ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

A-4

POLINOMIAL ATAS ALJABAR MAX-PLUS INTERVAL

Harry Nugroho[1], Effa Marta R[2], Ari Wardayani[3]

[1,2,3] Program Studi Matematika Universitas Jenderal Soedirman
[1]harry_nugroho92@yahoo.com [2]marta_effa, [3]ariwardayani@yahoo.co.id

Abstrak

Pembahasan polinomial atas aljabar max-plus interval didasarkan pada analisis elemen-elemen aljabar max-plus interval. Selanjutnya, elemen-elemen pada aljabar max-plus interval ini digunakan untuk mengkonstruksi polinomial atas aljabar max-plus interval yang berfungsi sebagai koefisien-koefisien pada polinomial atas aljabar max-plus interval. Lebih lanjut, dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua polinomial atas aljabar max-plus interval adalah semiring komutatif idempoten.

Kata kunci: semiring, aljabar max-plus interval, polinomial.

A. PENDAHULUAN

Aljabar max-plus merupakan struktur aljabar yang berbentuk $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner yakni operasi “maximum” sebagai operasi penjumlahan dan operasi “plus” sebagai operasi perkaliannya. Sistem matematika aljabar max-plus merupakan semiring komutatif idempoten (Bacelli, *et al*, 2001). Akhir-akhir ini telah berkembang pemodelan jaringan yang melibatkan pendekatan aljabar max-plus karena dapat memberikan hasil analitis dan lebih mudah di dalam perhitungannya. Dalam pemodelan jaringan dengan pendekatan aljabar max-plus, graf untuk jaringan dapat dinyatakan dengan menggunakan matriks dan waktu aktivitasnya dapat dinyatakan dengan interval-interval. Oleh karena itu, aljabar max-plus dapat diperluas lagi menjadi aljabar max-plus interval dengan elemen-elemennya berupa interval-interval, yang selanjutnya dinamakan aljabar max-plus interval. Pembahasan mengenai matriks atas aljabar max-plus interval telah dilakukan oleh Rudhito (2008). Pembahasan mengenai matriks atas aljabar max-plus interval dan nilai eigennya telah dilakukan oleh Rudhito (2010). Pada makalah ini elemen-elemen pada aljabar max-plus interval akan digunakan untuk membentuk polinomial yang koefisiennya berupa interval. Lebih lanjut, juga akan dibuktikan bahwa himpunan semua polinomial dengan koefisiennya adalah interval tersebut merupakan semiring komutatif idempoten. Dengan membentuk semiring komutatif idempoten dari himpunan semua polinomial atas aljabar max-plus interval, selanjutnya dapat dikaji mengenai sifat-sifat yang terkait dengan polinomial atas aljabar max-plus interval.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

B. PEMBAHASAN

Interval tertutup dalam $\mathbb{R}_{\max}$ adalah suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}_{\max}$ yang berbentuk $x = [\,\underline{x}, \overline{x}\,] = \{\, x \in \mathbb{R}_{\max} \mid \underline{x} \preceq_m x \preceq_m \overline{x}\,\}$. Suatu bilangan $x \in \mathbb{R}_{\max}$ dapat dinyatakan sebagai interval $x = [\,x, x\,]$. Diberikan $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max}) \overset{\text{def}}{=} \{x = [\,\underline{x}, \overline{x}\,] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \varepsilon \prec_m \underline{x} \preceq_m \overline{x}\,\} \cup \{[\varepsilon, \varepsilon]\}$ yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner yaitu $\overline{\oplus}$ dan $\overline{\otimes}$ yang didefinisikan dengan

$$x \,\overline{\oplus}\, y \overset{\text{def}}{=} [\,\underline{x} \oplus \underline{y}\,,\ \overline{x} \oplus \overline{y}\,] \text{dan } x \,\overline{\otimes}\, y \overset{\text{def}}{=} [\,\underline{x} \otimes \underline{y}\,,\ \overline{x} \otimes \overline{y}\,]$$

untuk setiap $x, y \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})$. Selanjutnya struktur $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})$ ini merupakan semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $0 = [0, 0]$ yang dinamakan dengan aljabar max-plus interval.

Polinomial atas Aljabar Max-Plus Interval

Bagian ini merupakan pembahasan utama dari makalah ini. Terlebih dahulu akan didefinisikan polinomial dengan koefisiennya adalah interval-interval pada $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})$ seperti berikut.

Definisi 1

Polinomial dengan indeterminate x yang berbentuk $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$, *dengan* $a_i \in I(\mathbb{R}_{\max})$ *dan n adalah suatu bilangan bulat non negatif dinamakan polinomial atas aljabar max-plus interval.*

Untuk selanjutnya, himpunan semua polinomial atas aljabar max-plus interval dinotasikan dengan $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$, yakni

$$\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x] \overset{\text{def}}{=} \{\, \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \mid a_i \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max}),\ i \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}\}.$$

Tanpa mengurangi keumuman, untuk setiap $i > n$, maka $a_i = [\varepsilon, \varepsilon]$. Lebih lanjut, penulisan notasi $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + [\varepsilon, \varepsilon] + [\varepsilon, \varepsilon] + \cdots$ akan ditulis sebagai

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

Didefinisikan operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(\cdot)$ pada $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$ yakni untuk setiap polinomial $f(x), g(x) \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$ dengan $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ berlaku

1. $f(x) + g(x) \overset{\text{def}}{=} c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_kx^k$ dengan $c_i = a_i \,\overline{\oplus}\, b_i$ untuk setiap $0 \le i \le k$.
2. $f(x) \cdot g(x) \overset{\text{def}}{=} d_0 + d_1x + d_2x^2 + \cdots + d_lx^l$ dengan $d_j = \sum_{i=0}^{j} a_i \,\overline{\otimes}\, b_{j-i}$ untuk setiap $0 \le j \le l$.

Proposisi 1

Struktur aljabar $(I(\mathbb{R}_{\max})[x], +, \cdot)$ *adalah semiring.*

Bukti. Untuk setiap $f(x), g(x), h(x) \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$, dengan

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$

$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$

$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k\, x^k = e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + \cdots + e_p x^p$

berlaku

1. $f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k$ dengan $c_i = a_i \overline{\oplus}\, b_i$ untuk setiap $0 \le i \le k$. Karena $c_i = a_i \overline{\oplus}\, b_i \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})$ untuk setiap $0 \le i \le k$, maka $f(x) + g(x) \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$. Dengan demikian, operasi + bersifat tertutup di $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$
2. $(f(x) + g(x)) + h(x)$ $= (\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i + \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j) + \sum_{k=0}^{\infty} e_k\, x^k$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \overline{\oplus}\, b_n) x^n + \sum_{k=0}^{\infty} e_k\, x^k$
$= \sum_{m=0}^{\infty} \{(a_m \overline{\oplus}\, b_m) x^m + e_m x^m\}$
$= \sum_{m=0}^{\infty} \{(a_m \overline{\oplus}\, b_m) \overline{\oplus}\, e_m\} x^m$
$= \sum_{m=0}^{\infty} \{(a_m \overline{\oplus}\, (b_m \overline{\oplus}\, e_m)\} x^m$
$= \sum_{m=0}^{\infty} \{(a_m\, x^m + (b_m \overline{\oplus}\, e_m) x^m\}$
$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i + \sum_{p=0}^{\infty} (b_p \overline{\oplus}\, e_p) x^p$
$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i + \sum_{p=0}^{\infty} (b_p\, x^p + e_p x^p)$
$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i + (\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j + \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k)$
$= f(x) + (g(x) + h(x))$

   Dengan demikian, operasi + bersifat assosiatif di $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$
3. $f(x) + g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k$ dengan $c_i = a_i \overline{\oplus}\, b_i = b_i \overline{\oplus}\, a_i$ untuk setiap $0 \le i \le k$. Jadi, $f(x) + g(x) = g(x) + f(x)$.
Dengan demikian, operasi + bersifat komutatif di $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$

4. Terdapat elemen netral pada $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$ yaitu $\varepsilon(x) = [\varepsilon, \varepsilon] \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$ sedemikian sehingga untuk setiap $f(x) \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$ berlaku $\varepsilon(x) + f(x) = f(x)$

5. $f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j$
$= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\otimes}\, b_{n-i})\, x^n$
Karena $\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\otimes}\, b_{n-i} \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})$ untuk setiap $n \in \mathbf{Z}^{+} \cup \{0\}$, maka $f(x) \cdot g(x) \in \mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$. Dengan demikian, operasi $\cdot$ bersifat tertutup di $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$

6. $(f(x) \cdot g(x)) \cdot h(x)$ $= (\sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k\, x^k$
$= (\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\otimes}\, b_{n-i})\, x^n) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k\, x^k$
$= \sum_{s=0}^{\infty} [\sum_{n=0}^{s} (\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\otimes}\, b_{n-i}) \overline{\otimes}\, e_{s-n}]\, x^s$
$= \sum_{s=0}^{\infty} (\sum_{i+j+k=s} a_i \overline{\otimes}\, b_j \overline{\otimes}\, e_k)\, x^s$
$= \sum_{s=0}^{\infty} [\sum_{m=0}^{s} a_{s-m} \overline{\otimes}\, (\sum_{j=0}^{m} b_j \overline{\otimes}\, e_{m-j})]\, x^s$
$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \cdot (\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{m} b_j \overline{\otimes}\, e_{m-j})\, x^m)$
$= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k\, x^k)$
$= f(x) \cdot (g(x) \cdot h(x))$
Dengan demikian operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di $\mathrm{I}(\mathbb{R}_{\max})[x]$.

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

7. Terdapat elemen satuan di I($\mathbb{R}_{\max}$)[x] yaitu $o(x)$ = [0, 0] ∈ I($\mathbb{R}_{\max}$)[x] sedemikian sehingga untuk setiap $f(x)$ ∈ I($\mathbb{R}_{\max}$)[x] berlaku $o(x) \cdot f(x) = f(x) \cdot o(x) = f(x)$

8. $$\begin{aligned} f(x) \cdot (g(x) + h(x)) &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot (\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j + \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot (\sum_{p=0}^{\infty} (b_p x^p + e_p x^p)) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot (\sum_{p=0}^{\infty} (b_p \overline{\oplus} e_p) x^p) \\ &= \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} [a_q \overline{\otimes} (b_q \overline{\oplus} e_q)] x^q \\ &= \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} [(a_q \overline{\otimes} b_q) \overline{\oplus} (a_q \overline{\otimes} e_q)] x^q \\ &= \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} [(a_q \overline{\otimes} b_q) x^q + (a_q \overline{\otimes} e_q) x^q] \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} (a_r \overline{\otimes} b_r) x^r + \sum_{s=0}^{\infty} (a_s \overline{\otimes} e_s) x^s \\ &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\otimes} b_{n-i})\, x^n) + \\ &\quad (\textstyle\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{m} a_i \overline{\otimes} e_{m-i})\, x^m) \\ &= (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j) + (\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k) \\ &= (f(x) \cdot g(x)) + (f(x) \cdot h(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x)) \cdot h(x) &= (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k \\ &= (\textstyle\sum_{p=0}^{\infty} (a_p x^p + b_p x^p)) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k \\ &= (\textstyle\sum_{p=0}^{\infty} (a_p \overline{\oplus} b_p) x^p) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k \\ &= \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} [(a_q \overline{\oplus} b_q) \overline{\otimes} e_q] x^q \\ &= \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} [(a_q \overline{\otimes} e_q) \overline{\oplus} (b_q \overline{\otimes} e_q)] x^q \\ &= \textstyle\sum_{q=0}^{\infty} [(a_q \overline{\otimes} e_q) x^q + (b_q \overline{\otimes} e_q) x^q] \\ &= \textstyle\sum_{r=0}^{\infty} (a_r \overline{\otimes} e_r) x^r + \sum_{s=0}^{\infty} (b_s \overline{\otimes} e_s) x^s \\ &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\otimes} e_{n-i})\, x^n) + \\ &\quad (\textstyle\sum_{m=0}^{\infty} (\sum_{j=0}^{m} b_j \overline{\otimes} e_{m-j})\, x^m) \\ &= (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k) + (\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \cdot \sum_{k=0}^{\infty} e_k x^k) \\ &= (f(x) \cdot h(x)) + (g(x) \cdot h(x)) \end{aligned}$$

Dengan demikian, pada I($\mathbb{R}_{\max}$)[x] berlaku sifat distributif operasi · terhadap operasi +

9. $$\begin{aligned} f(x) \cdot \varepsilon(x) &= (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) \cdot [\varepsilon, \varepsilon] \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} (a_i \overline{\otimes} [\varepsilon, \varepsilon])\, x^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} [\varepsilon, \varepsilon]\, x^i \\ &= \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) \cdot f(x) &= [\varepsilon, \varepsilon] \cdot (\textstyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i) \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} ([\varepsilon, \varepsilon] \overline{\otimes} a_i)\, x^i \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{\infty} [\varepsilon, \varepsilon]\, x^i \\ &= \varepsilon(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian, terdapat elemen penyerap pada I($\mathbb{R}_{\max}$)[x] yakni $\varepsilon(x)$ sedemikian sehingga $f(x) \cdot \varepsilon(x) = \varepsilon(x) \cdot f(x) = \varepsilon(x)$.

Jadi I($\mathbb{R}_{\max}$)[x] merupakan suatu semiring.■

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Proposisi 2
Struktur aljabar (I($\mathbb{R}_{max}$)[x], +, ·) adalah semiring komutatif.

Bukti. Operasi · bersifat komutatif di I($\mathbb{R}_{max}$)[x] karena untuk setiap $f(x)$, $g(x) \in$ I($\mathbb{R}_{max}$)[x] berlaku

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \,\overline{\otimes}\, b_{n-i} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \,\overline{\otimes}\, a_{n-j} \right) x^n \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} b_j\, x^j \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \\ &= g(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian (I($\mathbb{R}_{max}$)[x], +, ·) adalah semiring komutatif. ■

Proposisi 3
Struktur aljabar (I($\mathbb{R}_{max}$)[x], +, ·) adalah semiring idempoten.

Bukti. Operasi + bersifat idempoten di I($\mathbb{R}_{max}$)[x] karena untuk setiap $f(x) \in$ I($\mathbb{R}_{max}$)[x] berlaku

$$\begin{aligned} f(x) + f(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i\, x^i + a_i x^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i \,\overline{\oplus}\, a_i \right) x^i \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i\, x^i \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Dengan demikian (I($\mathbb{R}_{max}$)[x], +, ·) adalah semiring idempoten. ■

Dari hasil pemaparan di atas, struktur aljabar dari I($\mathbb{R}_{max}$)[x] yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner, yaitu operasi + dan operasi · adalah semiring komutatif idempoten dengan elemen netral $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ dan elemen satuan $0 = [0, 0]$.

C. KESIMPULAN

Dari pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa suatu polinomial dapat dibentuk dari aljabar max-plus interval yang selanjutnya dinamakan polinomial atas aljabar max-plus interval. Lebih lanjut, himpunan semua polinomial atas aljabar max-plus interval ini merupakan semiring komutatif idempoten. Untuk penelitian selanjutnya dapat dikaji mengenai sifat-sifat dari polinomial atas aljabar max-plus interval.

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Idha Sihwaningrum yang telah meluangkan waktunya untuk proses penulisan makalah ini. Penelitian ini dilakukan dengan dana penelitian fundamental 2013 dengan Nomor Kontrak : 2535.15/ UN 23.10/ PN/ 2013.

D. DAFTAR PUSTAKA

Baccelli, F., *et al*. 2001. *Synchronization and Linearity.* New York: John Wiley & Sons.

Farlow, K. G. 2009. *Max-plus Algebra.* Master's thesis Virginia Polytechnic Institute and State University. Virginia: Polytechnic Institute and State University.

Fraleigh, J. B. 2000. *A First Course in Abstract Algebra, 6th Edition.* New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Heidergott, B., Olsder, G. J & Woude, J. 2006. *Max Plus at Work : Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-plus Algebra and Its Applications.* New Jersey: Princeton University Press.

Rudhito, A., dkk. 2008. *Aljabar Max-Plus Interval*. Prosiding Seminar Nasional Matematika S3 UGM. Yogyakarta. 31 Mei 2008.

Rudhito, A., dkk. 2008. *Matriks atas Aljabar Max-Plus Interval*. Prosiding Seminar Nasional Matematika S3, pp. 23-32, UGM. Yogyakarta. Mei 2008.