

BIFURKASI *PITCHFORK* SUPERKRITIKAL PADA SISTEM *FLUTTER*

Andini Putri Ariyani¹, Kus Prihantoso Krisnawan²

Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

¹e-mail: andiniputri_ariyani@yahoo.com,

²e-mail: kuspk@uny.ac.id.

Abstrak

Pada makalah ini dibahas mengenai bifurkasi 1-parameter yang terjadi pada sistem *flutter*. *Flutter* merupakan fenomena ketidakstabilan dinamik suatu sistem yang diakibatkan oleh interaksi antara unsur inersia, redaman, dan fleksibilitas struktur, serta beban-beban aerodinamika yang bekerja pada struktur.

Sistem *flutter* berbentuk sistem persamaan diferensial orde 2 dengan dua persamaan. Transformasi dilakukan untuk mereduksi orde sehingga diperoleh empat persamaan diferensial orde pertama. Analisis terhadap sistem *flutter* hasil transformasi dilakukan dengan melakukan reduksi dimensi sistem menggunakan teorema *Manifold Center*.

Hasil analisis menunjukkan bahwa pada sistem *flutter* terjadi bifurkasi *pitchfork* superkritikal. Hal ini berakibat titik kesetimbangan sistem menjadi tidak stabil ketika dilakukan perubahan terhadap nilai parameter.

Kata kunci: sistem *flutter*, *manifold center*, bifurkasi *pitchfork*

A. PENDAHULUAN

Menurut Novi Andria [6] *flutter* merupakan fenomena ketidakstabilan dinamik suatu sistem yang diakibatkan oleh interaksi antara unsur inersia, redaman, dan fleksibilitas struktur, serta beban-beban aerodinamika yang bekerja pada struktur. Apabila suatu struktur terkena aliran udara yang besar maka struktur tersebut akan bergetar dengan amplitudo yang meningkat. Getaran ini terjadi terus menerus sehingga struktur mengalami kegagalan. Jika fenomena ini terjadi pada pesawat terbang maka dapat dipastikan pesawat akan jatuh [3]

Sebenarnya, fenomena *flutter* tidak pernah terjadi pada pesawat di masa masa awal diciptakannya pesawat terbang [4]. Hal ini dikarenakan, pada masa itu pesawat bergerak dengan kecepatan rendah dan sayap pesawat dibuat *rigid*, sehingga fenomena *flutter* tidak banyak diketahui. Namun seiring dengan perkembangan jaman, sayap pesawat dibuat lebih lentur. Hal ini dimaksudkan agar pesawat lebih ringan. Jika pesawat semakin ringan maka gerak pesawatpun menjadi lebih cepat. Namun dengan dibuatnya sayap pesawat yang lentur menyebabkan munculnya fenomena *flutter* ini.

Penelitian terhadap fenomena *flutter* akan dilakukan secara matematis, yaitu dengan menganalisa model matematika dari sistem *flutter* pada sayap pesawat terbang. Analisis digunakan dengan menggunakan Teorema *Manifold Center*. Beberapa penelitian yang telah dilakukan terhadap fenomena *flutter*, diantaranya adalah Yang, 1995 [9] dan Liu, et, al, 2000 [5]. Yang [9], menunjukkan bahwa pada sistem *flutter* muncul Osilasi Limit Cycle, sedangkan Liu, et, al [5] melakukan penelitian tentang sistem *flutter* berdimensi 8 dan memberikan prediksi dan frekuensi dasar dari Osilasi Limit Cycle yang terjadi.

Pada penelitian ini, model sistem *flutter* yang digunakan didasarkan pada model sistem *flutter* yang dinyatakan oleh Chen dan Liu[2]. Model ini terdiri dari dua persamaan diferensial orde dua. Persamaan tersebut adalah

$$\begin{cases} h'' + 0.25\alpha'' + 0.1h' + 0.2h + 0.1Q\alpha = 0 \\ 0.25h'' + 0.5\alpha'' + 0.1\alpha' + (k_0 - 0.04Q)\alpha + e_2\alpha^3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

dengan h adalah *plunge displacement of airfoil*, α adalah *pitch displacement of airfoil*, Q adalah kecepatan udara yang tergeneralisasi, k_0 adalah koefisien kekakuan linear, dan $e_2 > 0$ adalah koefisien kekakuan nonlinier

Dalam makalahnya, Chen dan Liu menunjukkan bahwa pada saat parameter k_0 bernilai 0,08109668 terjadi bifurkasi *Hopf* superkritikal maupun subkritikal. Di dalam makalah ini, ditunjukkan bahwa pada saat k_0 bernilai 0,08109668 terjadi bifurkasi *pitchfork* superkritikal.

B. PEMBAHASAN

a. Transformasi Pertama

Sistem (1) akan ditransformasi menjadi sistem berdimensi 4 berorde 1 dengan cara mensubstitusikan $x_1 = \alpha$, $x_2 = \alpha'$, $x_3 = h$, $x_4 = h'$, dan nilai $k_0 = 0,08109668$ ke dalam sistem (1). Kemudian dilakukan penskalaan terhadap waktu t , yaitu $t = 7\tau$ didapatkan

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 4(0.26Q - 4 \times 0.08109668) & -1.6 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 4(0.08109668 - 0.24Q) & 0.4 & -1.6 & -0.8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ -16e_2x_1^3 \\ 0 \\ 4e_2x_1^3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ketika nilai $Q \leq 2.027417$ akan didapatkan satu titik ekuilibrium yaitu $\bar{u}_1 = (0, 0, 0, 0)$, dan ketika $Q > 2.027417$ akan didapat tiga titik ekuilibrium yaitu: $\bar{u}_1 =$

$$(0, 0, 0, 0), \bar{u}_2 = \left(\sqrt{\frac{0.04Q - 0.08109668}{e_2}}, 0, -0.5Q \left(\sqrt{\frac{0.04Q - 0.08109668}{e_2}} \right), 0 \right) \text{ dan } \bar{u}_3 = \left(-\sqrt{\frac{0.04Q - 0.08109668}{e_2}}, 0, 0.5Q \left(\sqrt{\frac{0.04Q - 0.08109668}{e_2}} \right), 0 \right)$$

Adanya perubahan banyaknya titik ekuilibrium menandakan terjadinya bifurkasi pada saat $Q = 2.027417$. Selanjutnya, dilakukan translasi terhadap sistem agar bifurkasi terjadi pada saat $Q = 0$. Untuk itu dimisalkan $Q = Q_b + 2.027417$, kemudian nilai ini disubstitusikan ke persamaan (2) sehingga didapat

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0.8109668 & -1.6 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -1.6219336 & 0.4 & -1.6 & -0.8 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.04Q_bx_1 - 16e_2x_1^3 \\ 0 \\ 4e_2x_1^3 - 0.96Q_bx_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

b. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Matriks Jacobian dari sistem (3) pada titik ekuilibrium $(0, 0, 0, 0)$ pada saat $Q_b = 0$ adalah

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0.8109668 & -1.6 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ -1.6219336 & 0.4 & -1.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut mempunyai nilai eigen 0, -2.37855761 , $-0.01072119 + 2.56751154i$, dan $-0.01072119 - 2.56751154i$ dengan vektor eigen yang bersesuaian adalah

$$V_1 = \begin{bmatrix} 5.12347538 \\ 0 \\ -5.19371054 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_2 = \begin{bmatrix} 1.41732747 \\ -0.48159929 \\ -1.16619971 \\ 0.39626760 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = \begin{bmatrix} -0.36674143 - 0.76200139i \\ 0.28005418 - 0.13334904i \\ 1.56279904 + 1.12058989i \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$V_4 = \begin{bmatrix} -0.36674143 + 0.76200139i \\ 0.28005418 + 0.13334904i \\ 1.56279904 - 1.12058989i \end{bmatrix}$$

c. Transformasi Kedua

Berdasarkan vektor eigen yang telah diperoleh, dibentuk matriks P yang didefinisikan sebagai berikut

$$P = \begin{bmatrix} 5.123475386 & 1.417327478 & -0.7620013982 & -0.3667414335 \\ 0 & -0.4815992967 & -0.1333490438 & 0.2800541847 \\ -5.193710543 & -1.16619971 & 1.120589898 & 1.562799041 \\ 0 & 0.3962676024 & 0.5714986458 & -0.4134117957 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan $x = Pu$, dan dilakukan substitusi ke persamaan (3) sehingga diperoleh

$$\dot{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.3785576198 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0107211868 & -2.567511539 \\ 0 & 0 & 2.567511539 & -0.0107211868 \end{bmatrix} u + P^{-1}f(Pu, Q_b) \quad (4)$$

d. Penentuan Manifold Center

Definisi (Wiggins [8])

Sebuah manifold invariant dikatakan manifold center jika

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + f(x, y) \\ \dot{y} &= By + g(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan $(x, y) \in R^c \times R^c$ jika memenuhi persamaan

$W^c(0) = \{(x, y) \in R^c \times R^c | y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\}$
untuk δ cukup kecil

Teorema (Wiggins [8])

Terdapat sebuah manifold center C^r untuk system (5). Keadaan dinamik dari system (5) dapat didekati oleh manifold center berikut

$$\dot{u} = Au + f(u, h(u)), \quad u \in R^c \quad (6)$$

Untuk u cukup kecil yang diberikan oleh vektor lapangan berdimensi- c

Bukti dapat dilihat pada Carr [1]

Akibat selanjutnya menyatakan secara tidak langsung bahwa keadaan dinamik dari persamaan (6) mendekati $u = 0$ menentukan keadaan dinamik dari system (5) mendekati $(x, y) = (0, 0)$

Teorema (Wiggins[8])

- Andaikan solisi nol dari (6) adalah stabil (stabil asimtotis)(takstabil); maka solusi nol dari system (5) juga stabil (stabil asimtotis)(takstabil).
- Andaikan solusi nol dari persamaan (6) adalah stabil. Maka, jika $(x(t), y(t))$ adalah solusi dari system (5) terdapat solusi $u(t)$ dari persamaan (5) sedemikian sehingga untuk $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + \mathcal{O}(e^{-yt}), \\ y(t) &= h(u(t)) + \mathcal{O}(e^{-yt}), \end{aligned}$$

dengan y adalah suatu konstanta.

Bukti dapat dilihat pada Carr [1]

Secara lokal (untuk $|u|$ cukup kecil), manifold center dari sistem (4) mempunyai bentuk

$$W_{loc}^C(0) = \{(u_1, u_2, u_3, u_4, Q_b): u_2 = h_2(u_1, Q_b), u_3 = h_3(u_1, Q_b), u_4 = h_4(u_1, Q_b), \\ h_2(0,0) = 0, h_3(0,0) = 0, h_4(0,0) = 0 \\ \frac{\partial h_2(0,0)}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial h_3(0,0)}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial h_4(0,0)}{\partial u_1} = 0$$

Sehingga

$$\frac{\partial h_2}{\partial u_1} \dot{u}_1 = \dot{u}_2 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial u_1} \dot{u}_1 = \dot{u}_3 \quad (7b)$$

$$\frac{\partial h_4}{\partial u_1} \dot{u}_1 = \dot{u}_4 \quad (7c)$$

Jika dimisalkan

$$h_2(u_1, Q_b) = a_1 u_1^2 + a_2 u_1 Q_b + a_3 Q_b^2 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{u_1}{Q_b}\right|^3\right)$$

$$h_3(u_1, Q_b) = b_1 u_1^2 + b_2 u_1 Q_b + b_3 Q_b^2 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{u_1}{Q_b}\right|^3\right)$$

$$h_4(u_1, Q_b) = c_1 u_1^2 + c_2 u_1 Q_b + c_3 Q_b^2 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{u_1}{Q_b}\right|^3\right)$$

Dengan mensubstitusikan h_2, h_3, h_4 ke persamaan (7a), (7b), (7c). selanjutnya koefisien koefisien dari $Q_b^2, Q_b u_1$, dan u_1^2 disamakan dengan koefisien koefisien dari $\dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4$ pada persamaan (4) maka

i. untuk koefisien Q_b^2 didapatkan

$$\begin{cases} 2.378557620a_3 = 0 \\ 0.0107211868b_3 + 2.567511539c_3 = 0 \\ -2.567511539b_3 + 0.0107211868c_3 = 0 \end{cases}$$

ii. untuk koefisien $Q_b u_1$ didapatkan

$$\begin{cases} 2.378557620a_2 + 9.671727487 = 0 \\ 0.2566031831 + 0.0107211868b_2 + 2.567511539c_2 = 0 \\ -2.272058388 - 2.567511539b_2 + 0.0107211868c_2 = 0 \end{cases}$$

iii. untuk koefisien u_1^2 didapatkan

$$\begin{cases} 2.378557620a_1 = 0 \\ 0.0107211868b_1 + 2.567511539c_1 = 0 \\ -2.567511539b_1 + 0.0107211868c_1 = 0 \end{cases}$$

Berdasarkan hasil diatas, didapat $a_1 = a_3 = b_1 = b_3 = c_1 = c_3 = 0$, $a_2 = -4.066215342$, $b_2 = -0.8853281551$, dan $c_2 = -0.09624549328$

Subtitusikan nilai nilai tersebut ke dalam persamaan h_2, h_3, h_4 sehingga didapat

$$u_2 = h_2(u_1, Q_b) = -4.066215342u_1 Q_b + \mathcal{O}\left(\left|\frac{u_1}{Q_b}\right|^3\right) \quad (8a)$$

$$u_3 = h_3(u_1, Q_b) = -0.8853281551u_1 Q_b + \mathcal{O}\left(\left|\frac{u_1}{Q_b}\right|^3\right) \quad (8b)$$

$$u_4 = h_4(u_1, Q_b) = -4.066215342u_1 Q_b + \mathcal{O}\left(\left|\frac{u_1}{Q_b}\right|^3\right) \quad (8c)$$

Selanjutnya mensubstitusikan persamaan (8a), (8b), (8c) ke dalam bentuk \dot{u} pada persamaan (4) didapat

$$\dot{u}_1 = \mu_1(Q_b)u_1 - \mu_2(Q_b)u_1^3$$

dengan

$$\begin{aligned} \mu_1(Q_b) &= 0.5465040403Q_b(5.123475386 - 5.053240234Q_b) \\ \mu_2(Q_b) &= 13.66260103e_2(5.123475386 - 5.05325023Q_b)^3 \end{aligned}$$

Untuk $Q_b = 0$, didapat $\mu_1(Q_b) = 0$ dan $\mu_2(Q_b) \neq 0$, berarti ada daerah $Q_b \in R$ yang cukup kecil yaitu $|Q_b| < \delta$. dengan δ adalah bilangan positif kecil sedemikian sehingga $\mu_2(Q_b) \neq 0 \forall Q_b \in (-\delta, \delta)$

Misal $\theta = \mu_2(Q_b)\tau \rightarrow \frac{d\theta}{d\tau} = \mu_2(Q_b)$ dengan $|Q_b|$ cukup kecil, maka

$$\dot{u}_1 = \frac{du_1}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = \mu_2(Q_b) \frac{du_1}{d\theta}$$

Untuk $|Q_b|$ cukup kecil, jika $Q_b < 0$ maka $\mu_1(Q_b) < 0$ dan $\mu_2(Q_b) > 0$. Jika $Q_b > 0$ maka $\mu_1(Q_b) > 0$ dan $\mu_2(Q_b) < 0$, dan untuk $Q_b = 0$ didapatkan $\mu_1(0) = 0$ dan $\mu_2(0) \neq 0$ sehingga

$$\frac{du_1}{d\theta} = \mu u_1 - u_1^3 \quad (9)$$

dengan $\mu = \frac{\mu_1(Q_b)}{\mu_2(Q_b)}$ dan $\mu(0) = 0$

Persamaan (9) merupakan bentuk normal dari sebuah sistem yang mengalami bifurkasi *pitchfork* (dapat dilihat di Perko[7]).

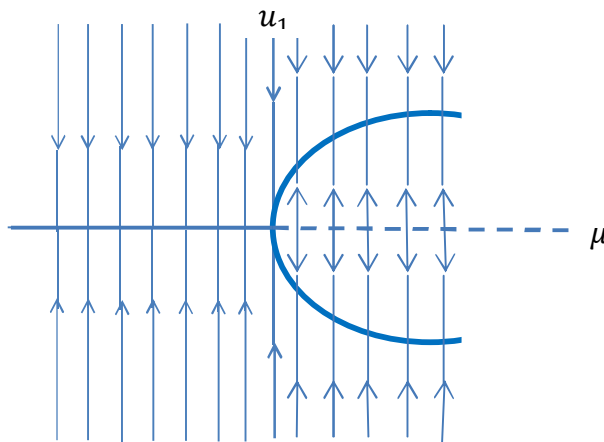


Diagram Bifurkasi Pitchfork

e. Interpretasi Hasil

Pada sistem *flutter* sayap pesawat ini, variabel k_0 adalah tingkat kekakuan linier sayap pesawat, sedangkan Q adalah kecepatan angin yang tergeneralisasi (kecepatan angin ditambah kecepatan pesawat). Untuk nilai parameter $k_0 = 0,08109668$, titik ekuilibrium $\bar{u} = 0$ menalami bifurkasi *pitchfork* superkritikal terjadi pada saat $Q = 2.027417$. Titik ekuilibrium $\bar{u} = 0$ diartikan sebagai posisi normal sayap pesawat pada saat diam. Pada saat $Q < 2.027417$ (kecepatan angin ditambah dengan kecepatan pesawat kurang dari 2.027417 satuan kecepatan angin), titik ekuilibrium $\bar{u} = 0$ stabil sehingga dapat dimaksudkan sayap pesawat stabil (dapat kembali ke posisi normal walaupun ada gangguan). Sedangkan jika $Q > 2.027417$ (kecepatan angin ditambah dengan kecepatan pesawat lebih dari 2.027417 satuan kecepatan angin), titik ekuilibrium $\bar{u} = 0$ tidak stabil atau posisi sayap pesawat bukan lagi merupakan titik yang stabil. Hal ini dimaksudkan setiap kali pesawat kembali ke posisi normal akan kembali terdorong lagi menjauhi posisi normal. Hal ini akan terjadi terus menerus dan geraknya akan semakin cepat. Kondisi seperti ini yang menyebabkan sayap pesawat patah.

C. SIMPULAN

Berdasarkan pengaruh parameter Q menunjukkan bahwa bifurkasi *pitchfork* superkritikal terjadi pada sistem *flutter* di titik ekuilibrium $\bar{u}_1 = (0,0,0,0)$ yang merupakan titik asal pada saat parameter kecepatan udara tergeneralisasi (Q) bernilai 2.027417

D. DAFTAR PUSTAKA

- Carr, J. 1981. *Application of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin.
- Chen, Y.M dan Liu, J.K. *Supercritical as well as subcritical Hopf bifurcation in nonlinear flutter system*. Jurnal Applied Mathematics and Mechanics-Engl. Ed., 2008, 29(2):199126 DOI 10.1007/s10483-008-0207-x.
- Fariduzzaman *Fluttw2d : A Software Tool For Flutter Prediction On Airplane Wings*. Artikel 2210 LITBANG, . (2002). Hlm. 147-158.
- Hollmann, M.1991. *Modern Aerodynamic Flutter Analysis*. Building S Monterey: California.
- Liu L., Wong, Y.S, dan Lee, B.H.K. *Application of the center manifold Theory in nonlinear aeroelasticity*. J Sound Vib, 2000.234(4):641659
- Novi Andria. *Analisis flutter sirip roket balistik rx-420 dengan Melibatkan modus gerak kaku struktur roket*. Jurnal Universitas Indonesia, 2011. Hlm. 107-114.
- Perko, Lawrence. 2000. *Differential Equations and Dynamical Sistem*. Springer-Verlag: New York.
- Wiggins, S.1990. *Intoduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*. Springer-Verlag: New York.
- Yang, Y.R. KBM method of analyzing limit cycle flutter of a wing an external store and comparison with wind tunnel test. J Sound Vib, 1995, 187(2)271280.