 ISBN : 978-979-16353-9-4

SISTEM LINEAR DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

Anita Nur Muslimah[1], Siswanto[2], Purnami Widyaningsih[3]

Jurusan Matematika FMIPA UNS

[1]anitanurmuslimah@yahoo.co.id, [2]sis.mipauns@yahoo.co.id, [3]poer@uns.ac.id

Abstrak

Aljabar maks-plus adalah aljabar linear atas semiring $\bar{R}$ dengan $\bar{R} = R \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penambahan "$\oplus$=maks" dan perkalian "$\otimes = +$". Sistem linear dalam aljabar maks-plus terdiri atas sistem persamaan linear dan sistem pertidaksamaan linear. Penelitian ini bertujuan mengkaji ulang penyelesaian dari sistem linear dalam aljabar maks-plus dan keterkaitannya dengan himpunan bayangan dan matriks reguler kuat. Dari penelitian ini, disimpulkan bahwa jika matriks A adalah matriks reguler kuat maka sistem persamaan linear tersebut kemungkinan memiliki penyelesaian tunggal dan jika suatu sistem persamaan linear memiliki penyelesaian tunggal maka himpunan bayangan dari matriks A adalah himpunan bayangan sederhana.

Kata kunci: sistem linear aljabar maks-plus, himpunan bayangan, matriks reguler kuat

A. PENDAHULUAN

Dalam aljabar abstrak sering dijumpai suatu sistem linear yang terdiri atas persamaan linear atau pertidaksamaan linear. Dalam aljabar abstrak, tanda "$+$" menyatakan operasi penjumlahan dan tanda "$\times$" menyatakan operasi perkalian. Selama periode 1970-an dan 1980-an banyak teknologi yang dikembangkan, khususnya bidang produksi. Di bidang produksi tersebut terdapat *discrete event system (DES)* atau *discrete event dynamic system (DEDS)*, seperti penjadwalan mesin, antrian, proses jaringan dan lain-lain. Menurut Schutter dan Boom (2008), masalah *DES* adalah masalah nonlinear dalam aljabar konvensional. Namun, terdapat suatu kelas sekunder dari *DES* (memuat operasi maksimum dan plus) yang dapat diubah menjadi linear dalam aljabar maks-plus. Tam (2010) menyebutkan bahwa aljabar maks-plus adalah aljabar linear atas semiring $\bar{R}$dengan $\bar{R} = R \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penambahan "$\oplus$= maks" dan perkalian "$\otimes = +$".

Menurut Tam (2010), ide aljabar maks-plus ditemukan pertama kali pada tahun 1950-an, tetapi teorinya baru mulai berkembang pada tahun 1960-an. Pada tahun 2000, Butkovic (2000) mempublikasikan artikel yang membahas himpunan bayangan sederhana pada pemetaan linear (maks, +). Selanjutnya pada tahun 2003, Butkovic(2003) menunjukkan bahwa terdapat hubungan antara aljabar maks-plus dan kombinatorik. Kemudian tahun 2010, Tam (2010) mempublikasikan tesisnya yang memuat sistem linear pada aljabar maks-plus, himpunan bayangan dan matriks reguler kuat. Tam (2010) dan Butkovic (2000) menyebutkan bahwa penyelesaian dari sistem

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

linear dalam aljabar maks-plus memiliki keterkaitan dengan himpunan bayangan dan matriks reguler kuat. Oleh karena itu, dalam artikel ini dikaji ulang sistem linear dan penyelesaiannya dalam aljabar maks-plus, termasuk himpunan bayangan dan matriks reguler kuat dari sistem linear aljabar maks-plus yang telah dibahas dalam Tam (2010) dan Butkovic (2000).

B. PEMBAHASAN

B.1. Aljabar Maks-Plus.

Dalam setiap penulisan, R_{maks} mempunyai definisi yang berbeda-beda. Pada artikel ini, definisi R_{maks} mengacu pada Akian et al.(1994), Baccelli et al.(2001) dan Butkovic(2010) yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1

R_{maks} adalah himpunan $\bar{R} = R \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan operasi penambahan "$\oplus$=maks" dan perkalian "$\otimes = +$".

Berdasarkan Definisi 1.1, Tam(2010) mendefinisikan aljabar maks-plus sebagai berikut.

Definisi 1.2

Aljabar maks-plus adalah aljabar linear atas semiring atau R_{maks}.

Elemen identitas untuk penambahan (nol) adalah $-\infty$ (untuk selanjutnya dinotasikan dengan ϵ dan elemen identitas untuk perkalian (unit) adalah 0. Dalam pembahasan selanjutnya juga dibahas himpunan $\bar{\bar{R}}$, *conjugate* dari suatu matriks dan aljabar min-plus, sebagaimana yang telah dituliskan oleh Tam(2010).

Definisi 1.3

Himpunan $\bar{\bar{R}}$ adalah himpunan yang terdiri dari $R \cup \{\pm\infty\}$.

Definisi 1.4

Misalkan $A = (a_{ij}) \in \bar{\bar{R}}^{m\times n}$. *Conjugate* dari matriks A adalah $A^* = (a_{ji}^*)$.

Definisi 1.5

Aljabar min-plus(atau *tropical algebra*) adalah aljabar linear atas semiring $R_{min} = R \cup \{+\infty\}$, dilengkapi dengan operasi penambahan "$\oplus' =$ min" dan perkalian "$\otimes' = +$".

B.2. Sistem Persamaan Linear dalam Aljabar Maks-Plus

Diberikan $A = (a_{ij}) \in \bar{R}^{m\times n}$ dan $b = (b_1, \dots, b_m) \in \bar{R}^m$. Sistem dari $\text{maks}(a_{ij} + x_j) = b_i$ dapat dinyatakan sebagai

$$A \otimes x = b. \tag{2.1}$$

Karena sistem (2.1) memuat operasi maksimum dan plus, sistem (1) disebut sistem persamaan linear (sistem linear maks-aljabar satu sisi). Oleh karena itu, Tam(2010) memberikan Definisi 2.1 dan Definisi 2.2 untuk memperjelas pencarian penyelesaian sistem persamaan linear.

Definisi 2.1

Proses perubahan sistem (2.1) menjadi sistem

$$\bar{A} \otimes x = 0, \tag{2.2}$$

dengan $\bar{A} = B \otimes A = (\bar{a}_{ij}) = (a_{ij} - b_i) \in \bar{R}^{m\times n}$, disebut normalisasi dan sistem (2.2) disebut sistem yang dinormalkan.

Definisi 2.2

Diberikan suatu sistem $A \otimes x = b$ dengan $A = (a_{ij}) \in \bar{R}^{m\times n}, b = (b_1, \dots, b_m) \in \bar{R}^m$, $M = \{1,2, \dots, m\}$ dan $N = \{1,2, \dots, n\}$. Didefinisikan

$$S(A, b) = \{x \in \bar{R}^n | A \otimes x = b\},$$

$$M_j(A, b) = \{k \in M\} | (a_{kj} - b_k) = maks_{i=1,\dots,m}(a_{ij} - b_i)\}, \forall j \in N,$$

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

dan

$$(\bar{x}_j) = (-maks_{i=1,\dots,m}(a_{ij} - b_i)), \forall j \in N.$$

Dengan mengacu pada Definisi 2.2, Butkovic (2010) menjelaskan teorema tentang kriteria sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian.

Teorema 2.1

Misalkan $A = (a_{ij}) \in \bar{R}^{m\times n}$ adalah *doubly R-astic*(mempunyai paling sedikit elemen berhingga pada setiap baris dan kolomnya) dan $b \in R^m$. Vektor $x \in S(A,b)$ jika dan hanya jika

1) $x \le \bar{x}$ dan
2) $\cup_{j\in N_x} M_j(A,b) = M$ dengan $N_x = \{j \in N | x_j = \bar{x}_j\}$.

Bukti.

Ambil $x \in S(A,b)$, akan ditunjukkan bahwa

1) $x \le \bar{x}$ dan
2) $\cup_{j\in N_x} M_j(A,b) = M$ dengan $N_x = \{j \in N | x_j = \bar{x}_j\}$.

Misalkan $x \in S(A,b), i \in M, j \in N$, akan ditunjukkan bahwa $x \le \bar{x}$. Karena $a_{ij} \otimes x_j \le b_i$ maka $x_j^{-1} \ge a_{ij} \otimes b_i^{-1}$ dan $x_j^{-1} \ge maks_{i\in M} a_{ij} \otimes b_i^{-1}$. Karena $x_j^{-1} \ge maks_{i\in M} a_{ij} \otimes b_i^{-1}$ maka $x_j \le \left(maks_{i\in M} a_{ij} \otimes b_i^{-1}\right)^{-1} = \bar{x}_j$. Jadi, jika $x \in S(A,b)$ maka $x \le \bar{x}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\cup_{j\in N_x} M_j(A,b) = M$ dengan $N_x = \{j \in N | x_j = \bar{x}_j\}$. Akan ditunjukkan bahwa $\cup_{j\in N_x} M_j(A,b) \subseteq M$. Karena $\forall j \in N_x, (\bar{x}_j) = \left(-maks_{i=1,\dots,m}(a_{ij} - b_i)\right)$, maka $\cup_{j\in N_x} M_j(A,b) \subseteq M$. Akan ditunjukkan bahwa $M \subseteq \cup_{j\in N_x} M_j(A,b)$. Misalkan $k \in M$, karena $b_k = a_{kj} \otimes x_j > \epsilon$ untuk suatu $j \in N$ dan $x_j^{-1} \ge \bar{x}_j^{-1} \ge a_{ij} \otimes b_i^{-1}$ untuk setiap $i \in M$, diperoleh $x_j^{-1} = a_{kj} \otimes b_k^{-1} = maks_{i\in M} a_{ij} \otimes b_i^{-1}$. Oleh karena itu $k \in M_j$ dan $x_j = \bar{x}_j$.

Misalkan

1) $x \le \bar{x}$ dan
2) $\cup_{j\in N_x} M_j(A,b) = M$ dengan $N_x = \{j \in N | x_j = \bar{x}_j\}$,

akan ditunjukkan bahwa $x \in S(A,b)$. Misal $k \in M$ dan $j \in N_x, a_{kj} \otimes x_j \le b_k$ jika $a_{kj} = \epsilon$. Jika $a_{kj} \ne \epsilon$ maka

$$a_{kj} \otimes x_j \le a_{kj} \otimes \bar{x}_j \le a_{kj} \otimes b_k \otimes a_{kj}^{-1} = b_k. \qquad (2.3)$$

Oleh karena itu $A \otimes x \le b$. Pada waktu yang sama, $k \in M_j$ untuk suatu $j \in N$ yang memenuhi $x_j = \bar{x}_j$. Untuk j ini, kedua pertidaksamaan yang terdapat di dalam pertidaksamaan (2.3) adalah persamaan dan karena itu $A \otimes x = b$. □

Kemudian Cuninghame-Green (1979) mendefinisikan penyelesaian dasar sistem (2.1) yang dapat dilihat pada Definisi 2.3.

Definisi 2.3

Sistem (2.1) mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika $\bar{x}$ adalah penyelesaian sistem tersebut. Kemudian, vektor $\bar{x}$ disebut penyelesaian dasar sistem (2.1).

Karena $\bar{x}$ adalah penyelesaian dasar sistem (2.1), Butkovic(2010) menyebutkan dua akibat yang muncul dari Teorema 2.1. Akibat 2.2 menjelaskan tentang kriteria sistem persamaan linear

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

yang memiliki penyelesaian dan Akibat 2.3 menjelaskan tentang kriteria sistem persamaan linear yang memiliki penyelesaian tunggal.

Akibat 2.2

Misalkan $A \in \bar{R}^{m\times n}$ adalah *doubly R-astic* dan $b \in R^m$, tiga pernyataanberikut ekuivalen.

1) $S(A,b) \neq \emptyset$.
2) $\bar{x} \in S(A,b)$.
3) $\cup_{j\in N} M_j(A,b) = M$.

Akibat 2.3

Misalkan $A \in \bar{R}^{m\times n}$ adalah *doubly R-astic* dan $b \in R^m$, $S(A,b) = \bar{x}$ jika dan hanya jika

1) $\cup_{j\in N} M_j(A,b) = M$ dan
2) $\cup_{j\in N'} M_j(A,b) \neq M$ untuk setiap $N' \subseteq N, N' \neq N$.

B.3. Sistem Pertidaksamaan Linear

Selain sistem pertidaksamaan linear, di dalam alajabar maks-plus juga terdapat sistem pertidaksamaan linear. Menurut Tam(2010), sistem pertidaksamaan linear didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 13

Diberikan $A = (a_{ij}) \in \bar{R}^{m\times n}$ dan $b = (b_1, \dots, b_m) \in \bar{R}^m$. Sistem

$$A \otimes x \leq b \tag{3.1}$$

disebut sistem pertidaksamaan linear (sistem pertidaksamaan maks-linear satu sisi).

Selanjutnya Butkovic (2010) menjelaskan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear melalui teorema berikut.

Teorema 3.1

Diberikan $A = (a_{ij}) \in \bar{\bar{R}}^{m\times n}, b = (b_1, \dots, b_m) \in \bar{\bar{R}}^m$ dan $x \in \bar{\bar{R}}^n$. Sistem pertidaksamaan linear $A \otimes x \leq b$ jika dan hanya jika $x \leq A^* \otimes' b$.

Bukti.

Tiga pernyataan berikut ekuivalen.

$$A \otimes x \leq b.$$

$$\sum_{j\in N}^{\oplus} (a_{ij} \otimes x_j) \leq b_i, \forall i \in M.$$

$$a_{ij} \otimes x_j \leq b_i, \forall i \in M, \forall j \in N.$$

Secara umum, $a^* \otimes' b = -a + b$ sehingga jika $a = +\infty$ dan $b = -\infty$ maka $x = -\infty$ adalah penyelesaian tunggal untuk $a \otimes x \leq b$ dan x yang memenuhi $x \leq a^* \otimes' b$ adalah $x \leq -\infty$, dengan $a, b, x \in \bar{\bar{R}}$. Untuk semua kasus lain, dengan $a, b \in \{-\infty, +\infty\}$, himpunan penyelesaian untuk $a \otimes x \leq b$ adalah $\bar{\bar{R}}$ dan x yang memenuhi $x \leq a^* \otimes' b$ adalah $x \leq +\infty$. Jadi, pernyataan berikut ekuivalen.

$$\begin{aligned} a_{ij} \otimes x_j &\leq b_i, \forall i \in M, \forall j \in N. \\ x_j &\leq (a_{ij})^* \otimes' b_i, \forall i \in M, \forall j \in N. \\ x_j &\leq (a_{ji}^*) \otimes' b_i, \forall i \in M, \forall j \in N. \\ x_j &\leq \textstyle\sum_{i\in M}^{\oplus'} (a_{ji}^* \otimes' b_i), \forall j \in N. \\ x &\leq A^* \otimes' b. \end{aligned}$$

□

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Berdasarkan Definisi 2.3, $\bar{x} = A^{*} \otimes {}'b$ jika A adalah *doubly R-astic* dan b berhingga. Oleh karena itu, $\bar{x} = A^{*} \otimes {}'b$ adalah penyelesaian dasar dari sistem (2.1) dan (3.1) dengan $A \in \bar{R}^{m\times n}$ dan $b \in \bar{R}^{m}$. Jadi, penyelesaian dasar adalah penyelesaian terbesar dari sistem (3.1).

B.4. Himpunan Bayangan dan Matriks Reguler Kuat

Untuk sistem (2.1), Tam(2010) memberikan Definisi 4.1 sampai Definisi 4.4 dan Teorema 4.1. Definisi 4.1 menjelaskan tentang himpunan bayangan. Berbeda dengan aljabar abstrak, di dalam aljabar maks-plus terdapat definisi bebas linear kuat yang mana dapat dilihat pada Definisi 4.2. Definisi 4.3 menjelaskan tentang matriks reguler kuat, Definisi 4.4 menjelaskan tentang himpunan bayangan sederhana dan Teorema 4.1 menjelaskan kemungkinan jumlah penyelesaian sistem (2.1).

Definisi 4.1

Diberikan $A \in \bar{R}^{m\times n}$. Himpunan bayangan (*image set*) dari matriks A adalah $Im(A) = \{A \otimes x | x \in \bar{R}^{n}\}$.

Definisi 4.2

Vektor-vektor $A_{1,}, \dots, A_n \in \bar{R}^{m}$ bebas linear kuat jika terdapat suatu $b \in R^{m}$ sedemikian sehingga b dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari $A_{1,}, \dots, A_n$ secara tunggal.

Definisi 4.3

Untuk vektor-vektor $A_{1,}, \dots, A_n \in \bar{R}^{m}$ yang bebas linear kuat, jika $m = n$ maka matriks $A = (A_{1,}, \dots, A_n)$ disebut reguler kuat.

Definisi 4.4

Diberikan $A \in \bar{R}^{m\times n}$. Himpunan $S_A = \{b \in R^{m} | A \otimes x = b$ mempunyai penyelesaian tunggal$\}$ disebut himpunan bayangan sederhana (*simple image set*) dari matriks A.

Teorema 4.1

Misalkan $A \in \bar{R}^{m\times n}$ adalah *doubly R-astic* dan $b \in R^{m}$, maka $|S(A,b)| \in \{0,1,\infty\}$.

Selain matriks reguler kuat, di dalam aljabar maks-plus juga didefinisikan matriks yang mempunyai permanen kuat. Oleh karena itu, Butkovic (2010) memberikan Definisi 4.5 sampai Definisi 4.7, yang mana berkaitan dengan matriks yang mempunyai permanen kuat.

Definisi 4.5

Himpunan semua permutasi dari N disebut P_n.

Definisi 4.6

Diberikan $A \in \bar{R}^{n\times n}$ dan $\pi \in P_n$, nilai $\omega(A,\pi) = \prod_{j\in n}^{\otimes} a_{j,\pi(j)}$.

Definisi 4.7

Nilai $maper(A) = \sum_{\pi\in P_n}^{\oplus} \omega(A,\pi)$.

Kemudian, Tam(2010) memberikan Definisi 4.8 yang menjelaskan tentang matriks yang mempunyai permanen kuat.

Definisi 4.8

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Himpunan dari semua permutasi yang optimal disebut $ap(A)$, dengan $ap(A) = \{\pi \in P_n | maper(A) = \omega(A, \pi)\}$. Jika $|ap(A)| = 1$ maka dikatakan A mempunyai permanen kuat.

Sebelum dibahas keterkaitan antara matriks reguler kuat dengan matriks yang mempunyai permanen kuat, terlebih dahulu diberikan definisi *dense* dan digraf *associated* yang mengacu pada Cuninghame-Green (1995).

Definisi 4.9

Himpunan G disebut *dense* jika untuk semua $a, b \in G$ dengan $a < b$, interval terbuka $(a, b) \neq \emptyset$.

Definisi 4.10

Misalkan $A \in \bar{R}^{n \times n}$. Digraf *associated* (D_A)adalah digraf *arc-weighted* lengkap.

Definisi 4.11

Suatu matriks real disebut definit jika semua elemen diagonalnya adalah unit dan tidak ada *cycle* yang positif pada digraf *associated*.

Untuk memperjelas pembahasan lema dan teorema selanjutnya, Butkovic(2000) memberikan Definisi 4.12 sampai Definisi 4.15, yang menjelaskan tentang matriks normal, *similar(sim)*, matriks $\tilde{A}$, dan $A^{[k]}$.

Definisi 4.12

Misalkan $A \in \bar{R}^{n \times n}$, matriks A disebut normal jika setiap elemennya adalah non-positif dan semua elemen diagonalnya adalah unit.

Definisi 4.13

Misalkan $A, B \in \bar{R}^{n \times n}$ dan P, Q adalah matriks permutasi yang diperumum. Jika $A = P \otimes B \otimes Q$ maka $A \sim B$.

Definisi 4.14

Diberikan $A \in \bar{R}^{n \times n}$. Matriks $\tilde{A}$ adlah matriks yang berasal dari matriks A dan semua elemen diagonalnya diganti dengan ϵ.

Definisi 4.15

Misalkan $A \in \bar{R}^{n \times n}$ dan k adalah bilangan bulat positif maka $A^{[k]} = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^k$.

Kemudian, Butkovic (2000) memberikan tujuh lema yang menunjang untuk pembuktian teorema selanjutnya.

Lema 4.1

Diberikan $A \in \bar{R}^{n \times n}$. Jika A reguler kuat maka A mempunyai permanen kuat.

Lema 4.2

Misalkan $A, B \in \bar{R}^{n \times n}$. Jika $A \sim B$ maka $ap(A) = ap(B)$.

Lema 4.3

Misalkan $A \sim B$. Matriks A adalah matriks reguler kuat jika dan hanya jika B adalah matriks reguler kuat.

Lema 4.4

Misalkan $A \in R^{n \times n}$ adalah matriks definit. Matriks A adalah matriks yang mempunyai permanen kuat jika dan hanya jika setiap *cycle* di $\tilde{A}$ adalah negatif.

Lema 4.5

 ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

Jika R adalah *dense*, $a > e$ dan k adalah bilangan bulat positif maka terdapat suatu elemen $b > e$ sedemikian hingga $b^k < a$.

Lema 4.6

Jika $A \in \bar{R}^{n\times n}$ dan tidak ada *cycle* yang positif di D_A maka $A^{[k]}$ adalah matriks yang sama untuk semua $k \geq n-1$(matriks ini dinotasikan dengan A^{θ}). Lebih lanjut, jika semua elemen diagonal dari A adalah e maka $A^{\theta} = A^k$ sama untuk semua $k \geq n-1$. Hal ini benar, khususnya untuk matriks normal.

Lema 4.7

Misalkan $A \in \bar{R}^{n\times n}$ adalah matriks definit dan $Sa_A = \{v; \tilde{A} \otimes v \leq g \otimes v, g < e\}$. Matriks A adalah matriks reguler kuat jika dan hanya jika terdapat $g < e$ sedemikian hingga $Sa_A \neq \emptyset$.

Dengan menggunakan Lema 4.1 sampai Lema 4.7, Butkovic (2000) menjelaskan keterkaitan antara matriks reguler kuat dengan matriks yang mempunyai permanen kuat pada teorema berikut.

Teorema 4.2

Misalkan $A \in \bar{R}^{m\times n}$ adalah *doubly R-astic*. Matriks A adalah matriks reguler kuat jika dan hanya jika matriks A mempunyai permanen kuat.

Bukti.

Berdasarkan Lema 4.1, terbukti bahwa jika matriks Aadalah matriks reguler kuat maka matriks A mempunyai permanen kuat. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa jika matriks A mempunyai permanen kuat maka matriks Aadalah matriks reguler kuat. Berdaasarkan Lema 4.3, perubahan matriks B menjadi matriks A tidak mempengaruhi sifat reguler kuat dan sifat permanen kuat, tanpa mengurangi keumuman, diasumsikan bahwa A adalah matriks normal (sehingga A adalah matriks definit). Berdasarkan Lema 4.4, dapat diasumsikan bahwa setiap *cycle* di $D_{\tilde{A}}$ mempunyai bobot negatif. Berdasarkan Lema 4.5, terdapat $g \in R, g < e$ sedemikian hingga $g^n \geq \max\{\omega(\tilde{A},\sigma); \sigma$ adalah *cycle* dasar pada himpunan bagian $\{1,2,\ldots,n\}\}$. Misalkan B adalah matriks $g^{-1} \otimes \tilde{A}$ dan σ adalah *cycle* dasar maka $\omega(B,\sigma) = g^{-l(\sigma)} \otimes \omega(\tilde{A},\sigma) \leq g^{-n} \otimes \omega(\tilde{A},\sigma) \leq e$. Jelas bahwa tidak ada *cycle* positif di D_B. Oleh karena itu, menggunakan Lema 4.6 diperoleh $B \otimes B^{\theta} = B \otimes \left(I \oplus B \oplus B^2 \oplus \ldots \oplus B^{n-1}\right) = B \oplus B^2 \oplus \ldots \oplus B^n = B^{\theta}$. Jika v adalah sembarang kolom dari B^{θ} maka $B \otimes v \leq v$ atau ekuivalen dengan $g^{-1} \otimes \tilde{A} \otimes v \leq v$. Kemudian, dengan mengalikan g dari sebelah kiri pada kedua ruas, diperoleh $\tilde{A} \otimes v \leq g \otimes v$, sehingga berdasarkan Lema 4.7, A adalah matriks reguler kuat. □

C. SIMPULAN

Berdasarkan pembahasan dapat dimbil kesimpulan sebagai berikut.

1) Diberikan $A = (a_{ij}) \in \bar{R}^{m\times n}$ dan $b = (b_1,\ldots,b_m) \in \bar{R}^m$. Sistem $A \otimes x = b$ adalah sistem persamaan linear dalam aljabar maks-plus. Penyelesaian dari sistem persamaan linear dalam aljabar maks-plus adalah $x \in S(A,b)$.
2) Diberikan $A = (a_{ij}) \in \bar{R}^{m\times n}$ dan $b = (b_1,\ldots,b_m) \in \bar{R}^m$, sistem $A \otimes x \leq b$ adalah sistem pertidaksamaan linear dalam aljabar maks-plus. Penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear dalam aljabar maks-plus adalah $x \leq A^* \otimes {}'b$.
3) a) Di dalam sistem linear khususnya sistem persamaan linear, jika matriks A adalah matriks reguler kuat maka sistem persamaan linear tersebut kemungkinan mempunyai penyelesaian tunggal.

ISBN : 978 – 979 – 16353 – 9 – 4

b) Untuk suatu sistem persamaan linear yang mempunyai penyelesaian tunggal, himpunan bayangan dari matriks A adalah himpunan bayangan sederhana.

D. DAFTAR PUSTAKA

Akian, M., G. Kohen, S. Gaubert, J. P. Quadrat and M. Viot. 1994. *Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians. pp:1502-1511.

Baccelli, F., G. Kohen, G. J. Olsder and J. P. Quadrat. 2001. *Synchronization and Linearity An Algebra for Discrete Event Systems.* New York: Wiley.

Butkovic, P. 2003. *Max-Algebra: The Linear Algebra of Combinatorics?.* Linear Algebra and Application. Vol. 367. Pp:313-335.

Butkovic, P. 2010. *Max Linear Systems: Theory and Algorithm*, London: Springer.

Butkovic, P. 2000. *Simple Image Set of (max,+) Linear Mappings.* Discrete Applied Mathematics. Vol. 105, pp:73-86.

Cuninghame-Green, R.A. 1979. *Minimax Algebra,* Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Vol. 166. Berlin: Springer.

Cuninghame-Green, R.A. 1995. *Minimax Algebra and Applications in: Advances in Imaging an Electron Physics.* Vol. 90. New York: Academic Press.

Schutter, B.D., and T. V. D. Boom. 2008. *Max-Plus Algebra And Max-Plus Linear Discrete Event Systems: An Introduction.* Proceedings of the 9th International Workshop on Discrete Event Systems (WODES'08), pp:36-42.

Tam, K.P. 2010. *Optimizing and Approximating Eigen Vectors in Max-Algebra.* Birmingham: University of Birmingham.