

PROSES BERPIKIR SISWA SMP MENGONSTRUKSI BUKTI INFORMAL GEOMETRI SEBAGAI PROSEP

Faaso Ndraha

SMAN 3 Gunungsitoli, Kota Gunungsitoli, Sumatera Utara

Mahasiswa S3 Pendidikan Matematika Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya

e-mail: faandraha@yahoo.com

Abstrak

Memandang bukti visual/symbolik geometri sebagai prosep (proses dan konsep) merupakan perluasan konsep prosep pada bukti geometri. Prosep dimaksud dikembangkan pada awalnya oleh David Tall dan Eddie Gray pada matematika kalkulasi dan komputasi. Tulisan ini bertujuan mendeskripsikan tahap berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti geometri sebagai prosep. Deskripsi yang dirumuskan didasarkan pada eksplorasi proses berpikir siswa ketika mengonstruksi bukti suatu teorema yang belum pernah diselesaikannya, hingga mampu memikirkan bukti tersebut sebagai prosep secara proseptual. Penelitian dilakukan terhadap siswa SMP dengan pendekatan kualitatif. Berdasarkan hasil penelitian, tahap dan karakteristik proses berpikir pengonstruksian bukti visual/symbolik geometri sebagai prosep dimulai dari (1) mengidentifikasi: (a) menentukan bagian prinsipil masalah dan hubungan-hubungannya, (b) membayangkan gambar mental hal yang dipermasalahkan atau melukis gambar mental tersebut, (2) mobilisasi dan reorganisasi data: (a) mengingat dan memilih pengetahuan atau pengalaman sebelumnya yang relevan dengan masalah (b) mengadaptasikan pengetahuan pada kondisi masalah (c) merumuskan atau merubah konsepsi tentang masalah, (3) merumuskan rencana pembuktian (a) merumuskan masalah berdasarkan konsepsi masalah, (b) menentukan prosedur pembuktian, (4) aplikasi: (a) melengkapi gambar menurut rencana pembuktian, (b) menuliskan langkah-langkah bukti, (c) memeriksa kebenaran setiap langkah atau bagian bukti, (d) memperbaiki langkah-langkah bukti, (5) pembentukan makna: (a) merumuskan secara sederhana prosedur pengembangan bukti-bukti, dan (b) merumuskan makna rangkaian bukti, (6) evaluasi: (a) memeriksa kembali ketepatan hasil dan argumen seluruh bukti, (b) menyelesaikan dengan cara berbeda, (c) memilih cara pembuktian yang lebih efisien, (7) tahap prosep: (a) merumuskan proses bukti, (b) merumuskan konsep bukti, (c) memikirkan proses dan konsep bukti secara proseptual.

Kata kunci: prosep, bukti visual/symbolik geometri, proses berpikir.

A. PENDAHULUAN

Bukti dalam pembelajaran geometri SMP sangat penting. Pembuktian pada geometri sekolah tidak hanya dapat meningkatkan pemahaman konsep-konsep matematika, juga dapat melatih berpikir untuk meningkatkan kemampuan bernalar dan membangun karakter peserta didik (Soedjadi, 2000; van Hiele dalam Fuys, dkk., 1988). Walaupun mayoritas siswa SMP hanya mampu menyusun bukti informal dalam pembelajaran (Fuys, dkk, 1998; Sunardi, 2005), tetapi kegiatan mengonstruksi bukti akan mengoptimalkan hasil belajar dan mengembangkan kemampuan mereka mengonstruksi bukti formal matematika lebih lanjut. Karena itu sangat penting memahami proses berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti informal dalam kegiatan belajar geometri.

Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika dengan tema "*Penguatan Peran Matematika dan Pendidikan Matematika untuk Indonesia yang Lebih Baik*" pada tanggal 9 November 2013 di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY

Bukti informal geometri mengandung proses untuk dikerjakan dan konsep untuk dipikirkan (Velleman, 2009). Aspek proses penalaran maupun aspek konsep bukti merupakan dua hal penting yang tidak tepat dipisahkan untuk memahami teorema yang dibuktikan secara optimal. Secara empirik, ada siswa yang tidak mampu menyusun bukti suatu teorema geometri, ternyata tidak memahami makna teorema tersebut secara geometri, walaupun mampu menggunakan teorema tersebut dalam memecahkan masalah. Siswa tersebut hanya memahami makna teorema secara aritmatik. Tetapi siswa lain yang menyusun bukti dan memahami maknanya, mampu memahami makna teorema yang dibuktikan tersebut secara geometri maupun secara aritmatika (Ndraha, 2011). Dengan demikian bukti lebih tepat dipandang sebagai dualitas proses dan konsep, disingkat prosep.

Gray dan Tall (1994) mengembangkan teori prosep berdasarkan teori Piaget (Davis, dkk, 2000). Prosep merupakan campuran proses, konsep, dan simbol yang menyatakan proses dan konsep tersebut. Gray dan Tall (1994,120) menjelaskan bahwa “*An elementary procept is the amalgam of three components: a process which produces a mathematical object, and a symbol which is used to represent either process or object. A procept consists of a collection of elementary procepts which have the same object*”. Sebagai prosep, bukti juga memiliki proses, konsep dan simbol. Berdasarkan pendapat Gray dan Tall (1994) dan Erh-Tsung (2003), disimpulkan bahwa dengan memandang bukti sebagai prosep, *simbol* prosep adalah redaksi teorema, yang menyatakan *proses* dan *konsep* bukti. *Proses* bukti adalah prosedur-prosedur yang dinyatakan secara gamblang dan sederhana yang dapat dilakukan dan sukses dalam menyusun bukti, dan *konsep* bukti adalah makna yang terkandung dalam rangkaian bukti.

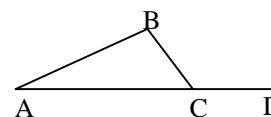
Gray dan Tall menjelaskan lebih lanjut bahwa ada tiga tahap aktivitas pengonstruksian prosep dalam pikiran yaitu tahap prosedur, proses dan prosep. “*.... the meaning of symbols developed through a sequence of activities: (a) procedure, where a finite succession of decisions and actions is built up into a coherent sequence, (b) process, where increasingly efficient ways become available to achieve the same result, now seen as a whole, (c) procept, where the symbols are conceived flexibly as processes to do and concepts to think about* (Tall, 1997, 13).

Menurut Gray dan Tall, objek matematika dalam mental terbentuk dari suatu aksi dengan melakukan langkah demi langkah prosedur matematika tertentu. Selanjutnya mengulangi beberapa kali prosedur tersebut, sambil berusaha memahami pola kerja dan menghubungkan-hubungkan makna langkah-langkah dari aksi yang dilakukan. Kegiatan ini adalah tahap proses. Akhirnya mengoordinasikan pemahaman tentang pola aksi dan makna tersebut di dalam pikiran, hingga akhirnya keseluruhan langkah yang dikerjakan dipahami sebagai suatu item pengetahuan atau konsep. Misalnya seorang anak mulai belajar menghitung jumlah lima buah benda dengan belajar prosedur menghitung. Selanjutnya dia mengulangi prosedur menghitung tersebut, misalnya menghitung beberapa kumpulan benda lainnya. Pengulangan kegiatan menghitung akan membentuk pengetahuannya tentang proses menghitung dan konsep bilangan 5 dari hasil hitungannya. Ketika dia melihat simbol ‘5’ pada waktu selanjutnya, mengingatkannya pada konsep bilangan lima dan proses menghitung yang berkaitan dengannya. Mereka yang mengenal 5 sebagai konsep, tetapi tidak memahami proses menghitung, sebenarnya tidak memahami apa yang dimaksud dengan 5. Hal ini menunjukkan bahwa proses menghitung dan konsep bilangan secara bersama-sama memberi makna pada simbol 5. Dengan demikian, lebih tepat memandang 5 sebagai simbol prosep, menyatakan proses menghitung dan konsep bilangan. Seseorang yang telah sampai pada tahap prosep, memikirkan prosep secara proseptual. Berpikir proseptual adalah memikirkan secara fleksibel berpindah-pindah dari proses ke konsep dan sebaliknya dalam suatu waktu sebagai satu item pengetahuan.

Tulisan ini bertujuan mendeskripsikan tahap berpikir siswa SMP memahami bukti informal, khususnya bukti visual/simbolik geometri sebagai prosep. Penelitian dilakukan dengan pendekatan kualitatif. Instrumen terbagi tiga, yang intinya

- 1) Membuktikan “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ”.
- 2) Menyusun bukti lain dari “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ”.
- 3) Menggunakan pengetahuan selama menyelesaikan tugas 1) dan 2) untuk menyelesaikan masalah. Untuk itu diberikan dua tugas berikut.

- a. Membuktikan bahwa $\angle BCD$ sama dengan jumlah $\angle BAC$ dan $\angle ABC$, jika titik C terletak di antara A dan D.
- b. Membuktikan bahwa jumlah besar sudut-sudut jajargenjang adalah 360° .



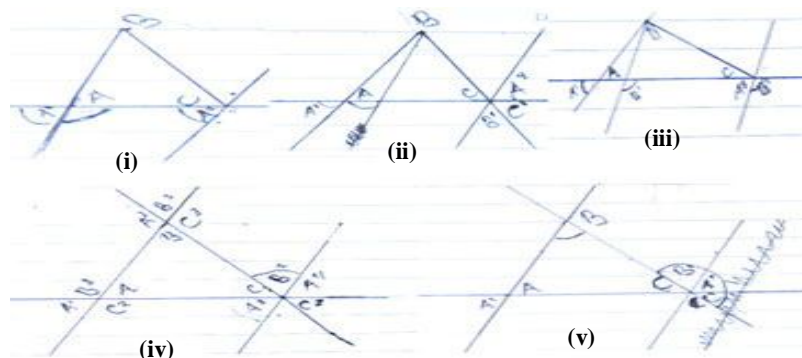
Tugas 1) diberikan untuk menciptakan kondisi agar terjadi proses berpikir tahap prosedur, tugas 2) untuk tahap proses, dan tugas 3) untuk tahap prosep. Subyek penelitian terdiri dari 2 orang siswa SMP Laboratorium Universitas Negeri Surabaya. Untuk mendapatkan data tahap prosedur, subyek penelitian adalah mereka yang belum pernah menyelesaikan tugas 1) dan 2) sebelumnya. Validasi data dilakukan dengan triangulasi data yang dikumpulkan dalam wawancara dengan data dokumen (lembar kerja) dan pengamatan selama siswa menyelesaikan tugas. Untuk audit data, seluruh kegiatan di-*shooting* dan disimpan bersama dengan dokumen lembar kerja siswa. Wawancara yang dilakukan adalah wawancara berbasis tugas untuk mengungkap proses berpikir siswa selama mengonstruksi bukti hingga memahaminya sebagai prosep. Analisis data dilakukan dengan melakukan analisis perbandingan tetap antara proses berpikir subyek pertama dengan subyek kedua. Hasil penelitian diharapkan membantu dalam mengidentifikasi kelemahan dan kekuatan siswa dalam memahami bukti informal geometri sebagai prosep, dan memberikan kontribusi kepada teori psikologi pengajaran matematika, khususnya tentang proses berpikir mengonstruksi bukti informal geometri sebagai prosep.

B. HASIL PENELITIAN

Subyek penelitian (S1 dan S2) menyelesaikan tugas pertama (T1), tugas kedua (T2) dan tugas ketiga (T3) dalam bentuk gambar, dilengkapi dengan beberapa pernyataan matematika simbolik. S1 adalah laki-laki, sedangkan S2 adalah perempuan. Kedua subyek belum pernah membuktikan teorema “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180° ”, memaknai pernyataan atau teorema tersebut secara aritmatik bahwa jumlah hasil pengukuran sudut-sudut segitiga berjumlah 180° , pernah mempelajari hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan, dan mengonstruksi bukti dalam bentuk visual/symbolik.

Penyelesaian tugas sebagian besar direpresentasikan dalam bentuk gambar. Jika memperbaiki gambar i, subyek merepresentasikannya dalam gambar ii, demikian seterusnya hingga menghasilkan gambar sebagai representasi penyelesaian tugas yang benar menurut subyek. Untuk memudahkan memahami proses berpikir yang dilakukan subyek selama mengonstruksi penyelesaian tugas, penulis memberi indeks gambar menurut urutan pengonstruksiannya, dimulai dari i, ii, iii, dan seterusnya.

Lembar kerja S1 menyelesaikan tugas T1 dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Lembar kerja S1 tugas T1

Berdasarkan lembar kerja penyelesaian T1, peneliti melakukan wawancara kepada S1. Petikan wawancara sebagai berikut.

- P : “Tadi Fikri mulai dengan membaca Petunjuk dan Tugas. Pada saat atau setelah Fikri membaca tugas itu, apa yang terpikirkan oleh Fikri?”
- 1 : “Pertama jumlah ... Jumlah besar sudut suatu segitiga adalah 180° ”

P : “O... itu yang kamu ketahui dari soal itu ‘kan? Ada yang lain?”

1 : “*Membuktikan bahwa jumlah sudut, jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga 180^0* ”.

S1 menjelaskan lebih lanjut bahwa ia mengingat ‘hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan’, dan dia gunakan pengetahuan tersebut mengonstruksi gambar 1 (i). Berikut wawancara berbasis gambar 1(iv).

P : “..... Kemudian kamu menentukan sudut-sudut di sini (menunjuk semua sudut-sudut yang telah diberi nama). Setelah itu sudah terpikirkan kepadamu cara penyelesaian tugas ini?”

1 : “*Pertama masih bingung*”.

P : “Terus... setelah kamu menulis semua ini (menunjuk semua sudut-sudut di sekitar titik sudut segitiga), apa yang terpikirkan padamu?”

1 : “*Tadi mau... anu yang ini (menunjuk tiga sudut yang membentuk sudut lurus: sudut A^2 , sudut C dan sudut B^2), tapi takut yang ini (menunjuk sudut C).*

.....
P : “Tetapi kamu takut karena apa?”

1 : “*Di sini (menunjuk A^2 & B^2) ada dua, yang ini (menunjuk C) nggak ada*”.

P : “Oke, sampai di sini apa pengetahuan baru yang kamu peroleh?”

1 : “*Cara mengerjakannya mencari pelurus, mencari pelurusnya*”.

Berdasarkan pemahamannya ini, S1 membuat rencana penyelesaian tugas, kemudian mengonstruksi gambar 1(v), memeriksa dan memperbaiki yang salah, hingga ia yakin bahwa gambar tersebut merupakan penyelesaian tugasnya. Subyek juga dapat menjelaskan makna gambar penyelesaian (gambar 1(v)). Ketika peneliti menanyakan makna “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ” baginya, subyek menjelaskan usaha “*mencari pelurus sudut-sudut segitiga*”. Hal ini menunjukkan bahwa subyek memandang teorema sebagai simbol yang menyatakan prosedur bukti.

Wawancara terhadap S1 berdasarkan T1 menunjukkan bahwa proses berpikir yang terjadi dimulai dengan tahap identifikasi: (1) mengidentifikasi hal-hal prinsipil dalam lembar tugas, dan (2) melukis gambar mental (segitiga) untuk memperjelas masalah. Tahap kedua adalah mobilisasi dan organisasi data: (1) mengingat dan memilih pengetahuan atau pengalaman sebelumnya yang relevan dengan masalah, terutama hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan, (2) menerapkannya dalam kondisi masalah (gambar 1(i)-(iv)), kemudian (3) mengorganisasikan semua data yang diperoleh untuk membuat konsepsi tentang masalah (gambar 1(iv)). Tahap ketiga adalah membuat rencana: (1) merumuskan masalah berdasarkan konsepsi masalah pada gambar 1(iv)), (2) merumuskan langkah-langkah penyelesaian. Tahap keempat adalah aplikasi rencana (gambar 1(v)): (1) melengkapi gambar sesuai rencana penyelesaian, (2) memeriksa langkah-langkah pembuktian, dan (3) memperbaiki yang salah. Pada tahap ini, S1 dapat menyebutkan prosedur pembuktian yang dilakukannya, tetapi belum mampu memaknai seluruh rangkaian bukti yang telah dia susun.

Wawancara kepada S1 berbasis penyelesaian tugas T2 (gambar 2) sebagai berikut.

P : “Apa yang membuat kamu yakin bahwa penyelesaian menurut gambar ini (menunjuk gambar 2(i)) sama dengan cara yang pertama?”, sambil menunjuk gambar 1(iv).

1 : “*Bentuk gambarnya hampir sama*”.

P : “O, karena bentuk gambarnya hampir sama. Jadi sekarang prinsipnya, kamu mencari cara lain dengan apa?”

1 : “*Dengan melukis bentuk yang berbeda*”.

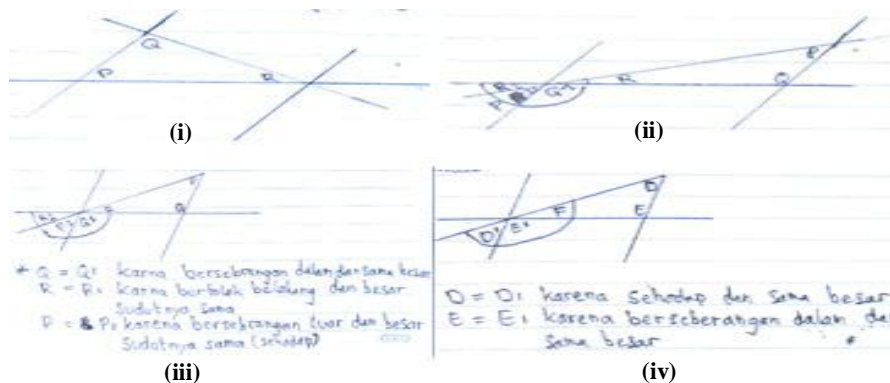
Subyek mengungkapkan lebih lanjut bahwa setelah menyelesaikan tugas T2, dia akan menyelesaikan tugas yang sama dengan cara gambar 2(iv), karena sangat sederhana. Setelah mewawancarai S1 tentang gambar 2(iv), terungkap hal-hal berikut.

P : “Pertanyaan Bapak yang terakhir. Sampai sekarang, kita sudah membuktikan bahwa besar sudut-sudut suatu segitiga 180^0 . Sekarang coba tenang, tenang, tenangkan pikiranmu. Saya akan mengatakan bahwa ‘jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0 . Apa yang terbayang sekarang dalam pikiranmu?”

1 : *Melihat gambar 2(iv), kemudian berkata “Jika jumlah sudut segitiga D, E, F digabungkan akan menghasilkan besar sudut 180^0 ”.*

P : “Ada lagi yang muncul dalam pikiranmu?”

- 1 : “Jika ketiga sudut didekatkan akan membentuk sudut lurus” (menunjuk gambar 2(iv))
 P : “Apa lagi?”
 1 : “Caranya” (menunjuk gambar 2(iv)).
 P : “Jadi jika kamu mendengar pernyataan itu (maksudnya ‘jumlah besar sudut-sudut segitiga 180^0), kamu juga ingat caranya?”
 1 : “Iya”.
 P : “Bagaimana caranya?”
 1 : “Mencari sudut yang sama, yang sama besar, dan membentuk garis lurus”.

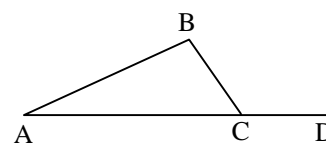


Gambar 2. Lembar kerja S1 tugas T2

Berdasarkan lembar tugas T2 dan wawancara yang dilakukan, terungkap bahwa S1 mengonstruksi bukti dengan mengikuti keempat tahap proses berpikir ketika menyelesaikan T1. Perbedaan keduanya terutama pada pembentukan konsepsi tentang masalah. Pembentukan konsepsi tentang masalah T1 berlangsung dari proses menerapkan pengetahuan relevan (hubungan sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan) hingga merumuskan bahwa masalahnya adalah menemukan tiga sudut yang bersisian dan membentuk sudut lurus yang besarnya sesuai dengan ukuran masing-masing sudut segitiga. Sedangkan saat mulai mengerjakan T2, subyek telah memahami masalah seperti T1 tetapi dalam kondisi kerangka gambar penyelesaian yang berbeda dengan kerangka gambar penyelesaian T1. Penyelesaian T2 membantu subyek mengalami tahap proses berpikir lebih lanjut, yaitu tahap kelima: pembentukan makna: (1) merumuskan secara sederhana prosedur pengembangan bukti-bukti, dan (2) merumuskan makna rangkaian bukti, kemudian melakukan tahap keenam: evaluasi bukti: (1) menyusun bukti lain, (2) memilih bukti yang lebih sederhana, dan (3) memeriksa kelengkapan semua bukti.

Tujuan pemberian tugas T3 yang utama bukan untuk mengetahui kemampuan subyek menyelesaikan tugas, tetapi menyiapkan kondisi agar dapat mengungkap apakah subyek telah memikirkan bukti “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga adalah 180^0 ” sebagai prosep secara proseptual. Berikut adalah petikan wawancara dengan S1 sebelum menyelesaikan T3.

- P : “Bagaimana kamu yakin benar (penyataan tugas III nomor 1, oleh penulis)? Bisa kamu jelaskan?”
 1 : “Karena sudut A (menunjuk sudut BAC) ditambah sudut B (menunjuk sudut ABC) kan menghasilkan sudut ini (menunjuk sudut BCD)”.
 P : “Mengapa bisa menghasilkan sudut itu?” Subyek masih terus berpikir. P berkata, “Apa dasarnya?”
 1 : “Karena besar sudut segitiga membentuk 180^0 ”.
 P : “Mana segitiga itu?”
 1 : “Ini”, sambil menunjuk segitiga ABC pada lembar Tugas.
 P : “Apa maksudnya?”
 1 : “Karena jika sudut A (menunjuk sudut A) ditambah dengan sudut B (menunjuk sudut B) kan menghasilkan sudut ini (menunjuk sudut BCD)”.
 P : “Mengapa bisa menghasilkan sudut itu?”



1 : “*Karena jika sudut A (menunjuk sudut A), ditambah dengan sudut B (menunjuk sudut B) akan menghasilkan sudut ini (menunjuk sudut BCD) akan menghasilkan sudut lurus dengan C (menunjuk sudut C)*”.

P : “*Kalau menghasilkan sudut lurus, terus apa?*”

1 : “*Kan dasarnya tadi. Jumlah besar sudut-sudut segitiga 180^0* ”.

P : “*Tu kan 180^0 . Kalau sudut A ditambah sudut B ditambah sudut C itu membentuk sudut lurus, apa hubungannya?*”

1 : “*Hubungannya jika ketiga sudut itu (menunjuk sudut A, sudut B, sudut C) didekatkan akan membentuk sudut lurus (menunjuk sudut lurus ACD)*”.

P : “*Sudut apa?*”

1 : “*Sudut A, B, C*”.

Penyelesaian tugas 3).b dilakukan dengan membagi jajargenjang menjadi dua segitiga. Bagi subyek, jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0 , maka jumlah besar sudut-sudut jajargenjang sama dengan dua kali jumlah besar sudut-sudut segitiga atau 360^0 . Berdasarkan analisis data, disimpulkan bahwa:

- 1) Proses bukti tugas T1 dan T2 bagi subyek adalah mencari sudut-sudut bersisian yang masing-masing sama dengan ukuran sudut-sudut segitiga dan membentuk sudut lurus. Menurut rumusan ini, subyek telah mengabstraksi prosedur yang kompleks. Subyek tidak terikat lagi dengan langkah melukis segitiga lebih dulu, kemudian melukis dua ruas garis yang dipotong oleh ruas garis lain, dan seterusnya. Subyek fokus pada proses menemukan tiga sudut saling berpelurus. Karena dalam bentuk abstraksi yang sederhana, bahkan subyek dapat menggunakan proses bukti tersebut menyelesaikan tugas lain (T3).
- 2) Konsep bukti yang dipahami subyek terbagi dua, yaitu makna secara geometri dan aritmatika. Secara geometri bermakna gabungan tiga sudut-sudut suatu segitiga membentuk sudut lurus, dan secara aritmatika bermakna jumlah ukuran sudut-sudut segitiga sama dengan 180^0 .
- 3) Ketika subyek mengatakan “jumlah besar sudut-sudut segitiga adalah 180^0 ”, secara fleksibel subyek bermaksud menyatakan atau merujuk silih berganti proses atau konsep bukti teorema tersebut. Pada saat ini, teorema telah menjadi simbol yang menyatakan proses atau konsep bukti, dan subyek memikirkan proses dan konsep tersebut secara proseptual.

Berdasarkan hasil kerja dan wawancara terhadap S1 tersebut, disimpulkan bahwa subyek mengalami tahap berpikir lebih lanjut, yaitu tahap ketujuh: tahap prosep: (1) merumuskan proses bukti, (2) merumuskan konsep bukti, dan (3) memikirkan proses dan konsep bukti tersebut secara proseptual.

Data proses berpikir S2 tidak berbeda secara prinsipil dengan S1. Penyelesaian T1 oleh S2 terdiri dari 3 gambar, dimulai dengan mengidentifikasi data, mobilisasi dan organisasi data, merumuskan rencana dan mengaplikasikannya. Perbedaan terjadi pada tahap mobilisasi dan organisasi data. Setelah tahap identifikasi, S1 mengingat dan menerapkan pengetahuan relevan dengan masalah, dengan mengonstruksi 4 gambar (gambar 1.(i)-(iv), barulah subyek memahami konsepsi masalah, kemudian merumuskan rencana pembuktian. Sedangkan S2 sudah memahami konsepsi masalah sebelum mulai mengonstruksi gambar pertama. Tetapi tahap mobilisasi dan organisasi data proses berpikir S2 memenuhi karakteristik tahap berpikir S1. S2 mengingat pengetahuan hubungan sudut-sudut yang terbentuk oleh garis-garis berpotongan, mengingat bahwa sudut 180^0 adalah sudut lurus, mengadaptasikannya pada kondisi masalah, kemudian merumuskan konsepsi masalah bahwa masalah yang dihadapinya adalah mencari tiga sudut yang merupakan pelurus satu sama lain yang masing-masing besarnya sama dengan ukuran masing-masing sudut segitiga. Dengan demikian, perbedaan tersebut tidak prinsipil. S1 melakukan tahap mobilisasi dan organisasi data dengan tindakan langsung mengonstruksi gambar untuk memperjelas konsepsi masalah, sedangkan S2 melakukan tahap yang sama dengan proses berpikir dalam mental saja. Ada data lain yang menarik. Sama seperti S1, S2 belum memahami makna bukti setelah mengerjakan T1, tetapi telah memahami prosedur bukti yaitu “*pertama-tama gambar segitiga dulu (menunjuk gambar segitiga), menarik garis-garis (menunjuk perpanjangan sisi-sisi segitiga dalam gambar), lalu menentukan hubungan antar sudut-sudut, sampai ketemu sudut berpelurus*”.

Tugas kedua (T2) diselesaikan oleh S2 dalam 3 cara. Cara pertama berhasil pada gambar ketiga, penyelesaian kedua dalam satu gambar yang selesai dalam 43 detik, dan cara ketiga adalah penyelesaian yang paling sederhana. Berdasarkan data penelitian, subyek mengalami tahap proses berpikir lebih lanjut, yaitu tahap pembentukan makna dan evaluasi, dengan karakteristik yang sama dengan proses berpikir S1.

Tetapi berbeda dengan S1, S2 mencapai tahap prosep setelah menyelesaikan T3. Setelah menyelesaikan tugas, terungkap dalam wawancara hal-hal berikut.

P : “Oke. Sekarang coba tenang dulu ya. Kalau Aulia sekarang mendengar bahwa ‘jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga 180^0 ’, apa maksudnya?”

2 : “*Sudut A tambah B tambah C itu 180^0* ”.

P : “O, hasil pengukurannya ya?”

2 : “*Iya*”.

P : “Ada lagi?”

2 : “*Kalau digabung membentuk 180^0* ”.

.....

P : “Perhatikan sekali lagi gambarmu (menunjuk gambar 3). Pasti benarkah pernyataan pada soal?” (pernyataan dalam tugas 3)a-penulis).

2 : *Berpikir lama, kemudian berkata “Ya”*.

P : “Bagaimana bisa?”

2 : “*Segitiga sudut-sudutnya 180^0 . Ini sudut C (menunjuk sudut ACB). Sisanya ini kan membentuk sudut lurus (menunjuk sudut BCD), sama dengan sudut segitiganya*”.

P : “Apa maksudnya?”

2 : “*Jumlahnya 180^0* ”.



Gambar 3. Penyelesaian T3 bagian a oleh S2

Berdasarkan data penelitian, S2 memahami proses maupun konsep bukti, dan memikirkannya secara proseptual. Artinya ketika subyek menyatakan redaksi teorema “jumlah besar sudut-sudut suatu segitiga 180^0 ”, subyek sedang merujuk silih berganti proses atau konsep bukti, baik makna secara geometri maupun aritmatik. Perbedaannya dengan S1, S2 mencapai tahap prosep setelah menyelesaikan T3, sedangkan S1 telah mencapai tahap tersebut sebelum menyelesaikan T3, yang terungkap ketika peneliti melakukan wawancara tentang rencana penyelesaian T3 menurut subyek.

Temuan lain adalah sifat kemajuan berpikir. S1 melakukan beberapa kali mobilisasi dan organisasi data sebelum merumuskan rencana pembuktian, selama subyek mengonstruksi gambar 1(i)-(iv). Artinya setelah melakukan mobilisasi dan organisasi data berdasarkan gambar 1.(i), subyek tidak langsung ke tahap merumuskan rencana pembuktian. Mudah dilihat juga bahwa kedua subyek mencapai tahap berpikir evaluasi setelah mengonstruksi beberapa bukti berbeda, dan setiap kali mengonstruksi bukti, subyek melakukan kegiatan berpikir tahap pertama sampai keempat. Berdasarkan fakta-fakta ini, disimpulkan bahwa proses berpikir mengonstruksi bukti sebagai prosep tidak selalu maju terus secara linier dari tahap identifikasi, ke tahap mobilisasi dan organisasi data, sampai ke tahap prosep, tetapi kembali beberapa kali ke tahap-tahap sebelumnya.

C. PEMBAHASAN

Hasil penelitian yang dijelaskan pada bagian B, menunjukkan bahwa pengonstruksian bukti sebagai prosep dalam pembelajaran terdiri dari tujuh tahap. Tahap pertama sampai keenam hampir paralel dengan kemajuan berpikir untuk membuktikan menurut George Polya (Polya, 1973; 1981). Polya menjelaskan bahwa kemajuan berpikir untuk membuktikan dimulai dengan tahap identifikasi, mobilisasi dan organisasi, pembentukan dan perobahan konsepsi tentang masalah, aplikasi dan melihat kembali (*looking back*). Perumusan konsepsi masalah dipandang sebagai perumusan masalah dan langkah-langkah pembuktian. Sedangkan pembentukan makna

tidak dipandang sebagai suatu tahap proses berpikir, tetapi dipandang menyatu dengan kemajuan berpikir untuk membuktikan. Berbeda dengan pandangan Polya, menurut data penelitian, terutama terhadap S1, pembentukan konsepsi tentang masalah merupakan akumulasi mobilisasi dan organisasi data (gambar 1(i)-(iv)). Setelah mobilisasi dan organisasi data sejak gambar 1(i), barulah pada gambar 1.(iv) S1 menyadari bahwa masalah yang dihadapinya (T1) adalah mencari tiga sudut yang membentuk sudut lurus dan berukuran sama dengan masing-masing sudut segitiga. Berdasarkan konsepsi inilah S1 merumuskan rencana atau langkah-langkah pembuktian, dan mengaplikasikannya pada gambar 1(v).

Pembentukan makna juga menarik perhatian. Berbeda dengan pandangan Polya, hasil penelitian menunjukkan bahwa pembentukan makna merupakan satu tahap tersendiri. Walaupun S1 mampu mengonstruksi bukti berdasarkan tugas T1 dan menjelaskan maksudnya, tetapi dalam wawancara berdasarkan penyelesaian T1, S1 hanya mampu merumuskan prosedur penyusunan bukti, tetapi belum menyadari maknanya. Setelah peneliti mewawancarai S1 tentang langkah-langkah penyelesaian tugas T2 dan memintanya merumuskan makna dari bukti yang disusunnya, barulah subyek mampu merumuskan makna rangkaian bukti dan menyederhanakan prosedur-prosedur dari seluruh penyelesaian yang berhasil dia susun. Hal ini menunjukkan bahwa seseorang memerlukan waktu untuk memahami makna bukti yang ada. Rumusan hasil penelitian ini menjawab dengan tegas fenomena “mengapa ada yang mampu mengonstruksi bukti tetapi kurang atau tidak memahami makna bukti yang disusunnya”. Hasil penelitian ini memberi penjelasan dengan gamblang, “tahap pembentukan makna terabaikan”. Hasil penelitian ini juga mengamanatkan hal yang penting, bahwa pembentukan makna merupakan kegiatan yang perlu diberi waktu yang cukup, suatu tahap penting dalam pengonstruksian bukti dalam pembelajaran, agar siswa memahami bukti yang dikonstruksinya.

Hal lain yang menarik adalah tahap prosep. Polya tidak menjelaskan tahap ini. Tetapi Gray-Tall (1994), dan Tall (1992; 1995) merumuskan bahwa tahap prosep merupakan tahap proses berpikir yang memberi hasil belajar yang lebih sukses. Pendapat Gray-Tall sesuai dengan hasil penelitian. Pada tahap prosep, makna rangkaian bukti maupun langkah-langkah pengonstruksian bukti yang kompleks diabstraksi hingga bentuknya yang sederhana. Karena bentuk yang sederhana, seseorang yang mampu memikirkan prosep secara proseptual, mampu memikirkan secara fleksibel berpindah-pindah dalam suatu waktu dari proses ke konsep atau sebaliknya, seperti satu item pengetahuan. Karena bentuknya yang sederhana, prosep dapat diterapkan pada masalah-masalah baru, tidak hanya pada masalah rutin. Hal ini menjelaskan “mengapa ada yang mampu mengonstruksi bukti suatu teorema dan memahami maknanya, tetapi gagal menggunakannya menyelesaikan masalah-masalah matematika”. Hal ini terjadi karena mereka belum memahami bukti sebagai prosep, dan belum mampu memikirkannya secara proseptual. Untuk sukses, seseorang harus mencapai tahap prosep. Pada tahap prosep, seseorang memiliki pengetahuan prosedural yaitu proses bukti yang dapat dilakukan, dan pengetahuan konseptual yaitu konsep bukti yang dapat dipikirkan dan dimanipulasi pada proses berpikir lebih lanjut. Proses dan konsep tersebut dipahami dalam bentuknya yang sederhana, sehingga dapat dipikirkan sebagai satu item pengetahuan dalam suatu waktu, dan dapat digunakan sebagai satu langkah saja dalam proses berpikir matematika selanjutnya. Hal ini sesuai dengan pendapat Crowley, dkk pada matematika simbolik. Crowley, dkk menjelaskan, “*We believe that procepts are at the root of human ability to manipulate mathematical ideas in arithmetic, algebra and other theories involving manipulable symbols. They allow the biological brain to switch*

effortlessly from doing a process to thinking about a concept in a minimal way". (Crowley, dkk, 2001, 85). Hasil penelitian ini menjelaskan bahwa pemahaman tentang teorema sebaiknya dibangun melalui pemahaman buktinya. Teorema yang dipelajari akan menjadi unit berpikir matematik yang sukses jika buktinya dipandang sebagai prosep dan dapat dipikirkan secara proseptual.

D. SIMPULAN DAN SARAN

Bukti visual/symbolik yang dikonstruksi oleh siswa SMP dapat dipandang sebagai prosep. Proses berpikir siswa SMP mengonstruksi bukti visual/symbolik tersebut sebagai prosep dilakukan dalam tujuh tahap, yaitu: identifikasi, mobilisasi dan organisasi data, pembuatan rencana, aplikasi rencana, pembentukan makna, evaluasi, dan tahap prosep. Cara pandang dan hasil penelitian ini dapat dijadikan alternatif bahan pertimbangan dalam menyelenggarakan pembelajaran geometri, untuk Indonesia yang lebih baik.

E. DAFTAR PUSTAKA

- Crowley, L., DeMarois, P., Gray, E., Maselan Bin Ali, McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Tall, D., Thomas, M., Yusof, Y. 2001. "Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking". *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education 1*, 81–104.
- Davis, G., Gray, E., Simpson, A., Tall, D., Thomas, M. 2000. "What is the Object of the Encapsulation of a Process?" <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000a-objec-encap-jmb.pdf>, diakses 28 April 2011
- Erh-Tsung Chin. 2003. "Mathematical Proof as Formal Procept in Advanced Mathematical Thinking". http://online.terc.edu/PME2003/PDF/RR_chin.pdf, diakses 4 April 2009
- Fuys, D., Geddes, D., and Tischer, R. 1988. The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph no. 3. Reston : NCTM.*
- Gray, Eddie dan Tall, David. 1994. "Duality, Ambiguity and Flexibility : A Proceptual View of Simple Arithmetic". *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.
- Ndraha, Faaso, 2011. Proses Berpikir Mengonstruksi Bukti Geometri sebagai Prosep Berdasarkan Teori Gray-Tall dan Polya. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika 2011*, Surabaya: Universitas Negeri Surabaya.
- Polya, George. 1973. *How to Solve It A New Aspect of Mathematical Method*. 2th ed. New Jersey: Princeton University Press.
- Polya, George. 1981. *Mathematical Discovery*. New York: John Wiley & Sons. Inc.
- Soedjadi, R. 2000. Kiat-kiat Pendidikan Matematika di Indonesia. Jakarta: Dirjen Dikti Departemen Pendidikan Nasional.
- Sunardi, 2000. Tingkat Perkembangan Konsep Geometri Siswa Kelas III SLTP Negeri di Jember. Sriwulan Adji dan Janson Naiborhu (eds). *Prosiding Konferensi Nasional Matematika X, Institut Teknologi Bandung*, 6(5), hal. 635-639. Bandung: ITB
- Tall, David. 1992. "Construction of Objects through Definition and Proof". *Proceedings of PME Working Group on Advanced Mathematical Thinking, Durham*. <http://warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992m-constr-def-amt.pdf>, diakses 14 Juni 2010.

-
- Tall, David, 1995. *Cognitive Development, Representations, and Proof*. Makalah pada Konferensi Justifying and Proving in School Mathematics, Institute of Education, London, Desember 1995. <http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1995-repns-proof.pdf>, diakses 14 Juni 2010.
- Tall, David, 1997. "From School to University: The Effects of Learning Styles in the Transition from Elementary to Advanced Mathematical Thinking". In Thomas, M. O. J. (Ed.) *Proceedings of The Seventh Annual Australasian Bridging Network Mathematics Conference*, University of Auckland, 9-26.