

MENUJU INTERPRETASI STATISTIK EKSPERIMEN CELAH GANDA: ANALISIS VARIABEL ACAK (BAGIAN I)

Oleh: W.S.B. Dwandaru

- *Laboratorium Elektronika dan Instrumentasi, Jurusan Fisika, Universitas Negeri Yogyakarta, Karang Malang, Yogyakarta, 55281, Indonesia*
- *Institut Sains di Yogyakarta (I-eS-Ye), Sodanten, Yogyakarta, Indonesia*
- *Group on Mathematical Physics, Jurusan Fisika, Universitas Gadjah Mada, Sekip Utara Unit III, BLS 21, Yogyakarta*

ABSTRAK

Pada awalnya, eksperimen celah ganda dilakukan oleh Thomas Young (1801-1805) untuk memberikan solusi atas perdebatan tentang hakekat cahaya. Pada perkembangannya, eksperimen ini menjadi salah satu ciri khas fisika moderen untuk menjustifikasi prinsip saling melengkapi Bohr (*Bohr's complementarity principle*) yang merupakan salah satu pilar interpretasi Copenhagen terhadap teori kuantum. Oleh karena itu, makalah ini akan membahas eksperimen celah ganda menggunakan konsep variabel acak. Dalam makalah bagian I ini, akan dianalisis sifat acak partikel yang bergerak secara bergantian (satu per satu) menuju dua celah kecil.

Kata kunci: eksperimen celah ganda, variabel acak.

I. PENDAHULUAN

Fisika moderen secara signifikan berpengaruh terhadap peradaban manusia secara teknis, dari aplikasi medis sampai persenjataan canggih. Tidak mengherankan, jika perkembangan teknologi di bidang elektronika dan instrumentasi, teknologi material, teknologi komputer sangat pesat dewasa ini.

Namun, di sela-sela kemajuan teknologi ini, ternyata masih juga tersisa permasalahan-permasalahan fundamental terutama dalam tataran non-teknis fisika moderen. Sebagian permasalahan ini muncul dari berbagai ilmuwan yang belum sepenuhnya mengakui keabsahan dan kelengkapan (*completeness*) teori kuantum. Berbagai telaah filosofis terhadap teori kuantum ternyata masih menyisakan masalah-masalah **ontologis** maupun **epistemologis**. Salah satu polemik ontologis menarik fisika moderen adalah prinsip saling melengkapi Bohr (*Bohr's complementarity principle*) terhadap dualitas gelombang-partikel yang terangkum secara anggun dalam eksperimen celah ganda.

Eksperimen celah ganda pertama kali dilakukan oleh Thomas Young (1801-1805) dalam rangka menyelesaikan perdebatan ilmiah mengenai hakekat fisis cahaya, yakni

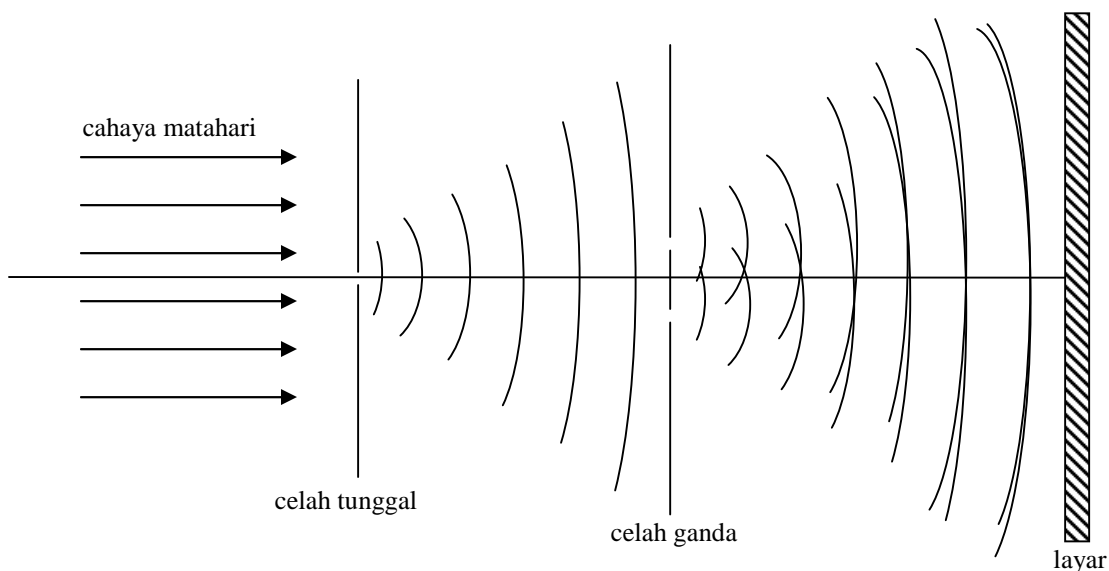
sebagai gelombang (teori gelombang cahaya) atau partikel (teori corpuscular). Pada perkembangannya, eksperimen ini menjadi penting dalam mekanika kuantum karena digunakan oleh Bohr untuk mendukung berlakunya interpretasi Copenhagen. Pada tahun 1974, Pier Giorgio Merli dan timnya berhasil melakukan eksperimen ini untuk suatu sumber yang dapat mengemisikan partikel satu per satu di Universitas Milan (Wikipedia, 2005). Selang lima belas tahun kemudian, eksperimen ini diulang kembali oleh Tonomura dan timnya di Jepang menggunakan peralatan elektronik yang lebih canggih dengan hasil yang identik dengan hasil sebelumnya.

Bagi fisikawan ataupun penulis futuristik, berbagai interpretasi fisis alam semesta muncul dari eksperimen celah ganda. Salah satu di antaranya yang cukup dikenal adalah interpretasi multi-dunia (*many world interpretation*). Interpretasi semacam ini muncul karena masalah ontologis dari eksperimen celah ganda belum dapat diselesaikan secara memuaskan.

Justru dengan seringnya bermunculan interpretasi yang menggelitik daya pikir manusia inilah, eksperimen celah ganda seperti tidak habis-habisnya untuk dibahas. Eksperimen celah ganda tetap menjadi permasalahan menarik yang terbuka untuk berbagai penjelasan disebabkan masih adanya peluang untuk melakukan reinterpretasi ontologis terhadap analisis standarnya. Demikian pula untuk kajian dalam makalah ini. Dalam hal ini, akan dibahas eksperimen celah ganda dari sudut pandang statistik, terutama menggunakan analisis variabel acak. Dalam pembahasan ini, penulis tidaklah bermaksud mengetengahkan konsep baru, tetapi lebih tepatnya memberikan alternatif penjelasan tanpa perlu melanggar substansi mendasar mekanika kuantum, terutama prinsip ketidakpastian Heisenberg. Dengan demikian, diharapkan deskripsi statistik eksperimen celah ganda ini dapat memperkaya wawasan pembaca akan luasnya ilmu Tuhan, tergantung dari sisi mana manusia mengamatinya.

II. INTERPRETASI STANDAR EKSPERIMEN CELAH GANDA

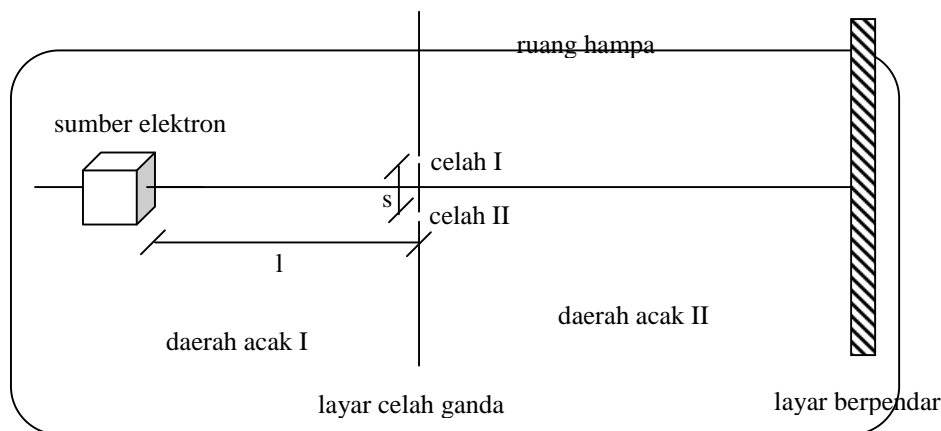
Eksperimen celah ganda dapat dipersiapkan dalam berbagai keadaan awal (*initial state*). Eksperimen celah ganda Young misalnya, menggunakan cahaya matahari sebagai sumber gelombang. Selanjutnya, cahaya matahari ini dilewatkan dalam sebuah celah sempit, yang kemudian dilewatkan lagi dalam suatu celah ganda, sebagaimana dapat diamati pada gambar di bawah ini.



Gambar 1: Eksperimen Celah Ganda Young

Mengikuti Zafiratos (1985), berkas cahaya matahari jatuh pada sebuah celah tunggal yang menghasilkan sumber cahaya tunggal dalam ruang gelap. Sumber sekunder ini dilewatkan pada celah ganda yang kemudian menghasilkan dua sumber gelombang baru (tersier) dari tiap-tiap celah, dengan beda fase konstan. Konstannya beda fase dapat dijamin karena sumber tersier berasal dari sumber sekunder yang sama. Jika kedua sumber tersier (dari celah ganda) saling tumpang tindih (*overlapped*), maka pada daerah tertentu kedua gelombang akan sefase dan pada daerah lainnya tidak. Gelombang-gelombang yang sefase akan memberikan intensitas yang saling memperkuat (*constructive*), sebaliknya gelombang-gelombang tak sefase akan saling meniadakan (*destructive*). Akibatnya akan muncul pola gelap–terang secara bergantian pada layar. Pola inilah yang disebut sebagai pola interferensi (*interference fringes*). Pola interferensi tidak akan muncul jika cahaya matahari diandaikan terdiri dari partikel-partikel. Dengan demikian, eksperimen celah ganda Young membuktikan sifat gelombang dari cahaya dan sekaligus memperkuat teori gelombang cahaya.

Sekarang, sumber yang tadinya berupa cahaya matahari diganti dengan sumber berupa partikel, yakni elektron. Berkas-berkas elektron ini akan dipancarkan menuju layar celah ganda dan kemudian akan diamati pola yang terjadi (setelah melalui celah ganda) pada layar berpendar. Dalam realitasnya, eksperimen celah ganda (untuk partikel) dilakukan dalam ruang hampa guna mereduksi tumbukan dengan partikel-partikel udara. Secara skematis, *set-up* eksperimen ini dapat diamati sebagai berikut:



Gambar 2: Eksperimen celah ganda dengan sumber elektron.

Jika berkas-berkas elektron dipancarkan secara terus-menerus ke dalam layar celah ganda, maka eksperimen menunjukkan bahwa pada layar berpendar akan teramati terjadinya pola interferensi, yakni pola gelap-terang secara bergantian dengan jarak antar pola merupakan ukuran (*measure*) untuk panjang gelombang elektron. Teramatinya pola interferensi pada layar berpendar mestinya diakibatkan oleh sifat gelombang dari berkas elektron, sesuai dengan prinsip dualitas gelombang partikel. Berkas elektron akan terbagi menjadi dua berkas saat melalui layar celah ganda dan akan saling berinterferensi. Namun, perlu diingat pula bahwa “gelombang elektron” bukanlah gelombang mekanik seperti umumnya. Menurut Born (Griffiths 1995; Goswami, 1992), elektron merupakan gelombang probabilitas (*probability wave*) yang menandakan peluang ditemukannya elektron pada posisi atau daerah tertentu. Mengikuti Goswami (1992), hal ini berarti probabilitas elektron untuk sampai pada layar berpendar dengan pola terang adalah tinggi, sebaliknya probabilitas elektron untuk sampai pada layar berpendar dengan pola gelap adalah rendah. Dari pengamatan eksperimen, berkas-berkas elektron memang sampai pada layar berpendar dengan sifat partikelnya, yakni satu buah pendaran tiap elektron. Akumulasi dari pendaran-pendaran tersebut membentuk pola interferensi. Hal ini justru nampak seperti interpretasi ensemble Einstein.

Kemungkinan lain munculnya pola interferensi pada layar berpendar adalah elektron yang melalui celah I dan elektron lain yang melalui celah II akan saling berinteraksi - dengan suatu mekanisme tertentu - sedemikian sehingga membentuk pola interferensi pada layar berpendar. Dalam hal ini, elektron dipertahankan sebagai suatu partikel dan dengan cara tertentu akan saling berinteraksi membentuk pola gelap-terang.

Dalam usaha untuk lebih memahami secara ontologis terhadap apa yang sebenarnya terjadi saat elektron melewati kedua celah, maka dibuatlah eksperimen lanjutan

dengan memperlemah sumber elektron sedemikian sehingga sumber dapat menghasilkan elektron satu per satu. Dalam eksperimen lanjutan ini, satu buah elektron dipancarkan menuju celah ganda, dan diamati di daerah mana pada layar terjadi pendaran. Selang beberapa saat, satu buah elektron kembali dipancarkan dan diamati kembali pendaran yang terjadi, demikian seterusnya. Jika eksperimen ini dapat dijalankan secara otomatis dan dapat diketahui berapa jumlah elektron yang telah dipancarkan dalam selang waktu tertentu, maka untuk jumlah elektron yang makin besar akan tampak pola interferensi pada layar berpendar. Perlu diingatkan sekali lagi bahwa hasil eksperimen ini telah diklarifikasi oleh Merli (1974) dan Tonomura (1989).

Hasil eksperimen Merli dan Tonomura menjadi menarik disebabkan elektron yang dikenal sebagai partikel, dan dipancarkan satu per satu dari sumber ternyata dapat menghasilkan pola interferensi. Hal ini sama sekali berbeda jika yang dipancarkan dari sumber bukanlah partikel, tetapi benda klasik (makroskopik) seperti bola atau peluru. Sebagaimana diketahui, jika bola atau peluru dilewatkan pada dua celah (ukuran celah tentu menyesuaikan), maka tidak akan ditemukan pola interferensi. Pola yang terjadi adalah bola atau peluru akan mengumpul pada daerah (layar) yang sejajar masing-masing celah. Tetapi, jika salah satu celah ditutup (celah I atau celah II), maka pola yang terjadi pada layar antara bola, peluru atau elektron ternyata identik. Sekali kedua celah dibuka, bola atau peluru akan nampak sebagai partikel klasik, sedangkan elektron nampak “menunjukkan” sifat kuantumnya dengan terjadinya pola interferensi.

Dengan adanya hasil ini, maka interpretasi ontologis bahwa dua elektron saling berinteraksi (setelah melalui kedua celah) sedemikian sehingga dihasilkan pola interferensi, tidak dapat dipertahankan. Di lain pihak, lebih mengejutkan lagi interpretasi Copenhagen yang menyatakan bahwa satu buah elektron akan **terbelah** menjadi dua, belahan pertama akan melewati celah I, sedangkan belahan kedua akan melewati celah II, dan akhirnya kedua belahan tersebut akan saling berinterferensi (setelah melalui celahnya masing-masing). Sedangkan interpretasi ensemble Einstein tidak dapat memberikan jawaban atas eksperimen ini.

Dalam hal ini, perlu juga untuk mengungkap sekilas aspek matematis eksperimen celah ganda menggunakan fungsi gelombang Schrödinger tak gayut waktu dan ruang Hilbert H yang khusus, yakni ruang fungsi $\mathfrak{S}(\mathfrak{R}, d\vec{r})$. Sebuah elektron yang dilepaskan dari sumber dan melalui celah I akan memiliki fungsi gelombang

$$\psi(\vec{r}_1), \tag{1}$$

dengan peluang ditemukannya partikel di sekitar celah I bernilai

$$\|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2 d^3\mathbf{r}_1. \quad (2)$$

Demikian pula sebuah elektron yang dilepaskan dari sumber dan melalui celah II akan memiliki fungsi gelombang

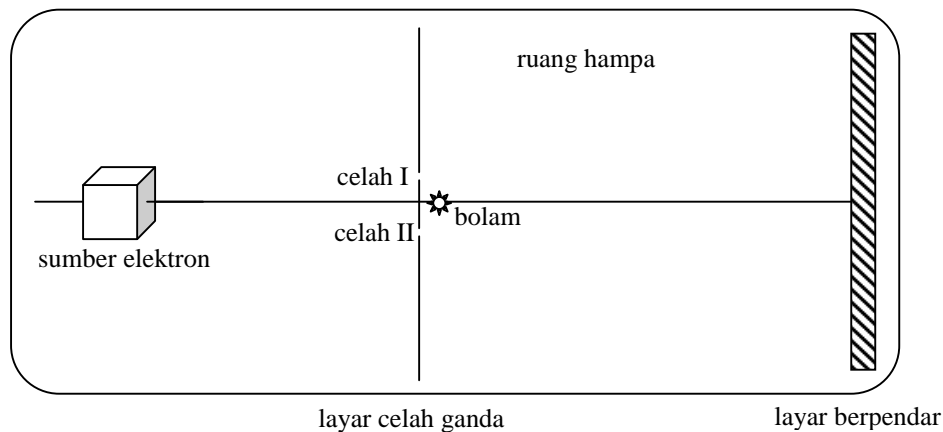
$$\psi(\mathbf{r}_2), \quad (3)$$

dengan peluang ditemukannya partikel di sekitar celah II bernilai

$$\|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3\mathbf{r}_2. \quad (4)$$

Dengan demikian, mestinya elektron akan **terlokalisasi sesaat** di sekitar celah I atau celah II.

Untuk dapat mengetahui celah mana yang dilalui elektron, maka dilakukan suatu eksperimen yang **memaksa** elektron untuk menampakkan sifat materinya, yaitu dengan cara melakukan pengukuran terhadap posisi elektron secara **pasti**. Salah satu cara tersebut adalah dengan menyalakan sebuah lampu (bolam) tepat di belakang layar celah ganda sebagaimana yang disarankan oleh Feynman (1965) seperti diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 3: Mengamati celah mana yang dilalui elektron.

Apa yang terjadi di sini adalah pengamat melokalisasi elektron pada salah satu celah saja, sedemikian sehingga yang muncul adalah salah satu fungsi gelombang saja, yaitu $\psi(\mathbf{r}_1)$ atau $\psi(\mathbf{r}_2)$. Dengan demikian, dapat terjadi dua kemungkinan, yakni sebuah elektron melalui celah I dengan probabilitas $\|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2 d^3\mathbf{r}_1 = 1$ sehingga $\|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3\mathbf{r}_2 = 0$, atau sebaliknya elektron tersebut melalui celah II dengan probabilitas $\|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3\mathbf{r}_2 = 1$ sehingga $\|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2 d^3\mathbf{r}_1 = 0$.

Dengan melokalisasi elektron menggunakan bolam, maka berlakulah prinsip ketidakpastian Heisenberg, yaitu:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (5)$$

Artinya, jika pengamat melokalisasi secara pasti keberadaan partikel (melalui celah I atau celah II), maka informasi mengenai momentum elektron akan tidak pasti, yang mengakibatkan panjang gelombang elektron (sebagai sifat gelombang dari elektron) tidak dapat ditentukan. Sebaliknya, jika pengamat tidak terlalu mementingkan celah mana yang dilalui elektron, maka posisi elektron menjadi tidak pasti, namun informasi mengenai momentum elektron menjadi pasti, sehingga panjang gelombang elektron dapat ditentukan. Inilah yang disebut sebagai prinsip saling melengkapi Bohr (Garden, 1984; Goswami, 1992).

Pada bagian selanjutnya, akan diamati bagaimana statistik menangani eksperimen celah ganda dengan analisis variabel acak.

III. GAGASAN TENTANG FUNGSI PELUANG DALAM DAERAH ACAK I EKSPERIMEN CELAH GANDA

Dalam eksperimen celah ganda, paling tidak terdapat dua daerah dengan kejadian random (acak), yakni 1) daerah antara sumber sampai layar celah ganda (daerah acak I) dan 2) daerah antara layar celah ganda sampai layar pendar (daerah acak II) [**lihat Gambar 2**]. Dalam makalah ini akan dibahas daerah acak I saja, sedangkan daerah acak II akan dibahas pada makalah lain (bagian II).

Menurut logika kuantum, pada daerah acak I eksperimen celah ganda dengan sumber berupa elektron yang teremisi satu per satu (tanpa bolam), pengamat tidak dapat secara bebas menyatakan proposisi “elektron melewati celah I”, begitu pula dengan proposisi “elektron melalui celah II”. Proposisi yang bernilai benar adalah “elektron melewati celah I atau celah II”, walaupun pengamat gagal dalam menentukan celah mana yang dilalui elektron. Dengan demikian, elektron yang diemisikan satu per satu dari sumber **pasti** melewati salah satu celah, yang berarti elektron tersebut **pasti** terlokalisasi sesaat pada salah satu celah, atau dengan kata lain menampakkan sifat materinya pada salah satu celah dengan probabilitas $\|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2$ atau $\|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2$. Namun, sekali lagi tidak perlu diketahui lewat mana setiap elektron tersebut.

Dengan demikian, dalam hal ini, terjadi peristiwa acak (*random event*) yang pertama, yaitu partikel akan melewati celah I atau celah II secara acak. Oleh karena itu, disusun ruang sampel $\Sigma = \{\text{celah I, celah II}\}$. Dari ruang sampel ini dapat disusun peristiwa-

peristiwa $\{\text{celah I}\}$, $\{\text{celah II}\}$, $\{\text{celah I, celah II}\}$, dan $\{\Phi\}$, dengan $\{\Phi\}$ adalah himpunan kosong. $\{\text{celah I}\}$, $\{\text{celah II}\}$ berturut-turut merupakan peristiwa elektron melalui celah I dan celah II, yang disebut juga sebagai peristiwa-peristiwa elementer. $\{\text{celah I, celah II}\}$ adalah peristiwa **pasti**, yakni elektron pasti melewati salah satu celah. Hal ini sesuai dengan asumsi awal di atas, bahwa elektron **pasti** melewati salah satu celah, namun tidak perlu dipertanyakan melalui celah yang mana, sehingga tidak melanggar prinsip ketakpastian Heisenberg. Sedangkan, $\{\Phi\}$ disebut peristiwa mustahil.

Himpunan dari peristiwa-peristiwa disebut sebagai ruang peristiwa, yakni $\Omega = \{\wp_n | \wp_n \subset \Sigma, n = 1, 2, 3, 4\} = \{\{\text{celah I, celah II}\}, \{\text{celah I}\}, \{\text{celah II}\}, \{\Phi\}\}$. Dapat diamati bahwa untuk setiap peristiwa \wp_n terdapat komplemennya, $\overline{\wp_n}$, yakni $\wp_1 = \{\text{celah I, celah II}\}$ memiliki $\overline{\wp_1} = \wp_4 = \{\Phi\}$, demikian pula berlaku $\overline{(\overline{\wp_1})} = (\wp_4) = \wp_1$. $\wp_2 = \{\text{celah I}\}$ memiliki $\overline{\wp_2} = \wp_3 = \{\text{celah II}\}$. Komplemen dari peristiwa \wp_2 adalah elektron tidak melalui celah I, yang tentulah berarti elektron melalui celah II (\wp_3) sesuai asumsi di atas. Demikian juga sebaliknya, $\overline{\wp_3} = \wp_2 = \{\text{celah I}\}$, yakni komplemen dari peristiwa \wp_3 adalah peristiwa \wp_2 . Dapat diamati bahwa $\wp_n \cup \wp_m \in \Omega, n \neq m$ dan $\wp_n \cap \wp_m \in \Omega, n \neq m$. Untuk $\wp_2 \cap \wp_3$ akan diperoleh peristiwa mustahil $\{\Phi\}$ yang menandakan sifat lokalisasi elektron pada salah satu celah saja, yakni celah I atau celah II saja, tidak pernah sebuah elektron terbelah menjadi dua. Dengan kata lain, \wp_2 dan \wp_3 saling independen. Sedangkan, $\wp_2 \cup \wp_3 = \wp_1$, sesuai dengan asumsi awal. Mengikuti Arnold (1992), tiap-tiap elemen dari Ω disebut himpunan terukur dan pasangan (Σ, Ω) disebut ruang terukur. $\wp_n \subset \wp_m, n \neq m$ memiliki arti bahwa terjadinya \wp_n mengakibatkan terjadi pula \wp_m .

Pada setiap peristiwa \wp_n dapat ditetapkan peluangnya, yakni $P(\wp_n)$. Fungsi peluang merupakan suatu ukuran ternormalisasi berbentuk:

$$P: \Omega \rightarrow [0,1]$$

$$\wp_n \text{ a } P(\wp_n) \quad ; \quad \forall \wp_n \in \Omega$$

yang memenuhi:

$$1) 0 \leq P(\wp_n) \leq 1, \quad \forall \wp_n \in \Omega,$$

$$2) P(\Sigma) = 1,$$

$$3) P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \wp_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\wp_n), \quad \text{jika} \quad \forall \wp_n \in \Omega \quad \text{terpenuhi} \quad \wp_n \cap \wp_m = \{\Phi\}, \quad \text{dengan} \quad n \neq m$$

(penjumlahan-sigma).

Definisi fungsi peluang di atas disebut sebagai pendekatan aksiomatik Kolmogoroff. Selain itu, masih ada definisi peluang secara klasik dan secara frekuensi relatif.

Ruang (Σ, Ω, P) disebut sebagai ruang probabilitas, yang memenuhi:

1) $P(\wp_n) = 1 - P(\overline{\wp_n})$, untuk $\wp_n \in \Omega$.

Bukti:

Karena $\wp_n \cup \overline{\wp_n} = \Sigma$ dan $\wp_n \cap \overline{\wp_n} = \{\Phi\}$, maka menggunakan sifat penjumlahan-sigma fungsi peluang, dapat diperoleh

$$P(\Sigma) = P(\wp_n \cup \overline{\wp_n}) = P(\wp_n) + P(\overline{\wp_n}) = 1$$

atau

$$P(\wp_n) = 1 - P(\overline{\wp_n}).$$

2) Untuk $\wp_n \subset \wp_m$, berlaku $P(\wp_n) \leq P(\wp_m)$, dengan $\wp_n, \wp_m \in \Omega$.

Sesuai dengan peluang (2) dan (4), dapat diperoleh:

$$P(\wp_2 = \{\text{celah I}\}) = \|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2 d^3 \mathbf{r}_1 \equiv p \tag{6}$$

$$P(\wp_3 = \{\text{celah II}\}) = \|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3 \mathbf{r}_1 \equiv q \tag{7}$$

dan $P(\{\Phi\}) = 0 \tag{8}$

Menarik untuk dicermati bahwa ilmu statistika terkait dengan perhitungan peluang-peluang baru (lebih kompleks) yang diperoleh dari peluang peristiwa-peristiwa elementer ruang sampelnya (Arnold, 1992; Baschnagel, 1999). Peluang peristiwa-peristiwa elementer ini dapat diperoleh dari dua sumber, yakni: 1) pertimbangan teoritis atau 2) pengamatan terhadap sejumlah besar usaha berulang (Arnold, 1992).

Menurut definisi klasik, peluang suatu peristiwa, katakanlah A, diberikan secara *a priori* tanpa pelaksanaan eksperimen yang sebenarnya: peluang suatu peristiwa ditentukan melalui perbandingan (Papoulis, 1992):

$$P(A) = \frac{N_A}{N} \tag{9}$$

dengan N_A adalah jumlah hasil yang sesuai dengan peristiwa A dan N adalah jumlah hasil yang mungkin (Papoulis, 1992). Dalam usaha pelemparan satu buah uang logam, hasil yang mungkin adalah 2 ($N = 2$), sedangkan jumlah hasil yang sesuai dengan peristiwa munculnya sisi “Angka” adalah 1, sehingga $P(\{\text{Angka}\}) = \frac{1}{2}$.

Menurut pendekatan frekuensi relatif, probabilitas suatu peristiwa A, yakni $P(A)$ didefinisikan berdasarkan limit sebagai berikut (Papoulis, 1992):

$$P(A) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M_A}{M} \quad (10)$$

dengan M_A adalah jumlah kemunculan peristiwa A dan M adalah jumlah besar usaha berulang.

Nampak bahwa definisi peluang (9) dan (10) berbeda sama sekali. Definisi (10) jelas lebih bersifat observatif (perlu pengamatan), karena peluang peristiwa A didasarkan pada pengamatan jumlah kemunculannya dalam M usaha berulang. Baschnagel (1999) dan Arnold (1992) lebih suka menggunakan pendekatan frekuensi relatif untuk mendefinisikan suatu peluang.

Teori kuantum sendiri lebih cenderung mengikuti definisi peluang menggunakan pendekatan aksiomatik Kolmogoroff. Jika D merepresentasikan keadaan suatu sistem kuantum, dan jika $E \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})$ dengan $\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ adalah himpunan borel pada garis real \mathfrak{R} sehingga $E \subset \mathfrak{R}$, maka berdasarkan teorema spektral untuk operator *self-adjoint*, sebuah kuantitas fisis O menentukan sebuah operator proyeksi $P_o(E) \in P(H)$ untuk $\forall E$ pada \mathfrak{R} dengan $P(H)$ adalah himpunan proyektor-proyektor dalam ruang Hilbert H , yakni:

$$P : \mathcal{B}(\mathfrak{R}) \rightarrow P(H) \\ E \mathbf{a} P_o(E)$$

yang memenuhi:

- 1) $P_o(\Phi) = 0$; $P_o(\mathfrak{R}) = I$,
- 2) $P_o(\mathbf{U}_i E_i) = \sum_i P_o(E_i)$, untuk $\forall (E_i \cap E_j = \{\Phi\})$ dengan $i \neq j$.

Fungsi $E \mathbf{a} P_o(E)$ disebut ukuran bernilai-proyeksi dari kuantitas O . Fungsi ini identik dengan fungsi peluang yang telah didefinisikan di atas.

Selanjutnya, telah menjadi **asumsi mendasar** dalam mekanika kuantum bahwa $tr(DP_o(E))$ adalah peluang bahwa nilai kuantitas fisis O , saat berada pada keadaan kuantum D , terletak dalam himpunan borel E . Fungsi $E \mathbf{a} tr(DP_o(E))$ ini memiliki sifat ukuran probabilitas yang memenuhi:

- 1) $tr(DP_o(\Phi)) = 0$; $tr(DP_o(\mathfrak{R})) = 1$,
- 2) $tr\left(DP_o\left(\mathbf{U}_i E_i\right)\right) = \sum_i tr(DP_o(E_i))$, untuk $\forall (E_i \cap E_j = \{\Phi\})$ dengan $i \neq j$.

Untuk spektrum $\sigma(O)$ yang kontinu, vektor keadaan $\psi \in H$ akan dipetakan ke dalam ruang fungsi $\Gamma^2(\sigma(O), P)$, katakanlah $\psi(\lambda)$ yang tidak lain adalah fungsi gelombang dalam representasi- O . Dengan demikian akan diperoleh:

$$E \mathbf{a} \operatorname{tr}(DP_o(E)) = (\psi(\lambda), P(E)\psi(\lambda)) = (\psi(\lambda), \chi_E(E)\psi(\lambda)) = \int_E \|\psi(\lambda)\|^2 P(d\lambda) \tag{11}$$

dengan $\sigma(O) = \{\lambda\}$, λ kontinu dan χ_E adalah fungsi karakteristik.

Dalam representasi koordinat (representasi-x), persamaan (11) menjadi $(a,b) \mathbf{a} \int_a^b \|\psi(x)\|^2 dx$, dengan $E = (a,b) \subset \mathfrak{R}$ merupakan interval berhingga (*finite*).

Sebagaimana telah dinyatakan dalam persamaan (2) dan (4), $\|\psi(x)\|^2 dx$ adalah probabilitas ditemukannya partikel di sekitar $x + dx$. Sedangkan $\int_a^b \|\psi(x)\|^2 dx$ adalah probabilitas bahwa posisi elektron terletak pada interval (a,b) .

Dari pembahasan di atas, nampak bahwa aspek aksiomatik peluang kuantum dipengaruhi oleh fungsi gelombang yang membangun fungsi peluang tersebut. Padahal fungsi gelombang menggambarkan keadaan suatu sistem kuantum yang membawa informasi lengkap tentang sistem. Dengan kata lain, dalam sistem kuantum, informasi lengkap tentang sistem yang inheren dalam fungsi gelombang justru menghasilkan informasi yang bersifat statistik. Gambaran inilah yang tidak terdapat dalam konsep peluang untuk statistika pada umumnya, baik menurut pendekatan klasik maupun frekuensi relatif.

Khususnya dalam eksperimen celah ganda, dapat sedikit dibahas mengenai kesesuaian peluang kuantum dengan peluang menurut pendekatan klasik maupun frekuensi relatif. Diamati kembali **Gambar 2**. Diketahui jarak antara kedua celah adalah s . Diasumsikan kedua celah terletak pada kedudukan yang simetris terhadap garis horizontal (masing-masing celah berjarak $\frac{1}{2}s$ dari garis horizontal), sedangkan sumber terletak di sekitar garis horizontal yang berjarak l dari celah. Menurut definisi klasik, hasil-hasil yang mungkin ada dua, yakni elektron melalui celah I atau celah II. Maka, setiap elektron yang diemisikan satu per satu dari sumber akan memiliki peluang $P(\{\text{celah I}\}) = P(\{\text{celah II}\}) = \frac{1}{2}$. Pendefinisian peluang seperti ini tidak melanggar ketakpastian Heisenberg karena pengamat tetap saja tidak dapat menyatakan secara pasti elektron melalui celah yang mana. Informasi yang dapat diperoleh dari pendefinisian klasik adalah peluang yang seimbang untuk melalui kedua celah tersebut. Karena peluang untuk menemukan partikel di sekitar celah I atau celah II adalah sesuai dengan persamaan (2) dan (4), maka dapat diperoleh:

$$P(\{\text{celah I}\}) = \|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2 d^3\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}, \quad (12)$$

dan

$$P(\{\text{celah II}\}) = \|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3\mathbf{r}_2 = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Dari sini, perlu dicari fungsi gelombang $\psi(\mathbf{r}_1)$ dan $\psi(\mathbf{r}_2)$ sedemikian sehingga berturut-turut dapat dihasilkan persamaan (12) dan (13).

Lain halnya dengan pendekatan frekuensi relatif. Karena pendekatan ini didasarkan pada pengamatan berulang dalam jumlah yang besar, tentu menyebabkan posisi elektron menjadi pasti (celah yang dilewati elektron dapat diketahui), namun informasi tentang momentum dan panjang gelombang menjadi tak pasti, sehingga pola interferensi akan hilang. Walaupun diketahui dari hasil eksperimen berulang bahwa $P(\{\text{celah I}\}) = P(\{\text{celah II}\}) \approx \frac{1}{2}$, namun pendefinisian frekuensi relatif dapat mengakibatkan hilangnya pola interferensi dan menampakkan sifat materi dari elektron. Sebaliknya, dengan definisi secara klasik, posisi elektron tetap tidak pasti, sehingga pola interferensi tetap teramati.

Telah dijelaskan di atas bahwa peristiwa $\varphi_2 = \{\text{celah I}\}$ dan $\varphi_3 = \{\text{celah II}\}$ saling independen atau $\varphi_2 \cap \varphi_3 = \{\Phi\}$. Dengan demikian, menggunakan sifat penjumlahan-sigma, dapat diperoleh

$$P(\Sigma) = P(\varphi_2 \cup \varphi_3) = P(\varphi_2) + P(\varphi_3) = \|\psi(\mathbf{r}_1)\|^2 d^3\mathbf{r}_1 + \|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3\mathbf{r}_2 = 1 \quad (14)$$

Persamaan (14) menandakan bahwa jika peristiwa elektron melewati celah I atau celah II merupakan peristiwa yang saling independen (bebas), maka peluang menemukan elektron pada celah I atau celah II merupakan jumlahan linier dari peluang individu dari masing-masing peristiwa, yang tidak lain berperilaku sebagaimana halnya peluang partikel klasik.

IV. INTERPRETASI STATISTIK DAERAH ACAK I EKSPERIMEN CELAH GANDA: ANALISIS VARIABEL ACAK

Variabel acak \mathfrak{K} merupakan suatu fungsi yang digunakan untuk mengkode elemen-elemen ruang sampel Σ dengan bilangan tertentu. Pendefinisian \mathfrak{K} dapat dilakukan secara sebarang (*arbitrary*), sesuai dengan tujuan yang hendak dicapai.

Dalam kasus eksperimen celah ganda, khususnya daerah acak I, dapat didefinisikan dua alternatif variabel acak \mathfrak{K} , yakni:

$$\mathfrak{N}_1(\text{celah I})=1 \quad ; \quad \mathfrak{N}_1(\text{celah II})=0 \quad (15)$$

atau

$$\mathfrak{N}_2(\text{celah I})=0 \quad ; \quad \mathfrak{N}_2(\text{celah II})=1 \quad (16)$$

\mathfrak{N}_1 dan \mathfrak{N}_2 memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

- 1) Himpunan $\{\mathfrak{N}_i \leq x\}_{i=1,2}$ adalah peristiwa untuk $\forall x$.

Bukti:

Digunakan dahulu variabel acak \mathfrak{N}_1 .

- Untuk $x < 0$, maka $\mathfrak{N}_1(\text{celah II}) \geq x$ dan $\mathfrak{N}_1(\text{celah I}) > x$, yang berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\Phi\}$, yang tidak lain merupakan peristiwa mustahil.
- Untuk $0 \leq x < 1$, maka $\mathfrak{N}_1(\text{celah II}) \leq x$ dan $\mathfrak{N}_1(\text{celah I}) \geq x$, yang berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\text{celah II}\} = \emptyset_3$.
- Untuk $x \geq 1$, maka $\mathfrak{N}_1(\text{celah I}) \leq x$ dan $\mathfrak{N}_1(\text{celah II}) < x$, yang berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\text{celah I, celah II}\} = \Sigma$, yang tidak lain merupakan peristiwa pasti.

Dapat diamati untuk $x = (-\infty, \infty)$, $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\}$ merupakan peristiwa. Hal ini berlaku pula untuk \mathfrak{N}_2 , yakni:

- Untuk $x < 0$; maka $\mathfrak{N}_2(\text{celah I}) \geq x$ dan $\mathfrak{N}_2(\text{celah II}) > x$, yang berarti $\{\mathfrak{N}_2 \leq x\} = \{\Phi\}$.
- Untuk $0 \leq x < 1$; maka $\mathfrak{N}_2(\text{celah I}) \leq x$ dan $\mathfrak{N}_2(\text{celah II}) \geq x$, yang berarti $\{\mathfrak{N}_2 \leq x\} = \{\text{celah I}\} = \emptyset_2$.
- Untuk $x \geq 1$; maka $\mathfrak{N}_2(\text{celah I}) \leq x$ dan $\mathfrak{N}_2(\text{celah II}) \leq x$, yang berarti $\{\mathfrak{N}_2 \leq x\} = \{\text{celah I, celah II}\} = \Sigma$.

- 2) Peluang peristiwa $\{\mathfrak{N}_i = \infty\}_{i=1,2}$ adalah nol, demikian pula peluang peristiwa $\{\mathfrak{N}_i = -\infty\}_{i=1,2}$ adalah nol atau dengan kata lain $P(\{\mathfrak{N}_i = \infty\}_{i=1,2}) = 0$ dan $P(\{\mathfrak{N}_i = -\infty\}_{i=1,2}) = 0$. Dapat diamati bahwa syarat kedua ini lebih nampak sebagai suatu aksioma, karena diperkenalkan variabel acak $\mathfrak{N}_{i=1,2} = \pm\infty$ yang tidak didefinisikan sebelumnya.

Selanjutnya, dapat didefinisikan fungsi distribusi untuk VA¹ \mathfrak{N}_1 dan \mathfrak{N}_2 , yaitu:

$$F_{\mathfrak{N}_1}(x) = P(\{\mathfrak{N}_1 \leq x\}) \quad (17)$$

dan $F_{\mathfrak{N}_2}(x) = P(\{\mathfrak{N}_2 \leq x\}) \quad (18)$

¹ Untuk selanjutnya, istilah ‘variabel acak, akan dinotasikan dengan VA.

Dengan demikian, untuk VA \mathfrak{N}_1 , misalnya, dapat diperoleh berbagai nilai fungsi distribusi sebagai berikut:

- Untuk $x < 0$; berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\Phi\}$, sehingga $P\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = P\{\Phi\} = 0$.
- Untuk $0 \leq x < 1$; berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\text{celah II}\}$,
sehingga $P(\{\mathfrak{N}_1 \leq x\}) = P\{\text{celah II}\} = \|\psi(\mathbf{r}_2)\|^2 d^3 \mathbf{r}_2$.
- Untuk $x \geq 1$; berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\text{celah I, celah II}\} = \Sigma$, sehingga $P\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = P(\Sigma) = 1$.

Jika fungsi distribusi VA \mathfrak{N}_1 dibuat diagramnya, akan diperoleh:

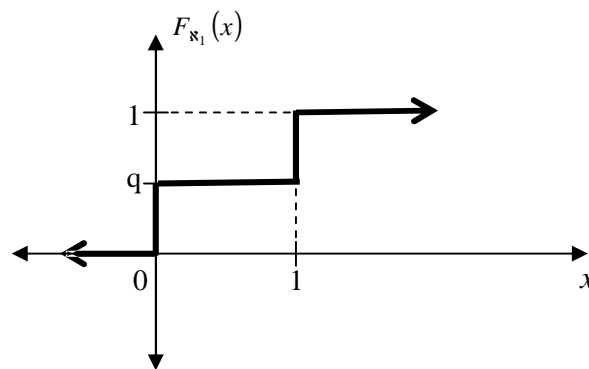


Diagram 1: Fungsi Distribusi VA \mathfrak{N}_1

Karena $F_{\mathfrak{N}_1}(x)$ berbentuk fungsi tangga sebagaimana dapat diamati dari **Diagram 1**, dikatakan bahwa VA \mathfrak{N}_1 (dan juga \mathfrak{N}_2) berjenis diskrit.

Sesuai dengan penjelasan sebelumnya, agar pola interferensi pada layar berpendar tetap teramati, maka peluang suatu elektron untuk melalui celah I atau celah II hendaknya didekati secara klasik, yakni:

$$F_{\mathfrak{N}_1}(x) = P\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} \approx \frac{n_{\mathfrak{N}_1}}{n} \quad (19)$$

dengan $n_{\mathfrak{N}_1}$ adalah jumlah hasil yang sesuai dengan peristiwa $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\}$ dan n adalah hasil yang mungkin. Definisi klasik ini hendaknya diperhatikan dengan seksama. Untuk $x < 0$, $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\Phi\}$, berarti $n = 2$ dan $n_{\mathfrak{N}_1} = 0$, sehingga $F_{\mathfrak{N}_1}(x < 0) = P\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \frac{0}{2} = 0$. Untuk $0 \leq x < 1$, berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\text{celah II}\}$, berarti $n = 2$ dan $n_{\mathfrak{N}_1} = 1$, sehingga $F(0 \leq x < 1) = P\{\text{celah II}\} = \frac{1}{2}$, dan akhirnya untuk $x \geq 1$, berarti $\{\mathfrak{N}_1 \leq x\} = \{\text{celah I, celah II}\}$, berarti $n = 2$ dan $n_{\mathfrak{N}_1} = 2$, sehingga $F_{\mathfrak{N}_1}(x \geq 1) = P\{\text{celah I, celah II}\} = P(\Sigma) = \frac{2}{2} = 1$.

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh berbagai nilai fungsi distribusi untuk VA \mathfrak{K}_2 beserta diagramnya.

Fungsi kepadatan VA \mathfrak{K}_1 dan \mathfrak{K}_2 dapat diberikan sebagai:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx} P(\{\mathfrak{K}_1 \leq x\}) \quad (20)$$

Untuk VA \mathfrak{K}_1 dan \mathfrak{K}_2 yang berjenis diskrit, dapat diperoleh fungsi kepadatan sebagai (Papoulis, 1992):

$$f(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i) \quad ; \quad P_i = P(\{\mathfrak{K}_1 = x_i\}) \quad (21)$$

Dengan demikian, untuk VA \mathfrak{K}_1 dapat diperoleh:

$$f(x) = P_1 \delta(x - x_1) + P_2 \delta(x - x_2) = p \delta(x - 1) + q \delta(x) = \|\psi(r_1)\|^2 d^3 r_1 \delta(x - 1) + \|\psi(r_2)\|^2 d^3 r_2 \delta(x) \quad (22)$$

Fungsi kepadatan sebagaimana di atas, dapat digambarkan sebagai berikut:

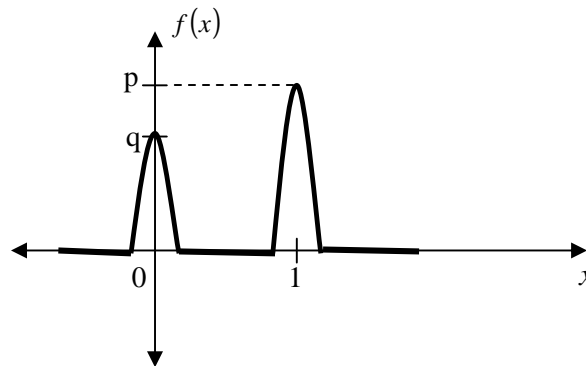


Diagram 2: Fungsi Kepadatan VA \mathfrak{K}_1

Dapat diamati dari diagram fungsi kepadatan di atas, konsentrasi peluang peristiwa \wp_2 dan \wp_3 terpusat pada $x=1$ dan $x=0$, dengan $f(x)$ berturut-turut bernilai p dan q .

Dengan fungsi kepadatan VA \mathfrak{K}_1 , yakni

$$f(x) = p \delta(x - 1) + q \delta(x).$$

dapat diperoleh fungsi distribusi VA \mathfrak{K}_1 dengan $x = \infty$ yakni:

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [p \delta(x - 1) + q \delta(x)] dx = p \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 1) dx + q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (23)$$

Menurut definisi fungsi delta-Dirac, hendaknya dipenuhi $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') dx = 1$, sehingga persamaan (20) dapat dimodifikasi menjadi:

$$F(\infty) = p + q = \|\psi(r_1)\|^2 d^3 r_1 + \|\psi(r_2)\|^2 d^3 r_2 = 1, \quad (24)$$

yang identik dengan hasil yang diperoleh dari persamaan (14).

Selanjutnya, dapat ditentukan ekspektasi dari VA \mathfrak{X}_1 sebagai (Papoulis, 1992):

$$E\{\mathfrak{X}_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (25)$$

Dalam hal ini, $f(x) = \sum_i P_i \delta(x - x_i)$, sehingga

$$E\{\mathfrak{X}_1\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_i P_i \delta(x - x_i) dx = \sum_i P_i \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x - x_i) dx = \sum_i P_i x_i = p(1) + q(0) = p = \|\psi(r_1^{\mathbf{F}})\|^2 d^3 r_1^{\mathbf{F}} \quad (26)$$

Sedangkan, variansi VA \mathfrak{X}_1 dapat ditentukan melalui rumusan:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\{\mathfrak{X}_1\})^2 f(x) dx. \quad (27)$$

Dari persamaan (27) dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 - 2xE\{\mathfrak{X}_1\} + E\{\mathfrak{X}_1\}^2] f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 f(x) - 2xE\{\mathfrak{X}_1\} f(x) + E\{\mathfrak{X}_1\}^2 f(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} 2xE\{\mathfrak{X}_1\} f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} E\{\mathfrak{X}_1\}^2 f(x) dx = E\{\mathfrak{X}_1^2\} - 2E\{\mathfrak{X}_1\}^2 + E\{\mathfrak{X}_1\}^2 \\ &= E\{\mathfrak{X}_1^2\} - E\{\mathfrak{X}_1\}^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Dengan

$$E\{\mathfrak{X}_1\} = p \rightarrow E\{\mathfrak{X}_1\}^2 = p^2 \quad (29)$$

dan

$$E\{\mathfrak{X}_1^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \sum_i P_i \delta(x - x_i) dx = \sum_i P_i \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \delta(x - x_i) dx = \sum_i P_i x_i^2 = p(1)^2 + q(0)^2 = p \quad (30)$$

Substitusi persamaan (29) dan (30) ke dalam (28), dapat diperoleh

$$\sigma^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq = \|\psi(r_1^{\mathbf{F}})\|^2 d^3 r_1^{\mathbf{F}} \|\psi(r_2^{\mathbf{F}})\|^2 d^3 r_2^{\mathbf{F}} = \|\psi(r_1^{\mathbf{F}})\|^2 \|\psi(r_2^{\mathbf{F}})\|^2 d^3 r_1^{\mathbf{F}} d^3 r_2^{\mathbf{F}} \quad (31)$$

Demikian pula, dengan cara yang sama, dapat ditentukan nilai harap dan variansi VA \mathfrak{X}_2 , yakni $E\{\mathfrak{X}_2\} = q$ dan $\sigma^2 = pq$.

Variabel acak dengan definisi yang lebih operasional dapat diperoleh jika diterapkan usaha Bernoulli pada daerah acak I eksperimen celah ganda. Sekali lagi, penerapan usaha Bernoulli dengan peluang peristiwa-peristiwa elementer tidak akan merusak pola interferensi pada layar berpendar.

Selanjutnya, melangkah pada pembahsan statistik daerah acak II eksperimen celah ganda. Ketika elektron terlokalisasi sesaat pada salah satu celah (celah I atau celah II), elektron akan menampakkan sifat gelombangnya. Maka, panjang gelombang elektron (λ_e) dapat ditentukan dengan pasti, selama tidak dilakukan pengamatan terhadap celah mana

elektron lewat. Bagi elektron yang gelombang probabilitasnya terlokalisasi sesaat pada salah satu celah, sifat gelombang elektron akan menuntun elektron ke daerah-daerah tertentu pada layar berpendar yang memiliki peluang besar dalam menghasilkan interferensi konstruktif. Jadi, elektron yang terlokalisasi pada salah satu celah akan memiliki peluang yang dipengaruhi oleh sifat interferensi gelombang, yakni:

- Elektron terlokalisasi memiliki peluang yang besar untuk jatuh pada segmen daerah layar berpendar dimana terjadi interferensi konstruktif.
- Elektron terlokalisasi memiliki peluang kecil untuk jatuh pada segmen daerah layar berpendar dimana terjadi interferensi destruktif.

Jika kemudian interpretasi peluang ini dibalik, yakni bukan peluang elektron yang diperoleh, namun peluang segmen daerah layar berpendar yang ditentukan, maka dapat diperoleh:

- Segmen daerah dimana terjadi interferensi konstruktif akan memiliki peluang yang besar sebagai tempat jatuhnya elektron terlokalisasi.
- Sebaliknya, segmen daerah layar berpendar dimana terjadi interferensi destruktif memiliki peluang kecil sebagai tempat jatuhnya elektron terlokalisasi.

Kedua interpretasi peluang di atas nampaknya memiliki implikasi yang berbeda. Hal ini akan dianalisis secara lebih mendalam dalam makalah lain yang akan menyusul (Bagian II).

V. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas, dapat diamati bahwa analisis variabel acak terhadap daerah I eksperimen celah ganda memungkinkan interpretasi elektron sebagai gelombang probabilitas yang terlokalisasi sesaat pada salah satu celah saja. Dalam analisis ini, tidak diperlukan pengamatan terhadap posisi pasti elektron (melewati celah I atau celah II) sedemikian sehingga tidak perlu merusak pola interferensi pada layar berpendar.

VI. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada Dr. rer. nat. Farchani Rosyid atas diskusi yang menarik, dan juga atas masukan-masukan ilmiah yang berguna dalam penulisan makalah ini. Penulis juga ingin mengucapkan rasa terima kasih kepada Bapak Gunardi atas diskusi yang menarik tentang berbagai konsep dalam statistik. Penulis menyampaikan rasa terima kasih kepada ketua Jurusan Fisika FMIPA UNY, Prof.

Suparwoto dan staf dosen Jurusan Fisika FMIPA UNY yang telah memberi dukungan kepada penulis untuk membuat penulisan ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Arnold, L., 1992, *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, Krieger Publishing Company, Florida, hal: 4.
- Beltrametti, E.G.& Cassinelli, G., 1981, *The Logic of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading,hal:4-5.
- Boas, M.L., 1983, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*, Edisi II, John Wiley&Sons, New York, hal: 707-709.
- Dwandaru, W.S.B., 2003, *Logika Kuantum Baku: Struktur Matematis dan Penafsirannya*, Skripsi S1, F MIPA UGM, hal: 24-25; 147-152.
- Garden, R.W., 1984, *Modern Logic and Quantum Mechanics*, Adam Hilger Ltd, Bristol, hal:22.
- Goswami, A., 1992, *Quantum Mechanics*, Win.C.Brown Publishers, Oregon, hal: 99-107.
- Griffiths, D.J., 1995, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, hal:18.
- Papoulis, A., 1992, *Probabilitas, Variabel Random, dan Proses Stokastik*, Edisi II, Gadjah Mada University Press, hal:7-10; 90-107; 146-149.
- Paul, W., & Baschnagel, J., 1999, *Stochastic Processes From Physics to Finance*, Springer-Verlag, Berlin, hal: 18.
- Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Double-slit_experiment, 5 Januari 2005.
- Zafiratos, C.D, 1985, *Physics*, edisi II, John Wiley&Sons, New York, hal: 454.