ISBN : 978-979-16353-9-4

A-7

KEBEBASAN LINEAR DALAM ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Siswanto[1], Aditya NR[2], Supriyadi W[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika FMIPA UNS
[1]sis.mipauns@yahoo.co.id, [2]aditya.nurrochma@yahoo.com, [3]supriyadi_w@yahoo.co.id

Abstrak

Dalam penelitian ini dibahas pengertian kombinasi linear, rentang linear, dan pengertian kebebasan linear. Ada 3 macam kekebasan linear dalam aljabar max-plus interval, yaitu bebas linear secara lemah, bebas linear pada Gondran-Minoux, dan bebas linear secara *tropical*. Dibahas pula perbandingan ketiga jenis kebebasan linear tersebut.

Kata kunci : Aljabar max-plus interval, lemah, Gondran Minoux, *tropical*.

A. PENDAHULUAN

Aljabar max-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$ dilengkapi operasi maksimum $\oplus$ dan plus $\otimes$ dengan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Elemen identitas terhadap maksimum dan plus berturut-turut adalah $-\infty$ dan 0. Struktur dari aljabar max-plus adalah *semifiled*. Aljabar max-plus telah digunakan untuk memodelkan dan menganalisis secara aljabar masalah perencanaan, komunikasi, produksi, sistem antrian dengan kapasitas berhingga, komputasi parallel, dan lalu lintas (Baccelli, *et. al*, 2001). Hal inilah yang memotivasi penelitian tentang analogi konsep-konsep pada aljabar atas lapangan (*field*) himpunan bilangan real antara lain mengenai kebebasan linear, pengertian basis, sistem persamaan linear, nilai eigen dan vektor eigen, serta mengenai rank suatu matiks. (Akian, *et al*, 2008; Akian, Bapat, 2000; Cunninghame-Green, Butkovic, 2004; Farlow, 2009; Tam, 2010).

Pembahasan tentang kebebasan linear pada aljabar max-plus berawal dan hasil kerja Cunninghame-Greene, 1979; yang mendefinisikan bahwa sebuah himpunan dikatakan bebas linear secara lemah jika tidak memuat suatu vektor yang merupakan kombinasi linear dari vektor lain pada himpunan tersebut. Pernyataan ini kemudian dikembangkan oleh Wagneur, 1991; yang mengatakan bahwa sub ruang linear dari $\mathbb{R}^n_{max}$ yang dibangun secara berhingga memuat sebuah himpunan pembangun bebas linear secara lemah, Hasil ini kemudian dilanjutkan oleh Cunninghame-Green, Butkovi'c, 2004; Gaubert, Katz, 2007; Butkovi'c, *et al*, 2007. Penelitian ini kemudian menghasilkan sebuah teori *extreme rays* pada ruang linear max-plus (suatu *ray* adalah himpunan hasil perkalian skalar dari suatu vektor tunggal). Teori ini menunjukkan bahwa kebebasan linear secara lemah yang membangun suatu himpunan dapat diidentifikasikan sebagai suatu himpunan dari *extreme rays*. Gondran dan Minoux, 1984, mendefinisikan bentuk yang berbeda tentang kebebasan linear namun lebih mendekati pengertian kebebasan linear secara umum. Suatu himpunan berhingga disebut bergantung linier pada Gondran-Minoux jika himpunan tersebut dapat dipartisi menjadi dua himpunan yang membangun ruang linier dengan interseksi yang bukan merupakan vektor nol.

Pada penelitian yang lain (Izhakian, 2008), diperkenalkan pengertian berbeda tentang kebebasan linear. Suatu himpunan vektor dikatakan bergantung linear secara *tropical* jika dapat dibuat kombinasi linear dari vektor-vektor pada himpunan tersebut sedemikian sehingga nilai maksimum dari tiap-tiap baris dapat dicapai paling sedikit dua kali..Akian, *et al*, 2008 telah menjelaskan perbandingan dari masing-masing pengertian tentang kebebasan linear pada aljabar max-plus yaitu bebas linear secara lemah, bebas linear pada Gondran-Minoux, dan bebas linear secara *tropical*.

Untuk menyelesaikan masalah jaringan dengan waktu aktifitas bilangan kabur seperti penjadwalan kabur dan sistem antrian kabur, aljabar max-plus telah digeneralisasi menjadi aljabar max-plus interval (Rudhito, 2011). Aljabar max-plus interval yaitu $I(\mathbb{R})_{max}$ dilengkapi dengan operasi $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$. Telah dibicarakan juga tentang matriks atas aljabar max-plus interval.

Berdasarkan uraian di atas, muncul permasalahan tentang bagaimana konsep kebebasan linear dalam aljabar max-plus interval. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan dibahas mengenai kebebasan linear dalam aljabar max-plus interval..

Konsep tentang semimodul, kombinasi linear, rentang linear, bebas linear dan bergantung linear diambil dari Akian, *et al*, 2008; Cunninghame-Green, 1979; Gondran M dan Minoux M, 1984; dan Izhakian, 2008.

Definisi 1.1. Semimodul M terhadap semiring S adalah abelian monoid terhadap penjumlahan yang memiliki elemen netral 0 dan dilengkapi dengan perkalian skalar yang memenuhi syarat :

1. $(s.r).m = s.(r.m)$
2. $(s + r).m = s.m + r.m$
3. $s.(m + n) = s.m + s.n$
4. $1.m = m$
5. $s.0 = 0 = 0.m$

untuk semua m,n $\in M$*, dan s, r* $\in S$.

Dengan memperhatikan definisi 1.4, $\mathbb{R}_{max}^{m\times n}$ merupakan semimodul atas $\mathbb{R}_{max}$. Khususnya $\mathbb{R}_{max}^{n} = \{[x_1, x_2, \dots, x_n]^T | x_i \in \mathbb{R}_{max}, i = 1, 2, \dots, n\}$ merupakan semimodul atas $\mathbb{R}_{max}$.

Definisi 1.2. Suatu m elemen dari M semimodul pada semiring S dikatakan kombinasi linier elemen-elemen dari subset $P \subseteq M$ jika terdapat $k \geq 0$, $s_1, s_2, \dots, s_k \in S$, $m_1, m_2, \dots, m_k \in P$,

sedemikian sehingga $m = s_1.m_1 + s_2.m_2 + \cdots + s_k.m_k = \sum_{i=1}^{k} s_i.m_i$.

Dengan merujuk pada definisi 1.2 didapat bahwa semua kombinasi linear adalah berhingga.

Definisi 1.3. Misalkan $P \subseteq M$, M semimodul pada semiring S. Rentang linear P ditulis $\langle P\rangle$ adalah himpunan semua kombinasi linear dari elemen-elemen P dengan koefisien dari S. P dikatakan membangun M jika $M = \langle P\rangle$, sedang P dikatakan memuat subset $V \subseteq M$ jika $V \subseteq \langle P\rangle$.

Berbeda dengan ruang vektor atas suatu lapangan (*field)*, terdapat beberapa cara untuk mendefinisikan kebebasan linear pada aljabar max-plus. Hal ini dikarenakan bahwa penjumlahan (maksimum) dari vektor-vektor yang tidak nol yaitu vektor yang setiap elemennya tidak sama dengan ε tidak mungkin sama dengan vektor nol. Oleh karena itu, definisi bergantung linear atas lapangan himpunan bilangan real tidak dapat digunakan.

Definisi 1.4. *Himpunan* $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ *elemen dari semimodul M pada semiring* $\mathbb{R}_{max}$ *dikatakan bergantung linear pada Gondran-Minoux jika terdapat dua subset* $I, J \subseteq K$, $K = \{1, 2, \dots, k\}$, $I \cap J = \emptyset$ *dan* $I \cup J = K$ *dan skalar* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in S$ *yang tidak semuanya bernilai 0, sedemikian sehingga* $\oplus_{i \in I} \alpha_i \otimes m_i = \oplus_{j \in J} \alpha_j \otimes m_j$.

Definisi 1.5. *Himpunan* $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ *elemen dari semimodul M pada semiring* $\mathbb{R}_{max}$ *dikatakan bebas linear pada Gondran-Minoux jika untuk setiap dua subset* $I, J \subseteq K$, $K = \{1, 2, \dots, k\}$, $I \cap J = \emptyset$ *dan* $I \cup J = K$ *dan skalar* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in S$ *yang tidak semuanya bernilai 0, sedemikian sehingga* $\oplus_{i \in I} \alpha_i \otimes m_i \neq \oplus_{j \in J} \alpha_j \otimes m_j$.

Definisi 1.6. *Himpunan* $P \subset M$, *dengan M semimodul dari semiring* $\mathbb{R}_{max}$ *dikatakan bergantung linear secara lemah jika terdapat elemen pada P yang merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada P.*

Definisi 1.7. *Himpunan* $P \subset M$, *dengan M semimodul dari semiring* $\mathbb{R}_{max}$ *dikatakan bebas linear secara lemah jika tidak terdapat elemen pada P yang merupakan kombinasi linear dari elemen- elemen lainnya pada P.*

Definisi 1.8. *Himpunan* $\{m_1, \dots, m_k\}$ *dan* $m_i = [m_i^1, \dots, m_i^n]^t$, $i = 1, 2, \dots, k$ *yang merupakan elemen dari* $\mathbb{R}_{max}^n$ *dikatakan bergantung linear secara tropical, jika terdapat 2 subset* I_l, $J_l \subseteq K = \{1, \dots, k\}$, $I_l \cup J_l = K$ *dan* $I_l \cap J_l = \emptyset$ *dengan* $l = 1, 2, \dots, n$ *dan* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_{max}$ *yang tidak semuanya bernilai 0, sedemikian sehingga* $\oplus_{i \in I_l} \alpha_i \otimes m_i^l = \oplus_{j \in J_l} \alpha_j \otimes m_j^l$, *untuk semua* $l, 1 \leq l \leq n$.

Definisi 1.9. *Himpunan* $\{m_1, \dots, m_k\}$ *dan* $m_i = [m_i^1, \dots, m_i^n]^t$, $i = 1, 2, \dots, k$ *yang merupakan elemen dari* $\mathbb{R}_{max}^n$ *dikatakan bebas linear secara tropical, jika untuk setiap 2 subset* I_l, $J_l \subseteq K = \{1, \dots, k\}$, $I_l \cup J_l = K$ *dan* $I_l \cap J_l = \emptyset$ *dengan* $l = 1, 2, \dots, n$ *dan* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_{max}$ *yang tidak semuanya bernilai 0, sedemikian sehingga* $\oplus_{i \in I_l} \alpha_i \otimes m_i^l \neq \oplus_{j \in J_l} \alpha_j \otimes m_j^l$, *untuk semua* $l, 1 \leq l \leq n$.

Teorema 1.1. *Himpunan vektor yang bebas linear pada Gondran-Minoux juga bebas linear secara lemah.*

Teorema 1.2. *Himpunan vektor yang bebas linear secara tropical juga bebas linear pada Gondran-Minoux linear.*

Teorema 1.3. *Himpunan vektor yang bebas linear secara tropical juga bebas linear secara lemah.*

B. PEMBAHASAN

Dengan memperhatikan definisi kombinasi linear pada aljabar max-plus diperoleh definisi dari kombinasi linear pada aljabar max-plus interval $I(\mathbb{R})_{max}$ dan teorema sebagai berikut,

Definisi 2.1. *Misalkan* $\mathrm{A} \in I(\mathbb{R})_{max}^n$, A *dikatakan sebagai kombinasi linear dari elemen-elemen himpunan* $\mathrm{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$ *jika terdapat* $k \geq 0$, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_k \in \mathrm{P}$ dan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *sedemikian sehingga* $\mathrm{A} = \overline{\oplus}_{i=1}^{k} (\alpha_i \overline{\otimes} \mathrm{A}_i)$.

Dengan memperhatikan Definisi 2.1, misalkan $\underline{\mathrm{P}}$ dan $\overline{\mathrm{P}}$ masing-masing merupakan himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan vektor-vektor interval P, $\mathrm{A} \approx [\underline{\mathrm{A}}, \overline{\mathrm{A}}]$, $\mathrm{A}_i \approx [\underline{\mathrm{A}}_i, \overline{\mathrm{A}}_i]$ dan $\alpha_i \approx [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$ diperoleh teorema :

Teorema 2.1. *Misalkan* $\mathrm{A} \in I(\mathbb{R})_{max}^n$, A *jika kombinasi linear dari elemen-elemen himpunan* $\mathrm{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$ *maka* $\underline{\mathrm{A}} = \oplus_{i=1}^{k} (\underline{\alpha}_i \otimes \underline{\mathrm{A}}_i)$ dan $\overline{\mathrm{A}} = \oplus_{i=1}^{k} (\overline{\alpha}_i \otimes \overline{\mathrm{A}}_i)$, *dengan kata lain vektor*

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

batas bawah yaitu $\underline{A}$ *merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor batas bawah elemen-elemen* $\underline{P}$ *dan vektor-vektor atas yaitu* $\overline{A}$ *merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor batas atas elemen-elemen* $\overline{P}$.

Bukti : Misalkan $A \in I(\mathbb{R})^n_{max}$ sebagai kombinasi linear elemen-elemen $P \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$ berarti terdapat $k \geq 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_k \in P$ dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ sehingga $A = \overline{\bigoplus}_{i=1}^{k} \left(\alpha_i \,\overline{\otimes}\, A_i\right)$.

Misalkan $A = \begin{pmatrix} [\underline{a_1}, \overline{a_1}] \\ [\underline{a_2}, \overline{a_2}] \\ \vdots \\ [\underline{a_n}, \overline{a_n}] \end{pmatrix}$, $A_i = \begin{pmatrix} [\underline{a_{i1}}, \overline{a_{i1}}] \\ [\underline{a_{i2}}, \overline{a_{i2}}] \\ \vdots \\ [\underline{a_{in}}, \overline{a_{in}}] \end{pmatrix}$, $\alpha_i = \left[\underline{\alpha_i}, \overline{\alpha_i}\right]$. Berarti, $A = \overline{\bigoplus}_{i=1}^{k} \left(\alpha_i \,\overline{\otimes}\, A_i\right) \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} [\underline{a_1}, \overline{a_1}] \\ [\underline{a_2}, \overline{a_2}] \\ \vdots \\ [\underline{a_n}, \overline{a_n}] \end{pmatrix} = \left[\underline{\alpha_1}, \overline{\alpha_1}\right] \overline{\otimes} \begin{pmatrix} [\underline{a_{11}}, \overline{a_{11}}] \\ [\underline{a_{12}}, \overline{a_{12}}] \\ \vdots \\ [\underline{a_{1n}}, \overline{a_{1n}}] \end{pmatrix} \overline{\oplus} \left[\underline{\alpha_2}, \overline{\alpha_2}\right] \overline{\otimes} \begin{pmatrix} [\underline{a_{21}}, \overline{a_{21}}] \\ [\underline{a_{22}}, \overline{a_{22}}] \\ \vdots \\ [\underline{a_{2n}}, \overline{a_{2n}}] \end{pmatrix} \overline{\oplus} \ldots$$

$$\ldots \overline{\oplus} \left[\underline{\alpha_k}, \overline{\alpha_k}\right] \overline{\otimes} \begin{pmatrix} [\underline{a_{k1}}, \overline{a_{k1}}] \\ [\underline{a_{k2}}, \overline{a_{k2}}] \\ \vdots \\ [\underline{a_{kn}}, \overline{a_{kn}}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [\underline{\alpha_1} \otimes \underline{a_{11}}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{a_{11}}] \\ [\underline{\alpha_1} \otimes \underline{a_{12}}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{a_{12}}] \\ \vdots \\ [\underline{\alpha_1} \otimes \underline{a_{1n}}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{a_{1n}}] \end{pmatrix} \overline{\oplus} \begin{pmatrix} [\underline{\alpha_2} \otimes \underline{a_{21}}, \overline{\alpha_2} \otimes \overline{a_{21}}] \\ [\underline{\alpha_2} \otimes \underline{a_{22}}, \overline{\alpha_2} \otimes \overline{a_{22}}] \\ \vdots \\ [\underline{\alpha_2} \otimes \underline{a_{2n}}, \overline{\alpha_2} \otimes \overline{a_{2n}}] \end{pmatrix} \overline{\oplus} \ldots \overline{\oplus} \begin{pmatrix} [\underline{\alpha_k} \otimes \underline{a_{k1}}, \overline{\alpha_k} \otimes \overline{a_{k1}}] \\ [\underline{\alpha_k} \otimes \underline{a_{k2}}, \overline{\alpha_k} \otimes \overline{a_{k2}}] \\ \vdots \\ [\underline{\alpha_k} \otimes \underline{a_{kn}}, \overline{\alpha_k} \otimes \overline{a_{kn}}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} [\underline{\alpha_1} \otimes \underline{a_{11}} \oplus \ldots \oplus \underline{\alpha_k} \otimes \underline{a_{k1}}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{a_{11}} \oplus \ldots \oplus \overline{\alpha_k} \otimes \overline{a_{k1}}] \\ [\underline{\alpha_1} \otimes \underline{a_{12}} \oplus \ldots \oplus \underline{\alpha_k} \otimes \underline{a_{k2}}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{a_{12}} \oplus \ldots \oplus \overline{\alpha_k} \otimes \overline{a_{k2}}] \\ \vdots \\ [\underline{\alpha_1} \otimes \underline{a_{1n}} \oplus \ldots \oplus \underline{\alpha_k} \otimes \underline{a_{kn}}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{a_{1n}} \oplus \ldots \oplus \overline{\alpha_k} \otimes \overline{a_{kn}}] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\bigoplus_{i=1}^{k} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{a_{k1}}, \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{a_{k1}}\right] \\ \left[\bigoplus_{i=1}^{k} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{a_{k2}}, \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{a_{k2}}\right] \\ \vdots \\ \left[\bigoplus_{i=1}^{k} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{a_{kn}}, \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{a_{kn}}\right] \end{pmatrix} \approx \left[\begin{pmatrix} \bigoplus_{i=1}^{k} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{a_{k1}} \\ \bigoplus_{i=1}^{k} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{a_{k2}} \\ \vdots \\ \bigoplus_{i=1}^{k} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{a_{kn}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{a_{k1}} \\ \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{a_{k2}} \\ \vdots \\ \bigoplus_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{a_{kn}} \end{pmatrix}\right].$$

Di lain pihak, $\begin{pmatrix} [\underline{a_1}, \overline{a_1}] \\ [\underline{a_2}, \overline{a_2}] \\ \vdots \\ [\underline{a_n}, \overline{a_n}] \end{pmatrix} \approx \left[\begin{pmatrix} \underline{a_1} \\ \underline{a_2} \\ \vdots \\ \underline{a_n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{pmatrix}\right]$ sehingga

$\left[\begin{pmatrix}\underline{a_1}\\ \underline{a_2}\\ .\\ .\\ \underline{a_n}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\overline{a_1}\\ \overline{a_2}\\ .\\ .\\ \overline{a_n}\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}\bigoplus_{i=1}^{k}\underline{\alpha_i}\otimes\underline{a_{k1}}\\ \bigoplus_{i=1}^{k}\underline{\alpha_i}\otimes\underline{a_{k2}}\\ .\\ .\\ \bigoplus_{i=1}^{k}\underline{\alpha_i}\otimes\underline{a_{kn}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bigoplus_{i=1}^{k}\overline{\alpha_i}\otimes\overline{a_{k1}}\\ \bigoplus_{i=1}^{k}\overline{\alpha_i}\otimes\overline{a_{k2}}\\ .\\ .\\ \bigoplus_{i=1}^{k}\overline{\alpha_i}\otimes\overline{a_{kn}}\end{pmatrix}\right]$. Perhatikan vektor batas bawah,

$$\begin{pmatrix}\underline{a_1}\\ \underline{a_2}\\ .\\ .\\ \underline{a_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\bigoplus_{i=1}^{k}\underline{\alpha_i}\otimes\underline{a_{k1}}\\ \bigoplus_{i=1}^{k}\underline{\alpha_i}\otimes\underline{a_{k2}}\\ .\\ .\\ \bigoplus_{i=1}^{k}\underline{\alpha_i}\otimes\underline{a_{kn}}\end{pmatrix} = \underline{\alpha_1}\otimes\begin{pmatrix}\underline{a_{11}}\\ \underline{a_{12}}\\ .\\ .\\ \underline{a_{1n}}\end{pmatrix}\oplus\underline{\alpha_2}\otimes\begin{pmatrix}\underline{a_{21}}\\ \underline{a_{22}}\\ .\\ .\\ \underline{a_{2n}}\end{pmatrix}\oplus\ldots\oplus\underline{\alpha_k}\otimes\begin{pmatrix}\underline{a_{k1}}\\ \underline{a_{k2}}\\ .\\ .\\ \underline{a_{kn}}\end{pmatrix}$$

$$= \underline{\alpha_1}\otimes\underline{\mathsf{A}_1}\oplus\underline{\alpha_2}\otimes\underline{\mathsf{A}_2}\oplus\ldots\oplus\underline{\alpha_k}\otimes\underline{\mathsf{A}_k} = \bigoplus_{i=1}^{k}(\underline{\alpha_i}\otimes\underline{\mathsf{A}_i}).$$

Diperoleh bahwa vektor batas bawah, $\underline{\mathsf{A}}$ merupakan kombinasi linear dari vektor batas bawah elemen-elemen dari P atau $\underline{\mathsf{A}}$ merupakan kombinasi linear dari vektor batas bawah elemen-elemen dari $\underline{\mathsf{P}}$. Demikian juga untuk vektor batas atas, diperoleh bahwa vektor batas atas $\overline{\mathsf{A}}$ merupakan kombinasi linear dari vektor batas atas elemen-elemen P.

Akibat 2.1. *Misalkan* $\mathsf{A} \in I(\mathbb{R})_{max}^{n}$, *jika* $\underline{\mathsf{A}} = \bigoplus_{i=1}^{k}(\underline{\alpha_i}\otimes\underline{\mathsf{A}_i})$ dan $\overline{\mathsf{A}} = \bigoplus_{i=1}^{k}(\overline{\alpha_i}\otimes\overline{\mathsf{A}_i})$ *maka* A *kombinasi linear dari elemen-elemen himpunan* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^{n}$.

Berdasarkan pengertian kombinasi linear pada aljabar max-plus interval diperoleh definisi rentang linear $\langle\mathsf{P}\rangle$ dari P subhimpunan dari $I(\mathbb{R})_{max}^{n}$ semimodul atas semiring $I(\mathbb{R})_{max}$ dan teorema sebagai berikut :

Definisi 2.2. *Himpunan rentang linear dari* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^{n}$ *ditulis* $\langle\mathsf{P}\rangle$ *adalah himpunan semua kombinasi linear dari elemen-elemen* Q yaitu $\langle\mathsf{P}\rangle = \left\{\overline{\bigoplus}_{i=1}^{k}(\alpha_i\,\overline{\otimes}\,\mathsf{P}_i)\,|\,\alpha_i \in I(\mathbb{R})_{max}, i = 1,2,\ldots,k\right\}$ *untuk semua* $\mathsf{Q} = \{\mathsf{P}_i|\ i = 1,2,\ldots,k\}$ *himpunan bagian berhingga* P *yang mungkin.*

Dengan memperhatikan definisi 2.2, jika dimisalkan

$$\mathsf{P} = \left\{\begin{pmatrix}[\underline{p_1},\overline{p_1}]\\ [\underline{p_2},\overline{p_2}]\\ .\\ .\\ [\underline{p_n},\overline{p_n}]\end{pmatrix} \in I(\mathbb{R})_{max}^{n}\ \middle|\ \begin{pmatrix}\underline{p_1}\\ \underline{p_2}\\ .\\ .\\ \underline{p_n}\end{pmatrix} \in \underline{\mathsf{P}} \subseteq \mathbb{R}_{max}^{n},\begin{pmatrix}\overline{p_1}\\ \overline{p_2}\\ .\\ .\\ \overline{p_n}\end{pmatrix} \in \overline{\mathsf{P}} \subseteq \mathbb{R}_{max}^{n}\right\}$$, $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$

masing-masing himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan P, $\alpha_i \approx [\underline{\alpha_i},\overline{\alpha_i}]$, untuk $i = 1,2,\ldots,k$, $\underline{\mathsf{Q}} = \{\underline{\mathsf{P}_i}|\ i = 1,2,\ldots,k\}$ dan $\overline{\mathsf{Q}} = \{\overline{\mathsf{P}_i}|\ i = 1,2,\ldots,k\}$ diperoleh teorema berikut :

Teorema 2.2. *Jika* $\langle\mathsf{P}\rangle$ *himpunan rentang linear dari* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^{n}$ *maka* $\langle\underline{\mathsf{P}}\rangle = \left\{\bigoplus_{i=1}^{k}(\underline{\alpha_i}\otimes\underline{\mathsf{P}_i})|\ \overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}_{max},\ i = 1,2,\ldots,k\right\}$ dan $\langle\overline{\mathsf{P}}\rangle = \{\bigoplus_{i=1}^{k}(\overline{\alpha_i}\otimes\overline{\mathsf{P}_i})|\ \overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}_{max},\ i = 1,2,\ldots,k\}$ *untuk semua* $\underline{\mathsf{Q}} = \{\underline{\mathsf{P}_i}|\ i = 1,2,\ldots,k\}$ *dan* $\overline{\mathsf{Q}} = \{\underline{\mathsf{P}_i}|\ i = 1,2,\ldots,k\}$ *masing-masing himpunan bagian berhingga yang mungkin dari* $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$.

Bukti : Diketahui $\langle\mathsf{P}\rangle$ himpunan rentang linear dari $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^{n}$ berarti $\langle\mathsf{P}\rangle$ adalah himpunan semua kombinasi linear dari elemen-elemen Q yaitu $\langle\mathsf{P}\rangle = \left\{\overline{\bigoplus}_{i=1}^{k}(\alpha_i\,\overline{\otimes}\,\mathsf{P}_i)\ |\ \alpha_i \in I(\mathbb{R})_{max}, i =\right.$

$1, 2, \dots, k\big\}$ untuk semua $\mathsf{Q} = \{\mathsf{P}_i \mid i = 1, 2, \dots, k\}$ himpunan bagian berhingga yang mungkin dari P. Misalkan $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$ masing-masing himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan P, $\alpha_i \approx [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$, untuk $i = 1, 2, \dots, k$, $\underline{\mathsf{Q}} = \big\{\underline{\mathsf{P}_i} \mid i = 1, 2, \dots, k\big\}$ dan $\overline{\mathsf{Q}} = \{\overline{\mathsf{P}_i} \mid i = 1, 2, \dots, k\}$. Ambil sembarang $\mathsf{A}_i \in \langle \mathsf{P} \rangle$ maka didapat bahwa,

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_i &= \alpha_1 \otimes \mathsf{P}_1 \oplus \alpha_2 \otimes \mathsf{P}_2 \oplus \dots \oplus \alpha_k \otimes \mathsf{P}_k \\ &= \left[\underline{\alpha_1} \otimes \underline{\mathsf{P}_1}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{\mathsf{P}_1}\right] \overline{\oplus} \left[\underline{\alpha_2} \otimes \underline{\mathsf{P}_2}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{\mathsf{P}_2}\right] \overline{\oplus} \dots \overline{\oplus} \left[\underline{\alpha_k} \otimes \underline{\mathsf{P}_k}, \overline{\alpha_k} \otimes \overline{\mathsf{P}_k}\right] \\ &= \left[\underline{\alpha_1} \otimes \underline{\mathsf{P}_1} \oplus \underline{\alpha_2} \otimes \underline{\mathsf{P}_2} \oplus \dots \oplus \underline{\alpha_k} \otimes \underline{\mathsf{P}_k}, \overline{\alpha_1} \otimes \overline{\mathsf{P}_1} \oplus \overline{\alpha_2} \otimes \overline{\mathsf{P}_2} \oplus \dots \oplus \overline{\alpha_k} \otimes \overline{\mathsf{P}_k}\right] \end{aligned}$$

Terbukti, $\langle \underline{\mathsf{P}} \rangle = \left\{\oplus_{i=1}^{k} (\underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{P}_i}) \mid \overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}_{max},\ i = 1, 2, \dots, k\right\}$, $\langle \overline{\mathsf{P}} \rangle = \{\oplus_{i=1}^{k} (\overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{P}_i}) \mid \overline{\alpha_i} \in \mathbb{R}_{max},\ i = 1, 2, \dots, k\}$ untuk semua $\underline{\mathsf{Q}} = \left\{\underline{\mathsf{P}_i} \mid i = 1, 2, \dots, k\right\}$ dan $\overline{\mathsf{Q}} = \left\{\underline{\mathsf{P}_i} \mid i = 1, 2, \dots, k\right\}$ masing-masing himpunan bagian berhingga yang mungkin dari $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$.

Definisi 2.3. *Suatu himpunan P dikatakan membangun semimodul $I(\mathbb{R})_{max}^n$ jika $\langle P \rangle = I(\mathbb{R})_{max}^n$.*

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai definisi bebas linear secara lemah, bebas linear pada Gondran-Minoux, dan bebas linear *tropical*. Dengan persamaan struktur antara $\mathbb{R}_{max}$ dan $I(\mathbb{R})_{max}$ maka definisi bebas linear tersebut dapat juga digunakan pada $I(\mathbb{R})_{max}$. Penjelasan mengenai definisi bebas linear secara lemah, Gondran-Minoux, dan *tropical* pada $I(\mathbb{R})_{max}$ berdasarkan pada Definisi 2.1. dan Definisi 1.8.

Definisi 2.4. *Misalkan $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$, P dikatakan bergantung linear secara lemah jika terdapat elemen $\mathsf{A}_k \in \mathsf{P}$ yang merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada* P. *Sebaliknya, P dikatakan bebas linear secara lemah jika untuk setiap $\mathsf{A}_k \in \mathsf{P}$, A_k tidak merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada P.*

Dengan memperhatikan Definisi 2.4, misalkan $\mathsf{A}_k \approx [\underline{\mathsf{A}}_k, \overline{\mathsf{A}}_k]$, $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$ masing-masing himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan P, diperoleh teorema berikut :

Teorema 2.3. *Misalkan $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$, jika* P *bergantung linear secara lemah maka terdapat $\underline{\mathsf{A}}_k \in \underline{\mathsf{P}}$ yang merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada $\underline{\mathsf{P}}$, dan $\overline{\mathsf{A}}_k \in \overline{\mathsf{P}}$ yang merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lain pada $\overline{\mathsf{P}}$.*

Bukti : Ambil sebarang himpunan P yang bergantung linear secara lemah. Menurut Definisi 2.4 terdapat elemen $\mathsf{A}_\mathsf{k} \in \mathsf{P}$ yang merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada P. Menurut Teorema 2.1 bahwa vektor batas bawah $\underline{\mathsf{A}}_k$ merupakan kombinasi linear vektor batas bawah elemen-elemen lain dari $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{A}}_k \in \overline{\mathsf{P}}$ merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lain dari $\overline{\mathsf{P}}$. Sebaliknya P bebas linear secara lemah jika untuk setiap $\underline{\mathsf{A}}_k \in \underline{\mathsf{P}}$, $\underline{\mathsf{A}}_k$ tidak merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{A}}_k \in \overline{\mathsf{P}}$, $\overline{\mathsf{A}}_k$ tidak merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada $\overline{\mathsf{P}}$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Akibat 2.2. *Misalkan* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$, *jika* P *bebas linear secara lemah maka untuk setiap* $\underline{\mathsf{A}}_k \in \underline{\mathsf{P}}$, $\underline{\mathsf{A}}_k$ *tidak merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada* $\underline{\mathsf{P}}$ *dan untuk setiap* $\overline{\mathsf{A}}_k \in \overline{\mathsf{P}}$, $\overline{\mathsf{A}}_k$ *tidak merupakan kombinasi linear dari elemen-elemen lainnya pada* $\overline{\mathsf{P}}$.

Definisi 2.5. *Misalkan* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$, *Himpunan* $\mathsf{P} = \{\mathsf{A}_i |\ i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$ *dikatakan bergantung linear pada Gondran-Minoux jika terdapat 2 subhimpunan* $I,\ J \subseteq K = \{1, 2, \dots, k\}$ *dengan* $I \cap J = \emptyset$ *dan* $I \cup J = K$, *interval* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *yang tidak semuanya* $\mathcal{E}$ *sedemikian sehingga* $\overline{\bigoplus}_{i\in I} \alpha_i \overline{\otimes} \mathsf{A}_i = \overline{\bigoplus}_{j\in J} \alpha_j \overline{\otimes} \mathsf{A}_j$. *Sebaliknya himpunan* $P = \{\mathsf{A}_i |\ i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$ *bebas linear pada Gondran-Minoux jika untuk semua* $I, J \subseteq K = 1, 2, \dots, k$ *dengan* $I \cap J = \emptyset$ *dan* $I \cup J = K$ *dan skalar* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *tidak semuanya* $\mathcal{E}$ *maka* $\overline{\bigoplus}_{i\in I} \alpha_i \overline{\otimes} \mathsf{A}_i \neq \overline{\bigoplus}_{j\in J} \alpha_j \overline{\otimes} \mathsf{A}_j$.

Dengan memperhatikan definisi 2.5, misalkan $\mathsf{A}_i \approx [\underline{\mathsf{A}}_i, \overline{\mathsf{A}}_i]$, $\alpha_i \approx [\underline{\alpha}_i, \overline{\alpha}_i]$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$ serta $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$ masing-masing himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan P, diperoleh teorema berikut :

Teorema 2.4. *Misalkan* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$, *jika himpunan* $\mathsf{P} = \{\mathsf{A}_i |\ i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$ *bergantung linear pada Gondran-Minoux maka terdapat 2 subhimpunan* $I,\ J \subseteq K = \{1, 2, \dots, k\}$ *dengan* $I \cap J = \emptyset$ *dan* $I \cup J = K$, *interval* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *yang tidak semuanya* $\mathcal{E} = [\varepsilon, \varepsilon]$ *sedemikian sehingga* $\bigoplus_{i\in I} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{A}_i} = \bigoplus_{j\in J} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j}$ *dan* $\bigoplus_{i\in I} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{A}_i} = \bigoplus_{j\in J} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j}$.

Bukti : Ambil himpunan $\mathsf{P} = \{\mathsf{A}_i |\ i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$. Jika himpunan P bergantung linear pada Gondran-Minoux maka menurut Definisi 4.8 terdapat $I,\ J \subseteq K = \{1, 2, \dots, k\}$ dengan $I \cap J = \emptyset$ dan $I \cup J = K$, serta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ sedemikian sehingga, $\overline{\bigoplus}_{i\in I} \alpha_i \overline{\otimes} \mathsf{A}_i = \overline{\bigoplus}_{j\in J} \alpha_j \overline{\otimes} \mathsf{A}_j$. Pada ruas kiri didapatkan, $\overline{\bigoplus}_{i\in I} \alpha_i \overline{\otimes} \mathsf{A}_i \approx \left[\bigoplus_{i\in I} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{A}_i}, \bigoplus_{i\in I} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{A}_i}\right]$ dan pada ruas kanan didapatkan, $\overline{\bigoplus}_{j\in J} \alpha_j \overline{\otimes} \mathsf{A}_j \approx \left[\bigoplus_{j\in J} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j}, \bigoplus_{j\in J} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j}\right]$. Oleh karena itu, diperoleh bahwa vektor batas bawah interval ruas kanan dan ruas kiri, $\bigoplus_{i\in I} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{A}_i} = \bigoplus_{j\in J} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j}$ dan $\bigoplus_{i\in I} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{A}_i} = \bigoplus_{j\in J} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j}$. Tampak bahwa vektor batas bawah dan vektor batas atas interval bergantung linear secara Gondran Minoux.

Akibat 2.3. *Misalkan* $\mathsf{P} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$, *jika himpunan* $\mathsf{P} = \{\mathsf{A}_i |\ i = 1, 2, \dots, k\} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$ *bebas linear pada Gondran-Minoux jika untuk semua* $I, J \subseteq K = 1, 2, \dots, k$ *dengan* $I \cap J = \emptyset$ *dan* $I \cup J = K$ *dan skalar* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *tidak semuanya* $\mathcal{E} = [\varepsilon, \varepsilon]$ *maka* $\bigoplus_{i\in I} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{A}_i} \neq \bigoplus_{j\in J} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j}$ *atau* $\bigoplus_{i\in I} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{A}_i} \neq \bigoplus_{j\in J} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j}$.

Definisi 2.6. *Himpunan* $\mathsf{P} = \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_k\} \subseteq I(\mathbb{R})^n_{max}$ *dengan* $\mathsf{A}_i = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_i^1 \\ \mathsf{A}_i^2 \\ \vdots \\ \mathsf{A}_i^n \end{pmatrix}$ *untuk* $i = 1, 2, \dots, k$ *dikatakan bergantung linear secara tropical jika terdapat 2 subhimpunan* $I_l,\ J_l \subseteq K = 1, 2, \dots, k$ *dengan* $I_l \cap J_l = \emptyset$ *dan* $I_l \cup J_l = K$, *serta interval* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *sedemikian sehingga* $\overline{\bigoplus}_{i\in I} \alpha_i \overline{\otimes} \mathsf{a}^l_{i1} = \overline{\bigoplus}_{j\in J} \alpha_j \overline{\otimes} \mathsf{a}^l_{j1}$ *untuk semua* $l = 1, 2, \dots, n$. *Sebaliknya,*

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

himpunan P *dikatakan bebas linear secara tropical jika untuk semua* $I_l, J_l \subseteq K = 1,2,\ldots,k$ *dengan* $I_l \cap J_l = \emptyset$ *dan* $I_l \cup J_l = K$, *serta* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *maka* $\overline{\bigoplus}_{i \in I_l} \alpha_i \overline{\otimes} \mathrm{A}_i^l \neq \overline{\bigoplus}_{j \in J_l} \alpha_j \overline{\otimes} \mathrm{A}_j^l$ *untuk semua* $l = 1,2,\ldots,n$.

Teorema 2.5. *Jika himpunan* $\mathrm{P} = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k\} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$ *dengan* $\mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_i^1 \\ \mathrm{A}_i^2 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\underline{\mathrm{A}_i}, \overline{\mathrm{A}_i}]^1 \\ [\underline{\mathrm{A}_i}, \overline{\mathrm{A}_i}]^2 \\ \vdots \\ [\underline{\mathrm{A}_i}, \overline{\mathrm{A}_i}]^n \end{pmatrix}$ *untuk* $i = 1,2,\ldots,k$ *bergantung linear secara tropical maka terdapat 2 subhimpunan* I_l, $J_l \subseteq K = \{1,2,\ldots,k\}$ *dengan* $I_l \cap J_l = \emptyset$ *dan* $I_l \cup J_l = K$, *serta* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *sedemikian sehingga* $\bigoplus_{i \in I_l} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathrm{A}_i^l} = \bigoplus_{j \in J_l} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathrm{A}_j^l}$ *dan* $\bigoplus_{i \in I_l} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathrm{A}_i^l} = \bigoplus_{j \in J_l} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathrm{A}_j^l}$ *untuk* $l = 1,2,\ldots,n$.

Bukti *:* Ambil himpunan $P = \{\mathrm{A}_i | i = 1,2,\ldots,k\} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$. Misalkan P bergantung linear secara tropical, terdapat $I_l, J_l \subseteq K = \{1,2,\ldots,k\}$ dengan $I_l \cap J_l = \emptyset$ dan $I_l \cup J_l = K$, $l = 1,2,\ldots,n$, serta $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ sedemikian sehingga, $\overline{\bigoplus}_{i \in I_l} \alpha_i \overline{\otimes} \mathrm{A}_i^l = \overline{\bigoplus}_{j \in J_l} \alpha_j \overline{\otimes} \mathrm{A}_j^l$. Untuk setiap $l = 1,2,\ldots,n$ pada ruas kiri diperoleh, $\overline{\bigoplus}_{i \in I_l} \alpha_i \overline{\otimes} \mathrm{A}_i^l \approx \left[\bigoplus_{i \in I_l} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathrm{A}_i^l}, \bigoplus_{i \in I_l} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathrm{A}_i^l}\right]$ dan pada ruas kanan, $\overline{\bigoplus}_{j \in J_l} \alpha_j \overline{\otimes} \mathrm{A}_j^l \approx \left[\bigoplus_{j \in J_l} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathrm{A}_j^l}, \bigoplus_{j \in J_l} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathrm{A}_j^l}\right]$. Oleh karena itu, diperoleh persamaan vektor batas bawah, $\bigoplus_{i \in I_l} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathrm{A}_i^l} = \bigoplus_{j \in J_l} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathrm{A}_j^l}$ serta persamaan vektor batas atas, $\bigoplus_{i \in I_l} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathrm{A}_i^l} = \bigoplus_{j \in J_l} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathrm{A}_j^l}$. Tampak bahwa vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas interval bergantung linear secara *tropical.*

Akibat 2.4. *Jika himpunan* $\mathrm{P} = \{\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_k\} \subseteq I(\mathbb{R})_{max}^n$ *dengan* $\mathrm{A}_i = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_i^1 \\ \mathrm{A}_i^2 \\ \vdots \\ \mathrm{A}_i^n \end{pmatrix}$ *untuk* $i = 1,2,\ldots,k$ *bebas linear secara tropical maka untuk semua* $I_l, J_l \subseteq K = \{1,2,\ldots,k\}$ *dengan* $I_l \cap J_l = \emptyset$ *dan* $I_l \cup J_l = K$, *serta* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ *maka* $\bigoplus_{i \in I_l} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathrm{A}_i^l} \neq \bigoplus_{j \in J_l} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathrm{A}_j^l}$ *atau* $\bigoplus_{i \in I_l} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathrm{A}_i^l} \neq \bigoplus_{j \in J_l} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathrm{A}_j^l}$ *untuk* $l = 1,2,\ldots,n$.

Perbandingan antara bebas linear secara lemah dan Gondran-Minoux disajikan pada teorema :

Teorema 2.6. *Jika suatu himpunan vektor interval bebas linear pada Gondran-Minoux, maka himpunan tersebut juga bebas linear secara lemah.*

Bukti : Ambil $P = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$subhimpunan dari semimodul$I(\mathbb{R})_{max}^n$ atas semiring $I(\mathbb{R})_{max}$. Misal P bebas linear pada Gondran-Minoux, maka untuk semua $I, J \subseteq K = \{1,2,\ldots,k\}$ dan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ didapat, $\bigoplus_{i \in I} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{A_i} \neq \bigoplus_{j \in J} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{A_j}$ atau $\bigoplus_{i \in I} \underline{\alpha_i} \otimes \overline{A_i} \neq \bigoplus_{j \in J} \underline{\alpha_j} \otimes \overline{A_j}$. Selanjutnya, dengan mengambil $I = \{i\}$ dan $J = K - \{i\}$ untuk

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

sembarang i pada K, diperoleh $\underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{A}_i} \neq \bigoplus_{j \in J} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j}$ serta $\overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{A}_i} \neq \bigoplus_{j \in J} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j}$. Jika kedua ruas dikalikan dengan $-\underline{\alpha_i}$ pada batas bawah serta $-\overline{\alpha_i}$ pada batas atas diperoleh persamaan $\underline{\mathsf{A}_i} \neq \bigoplus_{j \in J} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j}$ serta $\overline{\mathsf{A}_i} \neq \bigoplus_{j \in J} -\overline{\alpha_i} \otimes \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j}$. Oleh karena itu, misalkan $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$ masing-masing himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan P, menurut akibat 2.2 bebas linear secara lemah pada aljabar max-plus.

Perbandingan antara kebebasan linear secara *tropical* dan kebebasan linear pada Gondran-Minoux disajikan pada teorema berikut .

Teorema 2.7. *Jika suatu himpunan vektor interval bebas linear secara tropical, maka himpunan tersebut juga bebas linear pada Gondran-Minoux.*

Bukti : Ambil $\mathsf{P} = \{\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \dots, \mathsf{A}_k\}$ sub himpunan dari $I(\mathbb{R})^n_{max}$ dengan $\mathsf{A}_i \approx [\underline{\mathsf{A}_i}, \overline{\mathsf{A}_i}]$, $i = 1, 2, \dots, k$. Misalkan P bebas linear secara *tropical*, maka untuk semua $I_l, J_l \subseteq K = 1, 2, \dots, k$ dengan $I_l \cap J_l = \emptyset$ dan $I_l \cup J_l = K$, serta $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in I(\mathbb{R})_{max}$ maka $\bigoplus_{i \in I_l} \underline{\alpha_i} \otimes \underline{\mathsf{A}_i^l} \neq \bigoplus_{j \in J_l} \underline{\alpha_j} \otimes \underline{\mathsf{A}_j^l}$ atau $\bigoplus_{i \in I_l} \overline{\alpha_i} \otimes \overline{\mathsf{A}_i^l} \neq \bigoplus_{\in J_l} \overline{\alpha_j} \otimes \overline{\mathsf{A}_j^l}$ untuk $l = 1, 2, \dots, n$. Oleh karena itu misalkan $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$ masing-masing himpunan vektor-vektor batas bawah dan vektor-vektor batas atas dari himpunan P, menurut definisi 1.9 bebas linear secara *tropical* pada aljabar max-plus. Selanjutnya menurut teorema 1.2, $\underline{\mathsf{P}}$ dan $\overline{\mathsf{P}}$ bebas linear pada Gondran Minoux. Selanjutnya menurut akibat 2.3, P bebas linear pada Gondran Minoux.

Berdasarkan teorema 2.6 dan teorema 2.7 didapatkan akibat berikut

Akibat 2.5. *Jika suatu himpunan vektor interval bebas linear secara tropical, maka himpunan vektor interval tersebut juga bebas linear secara lemah.*

C. SIMPULAN

Berdasarkan pada pembahasan diperoleh :

1. Definisi kombinasi linear dan rentang linear dalam aljabar max-plus interval.
2. Pengertian dan perbandingan bebas linear secara lemah, bebas linear pada Gondran-Minox, dan bebas linear secara *tropical* dalam aljabar max-plus interval.

D. DAFTAR PUSTAKA

Akian M, Gaubert S, and Guterman A, 2008. Linear Independence over Tropical Semirings and Beyond.

Akian M, Bapat R. 2000. *Max-Plus Linear Independence and Rank*. Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics, CRC Press K.H. Rosenetal.

Bacelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., Quadrat, J. P. 2001. *Synchronization and Linearity*, New York : John Wiley & Sons.

Butkoviˇc P, Schneider H, and Sergeev S. 2007. Generators, Extremals and Bases of Max Cones. *Linear Algebra Appl*, 421 (2-3) : 394 – 406,.

Cunninghame-Green, R.A. 1979. Minimax algebra, *Volume* 166 *of Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag*, Berlin.

Cunninghame-Green, R.A. Butkovi'c, P. 2004. Bases in Max-Algebra. *Linear Algebra and its Applications*. 389. 107 – 120.

Farlow, K. G. 2009. *Max-Plus Algebra*, Master's Thesis Submitted to The Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University in Partial Fulfillment of The Requirements for The Degree of Masters in Mathematics.

Gaubert S and Katz R. 2007. The Minkowski Theorem for Max-Plus Convex Sets. *Linear Algebra and Appl.*, 421 : 356 – 369.

Gondran M and Minoux M. 1984. Linear Algebra in Dioids : A Survey of Recent Results. In Algebraic and Combinatorial Methods in Operations Research, *Volume 95 of North-Holland Math. Study*, pages : 147–163. North-Holland, Amsterdam,

Izhakian Z., 2008. The Tropical Rank of a Tropical Matrix. E print arXiv:math. AC/ 0604208v2.

Rudhito, Andy. 2011. *Aljabar Max-Plus Bilangan Kabur dan Penerapannya pada Masalah Penjadwalan dan Jaringan Antrian*. Disertasi : Program Studi S3 Matematika FMIPA UGM. Yogyakarta.

Tam. K. P. 2010. *Optimizing and Approximating Eigenvectors In Max-Algebra*. A Thesis Submitted to The University of Birmingham for The Degree of Doctor of Philosophy (PHD).

Wagneur E. 1991. Modulo¨ıds and pseudomodules. I. *Dimension theory. Discrete Math.*, 98 (1) : 57–73.