + t_o)[B(s)x(s) + f(s, x(s))]ds \tag{3}$$

Menggunakan estimasi untuk $\Phi$, $B$ dan $f$ maka untuk $t_o \le t \le t_1$ diperoleh

$$\|x(t)\| \le \|\Phi(t)\|\|x_o\| + \int_{t_o}^{t} \|\Phi(t - s + t_o\|[\|B(s)\|\|x(s)\| + \|f(s.x(s))\|]ds$$

$$\le ce^{-m_o(t-t_o)}\|x_o\| + \int_{t_o}^{t} ce^{-m_o(t-s)} 2d\|x(s)\|ds$$

sehingga

$$e^{m_o(t-t_o)}\|x(t)\| \le c\|x_o\| + \int_{t_o}^{t} ce^{m_o(s-t_o)} 2d\|x(s)\|ds.$$

Menggunakan pertidaksamaan Gronwall, diperoleh

$$e^{m_o(t-t_o)}\|x(t)\| \le c\|x_o\|e^{2cd(s-t_o)}$$

atau

$$\|x(t)\| \le c\|x_o\|e^{(2cd-m_o)(t-t_o)}. \tag{4}$$

Pengambilan $d$ yang cukup kecil mengakibatkan $m = m_o - 2cd$ adalah positif. Jadi, diperoleh estimasi yang dikehendaki untuk $t_o \le t \le t_1$.

Selanjutnya dengan memilih $\|x_o\|$ sedemikian sehingga

$$\|x_o\| \le \frac{d}{c}$$

dan dengan menamakan $d_o = \frac{d}{c}$ maka estimasi (4) berlaku untuk $t \ge t_o$. ڤ

ڤ

**Teorema 11**

Dipandang persamaan dalam $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x),\ t \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Jika $A(t)$ matriks kontinu, periodik-$T$; fungsi vektor $f(t,x)$ kontinu terhadap $t$ dan $x$ serta kontinu Lipschitz terhadap $x$ dalam suatu persekitaran-$d$ dari $x = 0$; lebih lanjut jika

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0$$

secara seragam terhadap *t*,
dan jika semua eksponen karakteristik dari persamaan periodik linear

(6) $\quad \dot{y} = A(t)y$

mempunyai bagian real negatif
maka penyelesaian $x = 0$ dari persamaan (5) adalah stabil asimtotik.

**Bukti:**
Misalkan $\Phi(t)$ adalah matriks fundamental persamaan $\dot{x} = A(t)x$,

$$\Phi(t) = P(t).e^{B.t}$$

untuk suatu matriks periodik-$T$ $P(t)$ dan suatu matriks konstan *B*.

Menggunakan transformasi
$x=P(t)\,z$,
diperoleh

$\dot{P}(t)z + P(t)\dot{z} = A(t)P(t)z + f(t, P(t)z)$ atau $\qquad \dot{z} = P^{-1}(AP - \dot{P})z + P^{-1}f(t, Pz)$.

Di lain pihak

$$P(t) = \Phi(t).e^{-B.t}$$

maka $\qquad \dot{P}(t) = \dot{\Phi}e^{-B.t} + \Phi e^{-B.t}(-B)$.

Karena sifat matriks fundamental, $\dot{\Phi} = A\Phi$ maka

$$\dot{P}(t) = A(t).P(t) - P(t).B .$$

Diperoleh

(7) $\quad \dot{z} = Bz + P^{-1}(t)f(t, P(t)z)$

dengan semua nilai eigen matriks konstan *B* mempunyai bagian real negatif.
Penyelesaian $z = 0$ dari persamaan (7) memenuhi persyaratan Teorema Poincare-Lyapunov.
Jadi, penyelesaian $x = 0$ dari persamaan (5) stabil asimtotik.

## CONTOH-CONTOH:

### Contoh 1

Dipandang persamaan gerak ayunan matematis dengan redaman linear

(8) $\quad \ddot{x} + m\dot{x} + \sin x = 0$, $m > 0$.

Dengan transformasi $x = x_1, \dot{x} = x_2$ diperoleh sistem

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - mx_2 + (x_1 - \sin x_1)$$
sehingga persamaan (8) ekuivalen dengan persamaan $\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t,x)$

dengan
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -m \end{pmatrix},$$
$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(t,x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - \sin x_1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya diselidiki nilai eigen matrik *A*,
$$|A - lI| = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -l & 1 \\ -1 & -l-m \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow l^2 + ml + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow l_{1,2} = -\frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - 4}$$

Diperoleh $\operatorname{Re} l_{1,2} < 0$.

Sistem di muka memenuhi persyaratan Teorema Poincare-Lyapunov.
Jadi, solusi ekuilibrium (0,0) stabil asimtotik.

**Contoh 2**

Dipandang persamaan $\dot{x} = C(t)x$, $x \in \mathbb{R}^3$ dengan
$$C(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{t^2+1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & 1+e^{-t} \\ \frac{1-t}{2t} & -1 & \frac{3(1-t)}{2t} \end{pmatrix}, t > 0.$$

Persamaan ini dapat ditulis $\dot{x} = Ax + B(t)x + f(t,x)$ dengan

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{t^2} & e^{-t} \\ \frac{\sin t}{t^{3/2}} & 0 & e^{-t} \\ \frac{1}{2t} & 0 & \frac{3}{2t} \end{pmatrix};$$

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sehingga memenuhi persyaratan Teorema Poincare-Lyapunov.

dengan nilai eigen matriks $A$ yaitu –1, $\frac{1}{4}\left(-1 - i\sqrt{7}\right)$ dan $\frac{1}{4}\left(-1 + i\sqrt{7}\right)$.

Jadi, penyelesaian trivial $x = 0$ untuk persamaan di muka stabil asimtotik.

**Contoh 3**

Dipandang persamaan dalam $\mathbb{R}$ $\dot{x} = (-2 + \sin t)x$, $t \in \mathbb{R}$.

Dengan Metode Separasi Variabel, diperoleh $x(t) = e^{-2t - \cos t + c}$, $c$ sebarang konstanta.

Diambil matriks fundamental $\Phi(t) = x(t) = e^{c - \cos t} e^{-2t}$.

Artinya, persamaan $\dot{x} = (-2 + \sin t)x$, $t \in \mathbb{R}$ mempunyai eksponen karakteristik –2,

Jadi, penyelesaian $x = 0$ stabil asimtotik.

## KESIMPULAN DAN SARAN

Teori tentang kestabilan asimtotik penyelesaian trivial persamaan diferensial linear dapat digunakan sebagai dasar analisis kestabilan asimtotik penyelesaian trivial persamaan diferensial nonlinear.

Dalam tulisan ini tidak dibahas mengenai ketidakstabilan penyelesaian trivial persamaan diferensial nonlinear. Untuk mengkaji hal ini diperlukan pemahaman yang lebih mendalam tentang teori peubah kompleks.

## DAFTAR PUSTAKA

**Coddington** , E. A. dan Levinson, N., *Theory of Ordinary Differential Equations,* Mc-Graw-Hill Book Co., New York, 1955

**Cronin** , J., *Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory,* Marcel Dekker Inc., New York, 1994

**Deo** , S. G. dan Raghavendra, V., *Ordinary Differential Equations and Stability Theory,* Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 1980

**Verhulst** , F., *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems,* Springer-Verlag, Berlin, 1990