 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

A-6

JUMLAH GRUP BAGIAN DALAM DARAB LANGSUNG GRUP SIKLIS BERHINGGA

M.V.Any Herawati
Program Studi Matematika Universitas Sanata Dharma
anyhera@ymail.com

Abstrak

Masalah yang akan dibuktikan dalam penelitian ini adalah mencari jawaban atas pertanyaan tentang berapa banyak grup bagian dari suatu grup. Pertanyaan ini, secara umum, jawabannya tidaklah mudah. Beberapa penulis telah menghitung banyaknya grup bagian dalam keluarga grup berhingga tertentu. Joseph Petrillo dalam tulisannya yang berjudul 'Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups', dalam *The College Mathematics Journal*, Vol.42, No.3 tahun 2011 menyumbangkan hasil pemikirannya untuk kasus darab langsung grup siklis berhingga, Penelitian ini adalah studi pustaka atas tulisan Joseph Petrillo tersebut.

Untuk grup berhingga G dengan kisi grup bagian $L(G)$, misalkan $|L(G)|$ menyatakan banyaknya grup bagian dari G.. Misal Z_n menyatakan grup siklis tunggal yang berorde n , yang dapat dipandang sebagai grup bilangan bulat dengan penlumlahan modulo n. Tujuan penelitian ini adalah membahas rumus untuk menghitung $|L(Z_m \times Z_n)|$ untuk semua bilangan bulat positif m dan n.. Alat utama yang dipakai di sini adalah Teorem Goursat yang dituliskan di bawah nanti . Pertama diperhatikan untuk kasus di mana m dan n relatif prima dan merupakan pangkat bilangan prima yang sama. Kemudian hasilnya diperluas untuk darab langsung dari sebarang grup siklis maupun tidak siklis.

Kata kunci: grup, grup siklis, orde grup, teorema Goursat.

A. PENDAHULUAN

Pengalaman di kelas, apabila mahasiswa diminta mencari grup bagian dari suatu darab langsung grup $G \times H$, biasanya adalah dengan cara mencari grup bagian A dari G dan grup bagian C dari H lalu dibentuk $A \times C$ sebagai grup bagian dari $G \times H$. Atau kalau tidak, dipilih diagonal dari $G \times G$, yatu $D = \{(g, g) \mid g \in G\}$ yang merupakan grup bagian dari $G \times G$. Padahal secara umum masih ada grup bagian yang lainnya lagi. Sebagai contoh , misalkan $Z_3 = \{0,1,2\}$ dan perhatikan darab langsung $Z_3 \times Z_3$, maka dapat diperiksa bahwa himpunan {(0,0), (1,2), (2,1)} merupakan grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ yang bukan merupakan darab langsung grup bagian dan bukan pula grup bagian diagonal. Sehingga muncul pertanyaan ada berapa grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ seluruhnya?

Pada tahun 1889, Edouard Goursat (1858-1936) membuktikan teorema yang menggambarkan struktur grup bagian dari darab langsung $G_1 \times G_2$ dalam hubungannya dengan kuosien dalam G_1 dan G_2. Yang dimaksud kuosien dalam grup G adalah grup faktor A / B di mana A adalah grup bagian dari G dan B adalah grup bagian normal dari A. Teorema Goursat tersebut

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

tepatnya menyatakan bahwa bila G dan H adalah grup, maka terdapat bijeksi antara himpunan S yang memuat semua grup bagian dari $G \times H$ dan himpunan T yang terdiri dari semua tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ di mana A / B adalah kuosien dalam G, C/D adalah kuosien dalam H, dan $\varphi : A/B \to C/D$ adalah isomorfisma. Atau secara singkat, Teorema Goursat menyatakan bahwa struktur grup bagian dari suatu darab langsung bergantung pada struktur kuosien dari grup-grup faktornya. Penting diperhatikan bahwa, selain isomorfisma identitas, isomorfisma yang lain mungkin ada antara kuosien-kuosien yang tak trivial, masing-masing bersesuaian dengan satu grup bagian dalam darab langsung. Itulah alasan mengapa $Z_3 \times Z_3$ mempunyai grup bagian yang tidak dapat diperoleh dari darab langsung grup-grup bagian maupun dari diagonalnya $Z_3 \times Z_3$. Dan bila diselesaikan menggunakan Teorema Goursat diperoleh bahwa banyaknya grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ seluruhnya ada 3, yang secara teknis mencarinya adalah sebagai berikut. Pertama, dicari semua grup bagian dari Z_3, yaitu grup bagian $\{0\}$ dan Z_3 sendiri. Dari kedua grup bagian tersebut dibentuk grup – grup kuosien $\{0\}/\{0\}$, $Z_3/\{0\}$, dan Z_3/Z_3. Selanjutnya, dicari semua automorfisma dari $\{0\}/\{0\}$, $Z_3/\{0\}$, dan Z_3/Z_3.

(i). Karena $|\ \{0\}/\{0\}\ | = 1$, maka hanya ada satu automorfisma dari $\{0\}/\{0\}$, yaitu automorfisma yang memasangkan koset $0+\{0\} \mapsto 0+\{0\}$. Dari automorfisma ini dihasilkan grup bagian trivial dari $Z_3 \times Z_3$, yaitu {(0,0)}.

(ii). Sedangkan $|Z_3/\{0\}| = 3$, maka $Z_3/\{0\} \approx Z_3$.. Karena ada 2 automorfisma dari Z_3, maka automorfisma dari $Z_3/\{0\}$ ada 2 pula, yaitu yang memetakan $0+\{0\} \mapsto 0+\{0\}$, $1+\{0\} \mapsto 1+\{0\}$, $2+\{0\} \mapsto 2+\{0\}$. Dari sini dihasilkan grup bagian {(0,0), (1,1), (2,2)}. Sedangkan automorfisma yang satunya adalah yang memetakan $0+\{0\} \mapsto 0+\{0\}$, $1+\{0\} \mapsto 2+\{0\}$, $2+\{0\} \mapsto 1+\{0\}$. Dari automorfisma ini dihasilkan grup bagian {(0,0), (1,2), (2,1)}.

(iii). Dan yang terakhir karena $|\ Z_3/Z_3.| = 1$, maka $Z_3/Z_3 \approx Z_1$ dan hanya ada satu automorfisma dari Z_1, sehingga automorfisma dari Z_3/Z_3 hanya ada satu pula,yaitu yang memetakan $0+Z_3 \mapsto 0+Z_3$ dan dari pemetaan ini dihasilkan grup bagian {(0,0)} yang sudah muncul di bagian (i) di atas.

Dari uraian di atas diperoleh bahwa grup bagian dari $Z_3 \times Z_3$ seluruhnya ada 3, yaitu {(0,0)}, {(0,0), (1,1), (2,2)}, dan {(0,0), (1,2), (2,1)}.

Seperti yang diperlihatkan melalui contoh di atas bahwa Teorema Goursat tidak menyediakan rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dari darab langsung grup $G \times H$ tetapi lebih pada bagaimana mengonstruksi semua grup bagian dari $G \times H$. Sedangkan penelitian ini bertujuan membahas secara detail tulisan Joseph Petrillo yang berjudul '*Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups.*' dalam The College Mathematics Journal, March 2009 tentang penurunan rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dalam darab langsung dari grup siklis berhingga. Adapun karena adanya pembatasan jumlah halaman, maka bukti teorema dan lampiran tidak disertakan dalam tulisan ini.

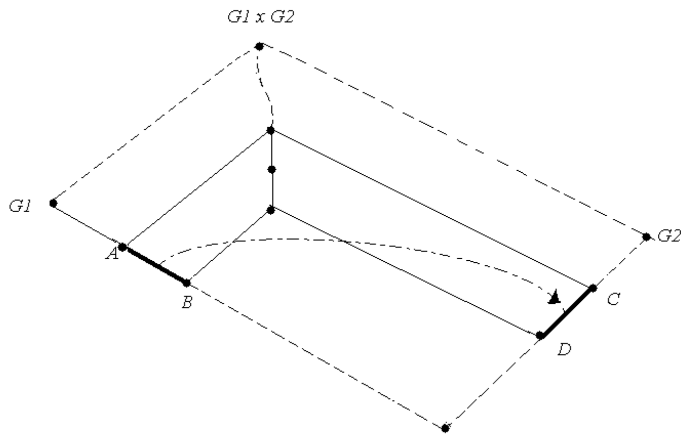
B. PEMBAHASAN

Teorema Goursat Misal G_1 dan G_2 adalah grup. Maka terdapat bijeksi antara himpunan semua grup bagian dari $G_1 \times G_2$ dan himpunan semua tripel (A / B , C / D, φ) di mana A / B adalah kuosien dalam G_1 , C / D adalah kuosien dalam G_2 , dan $\varphi : A/B \to C/D$ adalah isomorfisma.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Bukti dari teorema Goursat tersebut dapat dilihat dalam [3] atau [4]. Dalam tulisan tersebut ditunjukkan bagaimana cara membentuk gup bagian U dari $G_1 \times G_2$ dari dua kuosien isomorfis yang diberikan, dan sebaliknya. Gambar 1 memperlihatkan hubungan antara U dan kuosien-kuosien yang bersesuaian dengan U. Di sini A dan B adalah grup bagian dari G_1 dan C dan D adalah grup bagian dari G_2, dan kuosien antara A / B dan C / D isomorfis melalui φ.

Di samping memberikan cara membentuk grup-grop bagian A / B dan C / D , teorema Goursat juga memberikan cara untuk menghitung banyaknya grup bagian, minimal secara teori. Bila kita dapat menentukan semua kuosien antara G_1 dan G_2 , dan kemudian menentukan semuaisomorfisma antara pasangan kuosien-kuosien yang isomorfis, maka kita dapat menghitung grup-grup bagian dari dengan menghitung semua tripel (A / B , C / D, φ) di mana A / B adalah kuosien dalam G_1 , C / D adalah kuosien dalam G_2 , dan $\varphi : A/B \rightarrow C/D$ adalah isomorfisma.



Gambar 1 Visualisasi grup bagian U dari darab langsung $G_1 \times G_2$.

Contoh 1 Grup bagian dari $Z_9 \times Z_9$ yang bukan merupakan darab langsung dari grup-grup bagian dari Z_9 adalah {(0,0),(3,3),(6,6)}. Dengan teorema Goursat, grup bagian ini bersesuaian dengan tripel $(\langle 3\rangle/\langle 0\rangle, \langle 3\rangle/\langle 0\rangle, \varphi)$, di mana φ adalah automorfisma identitas pada $\langle 3\rangle/\langle 0\rangle$ $(\cong Z_3)$. Karena hanya ada satu automorfisma yang lain (selain automorfisma identitas) dari Z_3 , yaitu yang memetakan 0 ke 0, 1 ke 2, dan 2 ke 1, maka ada tepat satu grup bagian lain yang diperoleh dari pasangan kuosien ini, yaitu {(0,0),(6,3),(3,6)}.

Secara umum, setiap pasangan kuosien berorde satu,tiga, atau sembilan dalam $Z_9 \times Z_9$ menghasilkan satu, dua, atau enam grup bagian, berturut-turut., sama dengan banyaknya automorfisma dari Z_1, Z_3, dan Z_9 Dalam Z_9 , ada tiga kuosien berorde satu, dua kuosien berorde tiga, dan satu kuosien berorde 9. Dengan Teorema Goursat, $Z_9 \times Z_9$ mempunyai 3.3.1+2.2.2+1.1.6 = 23 grup bagian (Lampiran 1). Kisi grup bagian dari $Z_9 \times Z_9$ ditunjukkan dalam Gambar 2.

Pendekatan yang dipakai dalam Contoh ini menjadi dasar untuk menghitung jumlah grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{p^r}$, di mana p adalah bilangan prima. Pertama, diamati untuk kasus paling sederhana, yaitu ketika grup-grup faktor tersebut mempunyai orde relatif prima dan perkalian dari pangkat bilangan prima yang sama. Akhirnya, hasil tersebut diperluas untuk hasilkali langsung dari grup siklik dan tak-siklik sebarang.

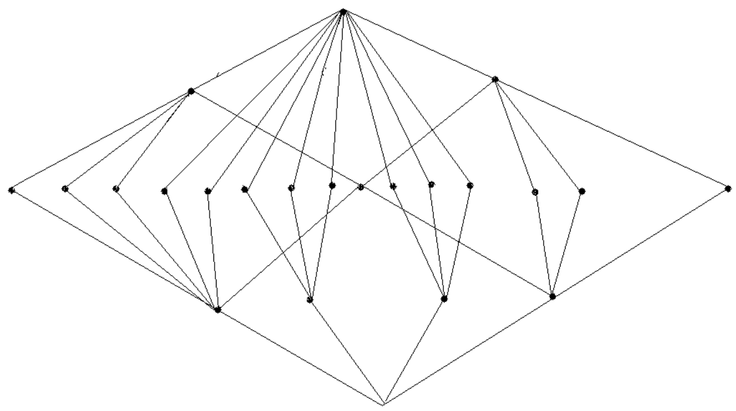
 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Menghitung grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ bila *m* dan *n* relatif prima

Teorema 1

Bila m dan n adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prima, maka grup Z_m dan Z_m tidak mempunyai kuosien tak-trivial yang isomorfis.
Bukti : (Lampiran)

Menurut Teorema Goursat, setiap grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ berpadanan dengan suatu tripel $(A/A, C/C, \varphi)$, di mana $A \leq Z_m$, $C \leq Z_n$, dan φ adalah isomorfisma identitas. Ini berarti bahwa setiap grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ mempunyai bentuk $A \times C$, dan dari sini kisi grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ adalah darab Kartesius dari Z_m dan Z_n.



Gambar 2 Diagram kisi grup bagian dari $Z_9 \times Z_9$

Teorema 2. *Misal m dan n adalah dua bilangan bulat positif yang relatif prima, dengan faktorisasi prima* $m = p_1^{r_1} \ldots p_k^{r_k}$ *dan* $n = q_1^{t_1} \ldots q_k^{t_l}$. *Maka banyaknya grup bagian dari* $Z_m \times Z_n$ *adalah*

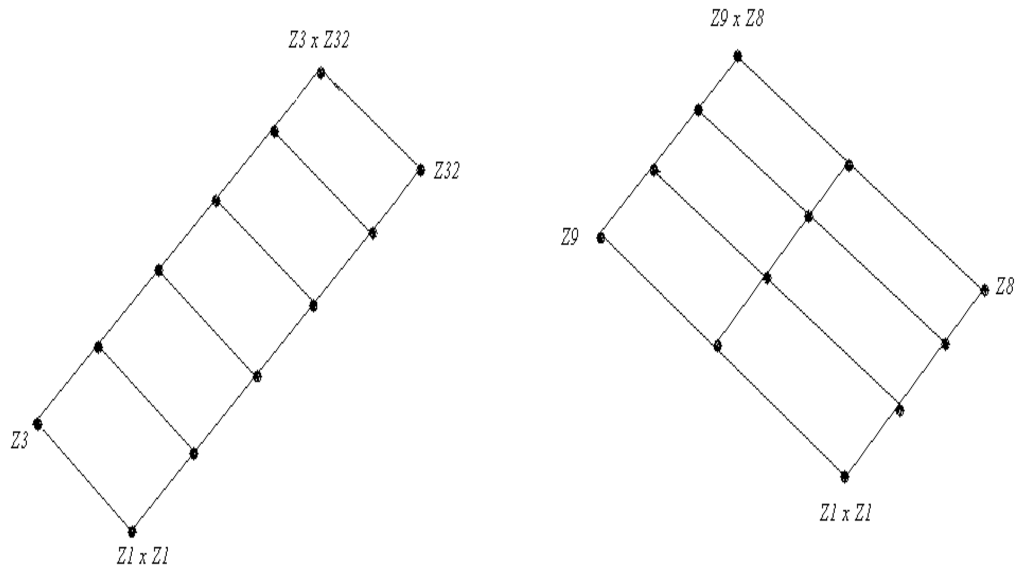
$$d(m)d(n) = \prod_{i=1}^{k}(r_i + 1)\prod_{j=1}^{l}(r_j + 1).$$

Bukti : (Lampiran)

Berikut ini adalah kasus khusus dari Teorema 2 bila *m* dan *n* berupa pangkat dari bilangan-bilangan prima.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

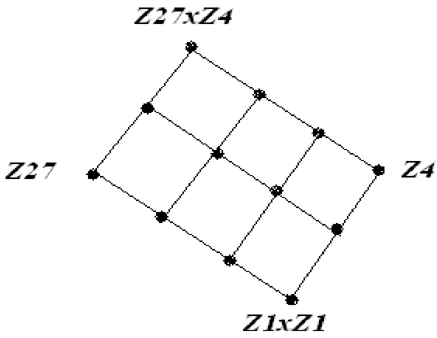
Akibat 3. *Bila p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda, maka banyaknya grup bagian dari* $Z_{p^r} \times Z_{q^t}$ *adalah* (*r+1*)(*t+1*).
Bukti : (Lampiran)



Gambar 3 Kisi grup bagian dari $Z_3 \times Z_{32}$ dan $Z_9 \times Z_8$.

Contoh 2. Grup $Z_{27} \times Z_4$ dan $Z_9 \times Z_8$ masing-masing mempunyai 12 grup bagian dan kisi grup bagiannya saling isomorfis. Meskipun kisi grup bagian dari $Z_3 \times Z_{32_8}$ tidak isomorfis dengan kedua kisi tersebut, grup ini juga mempunyai 12 grup bagian. (Gambar 3 dan 4). Secara umum, bila p dan q adalah dua bilangan prima yang berbeda, maka grup $Z_p \times Z_{q^5}$ dan $Z_{p^2} \times Z_{q^3}$ masing-masing mempunyai 12 grup bagian, namun kisi grup bagiannya tidak isomorfis..(Lampiran 2)

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4



Gambar 4 Kisi grup bagian dari $Z_{27} \times Z_4$

Menghitung grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$, di mana p adalah bilangan prima dan $r \leq s$

Dalam bagian ini kita mengamati secara khusus darab langsung $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$, di mana p adalah bilangan prima dan $r \leq s$. Tujuan utamanya adalah menghitung grup-grup bagian yang berpadanan dengan tripel $(A/B, C/D, \varphi)$ untuk kuosien-kuosien tertentu A/B dan C/D, yang keduanya isomorfis dengan Z_{p^k}, $0 \leq k \leq r$, di mana φ mencakup semua automorfisma dari Z_{p^k}.

Karena $L(Z_{p^r})$ adalah rantai, Z_{p^r} mempunyai $r+1$ grup bagian (kuosien berorde 1), r kuosien berorde p, $r-1$ kuosien berorde p^2, dan seterusnya. Secara umum, Z_{p^r} mempunyai $r-k+1$ kuosien berorde p^k, $0 \leq k \leq r$. Selanjutnya, menghitung automorfisma dari suatu grup siklis adalah ekivalen dengan menghitung banyaknya pembangun. Dengan menggunakan fungsi totient Euler pada p^k, diperoleh bahwa Z_{p^k} mempunyai $p^k - p^{k-1}$ automorfisma bila $k > 0$, dan mempunyai satu automorfisma bila $k = 0$.

Sekarang, untuk setiap kuosien berorde p^k, $k > 0$, kita dapat memilih kuosien dalam Z_{p^r} dalam $r-k+1$ xara, memilih kuosien dalam Z_{p^s} dalam $s-k+1$ xara,dan kemudian memilih isomorphism dalam $p^k - p^{k-1}$ cara.. Untuk $k = 0$, banyaknya grup bagian adalah $(r + 1)(s + 1)$, dan untuk $0 < k \leq r$, , banyaknya grup bagian adalah

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

$(r-k+1)(s-k+1)(p^k - p^{k-1})$. Maka, total jumlah grup bagian dari $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$ adalah

$$(r+1)(s+1)+\sum_{k=1}^{r}(r-k+1)(s-k+1)(p^k - p^{k-1}),$$

yang dengan beberapa hitungan secara aljabar diperoleh :

$$\left|L(Z_{p^r} \times Z_{p^s}\right| = (r+s+1)\left(\frac{p^{r+1}-1}{p-1}\right)-2\left(\frac{rp^{r+1}}{p-1}-\frac{p^{r+1}-p}{(p-1)^2}\right)$$

Dan dengan beberapa penyederhanaan diperoleh hasil sebagai berikut :

Teorema 4. *Bila p adalah bilangan prima, dan r dan s adalah bilangan bulat tak-negatif sedemikian hingga* $r \le s$, *maka banyaknya grup bagian dari* $Z_{p^r} \times Z_{p^s}$ *adalah*

$$\frac{p^{r+1}[(s-r+1)(p-1)+2]-[(s+r+3)(p-1)+2]}{(p-1)^2}.$$

Bukti : (Lampiran)

Berikut adalah beberapa kasus khusus dari Proposisi 2 :

$$\left|L(Z_{2^r} \times Z_{2^s}\right| = 2^{r+1}(s-r+3)-(s+r+5).$$

$$\left|L(Z_{2^r} \times Z_{2^r}\right| = 2^{r+1}(3)-2r-5.$$

$$\left|L(Z_{3^r} \times Z_{3^r}\right| = 3^{r+1}-r-2.$$

$$\left|L(Z_{p^r} \times Z_{p^s}\right| = \frac{p^{r+1}(p+1)-2r(p-1)-3p+1}{(p-1)^2}.$$

$$\left|L(Z_p \times Z_p)\right| = p+3.$$

$$\left|L(Z_{p^0} \times Z_{p^s}\right| = \left|L(Z_{p^s})\right| = s+1.$$

Teorema 5. Misal p adalah bilangan prima, dan misal r dan s adalah bilangan bulat tak-negatif sedemikian hingga $r \le s$. Maka

(a) $\left|L(Z_{p^r} \times Z_{p^s})\right| = \left|L(Z_{p^r} \times Z_{p^r}\right| + (s-r)\dfrac{(p^{r+1}-1)}{p-1}.$

(b) $\left|L(Z_{p^s} \times Z_{p^s})\right| = \left|L(Z_{p^r} \times Z_{p^r}\right| + \dfrac{(p^{s+1}-p^{r+1})(p+1)}{(p-1)^2} + \dfrac{2(s-r)}{p-1}$

(c) $\left|L(Z_{p^s} \times Z_{p^s})\right| = \left|L(Z_{p^r} \times Z_{p^s}\right| + \dfrac{(p^{s+1}-p^{r+1})(p+1)}{(p-1)^2} - (s-r)\dfrac{(p^{r+1}+1)}{p-1}.$

Bukti : (Lampiran)

Jumlah grup bagian dari $Z_m \times Z_n$ untuk sebarang *m* dan *n*

Perhatikan grup $Z_m \times Z_n$ dan andaikan bahwa $m \neq 1 \neq n$. Bila $p_1, p_2, ..., p_k$ adalah bilangan-bilangan prima yang saling berbeda dan membagi hasilkali *mn*, maka *m* dan *n* dapat difaktorkan sebagai $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$, di mana r_i dan s_i adalah bilangan bualt tak negatif dan mungkin sama dengan nol pada paling banyak satu dalam dekomposisi untuk *m* dan *n*. Dengan Teorema Fundamental dari grup Abel berhingga $Z_m \times Z_n$ dapat didekomposisikan menjadi

$$Z_m \times Z_n \cong \left(Z_{p_1^{r_1}} \times Z_{p_1^{s_1}} \right) \times \ldots \times \left(Z_{p_k^{r_k}} \times Z_{p_k^{s_k}} \right). \qquad (2)$$

Pada tahun 1951,Suzuki [ ] membuktikan teorema yang dapat digunakan untuk menghasilkan generalisasi Teorema 2.

Teorema Suzuki. Misal G_1 dan G_2 adalah grup berhingga. Maka $L(G_1 \times G_2) = L(G_1) \times L(G_2)$ dan $| L(G_1 \times G_2) | = | L(G_1) | . | L(G_2) |$ bila dan hanya bila $| G_1 |$ dan $| G_2 |$ relatif prima.

Teorema 6. Misal *m* dan *n* adalah bilangan positif, dan misal $p_1, p_2, ..., p_k$ adalah bilangan-bilangan prima saling berbeda yang membagi hasilkali *mn* sedemikian hingga $m = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ dan $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$. Maka

$$| L(Z_m \times Z_n) | = \prod_{i=1}^{k} | L(Z_{p_i^{r_i}} \times Z_{p_i^{s_i}}) | .$$

Setiap faktor dalam Proposisi 3 dapat dihitung menggunakan Proposisi 2 dan akibatnya.

Bukti : (Lampiran)

Contoh 3. Karena $18 = 2.3^2$ dan 30 = 2.3.5, maka

$$| L(Z_{18} \times Z_{30}) | = | L(Z_2 \times Z_2) | . | L(Z_{3^2} \times Z_3) | . | L(Z_1 \times Z_5) |$$
$$= 5.10.2 = 100.$$

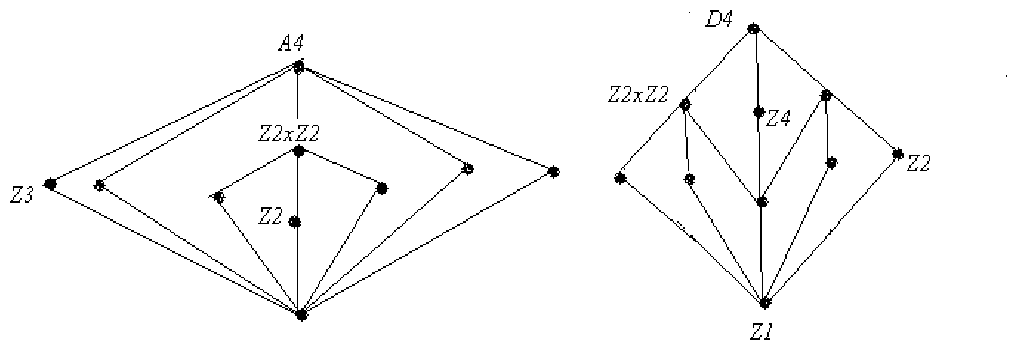
Menghitung Jumlah Grup Bagian dari Grup Berhingga Tak Siklik

Secara prinsip, untuk menghitung grup bagian dari hasilkali langsung dari sebarang grup berhingga G_1 dan G_2 adalah dengan Teorema Goursat, yang tentunya dibutuhkan informasi lebih tentang struktur dari G_1 dan G_2. Dalam prakteknya, untuk menghitung grup bagian dari

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

$G_1 \times G_2$ pada umumnya lebih sederhana bila menggunakan Teorema Goursat secara langsung daripada dengan rumus. Berikut adalah contohnya.

Contoh 4. Akan dihitung jumlah grup bagian dari hasil kali langsung A_4, grup alternating pada empat elemen, dan D_4, grup simetri dari persegi (Diagram Hassenya di Gambar 5). Orde dari A_4 adalah 12 yang mempunyai pembagi 1, 2, 3, 4, 6, dan12. Karena A_4 tidak mempunyai kuosien berorde 6 dan D_4 tidak mempunyai kuosien berorde 3 maupun 12, berarti cukup diperhatikan kuosien berorde 1, 2,dan4.(Lampiran)



Gambar 5. Diagram Hasse dari A_4 dan D_4.

Kuosien berorde 1. A_4 dan D_4 masing-masing mempunyai 10 kuosien berorde satu (yaitu dari sepuluh grup bagian), dan hanya ada satu automorfisma antara setiap pasang kuosien-kuosien tersebut. Dengan demikian, total jumlah grup bagian yang bersesuaian dengan kuosienberorde satu adalah 10 . 10 . 1 = 100.

Kuosien berorde 2 A_4 mempunyai 6 kuosien berorde dua, sedangkan D_4 mempunyai limabelas (Lampiran). Semua kuosien tersebut isomorfis dengan Z_2, yang mana hanya ada satu automorfisma dari Z_2. Dengan demikian, ada 6 . 15 . 1 = 90 grup bagian.

Kuosien berorde 4. A_4 mempunyai 1 kuosien berorde empat (Lampiran) yang isomorfis dengan grup Klein-4 $Z_2 \times Z_2$. (Bila Z_3 adalah sebarang grup bagian berorde 3 dalam A_4 ,maka A_4 / Z_3 bukan kuosien karena Z_3 bukan grup bagian normal dari A_4.) Di lain pihak, D_4 mempunyai 4 kuosien berorde empat,tapi salah satunya siklik, jadi mempunyai 3 kuosien yang isomorfis dengan grup Klein-4(Lampiran). Karena $Aut(Z_2 \times Z_2) \approx S_3$(Lampiran) , grup simetris pada 3 elemen, $Z_2 \times Z_2$ mempunyai 6 elemen, yang berarti jumlah total grup bagian dari $A_4 \times D_4$ yang bersesuaian dengan kuosien ini adalah 1 . 3 . 6 = 18.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Berdasar pengamatan di atas $A_4 \times D_4$ mempunyai 100 + 90 + 18 = 208 grup bagian

C. KESIMPULAN

Dari uraian di atas diperoleh rumus untuk menghitung banyaknya grup bagian dari darab langsung grup dua grup, yaitu :

1. Teorema 2 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya relatif prima .
2. Akibat 3 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya adalah bilangan prima yang berbeda
3. Teorema 4 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya merupakan pangkat dari bilangan prima yang sama,
4. Teorema 6 digunakan untuk darab langsung dari dua grup siklis berhingga yang orde-ordenya adalah bilangan positif sebarang.
5. Untuk darab langsung dari dua grup tak siklis pada umumnya lebih sederhana bila menggunakan Teorema Goursat .

D. DAFTAR PUSTAKA

Fraleigh,J.B., *A First Course in Abstract Algebra*, 7th edition, Pearson Education, Inc., 2003.

Gallian,J.A., *Contemporary Abstract Algebra.* 7th edition, .Boston: Houghton Mifflin, 2010.

Herawati, A., *Teorema Goursat : Konstruksi subgrup dari grup darab langsung*, Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY, 2009.

Petrillo, J., Goursat's Other Theorem, *The College Mathematics Journal*, Vol.40, No.2 (2009) 119.

Petrillo, J., Counting Subgroups in a Direct Product of Finite Cyclic Groups, *The College Mathematics Journal*, Vol.42, No.3 (2011) 215.