Kode Makalah M-4

Pembentukan Pengendali Samar untuk Menentukan Kestabilan suatu Sistem Loop tertutup

Oleh:
Tuharto
Agus Maman Abadi
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Di dalam tulisan ini akan dibentuk suatu pengendali samar untuk menghasilkan suatu sistem loop tertutup yang stabil.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam membentuk pengendali samar ini adalah menentukan himpunan samar yang normal, konsisten dan lengkap dengan fungsi keanggotaan segitiga. Kemudian dibentuk aturan samar **Jika-Maka** dan dengan menggunakan mesin inferensi samar pergandaan, fuzzifier singleton dan defuzzifier rata-rata pusat dikonstruksikan pengendali samar.

Selanjutnya pengendali samar tersebut merupakan fungsi kontinu, terbatas dan linear sepotong-sepotong . Pengendali samar yang dikonstruksikan ini yang dilengkapi dengan syarat tertentu akan menyebabkan sistem kendali samar loop tertutup stabil.

Kata kunci: pengendali samar, kestabilan, sistem linear

Pendahuluan

Langkah awal dalam mendesain suatu pengendali samar adalah mendapatkan sekumpulan aturan samar "Jika-Maka" dari para ahli dan pedoman operasional. Mengetahui model matematis dari proses yang dikendalikan, bukan merupakan syarat perlu untuk mendesain pengendali samar. Tetapi supaya kita dapat menganalisis secara teoritis suatu sistem kendali samar loop tertutup yang didesain, kita harus mempunyai suatu model dari proses tersebut (Wang, 1997).

Jika akan didesain suatu pengendali samar yang menjamin beberapa kriteria performan seperti kestabilan eksponensial global, maka harus diasumsikan suatu model matematis untuk proses tersebut sehingga analisis secara matematis dapat

dilakukan untuk mendapatkan sifat-sifat dari sistem yang didesain khususnya jika proses yang dikendalikan adalah sistem linear dan pengendalinya adalah sistem samar.

Berdasarkan uraian diatas timbul permasalahan bagaimana mengkonstruksi suatu pengendali samar sehingga sistem kendali loop tertutupnya stabil. Tujuan dari penulisan ini adalah untuk mendapatkan pengendali samar dari suatu sistem kendali loop tertutup. Hasil dari tulisan ini diharapkan dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang berkaitan dengan masalah kesetimbangan.

Landasan teori

Diberikan suatu sistem $\dot{x}(t) = g[x(t)]$ dengan $x \in R^n$ dan g(x) adalah fungsi vektor n x 1. Jika diasumsikan g(0) = 0, maka x = 0 disebut titik kesetimbangan dari sistem tersebut.

Definisi 1(Wang, 1997): Titik kesetimbangan x = 0 dikatakan stabil jika untuk setiap $e > 0$ ada $d > 0$ sehingga jika $\|x(0)\| < d$ berakibat $\|x(t)\| < e$ untuk setiap $t \geq 0$.

Definisi 2(Wang, 1997): Titik kesetimbangan x = 0 dikatakan stabil eksponensial jika ada bilangan positif a, b, g sehingga $\|x(t)\| \leq a\,\|x(0)\| e^{-b\,t}$ untuk setiap $t \geq 0$ dan $\|x(0)\| < g$. Jika kestabilan eksponensial dicapai untuk setiap state awal x(0), maka titik kesetimbangan x = 0 dikatakan stabil eksponensial global.

Definisi 3 (Wang,1997): Misalkan L_p^n adalah himpunan semua fungsi

$g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))^T : [0, \infty) \to R^n$ sehingga $\|g\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_p^2 \right)^{1/2} < \infty$ dan

$\|g_i\|_p = \left(\int_0^\infty |g_i(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $p \in [1, \infty)$ dan $\|g_i\|_\infty = \sup_{t \in [0,\infty)} |g_i(t)|$. Suatu sistem dengan

input $u(t) \in R^r$ dan output $y(t) \in R^m$ dikatakan L_p- stabil jika $u(t) \in L_p^r$ berakibat $y(t) \in L_p^m$ untuk $p \in [0, \infty]$.

Misalkan proses yang dikendalikan adalah sistem linear parameter tetap satu input- satu output berikut ini:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \tag{1}$$

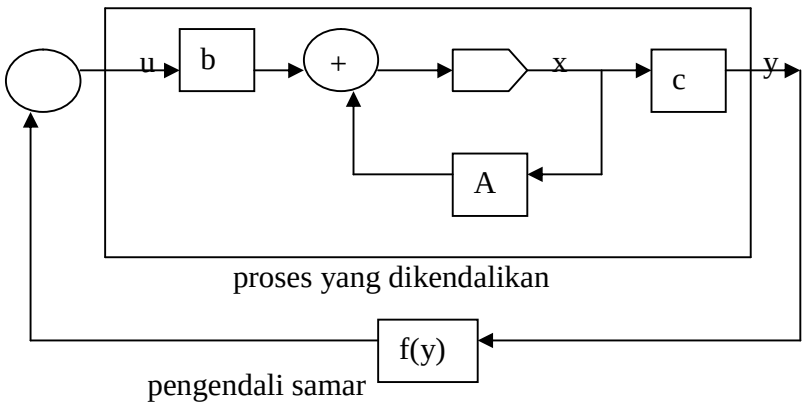
$$y(t) = cx(t) \tag{2}$$

dengan kendali $u \in R$, output $y \in R$ dan vektor state $x \in R^n$.

Definisi 4 (Wang, 1997): Sistem linear pada persamaan (1)-(2) dikatakan terkendali jika rank[b Ab …A^{n-1}b] = n. Sistem linear (1)-(2) dikatakan terobservasi jika rank[$c \;\; A^T c \;\; ...(A^{n-1})^T c$]^T = n. Fungsi transfer dari sistem linear (1)-(2) adalah h(s) = $c\,(sI - A)^{-1} b$. Fungsi transfer h(s) dikatakan real positif tegas jika $\inf_{w \in R} \mathrm{Re}[h(wj)] > 0$.

Misalkan kendali u(t) pada sistem linear (1)-(2) adalah sistem samar dengan input y(t) yaitu u(t) = -f(y(t)) (3)

dengan f adalah sistem samar. Selanjutnya u(t) pada persamaan (3) disubstitusikan ke persamaan (1) dan (2) diperoleh suatu sistem kendali samar loop tertutup seperti gambar 1.

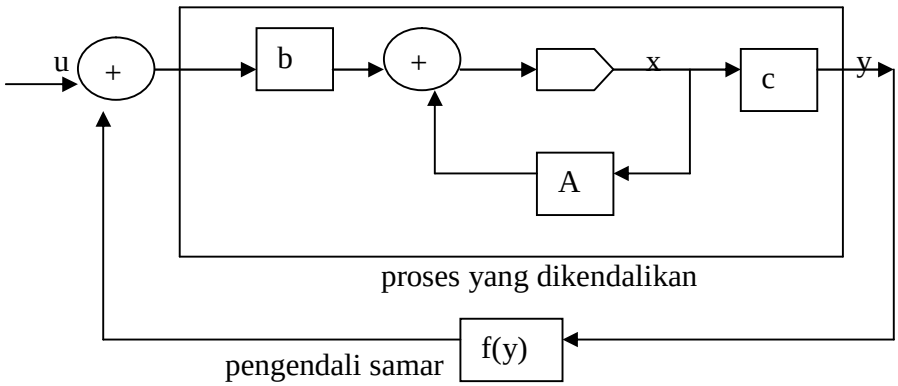


Gambar 1: Sistem kendali samar loop tertutup

Berikut ini diberikan sifat dalam sistem linear loop tertutup yang akan digunakan dalam pembahasan.

Toerema 5(Vidyasagar, 1993): Diberikan sistem kendali loop tertutup (1), (2), (3) sedemikian sehingga semua nilaieigen A berada di separuh kiri terbuka dari bidang kompleks, sistem (1)-(2) terkendali dan terobservasi dan fungsi transfer dari sistem (1)-(2) real positif tegas. Jika fungsi nonlinear f memenuhi $f(0) = 0$ dan $yf(y) \geq 0$, untuk setiap $y \in R$, maka titik kesetimbangan x = 0 dari sistem loop tertutup (1), (2) dan (3) adalah stabil eksponensial global.

Sistem kendali samar loop tertutup pada gambar 1 tidak mempunyai input secara eksplisit. Gambar 2 menunjukkan suatu sistem kendali samar loop tertutup dengan input external.



Gambar 2: Sistem kendali samar loop tertutup dengan eksternal input.

Definisi 6(Wang, 1997): Pengendali samar $f(y)$ dikatakan kontinu Lipschitz global jika $|f(a) - f(d)| \leq a\,|a - d|, \forall a, d \in R$ untuk suatu konstanta a .

Teorema berikut digunakan dalam menunjukkan bahwa sistem kendali samar loop tertutup adalah L_p– stabil.

Teorema 7(Vidyasagar, 1993): Diberikan sistem dengan input ekstra seperti gambar 2 dan misalkan kendali nonlinear *f*(y) adalah kontinu Lipschitz global. Jika sistem $\dot{x}(t) = Ax(t)$ adalah stabil eksponensial global, maka sistem kendali samar loop tertutup gambar 2 adalah L_p - stabil untuk setiap $p \in [1, \infty]$.

Definisi-definisi berikut ini diperlukan dalam mengkonstruksikan pengendali samar.

Definisi 8(Wang, 1997): Himpunan samar A^1, A^2, …, A^N di W $\subset R$ dikatakan lengkap pada W jika untuk setiap x $\in$ W ada A^j sehingga $m_{A^j}(x) > 0$.

Definisi 9 (Wang, 1997): Jika $m_{A^j}(x) = 1$ untuk suatu x$\in$ W selalu berakibat $m_{A^i}(x) = 0$ untuk setiap i$\neq$ j, maka himpunan samar A^1, A^2, …, A^N di W $\subset R$ dikatakan konsisten.

Definisi 10 (Wang, 1997): Tinggi (*height*) dari himpunan samar A di W $\subset R$ didefinisikan sebagai berikut : Height(A) = $\left\{ x \in W \,\middle|\, m_A(x) = \sup_{x_1 \in W} m_A(x_1) \right\}$.

Definisi 11(Wang, 1997): Himpunan samar A dikatakan normal jika tingginya 1.

Definisi 12(Wang, 1997): Suatu mesin inferensi pergandaan adalah berbentuk :

$$m_{B^l}(y) = \underset{l=1}{\overset{M}{mak}} \left[\sup_{x \in U} \left((m_{A^l}(x) \prod_{i=1}^{n} m_{A_i^l}(x) m_{B^l}(y)) \right) \right] \tag{4}$$

dengan A^l adalah himpunan samar di U dan $B^{'}$ adalah himpunan samar di V.

Definisi 13(Wang, 1997): Suatu *fuzzifier* singleton memetakan suatu titik bernilai real $x^* \in U$ ke suatu singleton samar A^l di U dengan nilai keanggotaan dari x^* pada A^l adalah 1 dan 0 untuk yang lainnya dengan fungsi keanggotaannya adalah

$$m_{A^l}(x) = \begin{cases} 1, & jika\ x = x^* \\ 0, & untuk\ x \neq x^* \end{cases} \tag{5}$$

Definisi 14(Wang, 1997): Misalkan B^l adalah gabungan atau irisan dari M himpunan samar, $\bar{y}^l$ adalah pusat (center) dari himpunan samar ke-l, w_l adalah tingginya, maka *defuzzifier* rata-rata pusat menentukan y^* sebagai berikut :

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l} \tag{6}$$

Jika himpunan samar B^l adalah normal dengan pusat $\bar{y}^l$, maka menurut Wang(1997), sistem samar dengan basis aturan samar, mesin inferensi pergandaan, *fuzzifier* singleton dan *defuzzifier* rata-rata pusat adalah

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^l}(x_i) \right)} \tag{7}$$

dengan input $x \in U \subset R^n$ dan $f(x) \in V \subset R$.

Pembahasan

Kendali u(t) pada sistem linear (1)-(2) akan didekati dengan sistem samar dengan input y(t) yaitu u(t) = -f(y(t)). Adapun langkah-langkah untuk mendesain pengendali samar tersebut adalah sebagai berikut:

1. Misalkan output y(t) berada dalam interval U = [a, b]. Definisikan 2N + 1 himpunan samar A^l di U yang normal, konsisten dan lengkap dengan fungsi keanggotaan segitiga. Gunakan N himpunan samar A^1 , …, A^N untuk menutup interval [a , 0] dan N himpunan samar yang lainnya A^{N+2}, …, A^{2N+1} untuk menutup interval posititf [0, b] dan pilih pusat dari himpunan samar A^{N+1} , $\bar{x}^{N+1}$ = 0.
2. Bentuk 2N + 1 aturan samar Jika-Maka:
   "Jika y adalah A^l , maka u adalah B^l ".

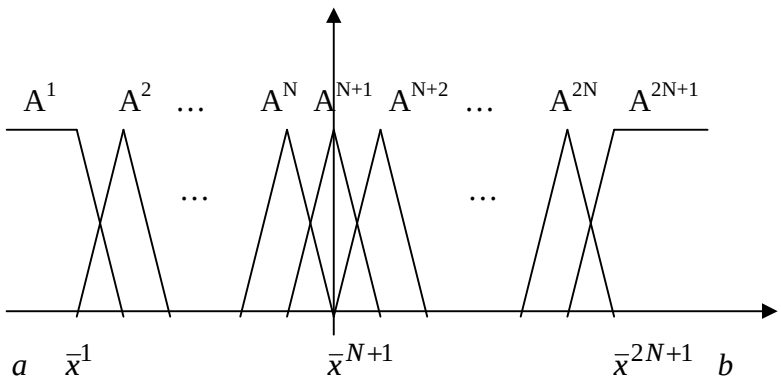
   dimana l = 1, 2, …, 2N + 1dan pusat $\bar{y}^l$ dari himpunan samar B^l adalah

$$\bar{y}^l \begin{cases} \leq 0 & , l = 1,2,...,N \\ = 0 & l = N+1 \\ \geq 0 & , l = N+2,...,2N+1 \end{cases} \tag{8}$$

3. Konstruksi pengendali samar dari 2N + 1 aturan samar dengan menggunakan mesin inferensi pergandaan, fuzzifier singleton dan defuzzifier rata-rata pusat yaitu:

$$u = -f(y) = -\frac{\sum_{l=1}^{2N+1} \bar{y}^l m_{A^l}(y)}{\sum_{l=1}^{2N+1} m_{A^l}(y)} \tag{9}$$

dengan $m_{A^l}(y)$ adalah fungsi keanggotaan segitiga yang didefinisikan pada langkah 1 dan $\bar{y}^l$ seperti pada langkah 2.



Gambar 3: Fungsi keanggotaan segitiga dari himpunan samar A^l .

Teorema 15(Wang, 1997): Diberikan sistem kendali loop tertutup (1), (2), (3) sedemikian sehingga semua nilaieigen A berada di separuh kiri terbuka dari bidang kompleks, sistem (1)-(2) terkendali dan terobservasi dan fungsi transfer dari sistem (1)-(2) real positif tegas. Jika pengendali samar $u = -f(y)$ dikonstruksikan menurut tiga langkah di atas, maka titik kesetimbangan x = 0 dari sistem kendali loop tertutup tersebut stabil eksponensial global.

Bukti: Berdasarkan teorema 5 untuk membuktikan teorema 15 cukup dibuktikan bahwa $f(0) = 0$ dan $yf(y) \geq 0$ untuk setiap y di R. Berdasarkan gambar 3 dan persamaan (9) diperoleh $f(0) = \bar{y}^{N+1} = 0$. Jika y < 0, maka dari persamaan (9) dan gambar 3 diperoleh $f(y) = \dfrac{\bar{y}^{l_1} m_{A_{l1}}(y) + \bar{y}^{l_1+1} m_{A_{l1+1}}(y)}{m_{A_{l1}}(y) + m_{A_{l1+1}}(y)}$ atau $f(y) = \bar{y}^{l_1}$ untuk suatu $l_1 \in \{1,2,...,N\}$. Karena $\bar{y}^{l_1} \leq 0$, $\bar{y}^{l_1+1} \leq 0$ dan fungsi keanggotaan himpunan samar adalah tak negatif, maka $f(y) \leq 0$ sehingga $yf(y) \geq 0$. Selanjutnya untuk y > 0, maka $yf(y) \geq 0$. Berdasarkan teorema 5, titik kesetimbangan x = 0 merupakan stabil eksponensial global.

Berdasarkan teorema 7 jika semua nilaieigen dari A berada pada separuh kiri terbuka bidang kompleks dan jika dapat dikonstruksikan suatu pengendali samar $u = -f(y)$ yang memenuhi syarat Lipschitz, maka sistem kendali samar loop tertutup gambar 2 adalah L_p – stabil. Selanjutnya akan diselidiki apakah pengendali samar yang didesain seperti pada persamaan (9) memenuhi syarat Lipschitz.

Teorema 16(Wang, 1997): Pengendali samar $f(y)$ pada persamaan (9) adalah fungsi kontinu, terbatas dan linear sepotong-sepotong.

Bukti: Misalkan $\bar{x}^l$ adalah pusat himpunan samar A^l seperti pada gambar 3 untuk l = 1, 2,…, 2N+1. Karena fungsi keanggotaan dari A^l merupakan fungsi kontinu, maka $u = -f(y) = -\dfrac{\sum_{l=1}^{2N+1} \bar{y}^l m_{A^l}(y)}{\sum_{l=1}^{2N+1} m_{A^l}(y)}$ kontinu. Karena $f(y) = \bar{y}^1$ untuk $y \leq \bar{x}^1$ dan $f(y) = \bar{y}^{2N+1}$ untuk $y \geq \bar{x}^{2N+1}$ dan $f(y)$ sama dengan rata-rata berbobot dari $\bar{y}^l$ dan $\bar{y}^{l+1}$ untuk $y \in [\bar{x}^l, \bar{x}^{l+1}]$, l =1,2,…, 2N sehingga $f(y)$ terbatas. Selanjutnya $R = (-\infty, \bar{x}^1] \cup [\bar{x}^1, \bar{x}^2] \cup ... \cup [\bar{x}^{2N}, \bar{x}^{2N+1}] \cup [\bar{x}^{2N+1}, \infty)$. Kemudian untuk $y \in (-\infty, \bar{x}^1]$ dan $y \in (\bar{x}^{2N+1}, \infty)$, maka $f(y) = \bar{y}^1$ dan $f(y) = \bar{y}^{2N+1}$ yang

merupakan fungsi linear. Selanjutnya untuk $y \in [\bar{x}^l, \bar{x}^{l+1}]$ dengan l =1,2,…, 2N diperoleh

$$f(y) = \frac{\bar{y}^{l_1} m_{A_{l1}}(y) + \bar{y}^{l_1+1} m_{A_{l1+1}}(y)}{m_{A_{l1}}(y) + m_{A_{l1+1}}(y)}$$

$$= \frac{\bar{y}^l \dfrac{\bar{x}^{l+1} - y}{\bar{x}^{l+1} - \bar{x}^l} + \bar{y}^{l+1} \dfrac{y - \bar{x}^l}{\bar{x}^{l+1} - \bar{x}^l}}{\dfrac{\bar{x}^{l+1} - y}{\bar{x}^{l+1} - \bar{x}^l} + \dfrac{y - \bar{x}^l}{\bar{x}^{l+1} - \bar{x}^l}}$$

$$= \frac{(\bar{y}^{l+1} - \bar{y}^l)y + \bar{y}^l \bar{x}^{l+1} - \bar{y}^{l+1}\bar{x}^l}{\bar{x}^{l+1} - \bar{x}^l}$$

yang merupakan fungsi linear dari y. Kemudian karena *f*(y) kontinu pada $R = (-\infty, \bar{x}^1] \cup [\bar{x}^1, \bar{x}^2] \cup \ldots \cup [\bar{x}^{2N}, \bar{x}^{2N+1}] \cup [\bar{x}^{2N+1}, \infty)$ dan *f*(y) linear pada setiap interval $(-\infty, \bar{x}^1]$, $[\bar{x}^l, \bar{x}^{l+1}]$ dan $(\bar{x}^{2N+1}, \infty)$, maka *f*(y) merupakan fungsi linear sepotong-sepotong.

Teorema 17(Wang, 1997): Diberikan sistem kendali samar loop tertutup seperti pada gambar 2 dan misalkan pengendali samar u = -*f*(y) didesain seperti pada persamaan (9) dan semua nilaieigen dari A berada pada separuh kiri terbuka bidang kompleks, maka sistem kendali samar loop tertutup seperti pada gambar 2 adalah L_p – stabil untuk setiap $p \in [0, \infty)$.

Bukti: Cukup ditunjukkan bahwa *f* memenuhi syarat Lipschitz. Karena *f* adalah kontinu, terbatas dan linear sepotong-sepotong, maka *f* memenuhi syarat Lipschitz yaitu $|f(a) - f(d)| \le a\,|a - d|, \forall a, d \in R$ untuk suatu konstanta a .

Kesimpulan

Berdasarkan langkah-langkah dalam mendesain pengendali samar di atas tidak perlu mengetahui elemen-elemen dari matriks **A**, **b** dan **c**. Selain itu terdapat

kebebasan untuk memilih parameter $\bar{y}^l$ dari pengendali samar, tetapi $\bar{y}^l$ harus memenuhi (8) dan fungsi keanggotaan A^l seperti pada langkah pertama (gambar 3). Kemudian jika semua nilaieigen dari matriks **A** berada di separuh kiri terbuka dari bidang kompleks dan pengendali samar yang dibangun seperti pada persamaan (9), maka sistem kendali samar loop tertutupnya adalah L_p – stabil untuk setiap $p \in [0, \infty)$.

Saran

Di dalam tulisan ini hanya dibangun pengendali samar untuk sistem linear satu input- satu output. Oleh karena itu pada kesempatan selanjutnya perlu diteliti bagaimana mendesain pengendali samar untuk sistem linear multi input-multi output dan juga apakah sifat-sifat pengendali samar untuk sistem linear satu input-satu output masih tetap berlaku.

Daftar pustaka

Vidyasagar, M.. 1993. *Nonlinear systems analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. New Jersey.

Wang, L. X.. 1997. *A course in fuzzy systems and control*. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.