 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

S - 29

# MODEL STOKASTIK UNTUK PERAWATAN SISTEM SERI

**Suyono[1], Widyanti Rahayu[2], Bambang Irawan[3]**
[1,2,3] Jurusan Matematika FMIPA UNJ
[1]synjkt@yahoo.com, [2]wididyanti.rahayu@gmail.com, [3]bambangirawan6@gmail.com

**Abstrak**

Perhatikan sistem seri dengan *n* komponen yang saling indepeden. Sistem mulai dioperasikan pada waktu $t = 0$. Jika sebuah komponen rusak maka segera diperbaiki sehingga kondisinya seperti komponen yang baru dan waktu penggantian dianggap diabaikan. Jika banyaknya kerusakan dari setiap komponen pada interval [0, *t*] dimodelkan dengan proses renewal, maka banyaknya kerusakan sistem seri pada interval [0, *t*] merupakan superposisi dari proses renewal. Jika pada setiap perbaikan komponen dikenakan biaya perawatan maka total biaya perawatan setiap komponen merupakan proses renewal reward, dan total biaya perawatan sistem seri merupakan superposisi proses renewal reward. Selanjutya jika pada setiap biaya perawatan dikaitkan faktor diskon, maka total biaya perawatan sistem seri merupakan superposisi proses renewal reward terdiskon. Mean dan momen dari superposisi proses renewal reward dan versi terdiskonnya pada interwal waktu [0, *t*] telah dibahas dalam literatur. Dalam aplikasi sering berguna untuk memodelkan biaya perawatan sistem untuk jangka waktu yang lama. Oleh karena itu perlu diteliti sifat-sifat model perawatan sistem pada interval waktu [0, ∞). Pada makalah ini dibahas sifat-sifat asimtotik dari superposisi proses renewal serta superposisi proses renewal reward and versi diskonnya

**Kata kunci**: proses renewal, proses renewal reward

## A. PENDAHULUAN

Untuk menjaga agar suatu sistem (mesin produksi, mobil, peralatan elektronik, dll) dapat bekerja secara optimal diperlukan strategi perawatan yang baik. Kerusakan sistem biasanya terjadi pada waktu-waktu yang tidak dapat diprediksi secara pasti. Oleh karena itu waktu-waktu kegagalan sistem atau banyaknya kegagalan sistem pada interval waktu tertentu dapat dimodelkan dengan proses stokastik.

Anggap suatu sistem mulai bekerja pada waktu $t = 0$. Misalkan $S_1$ adalah waktu terjadinya kerusakan sistem yang pertama, $S_2$ waktu terjadinya kerusakan sistem yang kedua, dan seterusnya. Misalkan $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2 - S_1$, … menyatakan waktu-waktu antara kerusakan sistem. Jika diasumsikan $T_1, T_2, \ldots$ saling indepenen dan berdistribusi identik maka banyaknya kegagalan sistem pada interval waktu tertentu dapat dimodelkan dengan proses renewal. Pembahasan tentang proses renewal dapat dilihat misalnya pada Ross (1996) dan Mi (2000).

Perhatikan sistem seri yang terdiri dari *n* komponen yang saling indepeden. Banyaknya kegagalan dari setiap komponen pada interval [0, *t*] dimodelkan dengan proses renewal. Hal ini berakibat bahwa banyaknya kegagalan sistem pada interval [0, *t*] merupakan jumlahan dari *n* proses renewal. Proses ini dikenal dengan superposisi dari proses renewal. Beberapa hasil tentang superposisi proses renewal dapat dilihat pada Suyono dan van der Weide (2010).

Jika terhadap setiap perawatan komponen dikenakan biaya perawatan maka total biaya perawatan setiap komponen merupakan proses renewal reward, dan total biaya perawatan sistem merupakan superposisi proses renewal reward. Jika selanjutya pada setiap biaya perawatan

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

dikaitkan diskon maka total biaya perawatan merupakan jumlahan proses renewal reward terdiskon. Mean dan momen kedua dari superposisi proses renewal reward dan versi terdiskonnya pada interwal waktu [0, $t$] telah dibahas oleh Suyono dan van der Weide (2010).

Dalam aplikasi sering berguna model biaya perawatan sistem untuk jangka waktu yang lama. Oleh karena itu perlu diteliti sifat-sifat dalam model perawatan sistem pada interval waktu [0, $\infty$). Secara khusus permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah bagaimana sifat-sifat asimtotik dari superposisi proses renewal, proses renewal reward and versi diskonnya.

## B. PEMBAHASAN

### Superposisi Proses Renewal

Misalkan untuk setiap $i$ = 1, 2, …, $n$, $X_{i1}$, $X_{i2}$, $X_{i3}$, … adalah barisan variabel acak non-negatif yang saling independen dan berdistribusi identik dengan fungsi distribusi kumulatif $F_i$. Let $S_{im} = X_{i1} + X_{i2} + \cdots + X_{im}$, $m \geq 1$, and $S_{i0} = 0$. Proses counting $\{N_i(t), t \geq 0\}$ dimana

$$N_i(t) = \sup\{m \geq 0 \mid S_{im} \leq t\} = \sum_{m=1}^{\infty} 1_{\{S_{im} \leq t\}} \tag{1}$$

adalah proses renewal. Proses $\{N_i(t), t \geq 0\}$ dapat diinterpretasikan sebagai banyaknya kegagalan komponen ke $i$ dari suatu sistem pada interval waktu [0, $t$] jika $X_{i1}$, $X_{i2}$, $X_{i3}$, … diinterpretasikan waktu-waktu antara perbaikan komponen ke $i$. Transformasi Laplace dari $N_i(t)$ diberikan oleh

$$\int_0^{\infty} E[e^{-vN_i(t)}]e^{-st}dt = \frac{1 - F_i^*(s)}{s[1 - e^{-v}F_i^*(s)]}, \tag{2}$$

lihat Suyono (2003), dimana $F_i^*(s)$ menyatakan transformasi Laplace-Stieltjes dari $F_i$, yakni

$$F_i^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_i(t)]. \tag{3}$$

Mean dan momen kedua dari $N_i(t)$ dapat disajikan dalam bentuk transformasi Laplace sebagai berikut, lihat Suyono (2003),

$$\int_0^{\infty} E[N_i(t)]e^{-st}dt = \frac{F_i^*(s)}{s[1 - F_i^*(s)]} \tag{4}$$

dan

$$\int_0^{\infty} E[N_i^2(t)]e^{-st}dt = \frac{F_i^*(s)[1 + F_i^*(s)]}{s[1 - F_i^*(s)]^2} \tag{5}$$

Definisikan

$$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t) \tag{6}$$

dimana $\{N_i(t), t \geq 0\}$ adalah proses renewal untuk setiap $i$ = 1, 2, …, $n$. Proses stokastik $\{N(t), t \geq 0\}$ dinamakan superposisi proses renewal. Secara umum $\{N(t), t \geq 0\}$ bukan proses renewal. Distribusi probabilitas dari $N(t)$ belum ditemukan dalam literature, tetapi mean dan momen dari $N(t)$ dapat ditemukan dengan menggunakan sifat harga harapan, misalnya

$$E[N(t)] = \sum_{i=1}^{n} E[N_i(t)] \tag{7}$$

dan

$$E[N^2(t)] = \sum_{i=1}^{n} E[N_i^2(t)] + 2\sum_{i<j} E[N_i(t)]E[N_j(t)] \tag{8}$$

Proses $\{N(t),\ t \geq 0\}$ dapat diinterpretasikan sebagai banyaknya kegagalan sistem seri dengan $n$ komponen pada interval waktu $[0, t]$.

**Superposisi Proses Renewal Reward**

Terkait dengan proses renewal di Bagian A, definisikan

$$R_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} Y_{ij} \tag{9}$$

dimana untuk setiap $i$, barisan $(Y_{ij})$, $j$ = 1, 2, …, merupakan barisan variable acak non-negatif yang saling independen dan berdistribusi idetik dan independen terhadap barisan $X_{i1}$, $X_{i2}$, $X_{i3}$, … Variabel $Y_{ij}$ dapat diinterpretasikan sebagai biaya perawatan komponen ke $i$ pada kegagalan ke $j$. Jadi variable $R_i(t)$ menyatakan total biaya perawatan komponen ke $i$ pada sistem seri pada interval $[0, t]$. Proses $\{R_i(t),\ t \geq 0\}$ dinamakan proses renewal reward. Distribusi probabilitas dari $R_i(t)$ dapat disajikan dalam bentuk transformasi Laplace ganda:

$$\int_0^\infty E[\exp\{-vR_i(t)\}]e^{-st}\,dt = \frac{1-F_i^*(s)}{s[1-F_i^*(s)E[\exp\{-vY_{i1}\}]}, \tag{10}$$

dimana $Y_{i1}$ adalah reward pertama pada proses renewal reward $\{N_i(t),\ t \geq 0)$, lihat Suyono (2003). Dari rumus (10) dapat diturunkan momen-momen dari $R_i(t)$ dalam bentuk transformasi Laplace, misalnya,

$$\int_0^\infty E[R_i(t)]e^{-st}\,dt = \frac{E[Y_{i1}]F_i^*(s)}{s[1-F_i^*(s)]}. \tag{11}$$

dan

$$\int_0^\infty E[R_i^2(t)]e^{-st}\,dt = \frac{F_i^*(s)}{s[1-F_i^*(s)]}\left[E[Y_{i1}^2] + \frac{2E[Y_{i1}]^2F_i^*(s)}{1-F_i^*(s)}\right] \tag{12}$$

Definisikan

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{13}$$

Proses stokastik $\{R(t),\ t \geq 0\}$ merupakan superposisi proses renewal reward. Mean dan momen-momen dari $R(t)$ dapat diperoleh dengan menggunakan sifat dari harga harapan, misalnya

$$E[R(t)] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i(t)] \tag{14}$$

dan

$$E[R^2(t)] = \sum_{i=1}^{n} E[R_i^2(t)] + 2\sum_{i<j}^{n} E[R_i(t)]E[R_j(t)] \tag{15}$$

**Superposisi Proses Renewal Reward Terdiskon**

Anggap terhadap setiap biaya perawatan dikaitkan suatu diskon. Notasikan dengan $S_{ij}$ waktu terjadinya kegagalan ke $j$ dari komponen ke $i$ ($j$ = 1, 2, 3, …; $i$ = 1, 2, …, $n$). Jika biaya perawatan $Y_{ij}$ pada waktu $S_{ij}$ didiskon dengan laju konstan $r$, maka total biaya perawatan terdiskon dari komponen $i$ pada interval $[0, t]$ adalah

$$R_i^d(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} \exp\{-rS_{ij}\}Y_{ij} \tag{16}$$

Karena $\{N_i(t),\, t \geq 0\}$ merupakan proses renewal maka proses $(R_i^d(t))$ merupakan proses renewal reward terdiskon. Mean dan momen kedua $R_i^d(t)$ adalah sebagai berikut, lihat van der Weide, Suyono, dan van Noortwijk (2008),

$$\int_0^\infty E[R_i^d(t)]e^{-st}dt = \frac{E[Y_{i1}]F_i^*(r+s)}{s[1-F_i^*(r+s)]}$$

dan

$$\int_0^\infty E[R_i^d(t)^2]e^{-st}dt = \frac{E[Y_{i1}^2]F_i^*(2r+s)[1-F_i^*(r+s)] + 2(E[Y_{ij}])^2 F_i^*(r+s)F_i^*(2r+s)}{s[1-F_i^*(r+s)][1-F_i^*(2r+s)]}$$

Definisikan

$$R^d(t) = \sum_{i=1}^n R_i^d(t). \tag{17}$$

Proses $\{R^d(t),\, t \geq 0\}$ merupakan superposisi dari proses renewal reward terdiskon. Mean dan momen kedua dari $R^d(t)$ dapat diperoleh dengan menggunakan rumus yang serupa dengan rumus (14) dan (15).

**Sifat-sifat Asimtotik dari Superposisi Proses Renewal**

Perhatikan kembali proses renewal $\{N_i(t),\, t \geq 0\}$ yang telah dibahas pada Bagian A dengan waktu-waktu antara $X_{i1}$, $X_{i2}$, $X_{i3}$, … yang memiliki fungsi distribusi kumulatif $F_i$. Menurut teorema renewal elementer, lihat Ross (2000),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N_i(t)]}{t} = \frac{1}{E[X_{i1}]}.$$

Dari persamaan (7),

$$E[N(t)] = \sum_{i=1}^n E[N_i(t)].$$

Dengan menggunakan sifat limit diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{E[N(t)]}{t} &= \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{E[N_i(t)]}{t} \\ &= \sum_{i=1}^n \lim_{t\to\infty} \frac{E[N_i(t)]}{t} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{E[X_{it}]} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n E[X_{it}]}\end{aligned}$$

Berikut ini sifat limit yang lebih lengkap dari superposisi proses renewal tetapi dengan asumsi yang lebih tegas. Anggap waktu-waktu antara $X_{i1}$, $X_{i2}$, $X_{i3}$, … kontinu. Anggap pula transformasi Laplace dari harga harapan $E[N_i(t)]$ yang disajikan dalam persamaan (4), yakni

$$\int_0^\infty E[N_i(t)]e^{-st}dt = \frac{F_i^*(s)}{s[1-F_i^*(s)]},$$

merupakan fungsi rasional dalam $s$. Jika momen pertama dan kedua dari $X_{i1}$ berhingga maka untuk $s \to 0$

$$F_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_i(s) = 1 - sE[X_{i1}] + \tfrac{1}{2} s^2 E[X_{i1}^2] + o(s^2). \qquad (18)$$

Sebagai akibatnya, untuk $s \to 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty E[N_i(t)]e^{-st} dt &= \frac{1}{E[X_{i1}]}\frac{1}{s^2} + \frac{E[X_{i1}^2] - 2(E[X_{i1}])^2}{2(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{s} + r(s) \\ &= \frac{1}{E[X_{i1}]}\frac{1}{s^2} + \frac{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2}{2(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{s} + r(s)\end{aligned}.$$

dimana $r(s)$ adalah fungsi rasional dari $s$. Dengan menginversi transformasi Laplace di atas diperoleh, untuk $t \to \infty$,

$$E[N_i(t)] = \frac{t}{E[X_{i1}]} + \frac{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1) \qquad (19)$$

dimana suku $o(1)$ menuju 0 secara eksponensial. Sebagai akibatnya

$$\begin{aligned}E[N(t)] &= \sum_{i=1}^n E[N_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{t}{E[X_{i1}]} + \frac{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)\right] \\ &= \frac{t}{\sum_{i=1}^n E[X_{it}]} + \sum_{i=1}^n \frac{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)\end{aligned}$$

Untuk momen kedua dari $N_i(t)$, transformasi Laplacenya adalah sebagai berikut, lihat persamaan (5),

$$\int_0^\infty E[N_i^2(t)]e^{-st} dt = \frac{F_i^*(s)[1 + F_i^*(s)]}{s[1 - F_i^*(s)]^2}$$

Untuk $s \to 0$,

$$\int_0^\infty E[N_i^2(t)]e^{-st} dt = \frac{2}{(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{s^3} + \frac{2E[X_{i1}^2] - 3(E[X_{i1}])^2}{(E[X_{i1}])^3}\frac{1}{s^2} + K\frac{1}{s} + r(s)$$

dimana

$$K = \frac{1}{6(E[X_{i1}])^4}\left[6(E[X_{i1}])^4 - 9(E[X_{i1}])^2 E[X_{i1}^2] - 4E[X_{i1}]E[X_{i1}^3] + 9(E[X_{i1}^2])^2\right]$$

dan $r(s)$ adalah suatu fungsi rasional dalam $s$. Dengan menginversi transformasi Laplace di atas diperoleh, untuk $t \to \infty$,

$$E[N_i^2(t)] = \frac{t^2}{(E[X_{i1}])^2} + \frac{2E[X_{i1}^2] - 3(E[X_{i1}])^2}{(E[X_{i1}])^3}t + K + o(1) \qquad (20)$$

Dari persamaan (19) dan (20) diperoleh,

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

$$Var[N_i(t)] = E[N_i^2(t)] - (E[N_i(t)])^2$$
$$= \frac{E[X_{i1}^2] - (E[X_{i1}])^2}{(E[X_{i1}])^3} t + \frac{\left(E[X_{i1}^2] - 2(E[X_{i1}])^2\right)^2}{(E[X_{i1}])^4} + o(1)$$
$$= \frac{Var[X_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3} t + \frac{\left(E[X_{i1}^2] - 2(E[X_{i1}])^2\right)^2}{(E[X_{i1}])^4} + o(1)$$

atau

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Var[N_i(t)]}{t} = \frac{Var[X_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}$$

Sebagai akibatnya sifat asimtotik dari superposisi proses renewal

$$N(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)$$

adalah

$$Var[N(t)] = Var\left[\sum_{i=1}^{n} N_i(t)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Var\left[N_i(t)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{Var[X_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3} t + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(E[X_{i1}^2] - 2(E[X_{i1}])^2\right)^2}{(E[X_{i1}])^4} + o(1)$$

atau

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Var[N(t)]}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Var[X_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3} .$$

Selanjutnya akan dibahas limit distribusi dari superposisi proses renewal. Limit distribusi untuk proses renewal ($N_i(t)$, $t \geq 0$) adalah normal, yakni untuk t yang cukup besar $N_i(t)$ berdistribusi normal dengan mean $\dfrac{t}{E[X_{i1}]}$ dan variansi $\sqrt{Var[X_{i1}]t/(E[X_{i1}])^3}$ ,
lihat Cox (1962). Karena $N(t)$ adalah jumlahan dari variabel acak independen yang secara asimtotik berdistribusi normal, maka secara asimpotik, $N(t)$ juga berdistribusi normal dengan mean $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{t}{E[X_{i1}]}$ dan variansi $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{Var[X_{i1}]t/(E[X_{i1}])^3}$ .

**Sifat-sifat Asimtotik dari Superposisi Proses Renewal Reward**

Perhatikan kembali proses renewal $\{R_i(t), t \geq 0\}$ dimana

$$R_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} Y_{ij} .$$

Menurut teorema renewal reward, lihat Ross (2000),

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E[N_i(t)]}{t} = \frac{E[Y_{i1}]}{E[X_{i1}]}$$

Untuk superposisi proses renewal reward

 **ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4**

$$R(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i(t)$$

dengan menggunakan persamaan (14) limit harga harapannya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \frac{E[R(t)]}{t} &= \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{E[R_i(t)]}{t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lim_{t\to\infty} \frac{E[R_i(t)]}{t} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{E[Y_{i1}]}{E[X_{it}]}\end{aligned}$$

Berikut ini sifat limit yang lebih lengkap dari superposisi proses renewal reward dengan asumsi waktu-waktu antara $X_{i1}$, $X_{i2}$, $X_{i3}$, … kontinu dan transformasi Laplace dari harga harapan $E[R_i(t)]$, yakni

$$\int_0^\infty E[R_i(t)]e^{-st}dt = \frac{E[Y_{i1}]F_i^*(s)}{s[1-F_i^*(s)]}.$$

merupakan fungsi rasional dalam $s$. Jika momen pertama dan kedua dari $X_{i1}$ berhingga maka untuk $s \to 0$

$$F_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF_i(s) = 1 - sE[X_{i1}] + \tfrac{1}{2} s^2 E[X_{i1}^2] + o(s^2)$$

dan sebagai akibatnya, untuk $s \to 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty E[R_i(t)]e^{-st}dt &= \frac{E[Y_{i1}]}{E[X_{i1}]}\frac{1}{s^2} + \frac{E[Y_{i1}]\{E[X_{i1}^2] - 2(E[X_{i1}])^2\}}{2(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{s} + r(s) \\ &= \frac{E[Y_{i1}]}{E[X_{i1}]}\frac{1}{s^2} + \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2\}}{2(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{s} + r(s)\end{aligned}$$

dimana $r(s)$ adalah fungsi rasional dari $s$. Dengan menginversi transformasi Laplace di atas diperoleh, untuk $t \to \infty$,

$$E[R_i(t)] = \frac{E[Y_{i1}]t}{E[X_{i1}]} + \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2\}}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)$$

dimana suku $o(1)$ menuju 0 secara eksponensial. Sebagai akibatnya

$$\begin{aligned}E[R(t)] &= \sum_{i=1}^{n} E[R_i(t)] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{E[Y_{i1}]t}{E[X_{i1}]} + \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]\}}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{E[Y_{i1}]t}{E[X_{i1}]} + \sum_{i=1}^{n}\frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]\}}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)\end{aligned}$$

Untuk momen kedua dari $R_i(t)$, transformasi Laplacenya adalah sebagai berikut, lihat persamaan (12),

$$\int_0^\infty E[R_i^2(t)]e^{-st}dt = \frac{F_i^*(s)}{s[1-F_i^*(s)]}\left[E[Y_{i1}^2] + \frac{2E[Y_{i1}]^2 F_i^*(s)}{1-F_i^*(s)}\right]$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Untuk $s \to 0$,

$$\int_0^\infty E[R_i^2(t)]e^{-st}dt = \frac{2(E[Y_{i1}])^2}{(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{s^3}$$

$$+\frac{2(E[Y_{i1}])^2 E[X_{i1}^2] + E[Y_{i1}^2](E[X_{i1}])^2 - 4(E[Y_{i1}])^2(E[X_{i1}])^2}{(E[X_{i1}])^3}\frac{1}{s^2} + L\frac{1}{s} + r(s)$$

dimana $L$ adalah suatu konstanta yang tergantung pada $E[X_{i1}]$, $E[X_{i1}^2]$, $E[X_{i1}^3]$, $E[Y_{i1}]$ dan $E[Y_{i1}^2]$ dan $r(s)$ adalah suatu fungsi rasional dalam $s$. Dengan menginversi transformasi Laplace di atas diperoleh, untuk $t \to \infty$,

$$E[R_i^2(t)] = \frac{(E[Y_{i1}])^2 t^2}{(E[X_{i1}])^2} + \frac{2(E[Y_{i1}])^2 E[X_{i1}^2] + E[Y_{i1}^2](E[X_{i1}])^2 - 4(E[Y_{i1}])^2(E[X_{i1}])^2}{(E[X_{i1}])^3}t + L + o(1)$$

Sebagai akibatnya untuk $t \to \infty$,

$$Var[R_i(t)] = E[R_i^2(t)] - (E[R_i(t)])^2$$

$$= \frac{(E[Y_{i1}])^2 Var[X_{i1}] + (E[X_{i1}])^2 Var[Y_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}t + o(t^{-1})$$

atau

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Var[N_i(t)]}{t} = \frac{(E[Y_{i1}])^2 Var[X_{i1}] + (E[X_{i1}])^2 Var[Y_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}$$

Untuk superposisi proses renewal reward

$$R(t) = \sum_{i=1}^n R_i(t),$$

$$Var[R(t)] = Var\left[\sum_{i=1}^n R_i(t)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^n Var[R_i(t)]$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{(E[Y_{i1}])^2 Var[X_{i1}] + (E[X_{i1}])^2 Var[Y_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}t + o(t^{-1})$$

atau

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Var[R(t)]}{t} = \sum_{i=1}^n \frac{(E[Y_{i1}])^2 Var[X_{i1}] + (E[X_{i1}])^2 Var[Y_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}.$$

Limit distribusi dari superposisi proses renewal reward ($R_i(t)$, $t \geq 0$) adalah normal, yakni untuk i yang cukup besar $R_i(t)$ berdistribusi normal dengan mean $\frac{E[Y_{i1}]t}{E[X_{i1}]}$ dan variansi $\sqrt{C_i t}$ dimana $C_i = \frac{(E[Y_{i1}])^2 Var[X_{i1}] + (E[X_{i1}])^2 Var[Y_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}$, lihat Suyono (2002). Karena $R(t)$ adalah jumlahan dari variabel acak independen yang secara asimtotik berdistribusi normal, maka secara asimpotik, $R(t)$ juga berdistribusi normal dengan mean $\sum_{i=1}^n \frac{E[Y_{i1}]t}{E[X_{i1}]}$ dan variansi $\sum_{i=1}^n \sqrt{C_i t}$.

**Sifat-sifat Asimtotik dari Superposisi Proses Renewal Reward Terdiskon**

Perhatikan proses renewal reward terdiskon

$$R_i^d(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} \exp\{-rS_{ij}\} Y_{ij} \ .$$

Transformasi Laplace untuk harga harapannya adalah

$$\int_0^\infty E[R_i^d(t)]e^{-st}dt = \frac{E[Y_{i1}]F_i^*(r+s)}{s[1-F_i^*(r+s)]}$$

Jika momen pertama dan kedua dari $X_{i1}$ berhingga maka untuk $s \to 0$

$$F_i^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}dF_i(s) = 1 - sE[X_{i1}] + \tfrac{1}{2}s^2E[X_{i1}^2] + o(s^2)$$

dan sebagai akibatnya, untuk $s \to 0$,

$$\int_0^\infty E[R_i^d(t)]e^{-st}dt = \frac{E[Y_{i1}]}{E[X_{i1}]}\frac{1}{(r+s)^2} + \frac{E[Y_{i1}]\{E[X_{i1}^2] - 2(E[X_{i1}])^2\}}{2(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{r+s} + R(s)$$

$$= \frac{E[Y_{i1}]}{E[X_{i1}]}\frac{1}{(r+s)^2} + \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2\}}{2(E[X_{i1}])^2}\frac{1}{r+s} + R(s)$$

dimana $R(s)$ adalah fungsi rasional dari $s$. Dengan menginversi transformasi Laplace di atas diperoleh, untuk $t \to \infty$,

$$E[R_i^d(t)] = \frac{E[Y_{i1}]te^{-rt}}{E[X_{i1}]} + \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2\}}{2(E[X_{i1}])^2}e^{-rt} + o(1)$$

dimana suku $o(1)$ menuju 0 secara eksponensial. Sebagai akibatnya

$$E[R^d(t)] = \sum_{i=1}^n E[R_i^d(t)]$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[\frac{E[Y_{i1}]te^{-rt}}{E[X_{i1}]} + \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]\}}{2(E[X_{i1}])^2}e^{-rt} + o(1)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{E[Y_{i1}]te^{-rt}}{E[X_{i1}]} + \sum_{i=1}^n \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]\}}{2(E[X_{i1}])^2}e^{-rt} + o(1)$$

## C. KESIMPULAN

Sifat-sifat asimtotik yang terkait dengan model perawatan sistem seri adalah sebagai berikut:

1. $E[N(t)] = \dfrac{t}{\sum_{i=1}^n E[X_{it}]} + \sum_{i=1}^n \dfrac{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)$ untuk $t$ menuju tak hingga.
2. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{Var[N(t)]}{t} = \sum_{i=1}^n \dfrac{Var[X_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}$.
3. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{E[R(t)]}{t} = \sum_{i=1}^n \dfrac{E[Y_{i1}]}{E[X_{it}]}$.

4. $E[R(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{E[Y_{i1}]t}{E[X_{i1}]} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]\}}{2(E[X_{i1}])^2} + o(1)$ untuk $t$ menuju tak hingga.
5. $\lim_{t\to\infty} \frac{Var[R(t)]}{t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(E[Y_{i1}])^2 Var[X_{i1}] + (E[X_{i1}])^2 Var[Y_{i1}]}{(E[X_{i1}])^3}$.
6. $E[R^d(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{E[Y_{i1}]te^{-rt}}{E[X_{i1}]} + \sum_{i=1}^{n} \frac{E[Y_{i1}]\{Var[X_{i1}] - (E[X_{i1}])^2]\}}{2(E[X_{i1}])^2} e^{-rt} + o(1)$ untuk $t$ menuju tak hingga.

## D. DAFTAR PUSTAKA


Mi, J. 2000. Average number of events and average reward, *Probab. Eng. Inform. Sc.* Vol. 14 no. 4, pp. 485-510.

Rackwitz, R. 2001. Optimizing systematically renewed structure, *Reliability Engineering and System Safety*, vol. 73 no. 3, pp. 27-60.

Ross, S.M. 1996. *Stochastic Processes*, John Wiley, New York.

Suyono. 2002. *Renewal Processes and Repairable Systems*, Delft University Press, The Netherlands.

Suyono dan van der Weide, J.A.M. 2003. Note on Renewal Reward Processes, *Proc. Of the International Conference on Mathematics and Its Applications*, Universitas Gadjah Mada, Yogyakarta, hal 551-556.

Suyono dan van der Weide, J.A.M. 2010. Note on Superposition of Renewal Processes, *Jurnal Matematika dan Sains* vol. 15 no. 2 tahun 2010 hal. 93-100.

Van der Weide, J.A.M., Suyono dan van Noortwijk, J.M. 2007. Renewal Theory with Hyperbolic and Exponential Discounting, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 22, hal. 1 – 22.