Skew- Semifield dan Beberapa Sifatnya

K a r y a t i
Jurusan Pendidikan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Yogyakarta
E-mail: yatiuny@yahoo.com

Suatu *field* (lapangan) F adalah struktur aljabar yang melibatkan dua operasi biner yang disebut penjumlahan (dinotasikan dengan " + ") dan perkalian (yang dinotasikan dengan " . ") sedemikian sehingga $(F,+)$ dan $(F,.)$ masing – masing membentuk grup abelian dan memenuhi aksioma distributif . Dengan menghilangkan beberapa aksioma pada *field*, maka diperoleh struktur-struktur baru yang merupakan generalisasi dari *field*.

Pada tulisan ini akan dibahas salah satu generalisasi dari *field* yang disebut dengan *skew-semifield* dan beberapa sifatnya. *Skew-semifield* S adalah *semiring* komutatif terhadap jumlah dengan elemen nol 0 sedemikian sehingga $(S \setminus \{0\},.)$ merupakan grup.

Dari hasil kajian diperoleh hasil bahwa: Jika S *skew – semifield* yang memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah maka S adalah *skew – semifield*. Hasil lain diperoleh bahwa: *Skew semifield* S memuat paling banyak satu elemen a sedemikian sehingga $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$. Lebih lanjut jika $a \in S$ mempunyai sifat demikian , maka $ax = xa$ untuk setiap x di S.

Kata Kunci: Semiring, semifield, skew-field, skew-semifield

A. Pendahuluan

Dalam kajian struktur aljabar, seringkali dikaji sifat-sifat yang masih berlaku maupun sifat-sifat baru yang muncul pada suatu struktur baru yang diperoleh dengan menghilangkan beberapa axioma (generalisasi) atau dengan menambah beberapa aksioma pada struktur aljabar sebelumnya..

Misalkan *ring* (gelanggang) R adalah himpunan tak kosong R bersama dua operasi biner '+' (penjumlahan) dan operasi biner '.' (perkalian) sedemikian sehingga $(R,+)$ membentuk grup abelian , $(R,.)$ membentuk semigrup dan berlaku sifat distributif kanan maupun kiri (Adkin & Weintraub: p. 49). *Ring* $(R,+,.)$

dikatakan mempunyai elemen identitas jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga berlaku $x.1 = 1.x = x$ untuk setiap $x \in R$. *Division ring* (*skew-field*) adalah suatu ring dengan elemen identitas sedemikian sehingga setiap elemen yang bukan elemen nol mempunyai invers perkalian. Sedangkan *field* (lapangan) adalah *skew field* yang komutatif terhadap operasi perkalian (Adkin & Weintraub: p. 50). Dengan demikian, baik *ring* maupun *skew-field* masing-masing adalah generalisasi dari *field*, atau dapat dikatakan bahwa *skew-field* maupun *field* adalah bentuk khusus dari ring. Sehingga semua sifat yang berlaku pada ring pasti berlaku pada *skew-field* maupun *field*, tetapi tidak sebaliknya. Sehingga ada sifat dalam *skew-field* maupun *field* yang tidak berlaku pada *ring*.

Dalam tulisan Kemprasit & Triphop disebutkan bahwa *semiring* $(S,+,.)$ adalah struktur aljabar dimana $(S,+)$ dan $(S,.)$ masing – masing membentuk struktur semigrup dan berlaku sifat distributif kanan maupun kiri. Elemen 0 pada *semiring* $(S,+,.)$ disebut elemen nol (*zero*) jika $x + 0 = 0 + x = x$ dan $x.0 = 0.x = 0$ untuk semua $x \in S$. Sebagai contoh : $M_{2\times2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in Z^+ \right\}$, dengan Z^+ himpunan bulat positif. Terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks, maka $(M_{2\times2},+,.)$ membentuk *semiring*.

Semi field adalah *semiring* $(S,+,.)$ sedemikian sehingga $(S,+)$ membentuk semigrup komutatif dan $(S,.)$ grup komutatif dengan elemen nol (*zero*) adalah 0, yang merupakan elemen identitas terhadap penjumlahan (Mitchell & Sinutoke dalam Kemprasit & Triphop). Struktur semifield ini merupakan generalisasi dari *field* dan merupakan bentuk khusus dari *semiring*. Sebagai contoh adalah *semiring* $\left(R^+ \cup \{0\},+,.\right)$ adalah *semifield* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa pada bilangan real.

Struktur *semifield* ini dapat digeneralisasi dengan menghilangkan sifat komutatif terhadap perkalian, yang disebut dengan *skew-semifield*. Dengan demikian, skew-semifield adalah *semiring* $(S,+,.)$ sedemikian sehingga $(S,+)$

membentuk semigrup komutatif dan $(S,.)$ grup komutatif dengan elemen nol (*zero*) adalah 0, yang merupakan elemen identitas terhadap penjumlahan (Kemprasit & Triphop). Dengan kata lain *skew-semifield* adalah *semiring* komutatif dengan elemen nol (*zero*) adalah 0 sedemikian sehingga $(S\setminus\{0\},.)$ adalah suatu grup dan *semifield* adalah *skew-semifield* komutatif terhadap perkalian. Dalam kenyataannya*, skew-semifield* adalah generalisasi dari *semifield* dan *skew-field.* Sebagai contoh adalah: misalkan n adalah bilangan integer positif yang lebih besar dari 1 dan S adalah himpunan semua matriks ukuran $n\times n$ atas bilangan real dengan bentuk elemen sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & .... & x \\ 0 & a_2 & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & a_n \end{bmatrix}$$

dengan $a_i > 0$ untuk semua i.

Terhadap operasi jumlah dan perkalian matriks, S merupakan *skew-semifield* yang bukan merupakan *semifield* maupun *skew-field*. Dengan invers perkaliannya dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & 0 & .... & -xa_1^{-1}a_n^{-1} \\ 0 & a_2^{-1} & 0 & .... & 0 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 & .... & a_n^{-1} \end{bmatrix}$$

Dalam kajian saat ini akan diselidiki beberapa sifat yang berlaku pada *skew-semifield.*

B. Pembahasan

Dalam bagian ini, beberapa sifat *skew-semifield* dibuktikan. Sepanjang dalam tulisan ini, untuk *skew-semifield* $(S,+,.)$, 1 menotasikan elemen identitas dari grup $(S \setminus \{0\},.)$.

Sifat berikut memberikan syarat cukup agar suatu *skew-semifield* membentuk suatu *skew - field*:

Teorema 1 (Kemprasit & Triphop) . *Jika suatu skew-semifield* $(S,+,.)$ *memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah, maka* $(S,+,.)$ *adalah skew-field*

Bukti:

Dalam hal ini diketahui bahwa $(S,+,.)$ *skew-semifield* dan suatu elemen $a \in S \setminus \{0\}$ mempunyai invers jumlah. Selanjutnya dibuktikan bahwa $(S,+,.)$ *skew-field.* Dengan demikian tinggal dibuktikan bahwa setiap elemen di $(S,+,.)$ mempunyai invers jumlah. Bukti selengkapnya diberikan sebagai berikut:

Diketahui $a \in S \setminus \{0\}$ mempunyai invers jumlah, misalkan invers tersebut adalah $b \in S$, maka dipenuhi $a + b = 0$. Di lain pihak, $(S \setminus \{0\},.)$ adalah suatu grup sehingga $a \in S \setminus \{0\}$ mempunyai invers perkalian yang dinotasikan dengan a^{-1} yang juga di dalam $S \setminus \{0\}$. Selanjutnya, ambil sebarang elemen $x \in S$, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
x + xa^{-1}b &= xa^{-1}a + xa^{-1}b && (a^{-1}\,a = 1,\ S \text{ skew-semifield}) \\
&= xa^{-1}(a+b) && (S \text{ bersifat distributif}) \\
&= xa^{-1}0 && (b \text{ invers jumlah dari } a) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Hal ini berlaku untuk setiap $x \in S$ dan untuk setiap $x \in S$ dapat ditemukan $xa^{-1}b \in S$ sedemikian sehingga $x + xa^{-1}b = 0$, maka dapat disimpulkan bahwa setiap elemen pada *skew-semifield* S mempunyai invers jumlah. Dengan demikian terbukti bahwa $(S,+,.)$ *skew-field.*

Berikutnya akan diberikan sifat lain dari struktur *skew – semifield*. Sifat ini menjamin bahwa suatu *skew – semifield* hanya memiliki paling banyak satu elemen yang mempunyai sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$ untuk suatu elemen $a \in S$. Teorema berikut juga sekalugus memberikan akibat dari suatu elemen *skew-semifield* yang mempunyai sifat demikian, yang selengkapnya diberikan pada teorema sebagai berikut:

Teorema 2. (Kemprasit & Triphop). *Suatu skew-semifield* S *memuat paling banyak satu elemen yang mempunyai sifat* $a \neq 1$ *dan* $a^2 = 1$. *Lebih lanjut, jika* $a \in S$ *mempunyai sifat demikian, maka* $ax = xa$ *untuk setiap* $x \in S$.

Bukti:

Untuk pembuktian pada bagian pertama, diambil elemen $b \in S$ yang juga mempunyai sifat $b \neq 1$ dan $b^2 = 1$. Selanjutnya dibuktikan bahwa $b = a$.

Untuk $a \in S$, dengan sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$, maka diperoleh:

$$a(1 + a) = a + a^2 = a + 1$$

Diketahui $(S \setminus \{0\},.)$ adalah grup , maka $1 + a \neq 0$. Akibatnya , pada persamaan di atas hanya dipenuhi untuk $a = 1$. Akan tetapi diketahui bahwa $a \neq 1$ sehingga $a + 1 = 0$. Dari sini diperoleh bahwa 1 adalah invers jumlah dari a. Dengan demikian dimiliki kondisi bahwa S adalah *skew-semifield* yang memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah. Menurut Teorema 1, kondisi ini berakibat S adalah *skew-field.*

Jika $b \in S$ yang juga mempunyai sifat $b \neq 1$ dan $b^2 = 1$, secara sama akan diperoleh bahwa $b + 1 = 0$. Dengan demikian diperoleh persamaan $a + 1 = b + 1$, dan diperoleh $a = b$.

Selanjutnya dibuktikan bahwa jika elemen $a \in S$, dengan sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$, maka berlaku $ax = xa$, untuk setiap $x \in S$. Untuk membuktikan hal ini, ambil sebarang elemen $x \in S$, maka :

$x + ax = (1 + a)x = 0.x = 0 = x.(1 + a) = x + xa$

Dari persamaan tersebut diperoleh bahwa $ax = xa$ yang berlaku untuk setiap $x \in S$.

C. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa ada 2 sifat dari suatu *skew - semifield* yaitu:

1. Jika suatu *skew-semifield* $(S,+,.)$ memuat elemen tak nol yang mempunyai invers jumlah, maka $(S,+,.)$ adalah *skew-field.*
2. Suatu *skew-semifield* S memuat paling banyak satu elemen yang mempunyai sifat $a \neq 1$ dan $a^2 = 1$. Lebih lanjut, jika $a \in S$ mempunyai sifat demikian, maka $ax = xa$ untuk setiap $x \in S$.

D. Daftar Pustaka:

Adkins, W.A and Weintraub,S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. Springer – Verlag,New York.

Kemprasit, Y and Triphop, N. 2001. Some Matrix Groups Admitting Skew-Semifield Structure. *East-West Journal of Mathematics: Vol 3 No. 1 (2001) pp.11-22*