

Memahatkan Spirit *Young Mathematicians* Pada Diri Siswa

Oleh :

Agung Prabowo

Program Studi Matematika

Fakultas Sains dan Teknik - Universitas Jenderal Soedirman

Jl. Dr. Suparno No. 64 Karangwangkal, Purwokerto

Email: agung.prabowo@unsoed.ac.id ; agung_nghp@yahoo.com

Abstrak. Para penemu matematika tidak serta merta memperoleh bentuk matematika yang formal (*formal mathematical language*). Mereka perlu menggunakan berbagai strategi dan pengetahuan informal terlebih dahulu sebelum menemukan rumus, algoritma, atau teorema. Mereka perlu terlebih dahulu mengetahui dan belajar beragam cara penyelesaian suatu masalah, melakukan eksplorasi dan berusaha mencari solusi dengan mencobakan berbagai strategi, sehingga proses penemuan pengetahuan matematika dimulai dari himpunan berbagai pengetahuan sejenis yang kemudian melahirkan konjektur. Dalam PMRI, semangat (jiwa/spirit) yang seperti ini diakomodasi dan diberikan ruang seluas-luasnya untuk tumbuh berkembang dengan harapan membelajarkan siswa menjadi *young mathematicians* atau *amateur mathematicians*. Mereka dibimbing untuk menemukan kembali (*guided reinvention*), bukan menggunakan hasil penemuan yang sudah siap pakai berupa rumus, algoritma, prosedur, teorema dan lain-lain. Di masa dewasanya, tidak berlebihan kiranya jika para siswa yang belajar matematika dengan pendekatan PMRI akan lebih berpeluang untuk memperoleh suatu *invention*, karena jiwa dan semangat untuk menemukan telah ditumbuhkan sejak masa yang sangat dini. Dengan demikian, melalui pendekatan PMRI dapat ditumbuhkan/ditanamkan semangat meneliti sejak sangat awal kepada para siswa.

Kata kunci: *amateur/young mathematicians*, *invention*, PMRI.

1. Pendahuluan

Sukandi (2007) berpendapat bahwa selama ini, pembelajaran matematika lebih menekankan pada aspek material. Sementara itu, KBK yang kemudian disempurnakan (atau diganti) menjadi KTSP menghendaki agar aspek material dan aspek formal keduanya sama-sama dikembangkan. Aspek material lebih menggambarkan penguasaan konsep dan keterampilan sedangkan aspek formal mendukung ke arah pengembangan nalar siswa. Melalui pengembangan aspek formal, siswa dilatih cara berpikir, bernalar dan menarik kesimpulan yang antara lain dapat dilakukan melalui kegiatan eksplorasi dan penyelidikan. Siswa juga dilatih untuk mengembangkan berpikir divergen (alternatif) dengan menemukan cara lain, berpikir sintesis untuk mengembangkan kreatifitas, berpikir analitis dengan mencermati pola dan hubungan, berpikir sistematis (runtut), dan berpikir logis. Kemampuan-kemampuan berpikir tersebut sangat vital dalam pemecahan masalah, sehingga diharapkan siswa akan dapat memecahkan masalah yang dihadapi baik masalah dalam matematika, pelajaran lain, atau masalah yang dijumpainya dalam kehidupan sehari-hari.

Lebih jauh Sukandi (2007) menegaskan bahwa untuk menghadapi masa depan yang laju perubahannya semakin cepat, maka tujuan pembelajaran matematika harus lebih diarahkan untuk mengembangkan aspek formal, disebabkan aspek material sudah banyak yang dapat diselesaikan dengan bantuan mesin. Penekanan pada aspek formal seperti kemampuan bernalar, menarik kesimpulan, dan berpikir divergen, sintesis, sistematis, dan logis merupakan kemampuan-kemampuan yang dimiliki oleh para matematikawan. Salah satu pendekatan dalam pembelajaran matematika yang secara sadar didisain untuk mengembangkan aspek formal adalah pendekatan PMRI, yang dapat diidentifikasi dari landasan, prinsip dan karakteristiknya. Dengan menanamkan kemampuan-kemampuan tersebut sejak awal, diharapkan pada diri siswa akan terpahat

spirit yang dimiliki para matematikawan, sehingga dalam tulisan ini masalah yang dirumuskan adalah bagaimana pembelajaran matematika dengan pendekatan PMRI relevan untuk menanamkan, menumbuhkan dan memahatkan spirit untuk menjadi *young mathematicians*.

Maksud atau tujuan dari tulisan ini adalah untuk kembali menyadarkan bahwa belajar matematika bukan saja belajar ilmu matematika atau cara berpikirnya, tetapi juga, penting untuk menanamkan semangat dan spirit yang diperlukan dalam mempelajari matematika sebagai warisan tak bendawi. Dengan demikian, matematika dapat memberi manfaat berupa pengetahuan matematika, cara berpikir dan spirit atau semangat. Beberapa spirit tersebut antara lain: selalu dapat memotivasi dirinya sendiri, terus mencoba, *survive*, *struggle*, mentransformasi kesalahan menjadi kekuatan, menjadikan matematika sebagai aktifitas hidupnya, kegigihan, ketekunan, semangat berkontribusi dan refleksi. Untuk mencapai tujuan tersebut maka sejarah matematika perlu dihidupkan secara dinamis serta dimanfaatkan sebagai pengetahuan informal untuk sampai pada pengetahuan formal matematika melalui pendekatan PMRI. Pemberdayaan pengetahuan informal siswa dalam PMRI sebagai wahana untuk menemukan kembali pengetahuan formal matematika, dapat diberikan contohnya dengan membelajarkan matematika melalui konjektur untuk menanamkan keyakinan dan percaya diri siswa.

2. Kedudukan Sejarah Matematika dalam PMRI

Pandangan lama tentang matematika adalah matematika bersifat absolut, sudah ada di alam semesta dan manusia tinggal menemukannya kembali (Sembiring, 2009). Matematika bersifat abstrak, membosankan, menakutkan, dan hanya punya jawaban tunggal untuk setiap permasalahan, serta hanya dapat dipahami oleh segelintir orang. Selama ini matematika diajarkan sebagai produk jadi dan siap pakai, misalnya dalam bentuk rumus dan algoritma, sehingga matematika dirasakan sebagai pelajaran yang kering, sulit dan abstrak. Pembelajaran matematika yang demikian berpotensi untuk memasung kreatifitas. Bagi banyak siswa, rumus dan konsep matematika dipelajari dengan cara menghafal dan tidak disertai pemahaman sehingga siswa akan mengalami kegagalan ketika dihadapkan dengan permasalahan yang relatif belum pernah dikenalnya. Siswa diajarkan untuk meniru dan mencontoh secara persis sama cara yang diberikan guru sehingga dalam diri siswa tidak tumbuh inisiatif dan sikap kreatif. Siswa tidak didorong untuk mengoptimalkan potensinya dan pembelajaran matematika dianggap tidak berkaitan dengan pengembangan kepribadian siswa, hanya mengembangkan aspek kognitif.

Pandangan modern yang diwakili oleh pendekatan PMRI melihat matematika sebagai kegiatan manusia yang dapat dipahami oleh semua orang dan bahkan menyenangkan serta dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari. Suatu permasalahan mungkin dapat mempunyai lebih dari satu jawaban atau malah mungkin tidak mempunyai jawaban sama sekali. Pembelajaran seperti ini tidak lagi memasung tetapi membuka kran kreatifitas.

Dalam PMRI, sejarah matematika dapat dijadikan sebagai sumber inspirasi, sebagai sarana untuk belajar bagaimana matematika ditemukan, sebagai sarana untuk belajar bagaimana para ahli matematika dulu bekerja menemukan matematika (karya-karyanya) dan dengan mencermati perjalanan hidupnya, dapat turut serta mewarisi jiwa, semangat serta meyerap motivasi mereka (Prabowo, 2010). Sejarah matematika juga dapat digunakan untuk membantu siswa dalam mengembangkan strategi-strategi

informal untuk memecahkan persoalan berdasarkan masalah nyata yang pernah dihadapinya. Dalam PMRI, setiap siswa dapat menemukan strategi informalnya sendiri-sendiri yang tentunya dapat berbeda satu siswa dengan yang lainnya. Dari semua strategi yang berhasil dikumpulkan, guru harus mampu memilih strategi yang dapat digunakan untuk membelajarkan siswa agar sampai kepada pengetahuan formal matematika.

Selama ini, sejarah matematika diajarkan bagai terpisah dari matematika, bahwa sejarah matematika bukanlah matematika dan tidak mempunyai kaitan dengan matematika. Sejarah matematika dipelajari lebih sebagai pengetahuan masa lalu yang sayang jika dilupakan begitu saja. Tanpa bermaksud untuk menjadikan sejarah matematika sebagai matematika, setidaknya sejarah matematika dapat menjadi pengetahuan yang kemudian dikembangkan menjadi pengetahuan matematika yang sekarang ini diajarkan di ruang kelas, sehingga sejarah matematika mempunyai kaitan yang kuat dengan matematika.

Sejarah matematika merekam berbagai kesalahan dan kegagalan yang telah dilakukan sebelum akhirnya ditemukan pengetahuan matematika yang benar. Belajar dari kesalahan adalah perlu dan berbuat kesalahan dalam matematika adalah hal yang manusiawi. Kesalahan yang telah dilakukan sesungguhnya adalah kekuatan. Semua kesalahan tersebut sesungguhnya menunjukkan adanya beberapa aspek yang perlu segera diperbaiki, dan pentingnya belajar dari kesalahan adalah agar tidak lagi melakukan kesalahan yang sama. Kesalahan yang dilakukan bukanlah untuk memvonis ketidakmampuannya dalam berhadapan dengan matematika

Untuk kebanyakan siswa dan situasi yang terjadi di dalam kelas, paling baik diterapkan pendekatan penemuan terbimbing Polla, 2005). Prinsip pertama PMRI (RME) *Guided Reinvention Through Progressive Mathematization* sejalan dengan pendapat Polla tersebut. Prinsip ini memberikan kesempatan kepada para siswa untuk melakukan proses eksperimen seperti proses yang dilakukan pada saat matematika ditemukan dan guru perlu merancang proses eksperimen tersebut dengan mempertimbangkan arah pembelajaran yang bersifat alamiah dengan cara memperkirakan terlebih dahulu jalur-jalur yang akan ditempuh siswa dalam menemukan konsep matematika. Guru memimpin dan membimbing siswa dengan tahapan-tahapan yang benar, memberi kesempatan untuk diskusi, mengajukan pertanyaan yang menuntun, dan memperkenalkan ide-ide pokok yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah yang sedang dipecahkan. Siswa didorong dan diminta untuk memberikan kontribusi (prinsip ketiga: *The Use of Students Own Productions and Constructions or Students Contribution*) berupa penemuannya sendiri menggunakan intuisi dan pengalaman yang telah dimilikinya, dengan atau tanpa bantuan guru. Hal ini akan dirasakan siswa sebagai bentuk kerja sama yang menyenangkan dan sejalan dengan karakteristik PMRI yang keempat *The Interactive Character of the Teaching Process or Interactivity*. Harapannya, akan diperoleh penemuan kreatif, beginilah konteks atau situasi permasalahannya prinsip pertama: *The Use Of Contexts*) dan kemudian lakukan eksplorasi dan penyelidikan.

Polla (2005) menegaskan dari sejarah matematika dapat digali fakta bahwa matematikawan adalah manusia biasa. Mereka punya kelemahan dan pernah salah sebelum menemukan pengetahuan matematika yang benar. Dengan demikian, dalam sejarah matematika juga terrekam dan tersimpan berbagai pengetahuan yang gagal menjadi pengetahuan formal matematika, sehingga pengetahuan tersebut tidak pernah

tertulis dalam buku teks pelajaran matematika. Sebagai contoh adalah rumus-rumus untuk menentukan bilangan prima ke- n , misalnya

$$\pi(n) = n^2 + n + 17 \quad \text{berlaku untuk } 1 \leq n \leq 16$$

$$\pi(n) = 2n^2 + 29 \quad \text{berlaku untuk } 1 \leq n \leq 28$$

$$\pi(n) = n^2 - n + 41 \quad \text{berlaku untuk } 1 \leq n \leq 40$$

$$\pi(n) = n^2 - 79n + 1601 \quad \text{berlaku untuk } 1 \leq n \leq 79$$

Semua usaha ini, memperlihatkan bahwa spirit untuk mencari rumus bilangan prima ke- n dalam bentuk polinom tidak pernah selesai dilakukan. Selalu saja muncul gairah baru untuk memperbanyak koleksi bilangan prima sehingga diciptakan rumus-rumus baru yang keberlakuannya semakin luas. Spirit yang tersimpan dalam sejarah matematika ini hendaknya dapat diwariskan kepada mereka yang sedang mempelajari matematika, bahwa pengetahuan matematika itu berkembang dan untuk mengembangkannya diperlukan tidak saja pengetahuan awal matematika tetapi juga semangat dan motivasi yang antara lain dapat diserap dengan mengerjakan matematika sebagai aktifitas manusia. Hal ini sejalan dengan pendapat Polla (2005) bahwa dengan mempelajari sejarah matematika akan diperoleh pengalaman cara-cara para matematikawan bekerja dalam menemukan sesuatu sehingga siswa dapat melakukan '*learning how to learn*' dan menyerap semangat atau motivasinya sehingga siswa diharapkan dapat belajar mandiri tanpa selalu bergantung kepada guru atau orang dewasa lainnya.

Menengok sejarah, Pythagoras tidak serta merta mampu memberikan bukti untuk rumus yang berlaku pada segitiga siku-siku $c^2 = a^2 + b^2$. Demikian pula dengan Euclid, ia tidak *ujug-ujug* menemukan algoritma Euclid untuk menentukan *gcd* antara dua buah bilangan bulat. Sama halnya dengan Goldbach, perlu waktu dan kerja keras sebelum menemukan konjekturnya dan juga Pierre de Fermat dalam upaya mengkreasi dan membuktikan teorema yang sekarang dikenal sebagai Teorema Terakhir Fermat. Pembelajaran seperti apa yang mereka peroleh selama menjadi pekerja matematika dan yang sekaligus dapat ditularkan pada generasi sekarang? Mereka perlu terlebih dahulu mengetahui dan belajar beragam cara penyelesaian suatu masalah dan berusaha mencari solusi dengan mencobakan berbagai strategi alternatif.

Polla (2005) juga menegaskan pentingnya mempelajari sejarah hidup para matematikawan dan semua kontribusi yang diberikannya. Hippasus yang memilih mati ditenggelamkan di laut demi mempertahankan keyakinan akan adanya bilangan irasional, meninggalkan pesan bahwa keyakinan terhadap kebenaran harus dipertahankan meski kematian menjadi konsekuensinya. Hypatia, yang memilih hidup sendiri untuk menekuni dan mengembangkan matematika yang pada masa hidupnya perkembangan matematika mendekati keruntuhan. Pesan yang hendak disampaikan adalah selalu konsisten dengan keyakinannya meski sebagian besar orang tidak sejalan dengan pilihan hidupnya. Leonhard Euler yang kontribusinya sangat banyak dalam matematika antara lain menjadi yang pertama kali dalam menggunakan simbol π , menggunakan simbol i untuk $\sqrt{-1}$ dan menggunakan simbol e untuk bilangan transenden 2,718281... sebagai limit dari $(1 + \frac{1}{n})^n$ untuk n membesar tanpa batas (Polla, 2005). Euler juga berkontribusi dalam menemukan relasi antara π , i , dan e yaitu $e^{\pi i} + 1 = 0$. Sangat jelas pesan yang dapat diserap dari kisah hidup Leonhard Euler.

Dengan demikian, jika sejarah matematika dipelajari dengan cara yang benar (bukan berarti selama ini salah, namun belum diberdayakan sebagaimana mestinya), tidak hanya pengetahuan tentang nama, tempat tanggal lahir dan kematiannya, serta hasil-hasil yang disumbangkan, namun juga motivasi, semangat, jiwa, *belief*, cara bekerja, sikap tidak pernah menyerah dapat dipahatkan di ruang kelas (Prabowo, 2010).

3. Konjektur dan Teorema: Keyakinan dan Kebenaran

Konjektur adalah '*propotion that has not been proven, but is favored by some serious evidence*' (Byers, 2007). Konjektur dapat dikatakan sebagai cikal bakal (embrio) suatu teorema, dan karena konjektur tetap mempunyai dua sisi, kemungkinan untuk benar dan salah. Belajar matematika melalui konjektur akan memunculkan berbagai dugaan/tebakan (*guess*). Apapun dugaan yang diberikan, selalu terdapat peluang bahwa dugaan yang dibuat salah. Jika suatu konjektur diduga salah maka sebuah saja contoh penyangkal (*counter example*) harus dapat diberikan untuk menggugurkannya menjadi suatu teorema., dan jika konjektur tersebut diduga benar, maka dimunculkan pertanyaan mengapa konjektur tersebut benar dan dituntut untuk dapat memberikan buktinya.

Adanya konjektur memperlihatkan bahwa dalam matematika masih terdapat permasalahan yang belum dapat diselesaikan. Sementara, konjektur yang kemudian dapat diberikan buktinya sehingga menjadi teorema dapat digunakan sebagai wahana untuk belajar matematika yang memungkinkan siswa untuk menyerap, mewarisi dan memahatkan berbagai spirit yang dibutuhkan untuk mempelajari matematika. Spirit tersebut tidak akan dijumpai jika pembelajaran matematika langsung diberikan dalam bentuk rumus yang siap saji. Dengan demikian, konjektur dapat menjadi *model for* bagi suatu teorema. *Model of* dapat direkonstruksi sehingga dari *model of* tersebut dapat dimunculkan *model for* berupa konjektur (prinsip kedua: *The Use Of Models Or Bridging By Vertical Instruments*).

Pembelajaran matematika melalui konjektur juga dapat dipandang sebagai menumbuhkan keyakinan demi keyakinan pada mental siswa. Jika selama ini siswa belajar matematika dapat dipandang sebagai pengenalan terhadap kebenaran, maka pembelajaran matematika melalui konjektur yang dilanjutkan dengan penemuan kembali pengetahuan matematika yang formal dapat dipandang sebagai menghimpun atau mengakumulasi keyakinan hingga siswa dapat mengetahui dengan sadar kebenaran matematika. Dengan kata lain, kebenaran matematika tidak disuapkan tapi dibangun sedikit demi sedikit dimulai dengan menumbuhkan keyakinan dan percaya diri pada diri siswa. Kebenaran matematika tidak diperoleh karena diberitahu, tetapi diperoleh berdasarkan rangkaian pengalamannya ketika bekerja dengan matematika dan menjadikan matematika sebagai aktifitas manusia.

Selain menumbuhkan keyakinan, pembelajaran melalui konjektur juga dapat dikemas dalam bentuk pertanyaan yang lebih menantang, sehingga siswa lebih tertarik dan termotivasi untuk menyelesaikannya. Konjektur yang juga ditandai dengan proses pengulangan mempunyai peran yang berbeda dengan pengulangan pemberian pertanyaan sejenis yang berfungsi untuk lebih mengekalkan pemahaman konsep pengetahuan matematika yang sudah (baru saja) dipelajari, bahwa pengetahuan matematika yang sedang dipelajarinya adalah benar. Pengulangan dalam konjektur, akan menghasilkan sekumpulan fakta yang berpola, berperan untuk menumbuhkan keyakinan dan membelajarkan bagaimana membuat suatu prediksi atau dugaan yang lebih luas dan berbagai kemungkinan yang dapat terjadi. Dengan demikian, peran

konjektur adalah menumbuhkan semacam positive affirmation yaitu pengulangan yang bertujuan menguatkan keyakinan. Dampak berikutnya adalah siswa akan semakin mempunyai penilaian positif terhadap dirinya sendiri, semakin merasa bahwa dirinya berharga dan merasa bangga dengan dirinya sendiri (*self-esteem*). Kemandirian siswa akan semakin kuat.

Sementara itu, teorema, rumus, algoritma adalah pengetahuan matematika bentuk jadi dan sudah siap jadi. Pembelajaran matematika melalui pemberian rumus pada siswa sekolah hanya berguna untuk menunjukkan bahwa pengetahuan matematika yang sudah dikuasai adalah benar sehingga pengetahuan matematika tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang dihadapinya. Ketika siswa dapat menggunakan rumus sebagaimana seharusnya, ia tahu bahwa yang dilakukannya adalah benar, bahwa ia telah berbuat secara benar. Jika ia menggunakan rumus yang sama untuk masalah sejenis dengan benar, maka ia semakin mengerti bahwa konsep yang telah dikuasainya adalah benar. Teorema, rumus dan algoritma hanyalah mengajarkan bagaimana melakukan atau mengerjakan sesuatu dengan benar, tetapi tidak menumbuhkan keyakinan-keyakinan seperti yang dapat diberikan oleh pembelajaran matematika dengan konjektur.

Sebagai contoh, seorang siswa yang telah belajar bahwa jumlah n buah bilangan ganjil yang pertama adalah n^2 , akan segera tahu bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + 19$ adalah 10^2 atau seratus. Siswa tersebut yakin bahwa jawaban yang diberikannya adalah benar, tanpa ia mau berusaha membuktikannya. Ia percaya bahwa jawaban yang diberikannya adalah benar sebab pengetahuan matematika yang diterimanya menyatakan hal yang demikian. Kebenaran yang diperolehnya bukanlah kebenaran yang berasal dari keyakinannya sendiri, tetapi kebenaran tersebut diperoleh karena ia diberi tahu. Pembelajaran matematika dengan cara diberitahu akan menghilangkan spirit untuk selalu mencoba, *struggle*, *survive*, dan kemampuan untuk senantiasa bertahan.

Akan lebih menarik dan menantang jika permasalahan jumlah n buah bilangan ganjil yang pertama diberikan sebagai pertanyaan yang menantang bagi siswa dan meminta siswa untuk mencoba setahap demi setahap hingga siswa dapat menemukan kembali pengetahuan matematika formal, bahwa hasilnya adalah n^2 . Dengan demikian, peran guru adalah sebagai motivator dan pembimbing untuk mengarahkan siswa kepada jawaban yang semestinya.

Seorang siswa dapat memulai mengeksplorasi permasalahan tersebut dengan mengajukan satu atau lebih ide. Beberapa ide yang dimunculkan siswa kemudian didiskusikan dan diperdebatkan di ruang kelas sehingga terjadi interaktifitas dan interaksi antar siswa atau antara siswa dengan guru. Guru selanjutnya dapat mengarahkan dengan memilih atau menawarkan suatu penyelesaian awal yang dapat digunakan untuk sampai pada jawaban yang seharusnya. Jika ternyata ide yang dimunculkan para siswa belum ada satupun yang dapat digunaka untuk sampai pada jawaban yang seharusnya, maka guru dapat memberikan pertanyaan-pertanyaan pancingan.

Beberapa ide yang mungkin diberikan siswa dapat dikategorikan sebagai *model of* adalah:

1	4	9	16	25
1	3	5	7	9
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●

Gambar 1. *Model of* Pertama

Dari *model of* di atas siswa akan dapat membuat *model of* selanjutnya sebagai pengembangan dari *model of* terdahulu

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

.....

Gambar 2. *Model of* Kedua

Model of ini akan menghantarkan siswa untuk membuat dugaan bahwa hasilnya adalah kuadrat dari suatu bilangan. Dugaan siswa tersebut tidak lain merupakan suatu konjektur. Kemudian, siswa dipastikan akan menguji dugaannya tersebut dengan $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Siswa akan bertambah yakin bahwa dugaannya benar. Siswa tersebut melakukan eksperimen lanjutannya, dan mendapati bahwa dugaan yang diyakininya adalah benar. Tentunya akan tumbuh rasa senang dan tertarik dengan aktifitas matematika tersebut dan berusaha untuk membuat kesimpulan dari seluruh hasil eksplorasinya. Metode ini akan menumbuhkan keyakinan pada diri siswa bahwa ia mampu menyelesaikan permasalahan yang sedang dihadapinya.

Model of lainnya yang dapat dikembangkan berupa segitiga Niccomachus

								Σ tiap baris	Σ kumulatif
			1					1	1
		3		5				8	9
	7		9		11			27	36
	13		15		17		19	64	100
21		23		25		27		125	225

Gambar 3. *Model of* Ketiga

Model of ini juga akan menghantarkan siswa untuk membuat dugaan atau prediksi dan dugaan atau prediksinya tersebut tentunya akan ia uji dengan menambahkan bilangan lainnya.

Dengan beragamnya *model of* yang dimunculkan siswa, guru dapat meminta siswa untuk mendiskusikannya dan memilih *model of* yang selanjutnya akan dikembangkan untuk sampai pada jawaban permasalahan yang sedang dipecahkan. Guru dapat membimbing siswa sehingga *model of* kedua dipilih untuk memperoleh jawaban permasalahan. Oleh karena bilangan ganjil dapat dinyatakan dengan $2n - 1$,

maka permasalahan yang diajukan dapat dinyatakan sebagai $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. Tentunya siswa dapat memberikan dugaan dari berbagai eksplorasi yang dilakukan bahwa hasilnya adalah n^2 , tetapi mengapa atau bagaimana hasil tersebut diperoleh. Dugaan siswa tersebut tidak lain merupakan suatu konjektur, bahwa jumlah n buah bilangan ganjil yang pertama adalah n^2 .

Model hendaknya mampu memperlihatkan terjadinya progres dari *model of* menuju ke *model for* yang memerlukan pemikiran lebih tinggi dan semakin kompleks sehingga dapat memperlihatkan perubahan dan perkembangan tingkat berpikir siswa, dari berpikir berdasarkan situasi kontekstual menuju ke berpikir dalam hubungan-hubungan matematis. Untuk itu, dari hasil diskusi dapat dipilih model of yang dapat dikembangkan menjadi model for, sehingga progres tersebut dapat terlihat.

Dengan memisalkan $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$ dan karena dalam penjumlahan berlaku sifat komutatif maka $S = (2n - 1) + \dots + 5 + 3 + 1$. Dengan menjumlahkan setiap kolomnya akan diperoleh $1 + (2n - 1) = 2n$, $3 + (2n - 3) = 2n$ dan seterusnya. Akibatnya $2S = n \times 2n = 2n^2$ dan $S = n^2$. Inilah model of yang berhasil ditemukan kembali oleh siswa sendiri. Pada akhirnya siswa memahami bahwa dugaan atau konjektur yang dirumuskannya adalah benar. Dengan demikian, siswa mempelajari bahwa matematika itu benar bukan karena ia diberitahu bahwa yang diajarkan kepadanya adalah suatu kebenaran, tetapi siswa sendiri yang menemukan kebenaran tersebut.

Pembelajaran yang seperti ini dapat memberi gambaran bagaimana para ahli matematika jaman dahulu menemukan pengetahuan matematika, bahwa $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ tidak muncul secara tiba-tiba tetapi melalui proses berpikir yang logis, runtut, dan sistematis. Meskipun $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ merupakan suatu teorema yang dibuktikan dengan Prinsip Induksi Matematika, tetapi pembelajaran dengan menganggapnya sebagai konjektur akan lebih menggambarkan diperolehnya pengetahuan matematika secara alamiah, sementara jika diajarkan sebagai suatu teorema maka akan langsung diberikan hasilnya yaitu n^2 .

Permasalahan dapat dikembangkan untuk menentukan $1 + 3 + 5 + \dots + 99 = \dots$. Tentu saja siswa tahu bahwa jawabannya adalah n^2 , namun permasalahannya adalah berapakah nilai n tersebut. Hal ini dapat menjadi permasalahan sederhana jika siswa sudah memahami bahwa n dapat ditentukan dari $2n - 1 = 99$. Namun demikian, pembelajaran secara tahap demi tahap melalui konjektur akan mendorong dan memotivasi siswa untuk menemukan berapakah nilai n tersebut, yaitu jumlah suku pertama dan suku terakhir dibagi dua. Spirit ini tidak akan begitu berhasil jika matematika diajarkan sebagai pengetahuan yang sudah jadi, sebab sebagian besar siswa tidak akan bersedia untuk mengeksplorasi menemukan berapakah nilai n , mungkin karena mereka tidak terbiasa atau tidak punya pengalaman sebelumnya. Pada akhir pembelajaran, siswa perlu didorong untuk melakukan refleksi sehingga siswa dapat merasakan apa yang dialaminya.

4. Kesimpulan dan Saran

Pembelajaran matematika dengan pendekatan PMRI dapat menumbuhkan dan memahatkan spirit-spirit tertentu yang dibutuhkan untuk menjadi matematikawan, dan spirit tersebut dapat ditularkan pada siswa yang belajar dengan pendekatan PMRI. Spirit-spirit tersebut antara lain selalu dapat memotivasi dirinya sendiri, terus mencoba, *survive*, *struggle*, mentransformasi kesalahan menjadi kekuatan, menjadikan

matematika sebagai aktifitas hidupnya, kegigihan, ketekunan, semangat berkontribusi dan refleksi. Selanjutnya, sejarah matematika dapat digunakan sebagai wahana untuk memahatkan spirit tersebut pada siswa sebagai *young mathematicians*. Hal ini dikarenakan sejarah matematika dapat dijadikan sebagai sumber inspirasi, sebagai sarana untuk belajar bagaimana matematika ditemukan, sebagai sarana untuk belajar bagaimana para ahli matematika dulu bekerja menemukan matematika (karya-karyanya) dan dengan mencermati perjalanan hidupnya, dapat turut serta mewarisi jiwa, semangat serta meyerap motivasi mereka. Salah satu hasil karya matematikawan yang terrekam dalam sejarah matematika adalah konjektur, dan pembelajaran matematika melalui konjektur dapat menumbuhkan keyakinan-keyakinan pada mental siswa selain memahatkan spirit untuk selalu mencoba, *struggle*, *survive*, dan kemampuan untuk senantiasa bertahan.

Daftar Pustaka

- Byers, W. (2007). *How Mathematicians Think: Using Ambiguity, Contradiction, and Paradox to Create Mathematics*. New Jersey: Princeton University Press.
- Polla, G. (2005). Peranan Guru dan Strategi Pembelajaran untuk Meningkatkan Efektifitas Kurikulum dalam Proses Belajar Mengajar. Dalam *Prosiding Konferensi Nasional Matematika XII*. Bali, 23-27 Juli 2004.
- Prabowo, A. (2010). JASMERAH (Jangan Sekali-Kali Melupakan Sejarah) Matematika. Prosiding pada Seminar Nasional Pendidikan Matematika LSM XVIII Himpunan Mahasiswa Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta, 17 April 2010.
- Sembiring, R.K. (2009). Memperkenalkan PMRI. [Online]. Tersedia: <http://www.ahmadrizali.com> [1 Mei 2009].
- Sukandi, U. (2007). Kurikulum Berbasis Kompetensi (Matematika). [Online]. Tersedia: www.docstoc.com/docs/18531893/Kurikulum-Berbasis-Kompetensi-Matematika [16 Desember 2009].