ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

SEGITIGA SIKU-SIKU PADA TRIGONOMETRI RASIONAL DI LAPANGAN HIMPUNAN BILANGAN RIIL DAN LAPANGAN HIMPUNAN BILANGAN BULAT MODULO 17

Dwi Pungkas Haruadi[1], Idha Sihwaningrum[2], Ari Wardayani[3]
Program Studi Matematika Universitas Jenderal Soedirman
[1]pungkas_kazaivie@yahoo.co.id, [2]idhasihwaningrum@yahoo.com, [3]ariwardayani@yahoo.co.id

Abstrak

Pada makalah ini dibahas mengenai sifat dan contoh segitiga siku-siku pada trigonometri rasional, khususnya di lapangan himpunan bilangan riil dan lapangan himpunan bilangan bulat modulo 17. Sifat segitiga siku-siku yang diberikan didasarkan pada *quadrance* dan *spread* dari sisi-sisinya.

Kata kunci: trigonometri rasional, lapangan himpunan bilangan riil, lapangan himpunan bilangan bulat modulo 17, segitiga siku-siku, *quadrance*, *spread*.

1. PENDAHULUAN

Seperti halnya pada trigonometri klasik, pada trigonometri rasional juga dibahas mengenai garis dan segitiga. Hanya saja, bahasan pada trigonometri klasik hanya dilakukan pada lapangan himpunan bilangan riil **R**, sedangkan bahasan pada trigonometri rasional dilakukan pada berbagai lapangan himpunan bilangan seperti lapangan **R**, lapangan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$, dan lapangan F_p (yaitu lapangan himpunan bilangan bulat modulo p, dengan p bilangan prima).

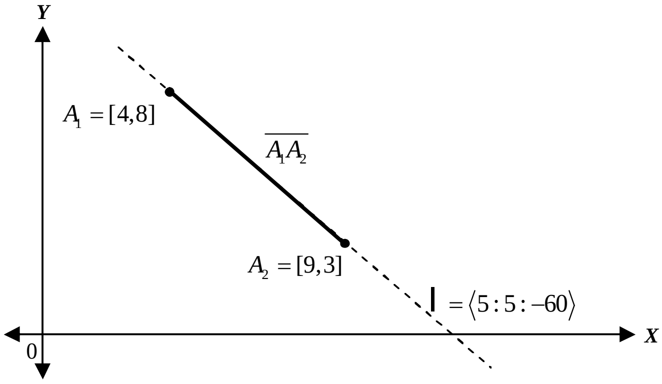
Wildberger (2005) membahas garis dan segitiga pada trigonometri rasional secara umum. Sementara itu, Sinaga (2013) membahas garis pada trigonometri rasional secara khusus, yaitu pada lapangan F_{17}. Karena segitiga dibentuk oleh garis-garis yang menghubungkan tiga titik yang tidak segaris, maka hasil-hasil mengenai garis pada lapangan F_{17} dapat digunakan untuk membahas segitiga dengan lapangan F_{17}. Khususnya, pada makalah ini akan dibahas mengenai segitiga siku-siku di lapangan F_{17}. Agar sifat segitiga siku-siku di lapangan tersebut dapat dipahami dengan lebih jelas, pada makalah ini diberikan pembanding, yaitu segitiga siku-siku di lapangan **R** (pada trigonometri rasional). Definisi dan teorema akan diambil dari Wildberger (2005), tetapi bukti teorema secara rinci dan contoh-contoh diberikan penulis.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

2. PEMBAHASAN

2.1 Titik, Garis, dan Segitiga

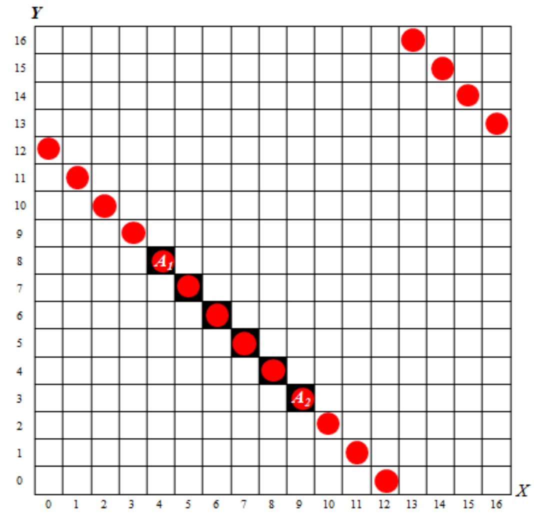
Pada trigonometri rasional, titik $A := [x, y]$ adalah pasangan bilangan terurut dengan bilangan x dan y disebut koordinat dari A. Garis $\ell = \langle a : b : c \rangle$ didefinisikan sebagai proporsi tiga di antara dua kurung siku dengan sifat a dan b tidak boleh keduanya bernilai nol. Kemudian, garis ℓ melalui titik A apabila $ax + by + c = 0$. Misal diberikan titik $A_1 := [x_1, y_1]$ dan $A_2 := [x_2, y_2]$. Sisi $\overline{A_1A_2}$ adalah garis dari titik A_1 ke titik A_2 dan garis sisi A_1A_2 adalah garis yang melalui titik A_1 dan A_2. Persamaan garis sisi $\ell := A_1A_2$ diberikan oleh $\langle y_1 - y_2 : x_2 - x_1 : x_1y_2 - x_2y_1 \rangle$. Sebagai contoh, untuk titik $A_1 = [4, 8]$ dan $A_2 = [9, 3]$, pada lapangan **R**, diperoleh garis sisi $\ell = \langle 5 : 5 : -60 \rangle$ (lihat Gambar 1).



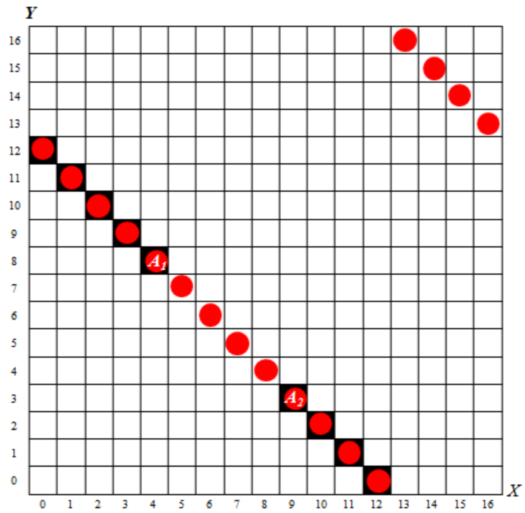
Gambar 1. Sisi $\overline{A_1A_2}$ di lapangan **R**

Sementara itu, pada lapangan F_{17}, untuk titik yang sama, diperoleh garis sisi $\ell = \langle 5 : 5 : 8 \rangle$. Pada lapangan F_{17}, sisi $\overline{A_1A_2}$ (lihat Gambar 2) tidak sama dengan sisi $\overline{A_2A_1}$ (lihat Gambar 3). Akan tetapi, garis sisi A_1A_2 sama dengan garis sisi A_2A_1. Pada Gambar 2 dan 3, sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_2A_1}$

direpresentasikan dengan kotak yang terdiri dari kotak hitam dan lingkaran merah.



Gambar 2. Sisi $\overline{A_1A_2}$ di lapangan F_{17}



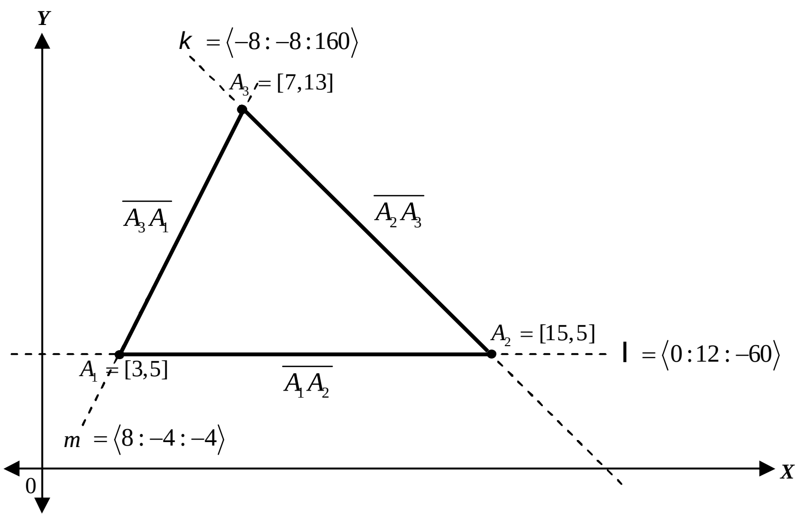
Gambar 3. Sisi $\overline{A_2A_1}$ di lapangan F_{17}

Titik $A_1 := [x_1, y_1]$, $A_2 := [x_2, y_2]$, dan $A_3 := [x_3, y_3]$ tidak segaris (*collinear points*) apabila $x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_2y_1 \neq 0$. Selanjutnya, tiga titik yang tidak segaris dapat membentuk
segitiga, seperti definisi berikut.

Definisi 2.1 (Segitiga, (Wildberger, 2005)). *Segitiga* $\overline{A_1A_2A_3}$ *adalah garis dari titik* A_1 *ke titik* A_2, *kemudian dari titik* A_2 *ke titik* A_3, *setelah itu dari titik* A_3 *kembali lagi ke titik* A_1, *dengan titik* A_1, A_2, *dan* A_3 *tidak segaris.*

Contoh 1

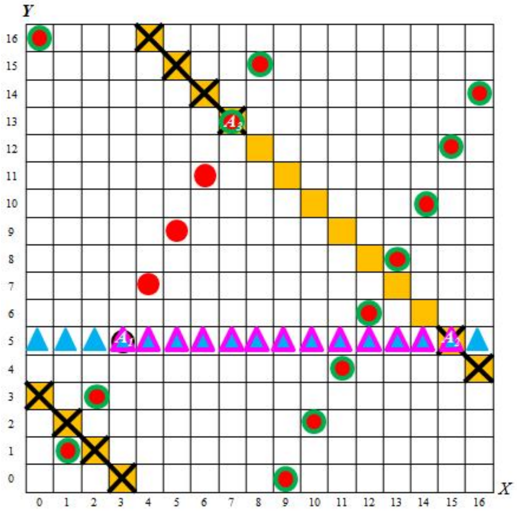
Diberikan titik $A_1 = [3,5]$, $A_2 = [15,5]$, dan $A_3 = [7,13]$. Pada lapangan **R**, titik A_1, A_2, dan A_3 tidak segaris. Dengan demikian, pada lapangan **R** dapat dibentuk segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ (lihat Gambar 4).



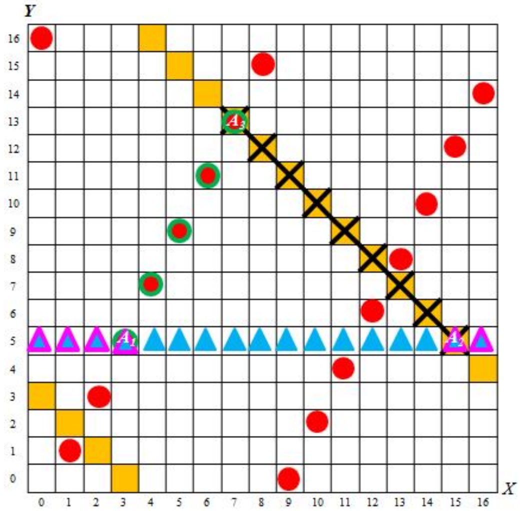
Gambar 4. Segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan **R**

Pada lapangan F_{17}, titik A_1, A_2, dan A_3 juga tidak segaris. Oleh karena itu, pada lapangan F_{17} dapat dibentuk segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ (lihat Gambar 5). Selain segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$, pada lapangan F_{17} juga dapat dibentuk segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$ (lihat Gambar 6).

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4



Gambar 5. Segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan F_{17}



Gambar 6. Segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$ di lapangan F_{17}

Pada lapangan **R**, selain segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ juga dapat dibentuk segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$. Akan tetapi, pada lapangan **R**, representasi segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$ sama dengan segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$. Jadi, pada lapangan **R**, segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ sama dengan segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$. Namun, hal tersebut berbeda pada segitiga di lapangan F_{17}. Pada lapangan F_{17}, segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ tidak sama dengan segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$.

2.2 Segitiga Siku-Siku

Salah satu jenis dari segitiga adalah segitiga siku-siku. Segitiga siku-siku merupakan bentuk khusus dari suatu segitiga karena mempunyai dua buah sisi yang saling tegak lurus, seperti definisi berikut.

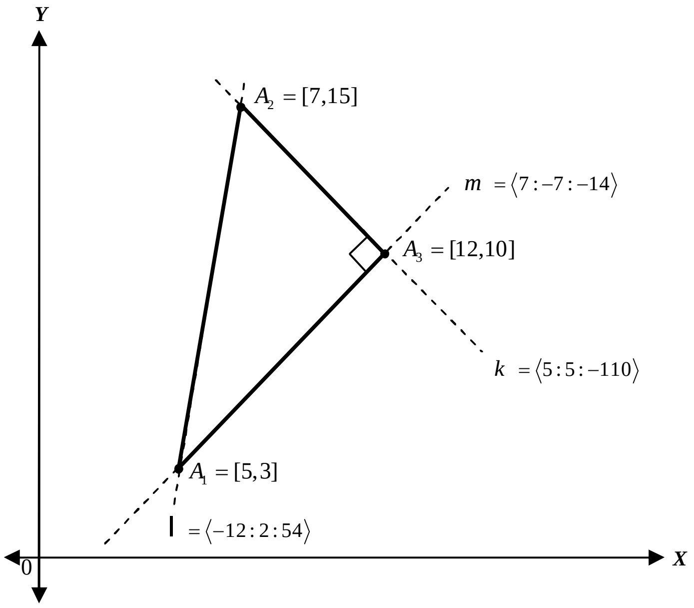
Definisi 2.2 (Segitiga siku-siku, (Wildberger, 2005)). *Segitiga* $\overline{A_1A_2A_3}$ *merupakan segitiga siku-siku apabila segitiga tersebut mempunyai dua buah sisi yang saling tegak lurus.*

Misal diberikan sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_3A_4}$. Sisi $\overline{A_1A_2}$ tegak lurus sisi $\overline{A_3A_4}$ apabila garis sisi $l := A_1A_2$ tegak lurus garis sisi $k := A_3A_4$. Sementara itu, garis $l := \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ tegak lurus garis $k := \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$ apabila $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$. Berikut diberikan contoh segitiga siku-siku di lapangan **R** dan lapangan F_{17}.

Contoh 2

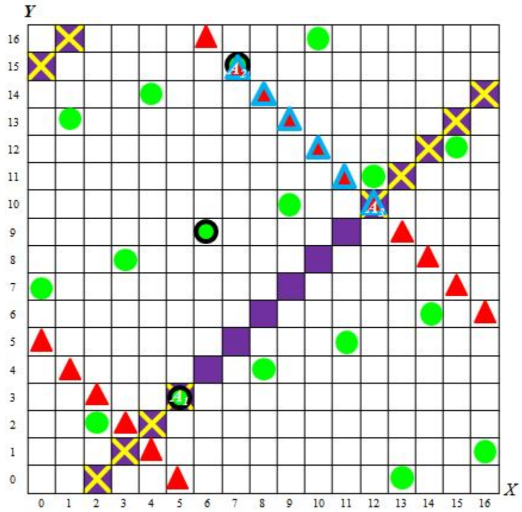
Diberikan titik $A_1 = [5,3]$, $A_2 = [7,15]$, dan $A_3 = [12,10]$. Pada lapangan **R**, titik A_1, A_2, dan A_3 tidak segaris sehingga dapat dibentuk segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ (lihat Gambar 7). Pada segitiga tersebut, garis sisi A_1A_2 adalah garis $l = \langle -12:2:54 \rangle$, garis sisi A_2A_3 adalah garis $k = \langle 5:5:-110 \rangle$, sedangkan garis sisi A_3A_1 adalah garis $m = \langle 7:-7:-14 \rangle$. Garis m tegak lurus garis k karena

$(7)(5)+(-7)(5)=0$. Dengan demikian, sisi $\overline{A_3A_1}$ tegak lurus sisi $\overline{A_2A_3}$. Jadi, segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ merupakan segitiga siku-siku di lapangan $\mathbf{R}$.



Gambar 7. Segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan $\mathbf{R}$

Selanjutnya, titik A_1, A_1, dan A_3 juga tidak segaris pada lapangan F_{17}. Jadi, pada lapangan F_{17} juga dapat dibentuk segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ (lihat Gambar 8). Pada segitiga tersebut, garis sisi A_1A_2 adalah garis $l=\langle 5:2:3\rangle$, garis sisi A_2A_3 adalah garis $k=\langle 5:5:9\rangle$, sedangkan garis sisi A_3A_1 adalah garis $m=\langle 7:10:3\rangle$. Garis *m* tegak lurus garis *k* karena $(7\otimes_{17}5)\oplus_{17}(10\otimes_{17}5)=0$. Dengan demikian, sisi $\overline{A_3A_1}$ tegak lurus sisi $\overline{A_2A_3}$. Jadi, segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ juga merupakan segitiga siku-siku di lapangan F_{17}.



Gambar 8. Segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan F_{17}

Salah satu sifat segitiga siku-siku adalah segitiga siku-siku tersebut memenuhi Teorema Phytagoras. Teorema ini berhubungan dengan *quadrance* (kuadrat jarak) dari sisi-sisi pada segitiga siku-siku. *Quadrance* merupakan ukuran bentangan antara dua buah titik pada trigonometri

rasional. Misal diberikan titik $A_1 := [x_1, y_1]$ dan $A_2 := [x_2, y_2]$, maka *quadrance* dari sisi $\overline{A_1A_2}$ adalah $Q\ (A_1, A_2) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Teorema 2.3 (Teorema Phytagoras, (Wildberger, 2005)). *Misalkan pada segitiga* $\overline{A_1A_2A_3}$, *quadrance dari sisi* $\overline{A_2A_3}$ *adalah* $Q_1 := Q\ (A_2, A_3)$, *quadrance dari sisi* $\overline{A_3A_1}$ *adalah* $Q_2 := Q\ (A_3, A_1)$, *dan quadrance dari sisi* $\overline{A_1A_2}$ *adalah* $Q_3 := Q\ (A_1, A_2)$. *Apabila sisi* $\overline{A_3A_1}$ *tegak lurus sisi* $\overline{A_2A_3}$, *maka* $Q_1 + Q_2 = Q_3$.

Bukti. Misalkan titik $A_1 := [x_1, y_1]$, $A_2 := [x_2, y_2]$, dan $A_3 := [x_3, y_3]$. Garis sisi A_3A_1 adalah garis $\langle y_3 - y_1 : x_1 - x_3 : x_3y_1 - x_1y_3 \rangle$, sedangkan garis sisi A_2A_3 adalah garis $\langle y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2 \rangle$. Jika sisi $\overline{A_3A_1}$ tegak lurus sisi $\overline{A_2A_3}$, maka garis $\langle y_3 - y_1 : x_1 - x_3 : x_3y_1 - x_1y_3 \rangle$ tegak lurus garis $\langle y_2 - y_3 : x_3 - x_2 : x_2y_3 - x_3y_2 \rangle$. Akibatnya, $(y_3 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_3)(x_3 - x_2) = 0$. Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
Q_1 + Q_2 - Q_3 &= \left((x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2\right) + \left((x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2\right) - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right) \\
&= x_3^2 - 2x_3x_2 + x_2^2 + y_3^2 - 2y_3y_2 + y_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 - x_2^2 + 2x_2x_1 - x_1^2 - y_2^2 + 2y_2y_1 - y_1^2 \\
&= 2x_3^2 - 2x_3x_2 + 2y_3^2 - 2y_3y_2 - 2x_1x_3 - 2y_1y_3 + 2x_2x_1 + 2y_2y_1 \\
&= 2\left(x_3^2 - x_3x_2 + y_3^2 - y_3y_2 - x_1x_3 - y_1y_3 + x_2x_1 + y_2y_1\right) \\
&= 2\left(-y_3y_2 + y_3^2 + y_2y_1 - y_1y_3 - x_1x_3 + x_2x_1 + x_3^2 - x_3x_2\right) \\
&= 2\left(-\left(y_3y_2 - y_3^2 - y_1y_2 + y_1y_3 + x_1x_3 - x_1x_2 - x_3^2 + x_3x_2\right)\right) \\
&= 2\left(-\left((y_3 - y_1)(y_2 - y_3) + (x_1 - x_3)(x_3 - x_2)\right)\right) \\
&= 2(0) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Dengan demikian, terbukti bahwa $Q_1 + Q_2 = Q_3$. ■

Bukti Teorema 2.3 secara garis besar sudah diberikan oleh Wildberger (2005). Pada makalah ini, penulis memberikan bukti Teorema 2.3 dengan lebih rinci.

Contoh 3

Pada Contoh 2, segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ dibentuk oleh titik $A_1 = [5,3]$, $A_2 = [7,15]$, dan $A_3 = [12,10]$. Pada lapangan $\mathbf{R}$, *quadrance* dari sisi $\overline{A_2A_3}$ adalah

$$Q_1 := Q\ (A_2, A_3) = (12-7)^2 + (10-15)^2 = 50,$$

quadrance dari sisi $\overline{A_3A_1}$ adalah

$$Q_2 := Q\ (A_3, A_1) = (5-12)^2 + (3-10)^2 = 98,$$

dan *quadrance* dari sisi $\overline{A_1A_2}$ adalah

$$Q_3 := Q\ (A_1, A_2) = (7-5)^2 + (15-3)^2 = 148.$$

Dengan demikian, $Q_1 + Q_2 = 50 + 98 = 148 = Q_3$. Jadi, Teorema Phytagoras berlaku pada segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan $\mathbf{R}$. Selanjutnya, untuk segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan F_{17}, *quadrance* dari sisi $\overline{A_2A_3}$ adalah

$$Q_1 := Q\ (A_2, A_3) = (12 \ominus_{17} 7)^2 \oplus_{17} (10 \ominus_{17} 15)^2 = 16,$$

quadrance dari sisi $\overline{A_3A_1}$ adalah

$$Q_2 := Q\ (A_3, A_1) = (5 \ominus_{17} 12)^2 \oplus_{17} (3 \ominus_{17} 10)^2 = 13,$$

dan *quadrance* dari sisi $\overline{A_1A_2}$ adalah

$$Q_3 := Q\ (A_1, A_2) = (7 \ominus_{17} 5)^2 \oplus_{17} (15 \ominus_{17} 3)^2 = 12.$$

Dengan demikian, $Q_1 \oplus_{17} Q_2 = 16 \oplus_{17} 13 = 12 = Q_3$. Jadi, Teorema Phytagoras berlaku pada segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan F_{17}.

Kemudian, ukuran bentangan antara dua buah garis pada trigonometri rasional dinyatakan dengan menggunakan *spread*. Misal diberikan sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_3A_4}$. Jika garis sisi A_1A_2 adalah garis $\mathrm{l} := \langle a_1 : b_1 : c_1 \rangle$ dan garis sisi A_3A_4 adalah garis $k := \langle a_2 : b_2 : c_2 \rangle$, maka *spread* dari sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_3A_4}$ adalah $s(\mathrm{l}, k) = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}$. Apabila sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_3A_4}$ tegak lurus, maka $s(\mathrm{l}, k) = 1$. Oleh karena segitiga siku-siku mempunyai dua buah sisi yang tegak lurus, maka berdasarkan *spread* diperoleh sifat berikut.

Akibat 2.4. *Salah satu spread pada segitiga siku-siku bernilai satu.*

Contoh 4

Pada Contoh 2, segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ dibentuk oleh sisi $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, dan $\overline{A_3A_1}$. Pada lapangan $\mathbf{R}$, garis sisi A_1A_2 adalah garis $\mathrm{l} = \langle -12 : 2 : 54 \rangle$, garis sisi A_2A_3 adalah garis $k = \langle 5 : 5 : -110 \rangle$, sedangkan garis sisi A_3A_1 adalah garis $m = \langle 7 : -7 : -14 \rangle$. Dengan demikian, *spread* dari sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_2A_3}$ adalah $s(\mathrm{l}, k) = {}^{49}\!/_{74}$, *spread* dari sisi $\overline{A_2A_3}$ dan sisi $\overline{A_3A_1}$

adalah $s(k,m)=1$, dan *spread* dari sisi $\overline{A_3A_1}$ dan sisi $\overline{A_1A_2}$ adalah $s(m,l) = 1.225/3.636$. Jadi, benar bahwa salah satu *spraed* pada segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan **R** bernilai 1. Selanjutnya, untuk segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan F_{17}, garis sisi A_1A_2 adalah garis $l = \langle 5:2:3 \rangle$, garis sisi A_2A_3 adalah garis $k = \langle 5:5:9 \rangle$, sedangkan garis sisi A_3A_1 adalah garis $m = \langle 7:10:3 \rangle$. Dengan demikian, *spread* dari sisi $\overline{A_1A_2}$ dan sisi $\overline{A_2A_3}$ adalah $s(l,k)=11$, *spread* dari sisi $\overline{A_2A_3}$ dan sisi $\overline{A_3A_1}$ adalah $s(k,m)=1$, dan *spread* dari sisi $\overline{A_3A_1}$ dan sisi $\overline{A_1A_2}$ adalah $s(m, l) = 2$. Jadi, benar bahwa salah satu *spraed* pada segitiga siku-siku $\overline{A_1A_2A_3}$ di lapangan F_{17} bernilai 1.

3. KESIMPULAN

Pada trigonometri rasional, segitiga dibentuk dari tiga titik tidak segaris yang dihubungkan satu

sama lain dengan suatu garis. Pada lapangan **R**, segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ sama dengan segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$. Namun, pada lapangan F_{17}, segitiga $\overline{A_1A_2A_3}$ tidak sama dengan segitiga $\overline{A_3A_2A_1}$. Segitiga yang

mempunyai dua buah sisi yang saling tegak lurus dinamakan segitiga siku-siku. Segitiga siku-siku di lapangan **R** dan lapangan F_{17} memenuhi teorema Phytagoras. Teorema ini menyatakan bahwa jumlah *quadrance* dari sisi-sisi segitiga siku-siku yang saling tegak lurus sama dengan *quadrance* dari sisi yang lainnya. Selain itu, segitiga siku-siku di lapangan **R** dan lapangan F_{17} juga mempunyai sifat bahwa salah satu *spread* pada segitiga siku-siku tersebut bernilai satu.

4. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Idha Sihwaningrum yang telah meluangkan waktunya untuk proses penulisan makalah ini. Penelitian ini dilakukan dengan dana penelitian fundamental 2013 dengan nomor kontrak: 2535.15/UN23.10/PN/2013.

5. DAFTAR PUSTAKA

Certicom., 2000, *Standards for Efficient Cryptography 1: Elliptic Curve Cryptography*, diunduh dari: http://www.secg.org/collateral/sec1_final.pdf [Diakses pada 15 Juni 2013].

Goodman, F.M., 2011, *Algebra Abstract and Concrete*, Amerika Serikat: Prentice-Hall.

Grillet, P.A., 2007, *Abstract Algebra*, 2nd Edition, New York: Springer Science and Business Media, LLC.

Judson, T.W., 2011, *Abstract Algebra Theory and Applications*, Amerika Serikat: Virginia Commonwealth University Mathematics.

Sinaga, D.H., 2013, *Garis di Lapangan Himpunan Bilangan Bulat Modulo* 17, Skripsi, Purwokerto: Universitas Jenderal Soedirman.

Sukirman., 2005, *Pengantar Teori Bilangan*, Yogyakarta: Manggar Kreator.

Wildberger, N.J., 2005, *Divine Proportions: Rational Trigonometry to Universal Geometry*, Australia: Wild Egg Pty Ltd.