 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

P – 94

NILAI STRATEGIS MEMANDANG BUKTI GEOMETRI SEBAGAI PROSEP DALAM PEMBELAJARAN

Faaso Ndraha
Guru SMAN 3 Gunungsitoli, Kota Gunungsitoli, Sumatera Utara/
Mahasiswa S3 Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya
e-mail: faandraha@yahoo.com

Abstrak

Bukti mengandung proses untuk dikerjakan dan konsep matematika untuk dipikirkan. Untuk itu bukti lebih tepat dipandang sebagai prosep (proses dan konsep). Berdasarkan tinjauan dasar teori yang digunakan dalam menjelaskan prosep pada matematika kalkulasi dan komputasi, serta hasil penelitian penulis di bidang ini, pada tulisan berikut diulas nilai strategis memandang bukti geometri sebagai prosep pada pembelajaran. Tulisan ini membahas beberapa pertanyaan secara komprehensif berkaitan dengan pembelajaran geometri berdasarkan pandangan bahwa bukti sebagai prosep, antara lain: bagaimana memandang teorema agar menjadi unit kognitif dalam berpikir geometri yang sukses, bagaimana tujuan pembelajaran yang memandang bukti sebagai prosep, bagaimana tahap berpikir mengonstruksi bukti sebagai prosep, bagaimana pembelajaran yang memandang bukti sebagai prosep menjamin berlangsung konstruksi pengetahuan, mengapa siswa mampu menggunakan suatu teorema yang tidak dapat dibuktikannya, mengapa siswa mampu mengonstruksi bukti teorema geometri tetapi tidak memahami makna teorema tersebut secara geometri, bagaimana siswa yang mampu menyebutkan makna dan menyusun bukti suatu teorema tetapi kurang mampu menggunakannya memecahkan masalah, hanya sukses pada masalah rutin, bagaimana pengonstruksian bukti berlangsung dari menghubungkan fakta hingga memahami makna seluruh bukti ('langkah maju'), dan adakah kemungkinan jalur pembuktian lain yang dapat ditempuh. Penjelasan dan pemecahan masalah pembelajaran geometri yang memadai dan komprehensif dalam tulisan ini, menunjukkan bahwa cara pandang yang digunakan merupakan alternatif untuk memperoleh hasil belajar di Indonesia yang lebih baik..

Kata kunci: prosep, bukti geometri, pembelajaran teorema geometri

A. PENDAHULUAN

Kurikulum geometri sekolah mengamanatkan kegiatan pembuktian. Karena mayoritas siswa belum mampu berpikir formal di bidang geometri (Fuys, dkk, 1998; Sunardi, 2005), belajar membuktikan menjadi perdebatan. Apalagi bukti matematika sebenarnya dalam bentuk deduksi formal (Knut, 2002). Karena bersifat formal, bukti matematika sangat abstrak, menyulitkan siswa mengerjakan dan memahaminya. Tulisan ini bertujuan merumuskan cara pandang yang memihak kepada siswa, artinya bukti yang dikonstruksi dalam pembelajaran sesuai dengan kemampuan siswa, dan menjadi unit kognitif berpikir matematika yang sukses. Untuk itu dikaji suatu teori tentang bukti matematika, yang mampu memberi penjelasan memadai terhadap fenomena yang berkaitan dengan pembuktian geometri di sekolah, yaitu bukti sebagai prosep. Rumusan masalah adalah bagaimana nilai strategis memandang bukti geometri sebagai prosep dalam pembelajaran? Hasilnya diharapkan bermanfaat untuk mengembangkan kegiatan pembelajaran yang memihak siswa, dan membantu menjelaskan fenomena yang terjadi berkaitan dengan bukti dalam pembelajaran geometri.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

B. PEMBAHASAN

Suatu cara pandang bernilai strategis dalam pembelajaran jika menjelaskan cara pencapaian hasil belajar yang optimal, memberi penjelasan atas berbagai fenomena yang terjadi serta jalan keluar dari berbagai persoalan. Untuk itu, pembahasan berikut dimulai dengan menjelaskan tentang prosep, alasan memilih memandang bukti geometri sebagai prosep, bagaimana memandang teorema agar menjadi unit kognitif dalam berpikir geometri yang sukses, diakhiri dengan menjelaskan beberapa fenomena berkaitan dengan pembuktian dalam pembelajaran dan alternatif pemecahan masalah belajar siswa.

1. Prosep

Prosep adalah konsep yang diajukan oleh Eddie Gray dan David Olmer Tall. Prosep pada awalnya dikembangkan berfokus pada simbol yang digunakan dalam aritmetika, aljabar dan kalkulus pada matematika sekolah. Gray dan Tall (1994,120) menjelaskan bahwa "*An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. ….. A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object". Prosep* adalah koleksi prosep dasar dari objek yang sama. *Prosep dasar* adalah campuran tiga komponen: suatu proses, konsep dan simbol, dimana proses tersebut menghasilkan konsep (objek) matematika, dan simbol yang menyatakan proses dan konsep tersebut. Misalnya 5 adalah simbol prosep dasar, menyatakan proses menghitung sampai 5 (*counting all*) dan konsep bilangan 5 sebagai hasilnya. Proses dari 5 lainnya antara lain menjumlah (2+3) atau (4+1) dengan cara *counting on*. Lima (5) sebagai prosep adalah koleksi prosep dasar dari 5. Koleksi prosep dasar dari 5 memiliki *proses* menghitung atau menjumlah, *konsep* bilangan 5 sebagai hasil penghitungan atau penjumlahan tersebut, dan 5 sebagai *simbol* yang menyatakan proses dan konsep dimaksud. Dengan demikian, 5 sebagai prosep menyatakan *proses* menghitung atau menjumlah dan *konsep* bilangan 5. Contoh prosep lainnya: ½ menyatakan proses pembagian dan konsep pecahan, -2 menyatakan proses pengurangan 2 dan konsep dari negatif dua atau (-2), 3x + 2 menyatakan penambahan 2 pada 3x dan hasil penjumlahan, sin A menyatakan konsep sinus suatu sudut dan proses membagi panjang sisi di depan sudut A dengan sisi miring dimana A sudut suatu segitiga siku-siku.

Dengan demikian ada *tiga* komponen yang terkandung dalam suatu prosep yaitu *proses*, *konsep* dan *simbol*. Sebuah simbol dikatakan prosep jika menyatakan proses dan konsep yang dihasilkannya. Pemahaman makna simbol hingga dikenali sebagai dualitas proses dan konsep merupakan tujuan pengonstruksian prosep sebagai obyek mental. Peran dualitas (*duality*) suatu simbol dapat menimbulkan ambiguitas (*ambiguity*). Ambiguitas notasi memungkinkan seseorang yang fleksibel dalam berpikir (*flexibility in thought*) bergerak antara proses penyelesaian tugas matematika dan konsep yang secara mental dimanipulasi sebagai bagian dari skema mental (Gray dan Tall, 1994). Tall (1997) menjelaskan lebih lanjut bahwa makna simbol suatu prosep dipahami melalui tiga tahap aktivitas pengonstruksian prosep yaitu tahap prosedur, proses dan prosep.

> *" ….. the meaning of symbols developed through a sequence of activities: (a) procedure, where a finite succession of decisions and actions is built up into a coherent sequence, (b) process, where increasingly efficient ways become available to achieve the same result, now seen as a whole, (c) procept, where the symbols are conceived flexibly as processes to do and concepts to think about. Initially the individual builds an "action schema" (in the sense of Piaget) as a coordinated sequence of actions." (*Tall, 1997, 13*)*

Tahap prosedur merupakan rangkaian beberapa keputusan dan aksi terbatas sedemikian hingga menjadi suatu rangkaian yang terpadu atau bertalian secara logis. Tahap proses merupakan aktivitas mental dimana cara-cara yang lebih efisien yang mencapai hasil yang sama semakin terlihat sebagai satu kesatuan. Tahap prosep merupakan aktivitas mental dimana simbol dipahami secara fleksibel sebagai proses untuk dilakukan dan konsep untuk dipikirkan.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

2. Bukti geometri sebagai prosep dalam pembelajaran

Bukti matematika bersifat deduktif formal (O'Daffer dan Thornquist, 1993, 49). Tetapi dalam pembelajaran, kemampuan siswa mengonstruksi bukti formal tidak tercapai langsung dalam setahap, melainkan berkembang secara bertahap. Tall (1995) menjelaskan bahwa kemampuan siswa mengonstruksi bukti tampak dari bentuk representasi bukti, yang berkembang dari bukti tindakan, bukti visual, bukti simbolis dan bukti formal. Karena itu, bukti geometri dalam tulisan ini merupakan argumen berkesimpulan benar berdasarkan premis-premis yang benar pada bidang geometri. Bagi siswa sekolah, premis kadang-kadang dinyatakan dalam bentuk gambar, yang dalam bentuk deduksi formal seharusnya terdiri dari elemen struktur aksiomatik berbentuk pernyataan matematika simbolik.

Bukti geometri lebih tepat dipandang sebagai prosep karena beberapa alasan. *Pertama*, secara empirik, konsep bukti merupakan *encapsulation* dari proses bukti. Keduanya, proses dan konsep bukti, memaksimalkan pemahaman tentang maksud dari teorema, ibarat dua sisi dari satu mata uang (Ndraha, 2011). Ada siswa yang mampu menggunakan teorema -misalnya "jumlah besar sudut suatu segitiga adalah 180^0"- untuk memecahkan masalah, tetapi tidak dapat membuktikan teorema tersebut dan tidak memahami maknanya secara geometri. Mereka hanya memahami maknanya secara aritmatika, bahwa jumlah hasil pengukuran sudut-sudut segitiga berjumlah 180^0. Fakta ini menunjukkan bahwa pemahaman konsep teorema kurang optimal jika mengabaikan proses buktinya. Tetapi siswa lain yang menyusun beberapa bukti teorema tersebut, dapat memahami proses pembuktian dan makna teorema secara geometri, dengan memahami bukti (baca "meng-*encapsulated* proses ") yang dia susun. Mereka juga dapat menggunakan proses maupun konsep bukti dari teorema tersebut untuk memecahkan masalah. Fakta ini mengindikasikan bahwa memahami konsep teorema dengan mengabaikan buktinya kurang maksimal.

Kedua, karena bukti mengandung aspek prosedur matematika (proses) dan aspek konsep (Erh-Tsung, 2003; Velleman, 2009). Misalnya teorema "jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0" mengandung pengertian bahwa jika sudut-sudut segitiga diukur, kemudian hasilnya dijumlah, akan menghasilkan 180^0. Pengertian ini bermakna bahwa gabungan sudut-sudut suatu segitiga merupakan sudut lurus, merupakan aspek konsep secara geometri. Pengertian ini juga berarti bahwa jika ditemukan tiga sudut bersisian yang besarnya sama dengan masing-masing sudut segitiga, ketiga sudut tersebut membentuk sudut lurus. Pengertian terakhir ini merupakan aspek proses, membantu merumuskan proses pengonstruksian bukti teorema tersebut. Dengan demikian, untuk memahami teorema secara optimal, lebih tepat memandang teorema tersebut sebagai simbol yang menyatakan proses dan konsepnya, sebagaimana dinyatakan secara detail pada buktinya. Aspek proses merupakan pengetahuan prosedural, yaitu prosedur-prosedur penalaran, yang dapat dilakukan mengerjakan matematika. Aspek konsep merupakan pengetahuan konseptual untuk memikirkan ide-ide matematika. Dengan demikian, memahami bukti menjadi sentral perhatian untuk dapat memahami teorema, dan memahami bukti dengan mengabaikan prosesnya akan mengaburkan makna atau konsep yang terkandung didalamnya. Baylis menyatakan "*Proof is the essence of mathematics*" (Baylis, 1983:3). Walaupun dapat dibedakan, keduanya-proses dan konsep bukti- tidak tepat dipisahkan, jika diharapkan pemahaman bukti secara optimal. Hal ini menjadi dasar memandang bukti sebagai prosep, dan teoremanya sebagai simbol prosep.

Bukti geometri sebagai prosep memiliki simbol, proses dan konsep (Erh-Tsung, 2003). Berdasarkan pendapat Gray dan Tall (1994) maupun Erh-Tsung (2003), penulis merumuskan bahwa *proses* bukti adalah prosedur-prosedur penalaran yang sukses membangun bukti. Penalaran adalah proses berpikir yang bertolak dari fakta untuk menarik kesimpulan. Perumusan, pemilihan dan penyusunan premis maupun pola penalaran termasuk dalam penalaran. *Konsep* bukti adalah makna yang terkandung dalam rangkaian bukti, yang sama dengan makna teorema yang dibuktikan. Dengan demikian, s*imbol* bukti adalah teorema (tepatnya redaksi teorema) yang dibuktikan secara lengkap, menyangkut syarat atau kondisi yang dipenuhi dan yang dibuktikan. Artinya, dengan mendengar atau mengingat teorema,

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

seseorang secara silih berganti mengingat konsep dan proses buktinya dalam mental. Jika kemampuan tersebut belum tercapai, pemahaman teorema belum optimal.

Ada satu pertanyaan menarik. Mengapa bukti, bukan teorema, yang dipandang sebagai prosep, padahal teorema dan bukan bukti yang menjadi elemen struktur sistem aksioma matematik? *Pertama,* karena pemahaman teorema secara optimal lebih tepat jika dibangun dengan memahami bukti sebagai prosep. *Kedua*, memandang bukti sebagai prosep, menggunakan redaksi teorema sebagai simbol. Sebagai simbol, teorema (tepatnya redaksi teorema) akhirnya menjadi representasi bukti dan menjadi pusat perhatian sebagaimana teorema-bukan bukti- menjadi elemen dan pusat perhatian dalam sistem aksioma. *Ketiga,* karena teorema sebagai simbol, membaca struktur teorema dalam sistem aksiomatik harus dipandang sebagai simbol yang menyatakan dualitas konsep atau makna teorema dan buktinya. Hal ini menegaskan cara memahami hakikat sistem aksioma, bahwa elemen sistem aksioma dibangun oleh dan menjadi satu kesatuan dengan buktinya. Sesungguhnya jika tidak ada bukti, tidak ada teorema (Baylis, 1983).

3. Fenomena dalam pembelajaran geometri

a) Bagaimana memandang teorema agar menjadi unit kognitif dalam berpikir geometri yang sukses?

Teorema lebih tepat dipandang sebagai simbol dari dualitas proses dan konsep buktinya. Hal ini sudah dibahas pada bagian B.2. Tahap berpikir memecahkan masalah membuktikan menurut Polya (1973), juga menjelaskan bahwa aspek konsep (makna bukti) menjadi bagian penting, selain proses mengonstruksi bukti. Pertanyaan lebih lanjut adalah “apakah setelah menyusun bukti dan menyatakan maknanya secara gamblang merupakan kemampuan paling baik yang dapat dicapai?” Gray-Tall (1994) menyimpulkan bahwa berpikir matematik yang berhasil tergantung pada dapat tidaknya seseorang berpikir secara proseptual. Berpikir secara proseptual adalah berpikir secara fleksibel antara proses dan konsep suatu simbol sebagai satu item pengetahuan. Perhatikan kembali proses dan konsep yang diyatakan oleh teorema “jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0”. Seseorang yang dapat menyebutkan proses dan konsep bukti tersebut, belum tentu mampu memikirkannya secara proseptual. Memikirkannya secara proseptual berarti dengan mendengar atau mengingat simbolnya (teorema yang dibuktikan), seseorang memikirkan secara fleksibel berpindah-pindah dari proses ke konsep buktinya dan sebaliknya dalam suatu waktu, sehingga proses dan konsep tersebut menjadi satu item pengetahuan sebagaimana dinyatakan oleh teorema. Pemahaman objek mental dalam bentuk prosep secara proseptual demikian, memungkinkan kerja otak berpindah-pindah tanpa kesukaran antara mengerjakan suatu proses dengan memikirkan suatu konsep, dengan rangkaian kerja minimal. Hal ini terjadi dengan kemampuan otak mengompres rangkaian prosedur-prosedur kerja dalam proses dan proposisi-proposisi dalam argumen (bukti) hingga bentuknya yang sederhana. Karena bentuknya sederhana, proses dan konsep dapat dipikirkan secara proseptual, dapat digunakan secara fleksibel dalam situasi baru, dan digunakan sebagai satu langkah saja dalam proses berpikir lebih lanjut. Misalnya, siswa yang mampu memahami bukti teorema “jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0” sebagai prosep dan memikirkannya secara proseptual, dapat membuktikan bahwa “jumlah besar sudut-sudut jajargenjang adalah 360^0” dengan ringkas menggunakan teorema ‘segitiga’ tersebut.

Thursthon (dalam Gray dan Tall, 1994) menjelaskan bahwa “*Mathematics is amazingly compression: ….. You can file it away, recall it quickly and completely, when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics*”. Matematika merupakan kompresi yang mengagumkan. Obyek mental sebagai hasil kompresi dari beberapa langkah kompleks dapat disimpan, diingat kembali dengan cepat dan lengkap, bahkan dapat digunakan hanya menjadi satu langkah saja dalam proses mental lainnya. Solso (1995) dan Matlin (1994) menjelaskan bahwa kompresi menyederhanakan kerja otak menyimpan dan mengingat kembali beberapa informasi dengan cepat dan lengkap. Dengan demikian, untuk menjadi unit kognitif dalam berpikir matematika yang sukses, teorema sebaiknya dipandang sebagai simbol prosep dan dapat dipikirkan secara proseptual. Mereka yang memahami sejumlah prosedur suatu operasi dalam matematika dengan meng-*encapsulated* prosedur-prosedur tersebut menjadi lebih sederhana sebagai suatu proses, hanya mampu menerapkan pengetahuannya untuk menyelesaikan masalah dengan cara fleksibel (tidak secara kaku mengikuti prosedur tertentu), tetapi tidak dapat memikirkannya secara proseptual. Ketika dipahami sebagai prosep dan dipikirkan secara proseptual, teorema diyakini merupakan komponen dasar dalam kemampuan manusia memanipulasi ide matematika, baik pengetahuan prosedural maupun konseptual secara fleksibel dengan rangkaian kerja otak yang minimal. Teorema geometri dalam keadaan ini berperan sebagai pivot (ibarat engsel penghubung dan menyatukan secara dinamis) aspek proses dan konsep dalam berpikir proseptual.

b) Bagaimana tujuan pembelajaran yang memandang bukti sebagai prosep?

Pembelajaran yang memandang bukti sebagai prosep diarahkan memahami proses dan konsep bukti, hingga mampu memikirkannya secara proseptual. Tujuannya agar siswa mampu merumuskan proses bukti, konsep bukti dan memikirkannya secara proseptual. Tujuan ini memaksimalkan penggunaan materi geometri secara optimal mencapai tujuan belajar. Dalam keadaan itu, siswa memahami bukti maupun konsep teorema, dan mengabstraksi bukti dan konsepnya hingga menjadi satu item pengetahuan dalam suatu waktu. Pada kemampuan ini, seseorang memahami dan mampu menggunakan prosedur pembuktian secara fleksibel pada situasi masalah matematika, memahami makna teorema, yakin akan kebenarannya, dan mampu menggunakan konsep bukti tersebut sebagai entitas dalam proses berpikir lebih lanjut, misalnya membuktikan teorema lain. Dengan memberi waktu bagi siswa mengonstruksi bukti sebagai prosep demikian, mereka juga memiliki waktu belajar memecahkan masalah, menarik kesimpulan, berpikir kritis, kreatif, dan tidak mudah menyerah menghadapi masalah. Hal ini menunjukkan bahwa bukti bukan hanya dokumen, tetapi merupakan kegiatan esensial, kegiatan manusiawi (*human activity*) yaitu: kegiatan membangun pengetahuan, menunjukkan kebenaran, kegiatan berpikir, dan memangun kompetensi. "*Mathematics is the proper training for understanding the universe*" (Shapiro, 2003, 3). Pengembangan evaluasi dengan sendirinya mempertimbangkan proses pencapaian dan hasil yang dicapai menurut tujuan-tujuan ini, tanpa mengabaikan komponen lain, misalnya tingkat perkembangan siswa dan kondisi kelas (kegiatan pembelajaran).

c) Bagaimana tahap berpikir mengonstruksi bukti sebagai prosep?

Memahami teorema dengan fokus pada makna yang dapat dimengerti dari redaksinya saja, kurang optimal. Seperti sudah dijelaskan sebelum ini, memahami teorema secara optimal sebaiknya dengan meng-*encapsulated* buktinya. Piaget dan Beth menjelaskan bahwa obyek mental (konsep) merupakan *encapsulation* suatu proses. *Encapsulation* dari suatu proses sebagai objek mental terjadi ketika " …*a physical or mental action is reconstructed and reorganization on a higher plane of thought and so comes to be understood by the knower*" (Beth dan Piaget, 1966, 247). *Encapsulation* merupakan rekonstruksi atau reorganisasi aksi secara fisik atau mental pada taraf berpikir lebih tinggi hingga seseorang menjadi paham. Proses kognitif pembentukan sebuah entitas konseptual dari sebuah proses disebut *encapsulation*. Proses yang dimaksud di sini adalah proses penalaran mengonstruksi bukti, yang dipandang sebagai proses pembentukan teoremanya.

Penulis telah melakukan penelitian tentang hal ini terhadap siswa SMP. Hal ini saya jelaskan pada artikel saya yang lain dalam seminar ini, berjudul "Proses Berpikir Siswa SMP Mengonstruksi Bukti Visual/Simbolik Geometri sebagai Prosep" (Ndraha, 2013). Berdasarkan hasil penelitian, tahap dan karakteristik proses berpikir pengonstruksian bukti visual/simbolik geometri sebagai prosep (PBSMBVSGsP) dimulai dari (1) *mengidentifikasi*: (a) menentukan bagian prinsipil masalah dan hubungan-hubungannya, (b) membayangkan gambar mental hal yang dipermasalahkan atau melukis gambar mental tersebut, (2) *mobilisasi dan reorganisasi data*: (a) mengingat dan memilih pengetahuan atau pengalaman sebelumnya yang relevan dengan masalah (b) mengadaptasikan pengetahuan pada kondisi masalah (c) merumuskan atau merobah konsepsi tentang masalah, (3) *merumuskan rencana pembuktian* (a) merumuskan masalah berdasarkan konsepsi masalah, (b) menentukan prosedur pembuktian, (4) *aplikasi*: (a) melengkapi gambar menurut rencana pembuktian, (b) menuliskan langkah-langkah bukti, (c) memeriksa kebenaran setiap langkah atau bagian bukti, (d) memperbaiki langkah-langkah bukti, (5) *pembentukan makna*: (a) merumuskan secara sederhana prosedur pengembangan bukti-bukti, dan (b) merumuskan makna rangkaian bukti, (6) *evaluasi*: (a) memeriksa kembali ketepatan hasil dan argumen seluruh bukti, (b) menyelesaikan dengan cara berbeda, (c) memilih cara pembuktian yang lebih efisien, (7) *tahap prosep*: (a) merumuskan proses bukti, (b) merumuskan konsep bukti, (c) memikirkan proses dan konsep bukti secara proseptual.

Ada beberapa pertanyaan berkaitan dengan pokok kajian bagian ini. *Pertama,* "apakah siswa *harus* mengonstruksi bukti untuk memahaminya sebagai prosep?" *Tidak*. Yang penting memahami proses dan konsepnya. Untuk memahami proses dan konsep bukti, dapat dilakukan dengan memahami proses dan konsep dari bukti yang *sudah ada*. Dengan "mempelajari" bukti yang sudah ada, siswa dapat mengembangkan pemahamannya hingga bukti tersebut dia pahami sebagai prosep. Hal itu dilakukan dengan memahami prosedur penalaran dan makna dari rangkaian seluruh bukti yang ada (tahap pembentukan makna). Tahap ini membantu siswa mengonstruksi bukti lain yang sederhana, dan memikirkan tahap berikutnya. Karena memahami bukti sebagai prosep sebenarnya memahami teorema (redaksi teorema), maka pemahaman teorema dapat dilakukan tanpa mewajibkan siswa mengonstruksi sendiri bukti, misalnya dengan memahami bukti yang ada hingga dapat dipahami sebagai prosep secara proseptual.

Kedua, "apakah siswa tidak perlu mengonstruksi bukti suatu teorema untuk memahaminya sebagai prosep?" Tentu *perlu,* untuk mengembangkan (memperluas, memperhalus dan mengotomatisasi) pengetahuan dan pemahamannya tentang proses bukti, konsep bukti, dan bukti sebagai prosep.

Ketiga, "mengapa siswa yang mengonstruksi bukti sesuai langkah pemecahan masalah menurut Polya ((1) memahami masalah, (2) merencanakan pemecahan, (3) aplikasi rencana dan (4) memeriksa kembali, termasuk menyusun beberapa bukti lain), kadang masih kurang memahami makna teorema?" Sebagai contoh, teorema "jumlah besar sudut segitiga adalah 180^0" dipahami secara aritmatika, bukan secara geometri. Fenomena ini dengan tegas dijelaskan oleh PBSMBVSGsP: tahap pembentukan makna terabaikan.

Keempat, "mengapa ada yang mampu menyebutkan makna dan menyusun bukti suatu teorema, tetapi kurang mampu menggunakannya memecahkan masalah, hanya sukses pada masalah rutin?" Hal ini tidak dijelaskan secara gamblang oleh teori yang ada. Tetapi PBSMBVSGsP menjelaskan bahwa hal itu terjadi karena pemahaman belum mencapai level berpikir proseptual. Pada berpikir proseptual, seseorang mengabstraksi proses dan konsep sehingga mencapai bentuknya yang paling sederhana. Karena sederhana, dapat diterapkan dengan mudah dan fleksibel pada situasi masalah matematika baru.

Kelima, "Bagaimana menjelaskan penyusunan bukti dengan "langkah maju" dan "langkah mundur" dalam pengonstruksian bukti geometri?" Hal ini juga dapat dijelaskan oleh PBSMBVSGsP. Karena teorema sebagai simbol, maka dengan mengingat teorema, seseorang dapat saja memikirkan proses ke konsep (langkah maju) atau sebaliknya dari konsep ke proses bukti (langkah mundur) dari teorema dimaksud. Peran simbol dalam kondisi ini diistilahkan oleh Gray-Tall: sebagai pivot.

d) Bagaimana pembelajaran yang memandang bukti sebagai prosep menjamin berlangsung konstruksi pengetahuan?

Berdasarkan penjelasan bagian B.3.c bagian *kelima*, bukti sebagai prosep dapat dipikirkan secara proseptual, berpindah-pindah dari proses ke konsep atau dari konsep ke proses. Pandangan ini memungkinkan pembelajaran dimulai dari proses ke konsep atau dari konsep ke proses teorema bersangkutan, tergantung pada kemampuan awal siswa. Jika siswa lebih memahami aksi-aksi (fisik atau mental) berkaitan dengan proses bukti, dapat dimulai dari proses ke konsep. Pada kondisi sebaliknya, dimulai dari konsep ke proses. Pengonstruksian bukti tersebut sesuai dengan pengetahuan riil siswa. Pengetahuan riil adalah pengalaman nyata atau pengetahuan yang telah dimiliki oleh siswa, termasuk pengetahuan *set before* dan *met before.* Tall (2008) menjelaskan bahwa *set before* merujuk kepada struktur mental manusia yang dibawa sejak lahir. Sebagai contoh, struktur visual otak memiliki sistem *built-in* untuk mengidentifikasi warna dan corak, untuk melihat perubahan dalam corak, mengidentifikasi sisi, mengoordinasikan sisi untuk melihat benda-benda dan melacak gerakan mereka. Jadi anak lahir dengan sistem biologis untuk mengenali jumlah, pola, persamaan dan perbedaan benda-benda, mengulangi rangkaian tindakan sampai menjadi otomatis, dan berbahasa untuk menggambarkan dan memperbaiki cara kita berpikir tentang sesuatu.

Pengetahuan *met before* adalah fasilitas mental sekarang berdasarkan pengalaman spesifik individu sebelumnya. Pada pembuktian, pengetahuan *met before* merupakan pengetahuan sebelumnya yang relevan dengan masalah untuk membuktikan.

Karena pengetahuan riil siswa terbatas, pengonstruksian bukti pada awalnya mungkin berlangsung selangkah demi selangkah, tidak selalu dapat diselesaikan dengan sukses dan cepat. Selanjutnya untuk merumuskan proses bukti, langkah-langkah yang sukses dalam mengonstruksi bukti tersebut dihubung-hubungkan, hingga keseluruhannya menjadi sebuah pengetahuan prosedural. Pemahaman proses akan mendorong *encapsulated* proses bukti sehingga terbentuk konsep baru dalam mental. Pemahaman *proses* tersebut sebenarnya proses berpikir seseorang menghubungkan pengetahuan awal yang dimilikinya sesuai dengan bukti yang dikonstruksinya dengan *konsep* baru. Dalam hal ini, pemahaman "proses" menghubungkan aksi-aksi yang diketahui (pengetahuan riil siswa) dengan konsep baru yang akan dipelajarinya, yang memastikan berlangsungnya konstruksi pengetahuan dalam cara memandang bukti sebagai prosep. Karena terhubung dengan pengetahuan riil siswa, maka pembelajaran menyatu dengan lingkungan dan pengalaman siswa. Pembelajaran seperti ini dapat berlangsung tematik, riil, menantang dan mengembangkan kompetensi siswa.

C. SIMPULAN

Mengapa penting mengembangkan dan menerapkan "bukti sebagai prosep" dalam pembelajaran geometri, untuk Indonesia yang lebih baik? *Pertama*, karena memandang bukti sebagai prosep memberi penjelasan memadai tentang proses berpikir dalam pembuktian geometri.

Kedua, karena secara alamiah, konsep teorema sebagai *encapsulation* suatu proses (bukti) tidak tepat dipisahkan dari proses tersebut, dan bersama-sama saling melengkapi memberi makna pada teorema yang terbentuk. Ada beberapa teori yang mengakui objek sebagai *encapsulation* suatu proses, tetapi yang tegas memandang konsep dan prosep sebagai satu kesatuan ibarat dua sisi dari satu mata uang adalah *prosep.*

Ketiga, untuk memaksimalkan efek penggunaan geometri sebagai materi pendidikan matematika yaitu mencapai tujuan pendidikan yang lebih baik di negeri ini. Makna dari konsep lebih tepat dibangun melalui pemahaman prosesnya, dan konsep maupun proses masing-masing mengembangkan pengetahuan dan kompetensi dalam belajar. Oleh karena itu, baik proses maupun konsep sebaiknya tidak diabaikan, dan dipelajari tanpa memisahkannya. Selain itu, memandang bukti sebagai prosep, memberi tantangan berpikir lebih tinggi, tidak sekedar memahami bukti dan makna teorema yang dibuktikan, tetapi memahami keduanya secara proseptual. Bukti sebagai prosep diyakini sebagai komponen dasar pengetahuan, dan teorema akan menjadi unit berpikir matematika dalam berpikir matematika yang sukses jika dilihat sebagai simbol prosep dari buktinya dan dapat dipikirkan secara proseptual.

Keempat, mempelajari konsep dari dan tanpa dipisahkan dari *proses* menjadi kegiatan strategis untuk menjamin pelaksanaan konstruksi *konsep* atau pengetahuan baru. *Proses* menghubungkan pengetahuan awal siswa dengan *konsep* baru yang dipelajarinya. Hal ini mendukung penerapan pandangan konstruktivisme dalam pendidikan matematika. Selain itu, prosep memberi peluang pembelajaran dari proses atau dari konsep dengan menempatkan simbol berperan sebagai pivot. Pemilihan awalan –dari proses atau dari konsep- disesuaikan dengan pengetahuan awal siswa.

D. DAFTAR PUSTAKA

Baylis, John. 1983. *"Proof- The Esence of Mathematics"*. International Journal of Mathematics Education and Science Technology. Vol 14.

Beth, E. W. & Piaget J. 1966. *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: Reidel

Erh-Tsung Chin.2003. *"Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking"*. http://online.terc.edu/PME2003/PDF/ RR_chin.pdf, diakses 4 April 2009.

Ndraha, Faaso, 2011. *Proses Berpikir Mengonstruksi Bukti Geometri sebagai Prosep Berdasarkan Teori Gray-Tall dan Polya.* Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2011, Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.

Ndraha, Faaso. 2013. *Proses Berpikir Siswa SMP Mengonstruksi Bukti Visual/Simbolik Geometri sebagai Prosep.* Artikel untuk Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Negeri Yogyakarta 2013. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Fuys, D., Geddes, D., and Tischer, R. 1988. *The van Hiele Model of Thingking in Geometry Among Adolescens*. Journal for Research in Mathematics Education. Monograph no. 3. Reston : NCTM.

Gray, Eddie M dan Tall, David O. 1994. *"Duality, Ambiguity and Flexibility : A Proceptual View of Simple Arithmetic"*. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 115-141.

Knuth, E. J. 2002. *Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof.* Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 33 (5). Hal. 379-405.

Matlin, Margaret W. 1994. *Cognition*. 4th ed. Fort Worth: Harcourt Brace College Publishers.

O'Daffer, Phares G. dan Thornquist, Bruce A. 1993. "*Critical Thinking, Mathematical Reasoning, and Proof*". Dalam Patricia S. Wilson (ed). *Research Ideas for the Classroom: High School.*New York: MacMillan Publishing Co.

Polya, George. 1973. *How to Solve It A New Aspect of Mathematical Method*. 2th ed. New Jersey: Princeton University Press.

Shapiro, Stewart. 2000. *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics.* Oxford : Oxford University Press.

Solso, Robert L. 1995. *Cognitive Psychology*. 4th ed. Boston: Allyn and Bacon

Sunardi, 2000. *Tingkat Perkembangan Konsep Geometri Siswa Kelas III SLTP Negeri di Jember.* Majalah Ilmiah Himpunan Matematika Indonesia. Sriwulan Adji dan Janson Naiborhu (eds). Prosiding Konferensi Nasional Matematika X, Institut Teknologi Bandung, 6(5), hal. 635-639. Bandung: ITB

Tall, David, 1995. *Cognitive Development, Representations, and Proof.* Makalah pada Konferensi Justifying and Proving in School Matematics, Institute of Education, London, Desember 1995. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/ pdfs/dot1995-repns-proof.pdf, diakses 14 Juni 2010.

Tall, David, 1997. "*From School to University: The Effects of Learning Styles in the Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking*". In Thomas, M. O. J. (Ed.) Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference, University of Auckland, 9-26.

Tall, D.O. 2008. "The Transition to Formal Thinking in Mathematics". *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 20 No. 2 Hal: 5-24.

Velleman, Daniel J. 2009. *How to Proof It A Structured Approach*. 2th ed. New York: Cambridge University Press.