Kode Makalah M-2

Konstruksi Sistem Samar dengan Menggunakan Kuadrat Terkecil Secara Rekursif

Oleh:
Agus Maman Abadi
Jurusan Pendidikan Matematika
FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta

Abstrak

Di dalam tulisan ini akan dikonstruksikan suatu sistem samar secara rekursif yang meminimalkan kesalahan dari semua pasang input-output, yaitu akan didesain suatu sistem samar *f*(x) yang meminimalkan $J_p = \sum_{i=1}^{p} (f(x_0^i), y_0^i)^2$ untuk setiap pasang input-output (x_0^j, y_0^j).

Langkah-langkah yang dilakukan adalah membentuk aturan samar JIKA-MAKA, memilih parameter awal yang akan dimasukkan pada aturan samar, menghitung parameter- parameter dengan algoritma kuadrat terkecil secara rekursif.

Berdasarkan langkah-langkah tersebut dikontruksikan sistem samar dengan mesin inferensi pergandaan, fuzzifier singleton dan defuzzifier rata-rata pusat.

Kata kunci: sistem samar, kuadrat terkecil, mesin inferensi, fuzzifier, defuzzifier.

Pendahuluan

Sistem samar (*fuzzy system*) adalah sistem yang berbasis aturan atau pengetahuan (*knowledge-based or rule-based systems*). Basis aturan samar terdiri dari sekumpulan aturan IF – THEN samar. Ada tiga jenis sistem samar yaitu sistem samar murni, sistem samar Takagi-Sugeno-Kang(TSK) dan sistem samar dengan *fuzzifier* dan *defuzzifier*.

Sistem samar yang banyak digunakan adalah sistem samar dengan *fuzzifier* dan *defuzzifier*. *Fuzzifier* mentransformasikan suatu variabel bernilai real ke suatu himpunan samar sebagai input. *Defuzzifier* mentransformasikan suatu himpunan samar ke suatu variabel berniali real pada output. Sistem samar ini mengatasi kekurangan pada dua sistem samar sebelumnya.

Di bidang industri, aplikasi sistem samar dapat dilihat dalam berbagai produk seperti mesin cuci, stabiliser, pengendali mobil dan sebagainya (Klir, 1997). Sistem samar dapat digunakan untuk mendekati sembarang fungsi pada himpunan kompak dengan ketepatan yang diinginkan (Wang, 1997). Hal ini menghasilkan teorema yang hanya memberikan eksistensi dari sistem samar tersebut dan tidak memberikan metode untuk mencarinya. Oleh karena itu harus dicari langkah-langkah untuk mengkonstruksikan sistem samar tersebut. Konstruksi sistem samar dapat dilakukan dengan beberapa cara yaitu skema table look-up, percobaan gradien turun dan kuadrat terkecil secara rekursif.

Selanjutnya jika rumus fungsi g dari U $\subset R^n$ ke R tidak diketahui, tetapi dapat ditentukan pasangan input-output (x, g(x)) untuk setiap x di U, maka telah dikaji tentang konstruksi sistem samar f yang optimal yang mendekati g (Agus, 2003). Kelebihan dari sistem samar yang dikonstruksikan ini adalah dapat digunakan untuk mendekati sembarang fungsi kontinu pada himpunan kompak dengan ketepatan yang diinginkan. Pada situasi nyata kita hanya mempunyai data sejumlah pasang input-output dan tidak dapat menentukan output untuk sembarang input, sehingga sistem samar yang dikonstruksikan di atas tidak dapat diterapkan.

Selanjutnya disamping mempunyai kelebihan, konstruksi sistem samar dengan skema table look-up juga mempunyai kelemahan yaitu karena pemilihan fungsi keanggotaan tetap pada langkah pertama dan tidak bergantung pada pasangan input-output maka fungsi keanggotaan ini tidak optimal untuk pasangan input-output tersebut. Kemudian konstruksi sistem samar dengan menggunakan percobaan gradien turun juga mempunyai kelemahan yaitu hanya meminimalkan kesalahan dari satu pasang input-output.

Oleh karena itu timbul permasalahan yaitu bagaimana mengkonstruksikan sistem samar dengan meminimalkan kesalahan bersama dari semua pasang input-output. Selanjutnya tujuan penulisan ini adalah menentukan sistem samar dengan menggunakan kuadrat terkecil secara rekursif. Hasil penulisan ini diharapkan dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan yang terkait dengan masalah saluran komunikasi taklinear.

Landasan teori

Sistem samar adalah sistem yang terdiri dari basis aturan samar, mesin inferensi samar, *fuzzifier* dan *defuzzifier*. Suatu basis aturan samar terdiri dari himpunan aturan **jika-maka samar** yang berbentuk :

"Jika x_1 adalah A_1^l dan x_2 adalah A_2^l dan ….dan x_n adalah A_n^l, maka y adalah B^l",

dengan A_i^l, B^l berturut-turut adalah himpunan samar di $U_i \subset$ **R** dan $V \subset$ **R**, (x_1, x_2, …, x_n) dan y adalah variabel input output dari sistem samar tersebut, l = 1, 2, …, M yaitu banyaknya aturan dalam basis aturan samar.

Fuzzifier adalah suatu pemetaan dari titik bernilai real $x^* \in U \subset R^n$ ke suatu himpunan samar A di U. Ada tiga tipe *fuzzifier* yaitu singleton, Gaussian dan segitiga. Sedangkan *defuzzifier* adalah suatu pemetaan dari himpunan samar B di $V \subset$ R ke suatu titik bernilai real $y \in V$. Ada tiga tipe *defuzzifier* yaitu pusat grafity, rata-rata pusat dan maksimum.

Kemudian dengan menggunakan logika samar mesin inferensi samar mengkombinasikan aturan **jika – maka samar** dengan suatu pemetaan dari himpunan A di U ke suatu himpunan samar B di V. Beberapa bentuk dari mesin inferensi samar yang biasa digunakan dalam sistem samar adalah mesin inferensi pergandaan, minimum, Lukasiewics, Sadeh, Dienes-Rescher. Mengingat jenis-jenis *fuzzifier*, *defuzzifier* dan mesin inferensi samar tersebut, maka ada 45 tipe sistem samar yang merupakan kombinasi dari jenis-jenis tersebut. Di dalam tulisan ini untuk menyusun sistem samar digunakan jenis *fuzzifier sigleton*, mesin inferensi pergandaan dan *defuzzifier* rata-rata pusat. Hal ini karena perhitungannya yang sederhana dan mempunyai sifat kontinuitas (Karyati dkk, 2003).

Definisi 1(Wang, 1997): Suatu mesin inferensi pergandaan adalah berbentuk :

$$m_{B^l}(y) = \underset{l=1}{\overset{M}{mak}}\left[\sup_{x\in U}\left((m_{A^l}(x)\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^l}(x)m_{B^l}(y))\right)\right] \tag{1}$$

dengan A^l adalah himpunan samar di U dan $B^{'}$ adalah himpunan samar di V.

Definisi 2(Wang, 1997): Suatu *fuzzifier* singleton memetakan suatu titik bernilai real $x^* \in U$ ke suatu singleton samar A^l di U dengan nilai keanggotaan dari x^* pada A^l adalah 1 dan 0 untuk yang lainnya dengan fungsi keanggotaannya adalah

$$m_{A^l}(x) = \begin{cases} 1, & jika\ x = x^* \\ 0, & untuk\ x \neq x^* \end{cases} \quad (2)$$

Definisi 3(Wang, 1997): Misalkan B^l adalah gabungan atau irisan dari M himpunan samar, $\bar{y}^l$ adalah pusat (center) dari himpunan samar ke-l, w_l adalah tingginya, maka *defuzzifier* rata-rata pusat menentukan y^* sebagai berikut :

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^{M} w_l} \quad (3)$$

Jika himpunan samar B^l adalah normal dengan pusat $\bar{y}^l$, maka menurut Wang(1997), sistem samar dengan basis aturan samar, mesin inferensi pergandaan, *fuzzifier* singleton dan *defuzzifier* rata-rata pusat adalah

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^l}(x_i) \right)}{\sum_{l=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^l}(x_i) \right)} \quad (4)$$

dengan input $x \in U \subset R^n$ dan $f(x) \in V \subset R$.

Sistem samar pada persamaan (4) adalah pemetaan tak linear yang memetakan $x \in U \subset R^n$ ke $f(x) \in V \subset R$. Jika dipilih fungsi keanggotaan $m_{A_i^l}$ dan m_{B^l} yang berbeda-beda maka diperoleh sistem samar yang berbeda-beda pula. Misalkan $m_{A_i^l}$ dan m_{B^l} adalah fungsi keanggotaan Gaussian, yaitu :

$$m_{A_i^l}(x_i) = a_i^l \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{s_i^l}\right)^2\right) \text{ dan} \tag{5}$$

$$m_{B^l}(x_i) = \exp\left(-(y - \bar{y}^l)^2\right) \tag{6}$$

dengan $a_i^l \in (0,1]$, $s_i^l \in (o,\infty)$, $\bar{x}_i^l$, $\bar{y}^l \in R$, maka sistem samar (4) menjadi :

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^{M} \bar{y}^l \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^l \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{s_i^l}\right)^2\right)\right)}{\sum_{l=1}^{M} \left(\prod_{i=1}^{n} a_i^l \exp\left(-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{s_i^l}\right)^2\right)\right)} \tag{7}$$

Definisi 4(Wang, 1997): Misalkan [a, b] $\subset R$, suatu fungsi keanggotaan trapesium semu dari himpunan samar A adalah fungsi kontinu pada R dengan

$$m_A(x; a, b, c, d, H) = \begin{cases} I(x), x \in [a,b) \\ H, \quad x \in [b,c] \\ D(x), x \in (c,d] \\ 0, \textit{untuk lainnya} \end{cases}$$

dengan a ≤ b ≤ c ≤ d, a < d, 0 < H ≤ 1, 0 ≤ *I*(x) ≤ 1, *I*(x) fungsi tak turun pada [a, b), 0 ≤ D(x) ≤ 1, D(x) fungsi tak naik pada (c, d].

Definisi 5(Wang, 1997): Himpunan samar A^1, A^2, …, A^N di W $\subset R$ dikatakan lengkap pada W jika untuk setiap x ∈ W ada A^j sehingga $m_{A^j}(x) > 0$.

Selanjutnya himpunan samar dengan fungsi keanggotaan trapesium semu dan sifat lengkap dari himpunan samar akan digunakan dalam pembahasan.

Pembahasan

Misalkan diberikan semua pasang input-output (x_0^j, y_0^j) untuk j =1,2, 3, …, p. Selanjutnya akan dikonstruksikan suatu sistem samar *f*(x) sedemikian sehingga

$$J_p = \sum_{j=1}^{p} [f(x_0^j) - y_0^j]^2 \text{ minimal.} \tag{8}$$

Lebih jauh lagi akan dikonstruksikan sistem samar secara rekursif yaitu jika f_p adalah sistem samar yang dikonstruksikan untuk meminimalkan J_p , maka f_p harus dinyatakan dalam fungsi f_{p-1}.

Langkah-langkah untuk membentuk sistem samar adalah sebagai berikut (Wang, 1997):

1. Misalkan U=$[a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times...\times[a_n, b_n] \subset R^n$. Untuk setiap $[a_i, b_i]$, i = 1, 2,…, n definisikan sebanyak N_i himpunan samar A_i^{li}, l_i = 1, 2, …, N_i. Himpunan samar tersebut lengkap di $[a_i, b_i]$. Misalkan diambil fungsi keanggotaan A_i^{li} adalah trapesium semu yaitu:

   $m_{A_i^{li}}(x_i) = m_{A_i^{li}}(x_i; a_i^{li}; b_i^{li}; c_i^{li}; d_i^{li})$ dengan $a_i^1 = b_i^1 = a_i$,

   $c_i^j \le a_i^{j+1} < d_i^j \le b_i^{j+1}$ untuk j = 1, 2, …, N_i –1 dan $c_i^{N_i} = d_i^{N_i} = b_i$.

2. Bentuk sebanyak $\prod_{i=1}^{n} N_i$ aturan Jika-Maka samar:

   Jika x_1 adalah $A_1^{l_1}$ dan x_2 adalah $A_2^{l_2}$ dan ….dan x_n adalah $A_n^{l_n}$, maka y adalah $B^{l_1...l_n}$. Dimana l_i = 1, 2,…, N_i, i = 1, 2, …, n dan $B^{l_1...l_n}$ adalah sebarang himpunan samar yang pusatnya $\bar{y}^{l_1...l_n}$.

3. Bentuk sistem samar. Jika digunakan fuzzifier singleton, mesin inferensi pergandaan dan defuzzifier rata-rata pusat, maka sistem samar yang dibentuk adalah

$$f(x) = \frac{\sum_{l_1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n}^{N_n} \bar{y}_j^{l_1...l_n} \left(\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^{l1}}(x_i)\right)}{\sum_{l_1}^{N_1} \cdots \sum_{l_n}^{N_n} \left(\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^{l1}}(x_i)\right)} \tag{9}$$

dengan $\bar{y}^{l_1...l_n}$ adalah parameter bebas yang harus didesain dengan cara:

3.1 Kumpulkan parameter bebas $\bar{y}^{l_1 \dots l_n}$ kedalam vektor $\prod_{i=1}^{n} N_i$ -tupel, yaitu

$$q = (\bar{y}^{1\dots 1}, \dots, \bar{y}^{N_1 1 \dots 1}, \bar{y}^{121\dots 1}, \dots, \bar{y}^{N_1 21\dots 1}, \dots, \bar{y}^{1 N_2 \dots N_n}, \dots, \bar{y}^{N_1 N_2 \dots N_n})^T$$

3.2 Tuliskan kembali sistem samar (9) sebagai $f(\mathrm{x}) = b^T(x)q$ (10)

dengan

$$b(x) = (b^{1\dots 1}(x), \dots, b^{N_1 1\dots 1}(x), b^{121\dots 1}(x), \dots, b^{N_1 21\dots 1}(x), \dots, b^{1N_2 \dots N_n}(x), \dots, b^{N_1 \dots N_n}(x))^T$$

dan $b^{l_1 \dots l_n}(x) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^{l_i}}(x_i)}{\sum_{l_1}^{N_1} \dots \sum_{l_n}^{N_n} (\prod_{i=1}^{n} m_{A_i^{l_1}}(x_i))}$

4. Pilih parameter awal $q(0)$. Jika ada aturan linguistik dari para ahli yang bagian JIKA sesuai dengan bagian JIKA dari pada langkah 2, maka pilih $\bar{y}^{l_1 \dots l_n}(0)$ sebagai pusat himpunan samar pada bagian MAKA dari aturan linguistik tersebut. Jika tidak, pilih $q(0)$ sebarang dalam ruang output $V \subset R$.
5. Hitung parameter q dengan algoritma kuadrat terkecil secara rekursif. Adapun q (p) untuk p = 1, 2, 3,… dicari dengan cara sebagai berikut:

Misalkan $Y_0^{p-1} = (y_0^1, y_0^2, \dots, y_0^{p-1})^T$ dan $B_{p-1} = (b(x_0^1), \dots, b(x_0^{p-1}))^T$,

kemudian dari persamaan (8) dan (10) diperoleh

$$J_{p-1} = \sum_{j=1}^{p-1} [f(x_0^j) - y_0^j]^2$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} [b^T(x_0^j)q - y_0^j]^2$$

$$= (B_{p-1}q - Y_0^{p-1})^T (B_{p-1}q - Y_0^{p-1}).$$

J_{p-1} adalah fungsi kuadratik dari q , misalkan penyelesaian optimal untuk q yang meminimalkan J_{p-1} adalah q (p-1), maka

$$q\,(\text{p-1}) = (B_{p-1}^T B_{p-1})^{-1}(B_{p-1}^T Y_0^{p-1})\,.$$

Selanjutnya $J_p = \sum_{j=1}^{p}[f(x_0^j) - y_0^j]^2 = J_{p-1} + (b(x_0^p)q - y_0^p)$

$$= (B_{p-1}q - Y_0^{p-1})^T (B_{p-1}q - Y_0^{p-1}) + (b(x_0^p)q - y_0^p)$$

$$= \left[\begin{pmatrix} B_{p-1} \\ b^T(x_0^p) \end{pmatrix} q - \begin{pmatrix} Y_0^{p-1} \\ y_0^p \end{pmatrix}\right]^T \left[\begin{pmatrix} B_{p-1} \\ b^T(x_0^p) \end{pmatrix} q - \begin{pmatrix} Y_0^{p-1} \\ y_0^p \end{pmatrix}\right].$$

Misalkan penyelesaian optimal untuk q yang meminimalkan J_p adalah q (p), maka

$$q\,(\text{p}) = \left[\left(B_{p-1}^T, b(x_0^p)\begin{pmatrix} B_{p-1} \\ b^T(x_0^p) \end{pmatrix}\right)\right]^{-1}\left(B_{p-1}^T, b(x_0^p)\begin{pmatrix} Y_0^{p-1} \\ y_0^p \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(B_{p-1}^T B_{p-1} + b(x_0^p) b^T(x_0^p)\right)^{-1}\left(B_{p-1}^T Y_0^{p-1} + b(x_0^p) y_0^p\right)$$

Karena $\left(P^{-1} + bb^T\right)^{-1} = P - Pb\left(b^T Pb + 1\right)^{-1} b^T P$ dan dengan mendefinisikan P(p-1) = $\left(B_{p-1}^T B_{p-1}\right)^{-1}$, maka

$$q\,(\text{p}) = \left(P(p-1) - P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p) + 1\right)^{-1} b^T(x_0^p)P(p-1)\right)$$
$$\left(B_{p-1}^T Y_0^{p-1} + b(x_0^p) y_0^p\right).$$

Karena P(p-1) $B_{p-1}^T Y_0^{p-1} = \left(B_{p-1}^T B_{p-1}\right)^{-1} B_{p-1}^T Y_0^{p-1} = q$ (p-1), maka

$$q\,(\text{p}) = q\,(\text{p-1}) - P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p) + 1\right)^{-1} b^T(x_0^p) q\,(p-1)$$
$$+\ P(p-1)b(x_0^p)\left(1 - \left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p) + 1\right)^{-1} b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p)\right) y_0^p$$

$$= q(p-1) + P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p)+1\right)^{-1}\left(y_0^p - b^T(x_0^p)q(p-1)\right).$$

Kemudian jika didefinisikan $K(p) = P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p)+1\right)^{-1}$,

maka q (p) = q (p-1) + K(p) $\left(y_0^p - b^T(x_0^p)q(p-1)\right)$ dan

$$P(p) = \left[\left(B_{p-1}^T, b(x_0^p)\begin{pmatrix} B_{p-1} \\ b^T(x_0^p)\end{pmatrix}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left(B_{p-1}^T B_{p-1} + b(x_0^p)b^T(x_0^p)\right)^{-1}$$

$$= \left(P^{-1}(p-1) + b(x_0^p)b^T(x_0^p)\right)^{-1}$$

$$= P(p-1) - P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p)+1\right)^{-1}b^T(x_0^p)P(p-1).$$

Jadi q (p) = q (p-1) + K(p) $\left(y_0^p - b^T(x_0^p)q(p-1)\right)$ (11)

dengan $K(p) = P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p)+1\right)^{-1}$ dan (12)

P(p) = $P(p-1) - P(p-1)b(x_0^p)\left(b^T(x_0^p)P(p-1)b(x_0^p)+1\right)^{-1}b^T(x_0^p)P(p-1)$ (13)

Selanjutnya $q(0)$ diambil seperti pada langkah 4 dan P(0) = aI dengan a konstanta cukup besar dan I adalah matriks identitas. Parameter $\bar{y}^{l_1 \ldots l_n}$ pada sistem samar yang didesain pada langkah 3 sama dengan elemen-elemen yang sesuai pada q (p).

Kesimpulan

Sistem samar yang dibentuk dengan kuadrat terkecil secara rekursif dalam tulisan ini adalah sistem samar dengan mesin inferensi pergandaan, fuzzifier singleton dan defuzzifier rata-rata pusat. Untuk membentuk sistem samar ini harus dihitung pusat dari himpunan samar-himpunan samar pada aturan samar pada bagian MAKA. Parameter (pusat) ini dicari dengan algoritma kuadrat terkecil secara rekursif dengan terlebih dahulu menentukan parameter awalnya. Selanjutnya parameter ini sama dengan elemen-elemen yang bersesuaian dari persamaan (11).

Saran

Konstruksi sistem samar dengan kuadrat terkecil secara rekursif khususnya pada langkah 2 tidak ada prosedur yang sistematis untuk menentukan banyaknya aturan samar dalam sistem samar tersebut. Pemilihan sejumlah aturan samar dalam mendesain sistem samar adalah penting sebab jika terlalu banyak aturan samar yang digunakan, maka semakin kompleks sistem samar yang didesain. Tetapi terlalu sedikit aturan samar yang dibentuk, maka sistem samar yang dibentuk semakin jauh untuk mencapai tujuan. Oleh karena itu perlu didesain suatu sistem samar yang banyaknya aturan samar tidak terlalu banyak dan tidak terlalu sedikit tetapi dapat digunakan untuk mencapai tujuan.

Daftar pustaka

Agus M. 2003. *Penggunaan sistem samar untuk pendekatan suatu fungsi*. Makalah dalam seminar Nasional Matematika tanggal 18 Maret 2003 di UNS.

Karyati,dkk.. 2003. *Konstruksi fuzzifier dan defuzzifier pada sistem samar*. Research Grant Due-Like Jurusan Pendidikan Matematika UNY.

Klir, GJ., Ute SC. and Yuan, B.1997. *Fuzzy set theory : foundations and applications*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc.

Wang., LX. 1997. *A course in fuzzy systems and control*. New Jersey : Prentice-Hall, Inc.