Kode Makalah M-8

SYARAT PERLU EXTREMAL FUNGSIONAL DENGAN WAKTU AKHIR BEBAS TITIK AKHIR TETAP[1]

Oleh:
Muhammad Fauzan

Abstrak

Dalam tulisan ini akan digunakan Teorema Fundamental *Calculus of Variations* dan Lemma Fundamental *Calculus of Variations* untuk mencari extremal fungsional yang tergantung pada satu fungsi. Pertama sekali akan diberikan definisi dasar yang akan membawa ke Lemma Fundamental *Calculus of variations* dan Teoerema Fundamental *Calculus of variations*.

Dalam konteks masalah kontrol optimal, y(t) adalah *state trajectori* dan C adalah *performance measure* dan akan dicari *state trajectori* yang meminimalkan *performance measure*. Masalah yang akan didiskusikan dalam tulisan ini dianggap mempunyai trajectori dengan waktu akhir bebas tapi titik akhir tetap. Dengan menggunakan Teorema Fundamental *Calculus of Variations* dicari variasi dari C, kemudian dengan menerapkan Lemma Fundamental Calculus of Variations ditentukan syarat perlu agar y(t) menjadi extremal.

Kata kunci: Trajectori, *Increment*, variasi fungsional, *Calculus of Variations*

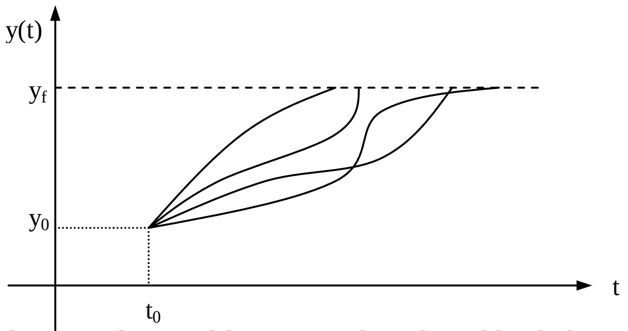
PENDAHULUAN

Misalkan y(t), *state trajektories*, adalah fungsi skalar dalam kelas fungsi yang mempunyai derivatif pertama kontinu dan C *performance measure*. Misalkan pula $g(y(t),\dot{y}(t),t)$ adalah fungsi yang mempunyai turunan parsial pertama dan kedua kontinu terhadap semua argumennya. Misal Ω adalah kelas kurva admisibel dan y sebarang kurva dalam Ω. Akan dicari y^* dalam Ω dimana fungsional

$$C(y) = \int_{t_0}^{t_f} g(y(t),\dot{y}(t),t)\,dt\,, \qquad (1)$$

[1] Disampaikan pada Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA dalam Peningkatkan Kualitas Sumber Daya Manusia Indonesia, 8 Februari 2005.

dengan t_0, $y(t_0) = y_0$, $y(t_f) = y_f$ tertentu, dan t_f bebas, mempunyai ekstrimum relatif. Dalam kasus ini, kita perhatikan admisibel kurva yang dimulai pada titik yang sama (t_0, y_0) akan tetapi berakhir pada garis horizontal melalui y_f sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Admisibel kurva untuk waktu akhir bebas

PEMBAHASAN

Untuk menentukan syarat perlu agar y(t) menjadi extremal, pertama sekalai akan disajikan beberapa definisi dasar dan teorema yang digunakan. Selanjutnya dengan memanfaatkan definisi dan teorema itu akan dicari selesaian masalahnya sehingga dapat ditentukan syarat apa yang diperlukan agar fungsi y(t) merupakan suatu extremal. Berikut akan disajikan definisi yang diadopsi dari Kirk (1970) dan Gelfand (1963).

Definisi 1.

Suatu fungsional C adalah aturan pengawanan yang menghubungkan setiap fungsi dalam kelas fungsi tertentu dengan domain Ω ke suatu bilangan real tertentu dalam daerah hasil R.

Jadi, suatu fungsional adalah suatu tipe fungsi dimana variabel bebasnya adalah suatu fungsi. Dengan perkataan lain, dapat dikatakan bahwa suatu fungsional adalah fungsi dari fungsi. Disini, domain dari fungsional C adalah kelas fungsi.

Definisi 2

Misalkan y fungsi dalam dalam suatu kelas Ω dan C fungsional dari y. C dikatakan fungsional linier dari y bila dan hanya bila memenuhi sifat homogenitas

$$C(\lambda y) = \lambda C(y) \tag{2}$$

untuk setiap bilangan real λ dan untuk semua $y \in \Omega$, dan memenuhi sifat aditivitas

$$C(y_1+y_2) = C(y_1) + C(y_2) \tag{3}$$

untuk setiap y_1, $y_2 \in \Omega$.

Sekarang, akan diperkenlkan Lemma Fundamental *Calculus of Variations*. Lemma ini nantinya akan digunakan untuk mencari extremal suatu fungsional.

Lemma 3 (Lemma Fundamental *Calculus of Variations*)

Misalkan $\Omega(t_0,t_f)$ adalah kelas semua fungsi kontinu yang didefinisikan dalam interval tertutup $[t_0,t_f]$. Misal y(t) adalah suatu fungsi dalam Ω. Jika

$$\int_{t_0}^{t_f} y(t)z(t)dt = 0 \tag{4}$$

untuk setiap fungsi $z(t) \in \Omega(t_0,t_f)$ sedemikian sehingga $z(t_0) = z(t_f) = 0$ maka $y(t) = 0$.

Bukti lengkap Lemma ini dapat dilihat dalam Gelfand (1963), Pars (1962), dan Clegg (1968).

Definisi 4

Misalkan C(y) adalah fungsional yang didefinisikan pada fungsi y dan $y + \delta y$. Maka *increment* dari C(y), ditulis dengan ΔC, diberikan oleh

$$\Delta C = C(y+\delta y) - C(y) \tag{5}$$

Karena *increment* C(y) tergantung pada fungsi y dan δy, maka, agar lebih spesifik, kita tulis $\Delta C(y,\delta y)$ untuk menyatakan *increment* dari C(y).

Definisi 5

Increment suatu fungsional dapat dituliskan sebagai

$$\Delta C(y, \delta y) = \delta C(y, \delta y) + g(y, \delta y).\|dy\|, \tag{6}$$

dengan δC linier dalam δy. Jika $\lim_{\|dy\| \to 0} \{g(y, dy)\} = 0,$ maka C dikatakan diferensiabel pada y dan δC adalah variasi dari C sebagai fungsi y.

Dari definisi (5) dapat dilihat bahwa variasi sebuah fungsional dapat diperoleh dari *increment*-nya dengan mengabaikan suku-suku dari δy.

Definisi 6

Misalkan C fungsional dengan domain Ω. Fungsi y^* dalam Ω adalah extremal dari C jika terdapat bilangan real positif ε sedemikian sehingga untuk semua fungsi y dalam Ω yang memenuhi $\|y - y^*\| < e$ *increment* dari C mempunyai tanda yang sama.

Teorema 7 (Teorema Fundamental *Calculus of Variarions*)

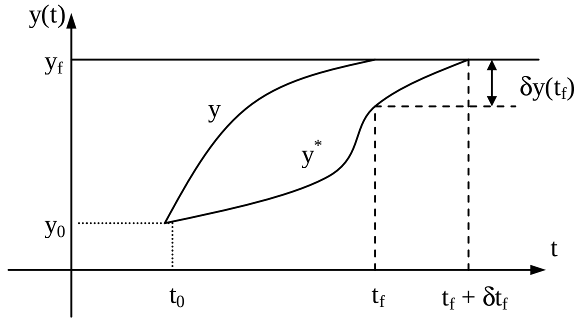
Jika y^* adalah sebuah extremal, maka variasi dari C mestilah habis (nol) pada y^*, yaitu

$$\delta C(y^*, \delta y) = 0 \text{ untuk semua } \delta y \text{ yang adimisibel} \tag{7}$$

Bukti lengkap teorema ini diberikan oleh Kirk (1970) dan Gelfand (1963).

Penentuan Syarat Perlu

Misalkan $y*$ adalah kurva ekstremal yang mempunyai titik akhir $(t_f + dt_f, y_f)$ dan y kurva disekitarnya dengan titik akhir (t_f, y_f) seperti terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Suatu extremal, y^*, dan kurva disekitarnya, y

Di sini, $dy(t) = y(t) - y^*(t)$ hanya terdefinisi pada interval $\lfloor t_0, t_f \rfloor$, karena y tidak perlu didefinisikan pada interval $(t_f, t_f + dt_f]$. Dari Gambar 2, diperoleh,

$$dy(t_f) = y^*(t_f + dt_f) - y^*(t_f) \tag{8}$$

Ekspansi $y^*(t_f + dt_f)$ dalam deret Taylor di sekitar $y^*(t_f)$ dan ambil hanya suku orde pertama, dan misalkan $dt_f \to 0$ maka dari persamaan (8) diperoleh

$$dy(t_f) = \dot{y}^*(t_f)dt_f. \tag{9}$$

Dari persamaan (9) tampak bahwa $dy(t_f)$ tergantung pada dt_f.

Selanjutnya, variasi dari C(y), $dC(y,dy)$, ditentukan dari *increment* fungsional,

$$\begin{aligned}\Delta C(y,dy) &= \int_{t_0}^{t_f+dt_f} g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t)dt - \int_{t_0}^{t_f} g(y(t), \dot{y}(t), t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t) - g(y(t), \dot{y}(t), t)]dt + \int_{t_f}^{t_f+dt_f} g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t)dt,\end{aligned} \tag{10}$$

Sekarang misalkan bahwa $y(t) = y^*(t) + dy(t)$. Persamaan (10) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\Delta C(y,dy) = &\int_{t_0}^{t_f} [g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t) - g(y^*(t) + dy(t), \dot{y}^*(t) + d\dot{y}(t), t)]dt \\ &+ \int_{t_f}^{t_f+dt_f} g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t)dt.\end{aligned} \tag{11}$$

Ekspansikan integran kedua dalam deret Taylor sekitar titik $(y^*(t), \dot{y}^*(t))$, diperoleh,

$$\begin{aligned}\Delta C(y,dy) = &-\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial}{\partial y(t)} (g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t) \right) dy(t) + \left(\frac{\partial}{\partial \dot{y}(t)} (g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t) \right) d\dot{y}(t) \right] \mathrm{dt} \\ &+ \int_{t_f}^{t_f+dt_f} g(y^*(t), \dot{y}^*(t), t)dt + o(dy(t), d\dot{y}(t)),\end{aligned} \tag{12}$$

dengan $o(dy(t), d\dot{y}(t))$ menyatakan suku-suku dalam ekspansi dengan orde lebih besar dari satu. Integral ketiga pada persamaan (12) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\int_{t_f}^{t_f+dt_f} g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t)dt = [g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)]dt_f + o(dt_f) \tag{13}$$

Suku-suku, $o(dy(t),d\dot{y}(t))$ dan $o(dt_f)$ dapat diabaikan bila $dy(t),d\dot{y}(t)$ dan dt_f menjadi sangat kecil. Integrasi bagian demi bagian suku-suku pada persamaan (12) yang memuat $d\dot{y}(t)$, dan substitusikan hasil pada persamaan (13), diperoleh,

$$\begin{aligned}\Delta C(y,dy) = &-\left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))dy(t)\right]_{t_0}^{t_f} \\ &-\int_{t_0}^{t_f}\left[\left[\frac{\partial}{\partial y(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]\right]dy(t)dt \\ &+[g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)]dt_f .\end{aligned} \tag{14}$$

Karena t_0 tertentu, semua admisibel kurva y, pasti melalui titik ini, dan karena itu $dy(t_0)=0.$ Dengan demikian persamaan (14) menjadi,

$$\begin{aligned}\Delta C(y,dy) = &[g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)]dt_f - \left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f))\right]dy(t_f) \\ &-\int_{t_0}^{t_f}\left[\left[\frac{\partial}{\partial y(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]\right]dy(t)dt.\end{aligned} \tag{15}$$

Substitusikan persamaan (9) ke persamaan (15), diperoleh,

$$\begin{aligned}\Delta C(y,dy) = &[g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)]dt_f - \left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f))\right]\dot{y}^*(t_f)dt_f \\ &-\int_{t_0}^{t_f}\left[\left[\frac{\partial}{\partial y(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]\right]dy(t)dt.\end{aligned} \tag{16}$$

Variasi fungsional C(y), δC(y,δy), diperoleh dari *increment*, ΔC(y, δy), dengan hanya mengambil suku-suku yang linier terhadap $dy(t)$ dan $d\dot{y}(t)$. Terapkan teorema Fundamental *Calculus of Variarions* (7), diperoleh,

$$\begin{aligned}dC(y,dy) = 0 = &\left[[g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)] - \left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f))\right]\dot{y}^*(t_f)dt_f\right] \\ &-\int_{t_0}^{t_f}\left[\left[\frac{\partial}{\partial y(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial\dot{y}(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]\right]dy(t)dt.\end{aligned} \tag{17}$$

Sekarang, perhatikan bahwa $\delta y(t)$ mempunyai derivatif pertama dan kedua kontinu, dan bernilai nol pada t_0 dan t_f. Juga, g mempunyai derivatif parsial pertama dan kedua kontinu. Terapkan Lemma Fundamental *Calculus of Variations* terhadap persamaan (17) di atas, syarat perlu untuk y^* agar menjadi extremal adalah

$$\frac{\partial}{\partial y(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))-\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}(t)}(g(y^*(t),\dot{y}^*(t),t))\right]=0 \qquad (18)$$

Hasil ini berakibat bahwa integral pada persamaan (17) menjadi bernilai nol, dan karena dt_f sembarang, maka koefisien dt_f mestilah nol, sehingga

$$g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)-\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}(t)}\left(g(y^*(t_f),\dot{y}^*(t_f),t_f)\right)\right]\dot{y}^*(t_f)=0,$$

yaitu syarat batas yang diperlukan pada t_f

PENUTUP

Pada kajian ini penentuan syarat perlu extremal suatu fungsional dibatasi pada trajektori yang mempunyai titik akhir tetap tetapi waktu akhir bebas. Penerapan Teorema Fundamental *Calculus of Variations* dan Lemma Fundamental *Calculus of Variations* memberikan syarat batas yang diperlukan pada waktu akhir, t_f, agar trajektori merupakan suatu extremal.

DAFTAR PUSTAKA

Clegg J.C., *Calculus of Variations*, John Willey and Sons, New York, 1968.

Gelfand I. M. and Fomin S. V., *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.

Kirk D. E., *Optimal Control Theory, An Introduction*, Prentice-Hall, New Jersey, 1970

Pars L. A., *An Introduction to the Calculus of Variation*s, Heinemann, London, 1962.